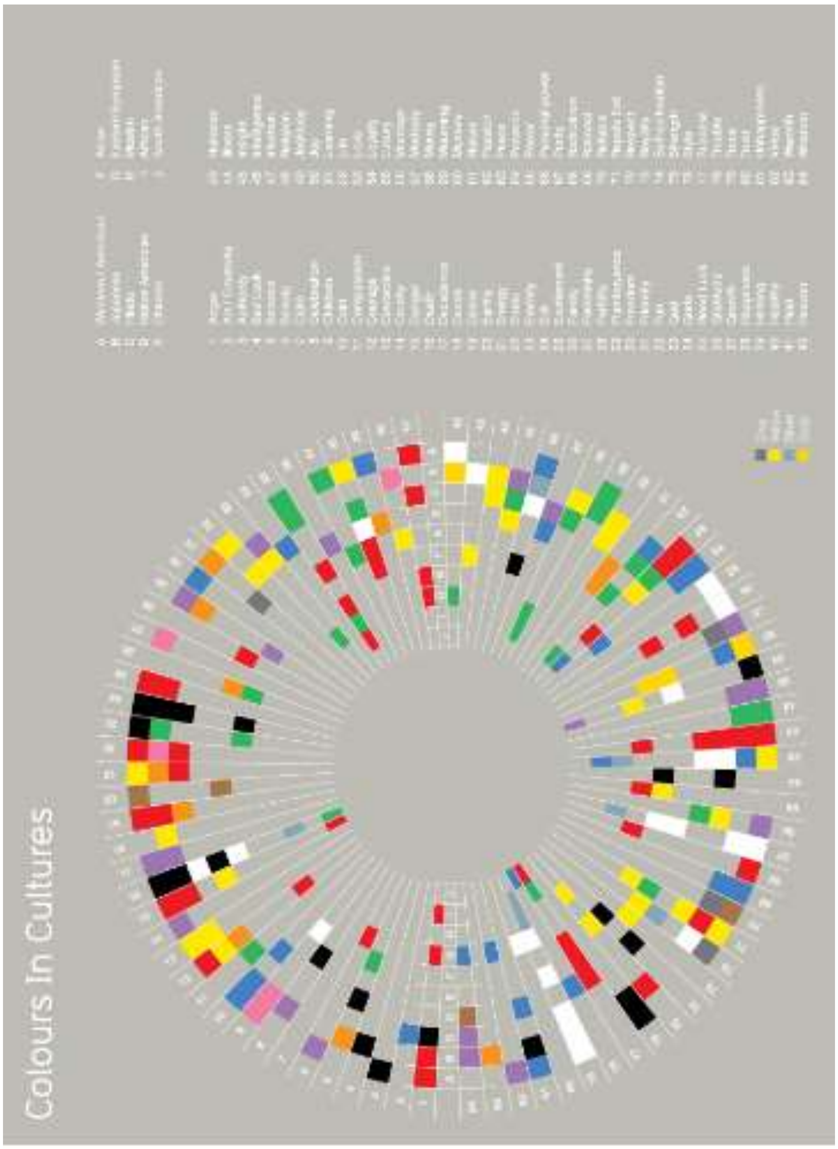
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 287 – Dicembre 2022 – Anno Ventiquattresimo



Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com
RM285 ha diffuso 3'366 copie e il 25/11/2022 per Google eravamo in 6'170 pagine.

Una delle esclamazioni preferite di uno di noi in gioventù era “Rosso di rabbia, nero di collera e verde di bile”. ***David McAndless*** ha esteso il concetto a quali connotazioni possano avere i diversi colori nelle diverse culture. Indipendentemente dall'associazione (e su alcune ci permettiamo di opinare), è interessante vedere quali connotazioni sono più rappresentate o, all'inverso, quale cultura sia più “colorata”.

1. Taccuino di viaggio - Masino

"È uno di quegli uomini rari, la cui fama non è proporzionata alla grandezza de' meriti e dell'ingegno. Imperocchè, salvo qualche erudito, chi è che conosca il suo nome e le sue opere? E pur egli, oltre che fece dono dell'Alfieri all'Italia, come il Gravina le acquistò il Metastasio, oltre che gittò presso di noi i fondamenti dell'erudizione orientale, si può considerare come il creatore della filologia e letteratura subalpina. Si dee perciò desiderare che gli eredi della scienza e del nome di un tant'uomo si mostrino riconoscenti alla sua memoria, dandoci una raccolta delle sue opere già stampate e delle manoscritte; alcune delle quali possono giovare anche oggi ai progressi, e tutte appartengono alla storia del sapere. Sarebbe questo un monumento onorevole al Piemonte, e atto a far ricredere coloro che accusano questa provincia di essere ingrata verso i suoi grandi vivi e morti, e si maravigliano che l'Alfieri e il Lagrangia non vi abbiano nemmeno un'iscrizione o una statua."

(Vincenzo Gioberti, "*Del primato morale e civile degli italiani*", 1843)

Che poi, a chiamarlo "viaggio" ci vuole davvero un coraggio. Il castello si staglia familiare nel panorama offerto dalla finestra della camera da letto; sta lì, come una sentinella di guardia che, instancabile, volge lo sguardo sulla Serra d'Ivrea e su tutto il circondario dell'anfiteatro morenico. Se lo vedo ogni mattina da un quarto di secolo, con quale ritegno posso osare chiamare "viaggio" il recarsi in un punto entro l'orizzonte del luogo dove vivo?

1 *Il castello di Masino (lato Ovest)*

Ma la parola "viaggio" è magica e vasta, e in grado di contenere meraviglie a prescindere dalla distanza. Si viaggia dentro un libro, si viaggia con la mente, figuriamoci se non c'è abbastanza spazio per fare incantevoli viaggi anche dentro l'orizzonte di casa. Anche perché se si decide di andarci, su quel basso colle dove si staglia il castello, l'orizzonte cresce subito a dismisura. Non si dominano solo, per intero, le vestigia di quello che fu un ciclopico ghiacciaio e poi un vastissimo lago in tempi preistorici, ma l'occhio è libero di correre inseguendo tutte le punte della corona alpina del Nordovest: nel tardo pomeriggio invernale, se l'aria è tersa, i colori caldi e freddi del cielo si mescolano per far risaltare al meglio il triangolo isoscele del Monviso, che si lascia vedere chiarissimo, anche se si staglia a cinquanta chilometri esatti in direzione sudovest. E prima ancora di quel monte che sembra quasi giocare a scimmiottare la montagna disegnata dai bambini, più nettamente verso il mezzogiorno le alture si ammorbidiscono e quasi scompaiono, e non è difficile immaginare, appena un po' a sinistra di quel monte, l'incontro tra le Alpi e gli Appennini, l'invisibile passo di Cadibona e, subito dietro, il mare. Ma è risalendo le cime verso destra che le Alpi annunciano la loro prepotente presenza: in colonna di marcia serrata verso settentrione sfilano tutte le Alpi Cozie e soprattutto le Graie trionfali, senza togliere comunque fascino ai primi contrafforti del vasto massiccio del Monte Rosa, che resta al limite nord dell'orizzonte, a nascondere il resto delle Alpi e a preannunciare l'ancora invisibile Valle Padana.

È alto appena quattrocento metri, questo colle del castello, e si staglia solo per centocinquanta metri sopra la pianura canavesana sottostante, ma sono centocinquanta metri che lasciano vedere un pezzo grande d'Italia e perfino qualche briciolo di Francia, perché laggiù, quasi attaccata alla Bessanese e all'Uja di Ciamarella, si vede la Punta di Charbonnel, che si alza tutta ben dietro la linea del confine francese. Le protagoniste del paesaggio, comunque, restano le montagne più vicine: certo, non si possono trascurare le Levanne e il loro guardiano supremo, quel Gran Paradiso che sembra controllarle dall'alto della sua gobba bitorzoluta: ma il Mombarone è più vicino e incombente, posto com'è a segnare l'inizio geografico della Val d'Aosta e – soprattutto – il suo ruolo di patrono di Ivrea dalla rosse torri, peraltro tutte perfettamente visibili e quasi tangibili appena lì, a nord-ovest. Ma non è neppure il Mombarone la stella del panorama, non può esserlo. Larga parte dell'orizzonte è presa dalla cresta che unisce due colli neppure particolarmente alti, la Quinseina e la Punta Verzel: perché quella cresta disegna il profilo di Eloise, la Bella Dormiente.

2 *Eloise, la Bella Dormiente*

C'è anche una leggenda, naturalmente: racconta di un mago immortale e malvagio, Nestorh, che angustiava le genti del Canavese, e che per fermare le sue crudeltà uomini e dei prescelsero la figlia di un contadino. Eloise era bella abbastanza da far innamorare perdutamente Nestorh, che rinuncia all'immortalità pur di poter salvarla quando l'amata si ammala gravemente. Per gli dèi era solo un trucco per indebolirlo e renderlo mortale, e quando se ne rese finalmente conto si infuriò, al punto che una notte prese la fanciulla addormentata e la posò sulle montagne, fissata in un sonno eterno, a monito della fragilità umana e della sua disperazione. Con o senza leggenda, quel profilo da bella addormentata domina il Canavese, ed è riconoscibile anche da lontanissimo: con la punta dei piedi un po' più in alto del volto, e soprattutto con i lunghi capelli sciolti fino a toccare la pianura, particolarmente evidenti quando arriva la prima timida neve, che si resiste solo nei canaloni, e sembra davvero una chioma che ne incornicia il volto.

I capelli non posso che immaginarli, in questo pomeriggio di fine estate, mentre Laura mi parla del progetto e Rudy fotografa le meridiane che decorano l'ala ovest del castello. Sono una lunga teoria di rettangoli un po' scoloriti, forse il rosa mattone che le colora oggi era un tempo di un carminio più acceso: ma sono tante, regolari e accostate, e solo guardando, più tardi, una foto presa da lontano mi accorgerò che sono anche un elemento decorativo coerente e possente della facciata, come una fascia rossa che circonda tutto il castello.

Mancano ancora molti giorni alla data per la quale siamo qua, ma questo è un sopralluogo necessario; tanto necessario quanto fruttuoso e, tutto sommato, imprevisto. Tutto nasce per colpa della generazione successiva alla nostra: figli e nipoti che frequentano la stessa, piccola scuola del paese dove vivo. Frequentano insieme cinque anni di scuola primaria, in una numerosissima – per gli standard di quel microscopico villaggio – classe di dodici scolaretti. Gli scolaretti crescono, ma come accade spesso non si perdono di vista, e così Laura, zia di Francesca, scopre che il papà di Paolo gioca con la matematica. Ne seguono telefonate e accordi, e finisce così che scopro che il FAI – Fondo per l'Ambiente Italiano, attuale proprietario e protettore del castello – annovera come bibliotecaria a Masino una signora con due passioni travolgenti: i libri e Tommaso Valperga di Caluso, colui che ha reso bello quell'antico castello e che ha riempito la sua biblioteca di buona parte dei venticinquemila libri che contiene. Se ne parlerà a Novembre, ci racconta Laura, si faranno incontri e rassegne: il tema saranno i libri, quei libri a lei così cari, ma i libri sono magici perché contengono di tutto, anche la magia stessa. E lei, che conosce così bene quei libri e colui che li portò nella sua biblioteca, sa bene che Tommaso Valperga di Caluso non era solo l'abate letterario amico di Vittorio Alfieri, non era solo il viaggiatore colto che stipava bauli di libri rari facendoli viaggiare da Lisbona a Torino, non era solo il maggior esperto di lingue orientali del suo tempo, ma era anche amante della scienza. Così, forse, nel celebrare lui e i suoi libri, forse potremmo contribuire alla rassegna "*Due Giorni per la Lettura*" anche noi, matematici di nome se non di fatto, per raccontare un po' quest'aspetto, che a lei resta oggettivamente un po' misterioso.

Noi, i matematici di nome se non di fatto, non abbiamo bisogno di consultarci. Siamo legati al Canavese a filo doppio se non triplo, con Rudy che ha ascendenze e conoscenze nella zona, oltre che il lavoro quotidiano; e io che ci vivo da quasi mezza vita. E il Canavese sta tutto qui, sotto i nostri occhi, lo vediamo per intero, figuriamoci se possiamo dire di no; anzi, siamo lusingati e persino un po' preoccupati, ché non vorremmo deludere le aspettative. Quest'incontro serve anche a questo, a cercare di capire come mettere un po' di matematica, quale matematica, dentro la chiacchierata che dovremo fare a novembre.

3 *Il Labirinto*

All'inizio, pensiamo subito al Labirinto: sta proprio qua, nel parco del Castello, uno dei labirinti botanici più grandi d'Italia, secondo solo a quello del Masone, vicino Parma. I labirinti sono uno dei giochi matematici più affascinanti e facili da raccontare, anche senza indulgere troppo sui giochi di parole scontati tra Masone e Masino, nomi perfettissimi per delle attrazioni che gli anglofoni chiamano "*maze*". Ma ci ripensiamo in fretta, perché il labirinto è stato a lungo dimenticato, prima del recente restauro; per tanto tempo era stato trasformato in maneggio, e probabilmente non esisteva ai tempi di Tommaso. E comunque non è adatto (quantomeno non perfettamente adatto) al tema proposto.

Ma non ci sono troppi rimpianti: Rudy adora le meridiane e la gnomonica fin da quando non fumava ancora la pipa – che è tutto dire – e il Castello gliene offre un numero esagerato, eccessivo anche per un parco a tema. E la gnomonica è matematica applicata all'astronomia e alla vita quotidiana fin dalla notte dei tempi, cosa si può volere di più? Il problema, già lo si capisce, sarà quello della mancanza di tempo, che se fosse per lui potrebbe parlare di meridiane per mezza giornata, e senza bisogno di pause. Per me, invece, resta questo attraente mistero della figura stessa dell'abate Tommaso Valperga di Caluso, che conosco poco, quasi niente, se si esclude una macroscopica e colpevole eccezione. E allora potrei indagare un po' su di lui, provare a conoscerlo meglio – del resto, Laura sembra pronta a raccontare di lui per la mezza giornata lasciata libera dal Clerico – e, visto che le meridiane misurano il tempo, parlare del tempo della sua vita e della sua epoca. Così, anche il titolo della conferenza viene facile, con l'abituale, inevitabile doppia lettura: "*Il tempo al tempo dell'Abate*".

La "colpevole eccezione" è però davvero grossa, e indubbiamente davvero colpevole. La ragione ultima e definitiva per cui sono piemontese d'adozione e ho passato tre quarti della mia vita in Piemonte sta tutta nella giovanile decisione di iscrivermi alla Facoltà di Fisica, e di farlo a Torino. Non è insomma un'esagerazione affermare che il primo edificio torinese che ho imparato a conoscere bene è il palazzo della facoltà di Fisica dell'Università di Torino. È una bella palazzina ottocentesca, fa parte del cosiddetto "Polo Museale" dell'Università, insieme alle sedi di Chimica e ai diversi istituti di Medicina. Si trova proprio di fronte al Valentino, con la facciata storica che dà su corso Massimo d'Azeglio. Tutta la zona ha vie che sono dedicate a grandi personaggi piemontesi – come lo stesso D'Azeglio, ovviamente – che spesso erano anche componenti della nobiltà sabauda, e quindi sono ricordati più con il nome del territorio che governavano che con il cognome di famiglia, anche perché quasi sempre, proprio a causa dei quarti di nobiltà, le due cose coincidevano. Se la facciata è su uno dei corsi più noti di Torino, resta il fatto che ogni palazzo che si rispetti, specie in una città dalle vie ordinatamente a reticolo come la capitale sabauda, abbisogni di quattro strade per definire compiutamente l'isolato. Ebbene, una di queste vie, forse la più frequentata, se si esclude il gran corso D'Azeglio, è proprio via Valperga Caluso, che pertanto diventa subito un nome di via stranoto a tutti gli studenti di Fisica, anche a quelli – com'era il sottoscritto all'epoca – che venivano a studiare a Torino da altre regioni d'Italia.

4 *Angolo nord-est dell'Istituto di Fisica di Torino.*

Ma un nome può essere noto anche senza essere realmente conosciuto. Anche perché sia Valperga che Caluso sono due ridenti cittadine del Canavese, e quindi nelle teste degli studenti non autoctoni si ripeteva il solito dubbio che li tormentava da liceali, soprattutto quando studiavano il Risorgimento: "Azeglio[1]" è un cognome o un paese? "Cavour" è una contea o il cognome di "Camillo Benso (conte di Cavour)"? E che fare adesso di questo "Valperga Caluso" che di cognomi e nomi di paesi ne ha addirittura due? Oddio, in realtà che si trattasse del cognome di una persona e non di una tratta di autobus extraurbano veniva chiarito dalla targa: sotto al nome ci sono due date, 1737 e 1815, e che si trattassero di date di nascita e morte ci arrivavano persino gli studenti fuori sede come me. In ogni caso – e qui devo confessare la mia ignoranza – non è che il nome mi dicesse granché. Anche la targa della via, del resto, non aiutava troppo: d'accordo, si trattava di una persona vissuta tra Settecento e Ottocento, ma cosa ha fatto per meritarsi una via? Era forse una signora con l'insolito nome di battesimo "Valperga"? Per fortuna Torino è una città assai diligente, che ripete i nomi delle vie ad ogni incrocio, e sono poche le città che lo fanno. Bastava camminare per pochi metri, e all'incrocio con via Madama Cristina si poteva avere qualche dettaglio in più: due aggettivi, per la precisione, separati da un trattino: "Matematico-Letterato".

È insolito trovare nomi di personaggi illustri che si meritino entrambi gli epiteti in una singola, laconica targa commemorativa. Cosa avrà mai fatto questo sconosciuto (quantomeno, che si tratti di un uomo possiamo dedurlo dal fatto che la targa recita "matematico-letterato" e non "matematica-letterata") per costringere gli scalpellini a incidere entrambi gli aggettivi? Il mistero è durato a lungo, perché le domande che si fanno gli studenti poco diligenti vengono dimenticate in fretta, ma se si prova ad informarsi un po' su questo misterioso binomio "Valperga-Caluso" si scoprono un sacco di cose interessanti, anzi: stupefacenti.

[1] A beneficio dei lettori non ferrati in geografia: sì, anche Azeglio è un paese. Non è lontano da Valperga e ancor meno da Caluso e, a dirla tutta, è vicinissimo proprio al Castello di Masino.

5 *Tommaso Valperga di Caluso*

Tanto per cominciare, che è il cognome di una casata che si fa tradizionalmente risalire fino al primo millennio, ad Arduino d'Ivrea, che molti considerano il primo "Re d'Italia". Poi, che la denominazione corretta del cognome di colui che si è meritato una via del centro di Torino è "Valperga ***di*** Caluso", anche se agli studenti di Fisica quella "di" in mezzo suona strana, ormai viziati dall'abitudine come sono. Poi, che le due definizioni "Matematico-Letterato", anziché eccessive, sono riduttive: Tommaso Valperga di Caluso si meriterebbe almeno altre tre o quattro denominazioni, per dare al lettore una pallida idea di chi fosse. Poi, che la nostra ignoranza era certo riprovevole, ma almeno in parte giustificata: è sorprendente che Tommaso Valperga di Caluso non abbia una fama più popolare di quella che effettivamente gli rimane addosso ai nostri giorni; ma, del resto, di questo si lamentava già ai suoi tempi Vincenzo Gioberti, come mostra il passo della sua opera più famosa riportato in apertura a questo articolo. Infine e soprattutto, che era il padrone di casa di questa meraviglia paesaggistica e architettonica che ci ospita oggi, nel fatidico giorno di novembre in cui ci prepariamo a tenere la nostra breve conferenza.

Nonostante il mese, così predisposto a regalare solitamente nebbie e cieli grigi, la giornata è luminosa, fredda e splendida. I visitatori si inerpicano su per i brevi tratti ghiaiosi che portano al castello, scattano foto, entrano ad ammirare gli interni perfettamente conservati e forse anche quelli dei 25,000 libri che sono visibili al pubblico.

6 *La conferenza*

Appena fuori dalla cancellata, dove un tempo stavano le scuderie, c'è l'ampia sala per le conferenze, e due sedie vicine ad un tavolino che ospita cartellini con i nostri nomi sono già ben visibili. Avremo una diretta radiofonica su una radio[2] di Ivrea, una signora che traduce le nostre sciocchezze verbali nella lingua dei segni, e qualche incontro con vecchi amici. Il tecnico che cura gli aspetti tecnologici della conferenza e della trasmissione radiofonica, ad esempio, che Rudy riconosce e saluta; o Annalisa, che – seppure mai incontrata prima dal vivo – è amica di lunga data per via telematica e comunanza di interessi. Sarà bello poterla salutare, anche se lei, spietata, non ci risparmierà la sofferenza di fotografarci.

A Rudy spetterà la parte veramente matematica e scientifica, come sempre. Racconterà tutte le meridiane, giocherà perfino con la sfera armillare, purtroppo solo disegnata e non tridimensionale, che le accompagna sulla lunga parete ovest del castello, e non dimenticherà neppure di mostrare quelle più misteriose negli altri luoghi, diversi dall'ala occidentale. Si parlerà di ore italiche e ore francesi, ore babilonesi e ore antiche, e si vedranno gli scopi – se non direttamente le intenzioni – di tutte le meridiane del castello. A fargli da controcanto, sarò lì per spiegare perché la già

[2] La radio in questione è Radio Spazio Ivrea, ascoltabile via web, che ha seguito tutte le conferenze della manifestazione e ne ha ricavati altrettanti podcast e qualche breve intervista. Si possono trovare seguendo questo link: https://tinyurl.com/msusd876

raccontata etichetta di "Matematico-Letterato" è una descrizione davvero riduttiva dell'Abate che possedeva questa casa, è perché Valperga di Caluso era un personaggio davvero eclettico, poliedrico, e perché eccelleva in tutti i campi che lo appassionavano.

7 *Ritratto di sfera armillare*

Come molti nobili non primogeniti (era il settimo figlio), inizialmente intraprende la carriera militare, scegliendo la marina, cosa che lo porta prima a Malta e poi a Napoli. Poi ritorna in Piemonte: ma continua a viaggiare, per ragioni diplomatiche, e sosta a lungo a Lisbona, dove conosce e diventa amico di Vittorio Alfieri. Torna a Torino, che è la città dove nasce e muore, e resta per tutta la vita un vero faro culturale del suo tempo: matematico certo lo era, come mostrano i suoi scritti; probabilmente il più grande del regno piemontese, se si eccettua Lagrange. Ma Lagrange non conta, perché a quei tempi era un piemontese che poteva competere agevolmente al campionato del Miglior Matematico del Pianeta, se un campionato del genere ci fosse stato.

8 *Una lista autografa degli scritti scientifici di Valperga di Caluso.*

Come filosofo e uomo di lettere è celebrato non solo dall'amico Alfieri, ma da quasi tutte le accademie europee; come scienziato è tra i fondatori e poi "segretario perpetuo" dell'Accademia delle Scienze di Torino, ma allo stesso tempo è considerato tra i più grandi orientalisti italiani e miglior traduttore dall'ebraico; è nominato responsabile della specola, il reale osservatorio dello stato, al punto che molte enciclopedie preferiscono ricordarlo proprio come "astronomo", più che come "matematico" o "letterato"[3].

Un uomo così dotto non poteva restare insensibile a uno dei più grandi problemi che hanno acceso la curiosità di tutte le grandi menti della storia, fossero di scienziati, poeti, o filosofi: la natura del tempo. E forse proprio a questa sua curiosità da dotto, e soprattutto da astronomo, che trovano ragione d'essere molte meridiane che istoriano senza soluzione di continuità le pareti del lato migliore del castello.

Forse la cosa più significativa è che Tommaso Valperga di Caluso era davvero matematico, e la matematica qualche volta diventa anche una scelta di campo. Che fosse davvero un grande matematico non ce lo dice solo la targa della via di Torino, ma i suoi molti scritti sul tema. In un sommario conservato proprio a Masino che elenca parte dei suoi lavori scientifici si trovano la misura delle montagne con il barometro, la geometria proiettiva, l'orbita del pianeta scoperto da Herschel, cioè Urano; la Trigonometria razionale; il calcolo dell'integrale dell'inverso del logaritmo.

La sua opera matematica più corposa occupa più di cento pagine, e sembra lecito considerarla quella a cui l'Abate stesso tenesse di più: "*Sulle diverse maniere di trattare certe parti della matematica che alcuni chiamano Calcolo Differenziale, e gli altri metodi delle Flussioni*". Il "metodo delle Flussioni" è come Newton chiamava il calcolo differenziale

[3] A proposito di enciclopedie: è assai curioso che la voce a lui dedicata dalla Wikipedia francese sia molto, molto più ricca di quella che gli riserva la Wikipedia italiana.

e integrale, la cui scoperta condivide con Gottfried Leibnitz: è forse la disputa sulla priorità più celebre della matematica, se non di tutta la scienza. Del resto, è con il calcolo che la scienza propriamente detta inizia davvero il suo viaggio, ed è significativo che, in pratica, sia stato necessario "inventare" apposta una nuova matematica per far fare un salto nella conoscenza.

Tommaso Valperga di Caluso è un newtoniano di ferro; la sua principale opera matematica è una difesa del metodo di Newton rispetto a quello di Leibnitz. Forse può essere indicativo del fatto che a Valperga Caluso piaceva molto la visione di Newton, l'idea del tempo assoluto (Newton inventa persino una notazione specifica per le derivate rispetto al tempo) e la visione di un perfettissimo universo a orologeria, che riproducesse nella sua meccanica immutabile la solida perfezione della divinità. Del resto, Newton era assai religioso, e Valperga di Caluso, da abate, non gli era certo da meno: nella immutabile regolarità dello scorrere del tempo, nella sua assolutezza che si faceva beffe dei molti nomi che gli esseri umani riservavano al modo di misurarlo, forse sia Isaac Newton che Tommaso Valperga di Caluso ci vedevano la firma del Creatore.

Noi, assai più prosaicamente, abbiamo letto nel tempo fermato negli atti anagrafici la sua data di nascita, e leggendo il giorno corrispondente al 20 Dicembre 1737, ci siamo rallegrati di potergli almeno regalargli questo compleanno.

2. Problemi

2.1 Non è "Uno di quelli"

Dove "quelli" sono quei problemi che vi fregano e la risposta, se non fosse per le limitazioni del cervello umano, sarebbe evidente; uno lo conoscete di sicuro: durante l'esposizione del problema vengono citate una miriade di caratteristiche della vostra nave, tra le quali il luogo di partenza, quello di arrivo, il cabotaggio, il numero di membri dell'equipaggio, il numero di passeggeri, l'ora alla quale effettuiamo l'osservazione e poi arriva la domanda finale: "Quanti anni ha il comandante?" Con tutti quei numeri vi siete un attimo persi e vi siete, molto probabilmente, dimenticati che all'inizio vi avevano detto che quella è la "vostra" nave. Problemi di questo genere di solito smettono di piacere verso i "pochi" anni d'età, ma resta comunque il fascino della recitazione di una serie di dati con una domanda finale totalmente inaspettata che sembra completamente slegata dai dati forniti.

Se conoscete problemi di questo genere, siete gentilmente pregati di comunicarceli; li pubblicheremo qui riconoscendovene la paternità (così gli altri lettori picchiano voi).

Tutto questo pistolotto iniziale per dirvi che ne abbiamo trovato uno.

Forse ve l'abbiamo già detto, ma lo ripetiamo: Doc è, da qualche tempo, il fiero e felice possessore di una mitica Ape Verde (quelle della Piaggio, con il piano di carico scoperto dietro: non cominciate a pensare all'imenottero unicalcaride), che Rudy ha immediatamente soprannominato "Dissuasore del Traffico" (e se ne avete mai incontrata una per strada, sapete che cosa intende); comunque, svolge degnamente il suo lavoro di trasporto di Doc (e materiali vari) da A a B e viceversa. Forse in tempi più vicini al geologico che al cronometrico, ma non si può avere tutto, dalla vita.

Tempo fa, si è verificata una curiosa coincidenza: Doc e il DdT si trovavano in A, intenzionati a recarsi in B, mentre Rudy e QuasPa[4] erano in B e intendevano recarsi in A; tutti quanti partivano dai rispettivi luoghi all'alba e procedevano a velocità costante lungo la medesima strada verso la loro destinazione. A mezzogiorno si incrociano e, senza rallentare, con un rapido lampeggio si salutano e procedono ognuno per la sua via (qui ci starebbe bene un qualche *rant* sulla decadenza dei rapporti umani in un'era iperconnessa, ma lasciamo perdere); Rudy arriva nel punto B alle quattro del pomeriggio, mente Doc (eh, DdT non è propriamente una scheggia...) arriva nel punto A alle nove di sera.

A che ora è sorto il Sole?

2.2 Doc ha perso la pazienza...

...e quindi, da un po' si rifiuta di fare da cavia ai giochi inventati da Rudy. Il quale deve quindi accontentarsi di inventare dei solitari.

L'ultimo che si è inventato lo sta lasciando però piuttosto perplesso, e vorrebbe conferma di una sua teoria (che non è "sì, sei un inetto").

Per giocare il gioco dovete, per prima cosa, definire un numero $N \geq 3$, e quindi procurarvi una scacchiera $1 \times (2N+1)$, con le caselle numerate $-N, \ldots, 0, \ldots, N$; all'inizio del gioco ponete N monete sulla casella indicata dallo zero. Ad ogni mossa, potete scegliere una qualsiasi casella contenente almeno tre monete e spostare due di queste di una casella verso destra e una di una casella verso sinistra. Scopo del gioco è ottenere una serie di $N-2$ caselle contigue contenenti una e una sola moneta, mentre la casella immediatamente successiva (sulla destra) a questa serie contiene le altre due monete.

Rudy si è accorto che ogni tanto riesce anche a vincere, ma gli N per cui riesce a vincere hanno l'aria un po' strana... Non volendo darvi del *bias*, non vi dice che aria hanno, ma si pone (anzi, le pone a voi) alcune domande: Per che valori di N si può vincere? Per quei valori di N, "si può" o "si deve" vincere? O sarebbe possibile giocare la versione *misère*, perdendo anche per quei particolari N? E, sempre per quei valori di N, quale casella contiene due monete alla fine del gioco?

[4] Sarebbe la sua macchina, e qui il nome lo ha trovato Doc: la targa, infatti, è QUASi PAlindroma.

3. Bungee Jumpers

Con riferimento al Q&D pubblicato (con soluzione) nel numero scorso…

3.1 Prima parte

In quanti modi un ottagono convesso può essere diviso in triangoli (triangolato) da sue diagonali non intersecantesi all'interno dell'ottagono?

3.2 Seconda parte

In quanti modi un n-agono convesso può essere triangolato da sue diagonali non intersecantesi all'interno dell'ottagono? [Questo è noto come "Problema di Eulero"]

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Dicembre!

Siamo in ritardo e non abbiamo ancora finito di impacchettare la nostra strenna natalizia (lo sapete benissimo, il calendario… il ventitreesimo della serie), per cui cercheremo di limitare al minimo i nostri interventi e passarvi tutte le soluzioni che sono arrivate.

4.1 [285]

4.1.1 Supertask, ma noi ci fermiamo prima (voi, no)

Ancora un contributo su questo problema di ottobre:

> *Abbiamo un segmento, e ai suoi estremi scriviamo il numero 1. Nel mezzo, scriviamo il numero somma dei due numeri più vicini, quindi il numero 2; questo divide il nostro segmento in due segmenti, e quindi facciamo la stessa operazione, inserendo il numero 3 sia tra 1 e 2 che tra 2 e 1; definiamo queste due operazioni "passi": un "passo" è, data la nostra linea, mettere tutti i numeri necessari, ognuno a metà di un intervallo. E avanti in questo modo. Dopo il 1991-esimo passo, quante volte scrivete il numero 1991? Esiste un metodo per calcolare quante volte compare n dopo l'n-esimo passo?*

Il mese scorso abbiamo pubblicato le soluzioni di ***Valter***, ***Luigi*** e ***Galluto***. Poco dopo aver pubblicato lo scorso numero è ancora arrivata la soluzione di ***trentatre***:

> Le sequenze generate ad ogni passo sono simmetriche, con 2 come elemento centrale.
>
> In figura una tabella con la parte destra delle sequenze che inizia da 2.; l'indice di riga n corrisponde ai "passi" del problema.

n\k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	2	1																					
2	2	3	1																				
3	2	5	3	4	1																		
4	2	7	5	8	3	7	4	5	1														
5	2	9	7	12	5	13	8	11	3	10	7	11	4	9	5	6	1						
6	2	11	9	16	7	19	12	17	5	18	13	21	8	19	11	14	3	13	10	17	7	18	11
A 7	2	13	11	20	9	25	16	23	7	26	19	31	12	29	17	22	5	23	18	31	13	34	21

> Indico con
>
> $A_{n,k}$ il valore in riga n e colonna k
>
> $(a,b,c,...)_n$ una serie di valori contigui nella riga n
>
> nero : valori k dispari <u>copiati dalla riga precedente</u>
>
> rosso : valori k pari <u>creati nella stessa riga</u> sommando i due adiacenti.
>
> Valgono le
>
> - ogni valore rosso $m = A_{n,2k} > 2$ è <u>maggiore di n</u> e creato con
>
> $$[1] \quad (a,b)_{n-1} \rightarrow (a,m,b)_n, \quad m = a + b$$
>
> - m è poi copiato (in nero) in tutte le righe $> n$

- i valori $(m)_n = n$ richiesti dal problema sono neri e non ci sono m rossi nelle righe $> n$

□ $(m)_n$ non è rosso perché sarebbe maggiore di n

□ ogni $(m)_n$ rosso deriva da $(2,1)_1$ in un numero di passi $\leq n < m$

- in ogni coppia $(a,b)_n$ <u>a e b sono coprimi</u>

□ in [1] se a,b coprimi allora $m = a + b$ è coprimo con a e con b e questo vale per la coppia iniziale $(2,1)_1$

- quindi nella riga n ci sono tutti i valori uguali a n generati da $n = a + b$ con a, b : coprimi; p.es. $n = 5$, $(a,b) = (1,4),(2,3)$ n° casi $= 2$

- come si vede nella figura, ma i casi vanno raddoppiati perché manca metà delle sequenze; calcolando il n° completo di casi per i primi valori si ha

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n°casi	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10

- la sequenza è presente in *OEIS* - *A*000010 come "funzione toziente di Euler $\phi(n)$ che conta i numeri $\leq n$ primi con n"

- la formula standard di calcolo è

$\phi(n) = n \cdot \prod_i (1 - 1/p_i)$ estesa ai primi p_i che fattorizzano n

- che si può calcolare da $1991 = 11 \cdot 181$; ma *OEIS* include una lista dei valori fino a $n = 100.000$ da cui la soluzione

$$\phi(1991) = \mathbf{1800}.$$

Meglio che usare un foglio excel per il calcolo, è senz'altro affidare la cosa all'OEIS. Andiamo avanti!

4.2 [286]

4.2.1 Qualcosa a proposito...

…di alberi genealogici russi, ovviamente:

> *Se seguiamo il ramo maschile della famiglia Krylov, vediamo che ogni padre ha due figli, il patriarca della famiglia ha quattro nipoti, e ognuno dei suoi figli ha due nipoti. Rimettete in ordine: A. N. Krylov, K. T. Krylov, N. K. Krylov, B. M. Krylov, M. M. Krylov, N. T. Krylov, G. K. Krylov, M. N. Krylov, T. M. Krylov, K. M. Krylov, N. M. Krylov.*

Cominciamo subito con ***Valter***, che ancora una volta è riuscito ad inviare una soluzione prima che noi si inviasse la newsletter di lancio di RM286:

> Può essere:

```
                N.K.
           K.T.
                G.K.
      T.M.
           N.T.
M.M.
            A.N.
      N.M.
                 B.M.
            M.N.
                 K.M.=
```

Soluzione breve, nevvero? ***Luigi*** ci scrive:

Partiamo dall'individuare il capostipite.

Per individuare il capostipite dobbiamo analizzare il patronimico. Infatti i patronimici sono presenti a coppie (ogni padre ha 2 figli) eccetto quello del capostipite. l'unico patronimico disparo è M, quindi sarà questo quello del capostipite.

B. M. non può essere il capostipite perché B non ha figli

N. M. non può essere il capostipite perché A. N. (suo figlio) non ha figli (il capostipite ha 4 nipoti)

K. M. non può essere il capostipite perché G. K. (suo figlio) non ha figli

T. M. non può essere il capostipite perché solo il nipote M. N. potrebbe avere una coppia di fratelli M (G. K., N. K. e A. N. non possono essere padri della coppia di fratelli M rimasta)

per cui il capostipite è M. M.

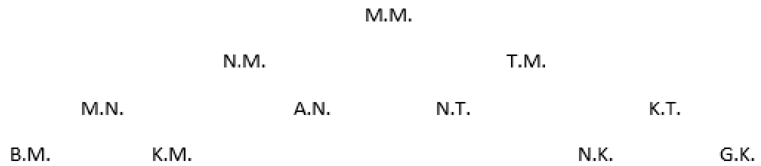
Escluso M. M. notiamo che per le due coppie di fratelli con patronimico M. ci sono solo due possibili padri (M. M. ed M. N.) quindi il padre di M. N., sarà necessariamente uno dei figli di M.M.

Quindi tra i possibili padri dei fratelli N, e cioè N. M. e N. K. dobbiamo scegliere N.M.

L'altro fratello di N. M., escluso B. M. che non ha figli (ricordiamo che il patriarca ha 4 nipoti) si deve cercare tra T. M. e K. M. Al proposito notiamo che mentre un figlio di T. M. e cioè K. T. può essere padre dei fratelli K: N. K. e G. K. questi ultimi (eventuali figli di K. M.) non potranno essere padri dei fratelli T.

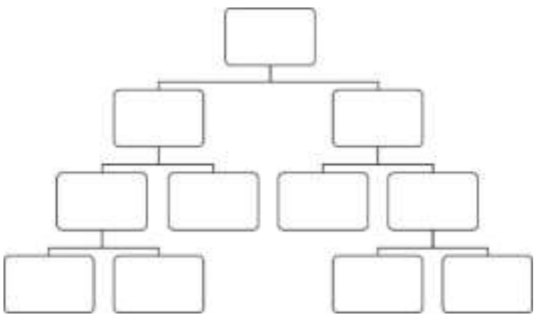
Quindi il secondo figlio di M. M. sarà T. M.

Il quadro completo sarà:



Ci divertiamo a notare gli alberi genealogici con diverso orientamento. La prossima è di ***Galluto***:

Viste le premesse, la struttura dell"albero genealogico deve essere la seguente:

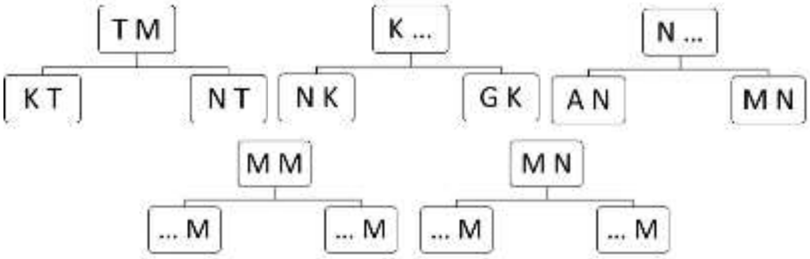


Con 5 padri e 6 "non padri"

Se guardo i patronimici, ho 2 K, 2 T, 2 N e 5 M;

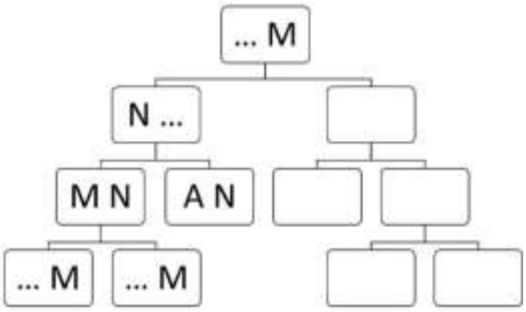
- i 5 padri, quindi, devono essere quelli con i seguenti nomi: l'unico T, i 2 M, uno dei due K ed uno dei tre N
- i 6 "non padri" sono quelli con i nomi A, B, G (e infatti non ci sono questi patronimici), l'altro K e gli altri due N

e posso cominciare a costruire le strutture dei 5 padri:



il quinto patronimico M deve essere quello del capostipite, che ovviamente è anche uno dei padri: posso escludere che sia K.M. perché avrebbe come figlio G.K. che non è un padre, e per lo stesso motivo posso escludere che sia N.M., perché avrebbe come figlio A.N.; rimangono quindi due possibilità: M.M. e T.M.

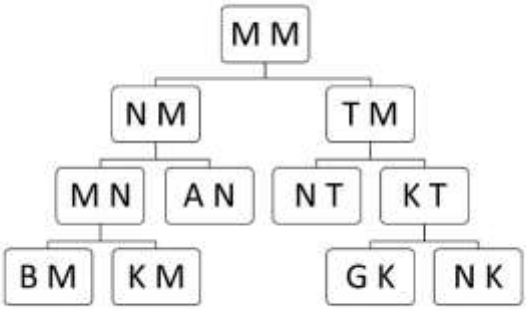
adesso mi dedico a M.N. che è sia un padre che un figlio; non può essere uno della seconda generazione, perché abbiamo appena visto che il capostipite non si chiama N e quindi deve essere per forza uno della terza generazione, e suo padre N. … è uno dei figli del capostipite



torno alle due alternative per il capostipite: se fosse T. M. i figli sarebbero N. T. sul ramo di sinistra (quello già mezzo pieno) e K. T. su quello di destra; ma i figli di K. T. sarebbero G.K. e N.K. e nessuno dei due può essere un padre: G. K. perché non ci sono patronimici G, come abbiamo visto prima, e N. K. perché c'è un solo padre di nome N e sarebbe già individuato, appunto, in N.T.

Quindi il capostipite è M.M.; resta da capire quale dei … M. è il suo figlio "di destra" (senza considerazioni politiche!): non può essere B.M. perché non è un padre e non può essere neanche K. M., perché ci ritroveremmo nella situazione precedente: i suoi figli sarebbero G. K. e N. K. e nessuno potrebbe a sua volta essere padre.

Perciò, il secondo figlio del capostipite è T. M. e a questo punto è facile riempire tutto l'albero:



E con questo è tutto per questo problema, procediamo.

4.2.2 … ma che combinazione!

Per il secondo problema, occorreva aprire una valigia:

> *Avete una valigetta con una combinazione a sette cifre, con le cifre che possono andare da zero a nove; quello che sapete è che le cifre della combinazione sono tutte diverse; dovete inserire sempre sette cifre diverse, ed è sufficiente che una cifra sia nella posizione esatta per aprire la valigetta. Sapendo che, per quanto pianifichiate, la valigetta si aprirà solo all'ultimo tentativo, quanti tentativi vi sono necessari, per aprire la valigetta?*

Per cambiare partiamo con ***Valter***:

> Propongo questi sette tentativi:
>
> - 0123456
> - 1234560
> - 2345601
> - 3456012
> - 4560123
> - 5601234
> - 6012345
>
> Male che mi vada al settimo almeno quattro cifre sono nella posizione esatta. Di meglio non saprei fare.

Velocissimo anche ***Galluto***:

> Uso solo 7 cifre, ad esempio quelle da 0 a 6 e le provo ciclicamente in tutte le posizioni (012356, 1234560, …); dato che sono sfortunato i primi 6 tentativi non danno risultato, ma al settimo almeno quattro delle sette cifre stanno necessariamente al posto giusto.

Continuiamo con la soluzione di ***Giorgio***, che ci scrive per la prima volta. Benvenuto tra i solutori! Ecco il suo contributo:

> Il ragionamento parte dal fatto che, se in qualche modo si venisse a conoscenza che una certa cifra, per esempio l'1, compare da qualche parte nella combinazione, si può aprire la valigetta in 7 tentativi: si sottopone al lucchetto la suddetta cifra nella prima posizione, poi nella seconda, poi nella terza e così via fino alla settima che è l'ultima possibile. Ora, poiché per ogni tentativo si possono sottoporre sette cifre contemporaneamente, posso partire con i numeri 1-2-3-4-5-6-7 e poi "shiftare" a destra di una casella tutte le cifre (quindi per esempio il secondo tentativo sarebbe 7-1-2-3-4-5-6) fino a ritornare alla combinazione di partenza. La combinazione è scelta tra 10 cifre, dunque almeno una di queste è presente in {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} ; inoltre durante i vari passaggi a ognuna di queste cifre capita di trovarsi in ogni possibile posizione. In 7 tentativi riesco quindi a far corrispondere almeno una cifra della combinazione segreta con una di quelle che gli ho sottoposto e, se tutto va bene, aprire la valigetta. D'altronde, se provo a fare meno di 7 passaggi non posso garantire la vittoria, perché nessuna delle cifre esaurirebbe le possibili posizioni in cui stare e, dunque, sarebbe possibile costruire una combinazione che elude i miei precedenti tentativi. 7 è un numero sicuramente ben al di sotto delle mie più ottimistiche aspettative e, preso dall'euforia, ho provato a generalizzare il risultato.
>
> Se si possono scegliere altri numeri da inserire allora in maniera analoga si può dimostrare, credo, che il numero di tentativi cresce in corrispondenza dei multipli di 7 che "stanno" dentro alla quantità di questi numeri: cioè se in ogni casella posso mettere un numero compreso tra 1 e 19, allora mi ci vorrebbero 7 * 2 = 14 tentativi, perché solo scegliendo da un pool di 14 possibili cifre posso garantire di centrarne una della combinazione. Se invece aumentassi il numero possibile di caselle a *n* ogni cifra dovrebbe compiere un percorso non più di 7 ma di *n* passi e i tentativi aumentano in corrispondenza. Anche ammettere possibili ripetizioni non dovrebbe creare troppi problemi a mio parere. In questo caso l'unica cosa che non sarebbe garantita nel setup di partenza è che almeno una cifra della mia combinazione cada in {1, ..., 7}; dovrebbero bastare 7 tentativi in più per l'8, il 9 e lo 0 però per risolvere

> il problema. Togliere però la proprietà che la valigia si apre se anche solo una cifra corrisponde credo sia un po' troppo e non vedo altre strade oltre alla brute force.

Per il momento ci sembra che tutti concordino su sette prove, che è un bel numero. Ma un momento, ***Luigi*** la pensa diversamente:

> Se non ho interpretato male il funzionamento della serratura la valigetta si dovrebbe aprire al massimo con 10 tentativi.
>
> Si potrebbe partire con la sequenza 0123456 e proseguire con 1234567 e così aumentando di un unità ogni cifra fino a 9012345
>
> In questo modo si inserirebbero sempre sette cifre diverse e in tutte e sette le posizioni verrebbero provate tutte le cifre da 0 a 9

Decidete voi. Passiamo all'ultimo problema.

4.2.3 Società (molto poco) sportiva

Dopo aver aperto la valigia, i nostri lettori sono chiamati ad aprire degli armadietti. Il Capo non sa più come fare a farvi giocare con le combinazioni:

> *La società sportiva della quale voi e altre novantanove persone fate parte ha appena cambiato tutti gli armadietti. Il Presidente della società ha preso tutti e cento i tagliandini con i vostri nomi e li ha messi uno dentro ogni armadietto, senza alcun ordine prestabilito. Dopo mezz'oretta per pensare ad una strategia, uno per volta entrerete nello spogliatoio e sarete autorizzati ad aprire cinquanta (la metà) armadietti: se in uno dei cinquanta trovate il vostro nome, vi verrà garantito un accesso vitalizio alle strutture; altrimenti verrete cacciati. Basta che uno di voi non trovi il proprio nome che verrete cacciati tutti. Quale strategia adottate?*

La soluzione iniziale, come abitudine, è di ***Valter***:

> Farei così:
>
> - i soci si accordano come assegnare ai nomi una numerazione da uno a cento
> - decidono, inoltre, come numerare gli armadietti partendo da uno sino a cento
> - inizia il socio che ha il numero uno e, a seguire, gli altri, in ordine crescente
> - ognuno parte aprendo l'armadietto con il numero corrispondente al suo nome
> - legge il nome sul tagliandino e quindi apre l'armadietto con lo stesso numero
> - prima toglie il tagliandino dall'armadietto che momentaneamente resta vuoto
> - prosegue in questo modo, sino ad aprire tutti i cinquanta, di cui è autorizzato
> - ogni volta sposta il tagliandino nell'armadietto con stesso numero del nome
> - se incappa in un armadietto con stesso numero del nome apre il seguente
> - se si trova all'armadietto cento, ripartendo dall'uno, apre il primo che è chiuso
> - al termine il tagliandino dell'ultimo armadietto lo mette in quello rimasto vuoto
> - il tagliandino col suo nome alla fine si trova nell'armadietto con stesso numero
> - partendo dal nome/armadietto uno, quindi, man mano si sistemano al loro posto
> - il primo socio, in questo modo, inoltre, mette al loro posto, cinquanta tagliandini
> - i soci possono così iniziare dall'armadietto con lo stesso numero del loro nome
> - ho scritto un programma, che allego, per verificare la strategia e mi pare funzioni
> - se non ho sbagliato qualcosa, il che è facile, mi pare si arrivi mediamente al 40% .

Non male (sì, il programma lo abbiamo ricevuto e ce lo siamo tenuto), ma ***Salvatore*** arriva al 50%:

> La soluzione è valida solo nell'ipotesi in cui ciascun socio, come si dichiara nel testo, può aprire sempre 50 armadietti, a prescindere dal fatto che abbia già trovato il tagliandino con il proprio nome, magari nel primo armadietto che ha aperto. Di seguito i passaggi della strategia da applicare:

1. Prima che il primo socio entri, si assegna a ciascuno dei 100 soci un numero da 1 a 100 (numero identificativo), in maniera tale da creare un'associazione, una corrispondenza univoca tra numero e nome di ciascun socio.
2. Entra il primo socio, apre 50 armadietti e, se fortunato, trova il proprio nome. Nel testo del problema non viene esplicitamente detto che la ricerca deve fermarsi non appena viene trovato il proprio nome ("sarete autorizzati ad aprire cinquanta (la metà) armadietti"), per cui il primo socio apre tutti i 50 armadietti, anche se ha già trovato il proprio nome, magari nel primo armadietto. Su ciascuno dei 50 armadietti che ha aperto applica (scrivendolo su nastro carta adesivo, ad esempio) il numero identificativo corrispondente al socio che risulta proprietario dell'armadietto, avendo potuto leggere il nome del proprietario sul tagliandino all'interno degli armadietti che ha aperto.
   Probabilità di successo: 1/2.
3. Entra il secondo socio e cerca se c'è un armadietto già contrassegnato con il proprio numero identificativo. Se lo trova, apre dapprima 49 armadietti che non sono stati aperti dal primo socio (li riconosce perché non sono contrassegnati con un numero identificativo) e, allo stesso modo del primo socio, li contrassegna con il numero identificativo del rispettivo proprietario. Poi apre il 50° armadietto, quello con apposto il proprio numero identificativo, in cui trova il tagliandino con il proprio nome. Se invece non trova nessun armadietto con il proprio numero identificativo, apre tutti i restanti 50 armadietti che non sono stati aperti dal primo socio e, allo stesso modo, li contrassegna con il numero del rispettivo proprietario. Tra di essi, ci sarà sicuramente l'armadietto contenente il tagliandino con il proprio nome.
   Probabilità di successo: 100%
4. Entra il terzo socio e cerca se c'è un armadietto già contrassegnato con il proprio numero identificativo. Se lo trova, apre l'ultimo armadietto rimasto senza numero identificativo e lo contrassegna, poi apre l'armadietto con apposto il proprio numero identificativo, in cui trova il tagliandino con il proprio nome. Se invece non trova nessun armadietto con il proprio numero identificativo, il proprio armadietto è l'unico rimasto non contrassegnato con un numero identificativo: al suo interno troverà il tagliandino con il proprio nome.
   Probabilità di successo: 100%
5. A ciascuno dei successivi soci che entrano basterà soltanto ricercare l'armadietto contrassegnato con il proprio numero identificativo, al cui interno ci sarà il tagliandino con il proprio nome.
   Probabilità di successo: 100%

Probabilità complessiva di successo della strategia: 50%.

E adesso vediamo la strategia di ***Galluto***, che fa anche alcune assunzioni:

> Se non posso immaginare qualche azione che ognuno dei consoci possa effettuare durante il suo tentativo, il meglio che mi viene in mente è che ci si accordi su quali armadietti aprire, in modo che non si vada tutti (ad esempio) sui dispari, o sui primi 50; così la probabilità rimane bassissima, ma almeno è maggiore di 0.
>
> Per cui, ipotizzo che quanto segue sia lecito (nel senso che non mi sembra che il testo del problema me lo vieti), e venga tollerato dall'occhiuto sorvegliante: **scambiare i cartellini degli armadietti che apro, a patto di lasciare alla fine un cartellino in ogni armadietto.**
>
> Con questa idea, e con la premessa che tutti i soci siano dei logici dotati di ottima memoria:
>
> - Tutti insieme mettiamo in ordine alfabetico i nostri 100 nomi e ciascuno conosce la lista a memoria

- I 100 armadietti sono pure identificati da un numero da 1 a 100, o comunque possiamo dargli un ordine (da destra a sinistra, dall'alto in basso, …)
- Il primo che entra (diciamo che è il numero 1 in ordine alfabetico, ma è ininfluente) va all'armadietto n. 1 (cioè a quello corrispondente al suo nome) e guarda il cartellino
    - Se c'è il suo nome, va all'armadietto n.2 e continua come al punto successivo
    - Se invece non c'è il suo nome, va all'armadietto col numero corrispondente al cartellino che ha trovato, scambia i due cartellini e va all'armadietto corrispondente al cartellino che ha adesso in mano e continua così, mettendo a posto ogni volta un accoppiamento
    - Se ad un certo punto trova finalmente il cartellino con il suo nome, torna all'armadietto iniziale, ci mette il suo cartellino "chiudendo la catena" (e salvandosi), va al primo armadietto che non ha ancora esplorato e ne comincia una nuova
    - Continua così, chiudendo eventualmente altre catene, fino a quando arriva ad aprire il 50imo armadietto[5]; a quel punto, scambia come al solito i due cartellini e mette quello che ha appena preso nel primo armadietto di quella ultima catena (anche se è sbagliato)
    - Così facendo, alla fine ha messo a posto 49 accoppiamenti (compreso il suo, se no il gioco è finito) e ne ha lasciati 51 da sistemare; quelli che ha messo a posto sono addirittura 50 se chiude una catena proprio al 50° armadietto
    - Quale è la probabilità del nostro socio n.1 di trovare il suo nome? È un po' più del 50%, perché, se c'è qualche armadietto che già contiene il cartellino giusto (e che quindi è "autoconsistente"), la catena non ci passerà mai e quindi il socio n.1 apre 50 armadietti non su 100, ma su qualcosa in meno;

questo porta ad una domanda: mediamente, quanti armadietti hanno già il cartellino giusto? Con una simulazione di 1.000.000 di iterazioni il risultato è 1,009 come da tabella qua sotto

a posto	occorrenze		%
0	362.539	-	36,3%
1	369.950	369.950	37,0%
2	186.230	372.460	18,6%
3	62.342	187.026	6,2%
4	15.339	61.356	1,5%
5	3.006	15.030	0,3%
6	509	3.054	0,1%
7	79	553	0,0%
8	4	32	0,0%
9	2	18	0,0%
10	-	-	0,0%
totale	1.000.000	1.009.479	100%
	media	1,009479	

E quindi il socio n.1 ha circa il 50,5% (50/98,991) di probabilità di trovare il suo cartellino

- Il secondo (il numero 2) che entra va al suo armadietto e guarda il cartellino
    - Se c'è il suo nome (perché c'è sempre stato o, più probabilmente, perché lo ha messo a posto il socio precedente) va all'armadietto

[5] Ho assunto che il fatto di tornare ad un armadietto già aperto non conti come un +1.

successivo e poi a quello ancora successivo, … finché non trova un armadietto non accoppiato e da lì apre una nuova catena

- Se non c'è il suo nome, comincia subito una nuova catena
- Quale è la probabilità del socio numero 2 di trovare il suo nome? Su 99 armadietti (quello del numero 1 non lo apre mai, tanto, o sta a posto o sono già fregati tutti e 100), ha 1 possibilità che il suo stesse a posto sin dall'inizio, 48 che sia uno di quelli già sistemati dal numero 1 e altre 49 che lo trovi costruendo le sue catene, per un totale di 98/99 che in realtà diventa 99/99 se (i) il numero 1 ne ha messi a posto 50 e non 49 o (ii) almeno uno dei 50 armadietti che il numero 1 non aveva aperto sia già a posto

- Il terzo che entra segue la stessa logica e, se soltanto il numero 2 ha sistemato una ulteriore catena (anche di 2 soli accoppiamenti), o (come prima) se almeno un armadietto stava a posto sin dall'inizio, ha il 100% di probabilità di trovare il suo nome
- E così via…

In definitiva, la probabilità composta è poco meno del 50,5% della probabilità del primo

E quindi, delle tre una:

- la mia idea non è lecita
- ho fatto meglio degli "alcuni"
- il 30% serviva a depistare

E se invece di 50 armadietti se ne potessero aprire 51 o più, la probabilità composta diventerebbe esattamente quella del primo (51,5%, …) perché tutti gli altri avrebbero il 100%.

Da come il problema era formulato poteva andare bene quasi tutto… per cui lasciamo aperta la porta a tutti i futuri sviluppi. Chissà che cosa intendeva il Capo. Noi vi facciamo qui gli auguri per le feste, che siano felici e piene di matematica e di affetto, che non sono per niente mutuamente esclusivi. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Una biglia d'acciaio galleggia sul mercurio. Al crescere della temperatura, la biglia galleggia di più, di meno o nello stesso modo?

6. Pagina 46

6.1 Prima parte

Sia T_n il numero di modi nei quali il dato n-agono può essere diviso in triangoli da diagonali non intersecantesi in P. Definiamo, come condizione iniziale, che sia T_2=1, e cerchiamo una soluzione che ci permetta di esprimere T_n in funzione di T_2,, T_3, …, T_{n-1}.

Scegliamo un qualsiasi lato di P, ad esempio A_1A_2. Quando P è triangolato, questo lato comparirà in uno dei triangoli, e il vertice restante del triangolo sarà un qualche A_k, per $3 \leq k \leq n$. Per un valore fisso di k, calcoliamo quante di queste decomposizioni sono possibili.

La diagonale A_2A_k taglia il (k–1)-agono $A_2A_3...A_k$ da P; questo può essere decomposto in triangoli in T_{k-1} modi. Nello stesso modo, la diagonale A_1A_k taglia il (n–k+2)-agono $A_kA_{k+1}...A_nA_1$, e questo può essere diviso in triangoli in T_{n-k+2} modi. Quindi, il numero delle decomposizioni di P nelle quali appare il triangolo $A_1A_2A_k$ è $T_{k-1}T_{n-k-2}$.

Assegnando allora a k tutti i valori da 3 a n e sommando:

$$T_n=T_2T_{n-1}+T_3T_{n-2}+T_4T_{n-3}+\ldots+T_{n-2}T_3+T_{n-1}T_2$$

Quindi:

$$T_3=T_2\cdot T_2=1$$
$$T_4=T_2\cdot T_3+T_3\cdot T_2=2$$
$$T_5=T_2\cdot T_4+T_3\cdot T_3+T_4\cdot T_2=5$$
$$T_6=T_2\cdot T_5+T_3\cdot T_4+T_4\cdot T_3+T_5\cdot T_2=14$$
$$T_7=T_2\cdot T_6+T_3\cdot T_5+T_4\cdot T_4+T_5\cdot T_3+T_6\cdot T_2=42$$
$$T_8=T_2\cdot T_7+T_3\cdot T_6+T_4\cdot T_5+T_5\cdot T_4+T_6\cdot T_3+T_7\cdot T_2=132$$

che è il risultato cercato.

6.2 Seconda parte

Riscriviamo la formula vista qui sopra sostituendo ad n il valore n+1:

$$T_{n+1}=T_2T_n+T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots+T_{n-1}T_3+T_nT_{n-2}$$

ossia:

$$T_{n+1}-2T_n=T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots+T_{n-1}T_3$$

per ottenere in forma esplicita T_n, deriviamo un'altra formula ricorsiva di T_n in funzione di T_3, …,T_{n-1} da combinare con quella appena ottenuta.

Calcoliamo il numero di decomposizioni di P nelle quali è coinvolta la diagonale A_1A_k: questa diagonale divide P nel k-agono $A_1A_2\ldots A_k$ e nel $(n-k+2)$-agono $A_kA_{k+1}\ldots A_nA_1$. Visto che il primo di questi poligoni può essere diviso in triangoli in T_k modi e il secondo in T_{n-k+2}, il numero delle decomposizioni nelle quali è coinvolta la diagonale A_1A_k è pari a T_kT_{n-k+2}. Quindi, la somma corrispondente alle n–2 diagonali in uscita da A_1 è pari a:

$$T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_2$$

e la somma corrispondente ad un qualsiasi altro vertice avrà lo stesso valore. Ogni diagonale figura però due volte in questa somma, quindi n volte questo valore è il doppio del numero di decomposizioni.

Ma il numero delle diagonali necessarie in una decomposizione di un n-agono in triangoli è n–3; quindi, nell'espressione:

$$\frac{n}{2}\left(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_2\right)$$

ogni decomposizione viene contata n–3 volte (una volta per ognuna delle n–3 diagonali coinvolte), e quindi

$$\frac{n}{2}\left(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_2\right)=(n-3)T_n$$

che è la nuova ricorsione che cercavamo.

Sostituendo l'espressione trovata precedentemente al primo membro,

$$\frac{n}{2}\left(T_{n+1}-2T_n\right)=(n-3)T_n$$

e

$$T_{n+1}-2T_n=\frac{2(n-3)}{n}T_n$$
$$T_{n+1}=2T_n+\frac{2(n-3)}{n}T_n=\frac{4n-6}{n}T_n=\frac{2(2n-3)}{n}T_n$$

Da cui si vede che:

$$T_3=1$$
$$T_4=\frac{2\cdot 3}{3}T_3=\frac{2^2\cdot 3}{2\cdot 3}$$
$$T_5=\frac{2\cdot 5}{4}T_4=\frac{2^3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4}$$
$$T_6=\frac{2\cdot 7}{5}T_5=\frac{2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

e, in generale,

$$T_n=\frac{2^{n-2}\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-5)}{(n-1)!}$$

e, attraverso i coefficienti binomiali, possono essere ottenute le forme equivalenti:

$$T_n=\frac{2}{n-1}\binom{2n-5}{n-3}=\frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}=\frac{1}{2n-3}\binom{2n-3}{n-2}.$$

7. Paraphernalia Mathematica

Scegliamo un titolo ad effetto, tanto poi parleremo di tutt'altro.

7.1 1.1.I Prof di Fisica sono stonati

Anche se potrebbe non essere colpa loro: potrebbero essere (gli autori de)i libri, in particolare i sussidiari delle elementari, ad essere stonati.

Ci hanno raccontato sino alla noia che Pitagora ha inventato tutta la sua teoria musicale ascoltando due fabbri che martellavano su incudini di dimensioni diverse; la cosa ci aveva lasciato sempre piuttosto perplessi, ma non ci pareva il caso di svolgere ricerche più accurate. E Abbiamo dovuto aspettare, ***Dubrowsky*** e ***Savin*** per avere qualche informazione più corretta in merito.

Infatti, ci si chiede perché il Nostro dovesse andare a cercarsi due incudini, quando per fare gli esperimenti gli bastava e avanzava un monocordo (che era già stato inventato, essendo stata inventata la cetra). Non solo, ma dalla faccenda delle incudini si potrebbe pensare che Pitagora studiasse gli ***intervalli***, cosa che non è vera: infatti, "...osservò che tre corde della stessa dimensione *suonate assieme*, producevano un suono particolarmente piacevole se le loro lunghezze erano nel rapporto 6:4:3...". Quindi, il lavoro di Pitagora non era sugli intervalli, ma sugli ***accordi***.

"...ed è diventato famoso perché aveva detto che quella roba suonava bene alle sue orecchie?" Beh, no. Da bravo filosofo, il passaggio successivo è stato: "OK, mi piace. Ma *perché* mi piace?"

Il genio si è reso conto (...e ci vuole del genio, con gli strumenti matematici dell'epoca) che questi numeri avevano una relazione tra di loro: il reciproco del termine centrale è pari alla media aritmetica dei reciproci dei due termini estremi, ossia

$$\frac{1}{4}=\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}{2}$$

Da cui, secondo il nostro matematico, quell'accordo era "armonico" *perché rispettava questa regola*. Capite che da qui a chiamare questo oggetto "***media armonica***", il passo è breve.

Generalizzando e con pochi conti, si vede subito che:

$$h=\frac{2ab}{a+b}$$

che è la forma usuale nella quale viene espressa la media armonica. La definizione di media armonica può essere riscritta come *proporzione armonica continua*, ossia come $b^{-1} - h^{-1} = h^{-1} - a^{-1}$, o:

$$\frac{a-h}{h-b}=\frac{a}{b}$$

Non solo ma, se tiriamo in ballo la media geometrica $q=\sqrt{ab}$, da $mh=ab$ si vede che la media geometrica di due numeri è uguale alla media geometrica della loro media armonica e della media aritmetica[6].

Cambiamo (per poco) argomento. Consideriamo un trapezio isoscele circoscritto a una circonferenza, con $AD=a$ parallelo a $BC=b$ e $AB=BC$); essendo circoscritto ad una circonferenza, $2AB=AB+CD=AD+BC=a+b$; quindi $AB=(a+b)/2$, ossia i lati obliqui sono pari alla media aritmetica delle basi. Non solo, ma se BE è l'altezza cadente da B su AD, si vede che $AE=(a–b)/2$ (tracciate l'altezza cadente da C se non siete convinti); dal teorema di Pitagora applicato al triangolo ABE si ha che:

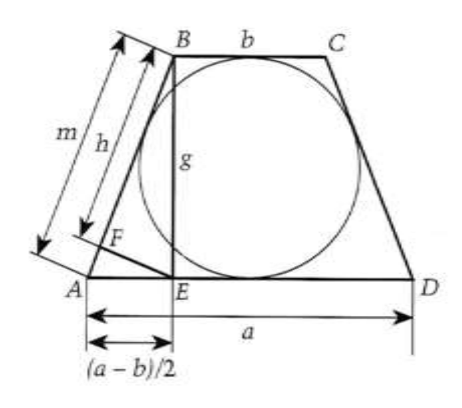
$$BE^2=AB^2-AE^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab$$

[6] Da questo discende anche la nota regola che la media aritmetica è maggiore (o uguale) alla media armonica che è maggiore (o uguale) alla media geometrica; le uguaglianze valgono nel caso di numeri uguali.

ossia l'altezza del nostro trapezio è pari alla media geometrica delle basi. Non solo, ma tracciando l'altezza *EF* del triangolo *ABE* da *E* su *AB*, per similitudine dei triangoli *BFE* e *BEA* si ha che $BF/BE=BE/BA$ o, anche,

$$BF=\frac{BE^2}{BA}=\frac{g^2}{m}=2\frac{ab}{a+b}=h$$

"...Rudy, e fare un disegno? No, vero?" Arriva, arriva. Lo trovate qui vicino. Semplicemente, non volevamo rovinarvi la sorpresa del trovare tutte le relazioni...



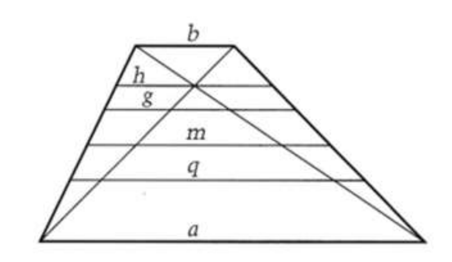
1 *Sorpresa!*

A margine, posto che non foste convinti delle nostre affermazioni precedenti, notiamo che $m>g>h$ si riduce a *AB*>*BE*>*BF* che è evidente; e siccome per qualsiasi valore a e b possiamo costruire un trapezio isoscele circoscrivibile ad una circonferenza, la regola è generale. Convinti, adesso?

Anche se la si incontra raramente, esiste un'altra media che ha delle caratteristiche "interessanti": la ***media quadratica***:

$$q(a,b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

se costruiamo un qualsiasi trapezio non isoscele con *AD*=*a* parallelo a *BC*=*b*, possiamo tracciare le nostre "medie" come segmenti paralleli alle basi; nel nostro disegno, q biseca l'area del trapezio e m è la mediana sui due lati obliqui; possiamo però ricavare qualche altra interessante proprietà.



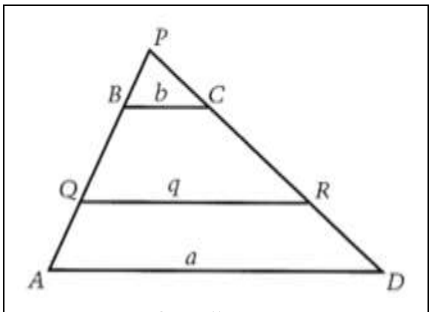
2 *Questa la vediamo subito.*

Infatti, se estendiamo i lati obliqui del nostro trapezio, questi si incontreranno in *P*; le aree dei triangoli (simili) *APD*, *QPR* e *BPC* sono proporzionali ai quadrati delle loro parti corrispondenti, in particolare ad a^2, q^2 e b^2, rispettivamente. D'altra parte, se parliamo di aree, (*APD*)=(*QPR*)=(*AQRD*)=(*QBCR*)=(*QPR*)–(*BPC*).

Il che, però, non significa altro che:

$$a^2-q^2=q^2-b^2\Rightarrow q=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

ossia, q è proprio la media quadratica.



3 *OK, disegno...*

Inoltre, se considerate le proporzioni tra le distanze di ognuno dei segmenti g, m e q dalle due basi: per g, questo è il rapporto tra i due trapezi più piccoli, e $b/g<1$; per m questo rapporto vale 1; per q, infine, deve essere maggiore di 1, visto che il trapezio superiore ha una somma delle basi minore ($b+q<q+a$) ma ha anche la stessa area di quello inferiore; quindi, deve avere un'altezza maggiore. Ossia, $q>m>g$. Valeva la pena di fare tutti i conti, vero? Beh, non è finita. Se tornate un attimo alla figura precedente, vi accorgete che la media armonica passa per l'incrocio delle diagonali. E no, non è un caso.

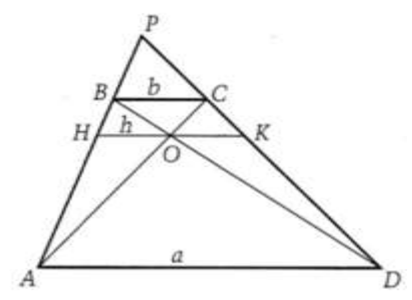
Infatti, se estendiamo i lati obliqui ad incontrarsi nel punto *P*, dalla similitudine dei triangoli *APD*, *HPK* e *BPC*, possiamo scrivere:

$$a:h:b=AD:HK:BC=PA:PH:PB$$

Questo, tra le altre cose, esprime il fatto che PH è la media armonica di PA e PB; o, attraverso una formula che abbiamo visto all'inizio:

$$\frac{HA}{BH}=\frac{PA-PH}{PH-PB}=\frac{PA}{PB}$$

Ora, il terzo membro risulta pari a AD/BC, mentre il primo membro è pari a OA/OC, visto che HO e BC sono parallele. Non solo, ma i triangoli AOD e COB sono simili, quindi questi sono uguali a AD/BC; il che mostra che HK passa per O.



4 *Una strana proprietà.*

...poco convinti? Beh, anch'io. Proviamo in un altro modo.

Sempre dalla figura, definiamo $OH=t$ e $OK=u$. Dalla similitudine dei triangoli ABC e AOH, si ricava che $t/b=BH/AB$; dalla similitudine dei triangoli BAD e BOH si ha invece che $t/a=HA/AB$. Sommando queste due espressioni,

$$\frac{t}{a}+\frac{t}{b}=\frac{BH+HA}{AB}=1\Rightarrow\frac{1}{t}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

e, con argomentazione equivalente, si ricava che $1/u=1/a+1/b$. Ma allora $t=u$ e $t+u=h$, quindi:

$$\frac{2}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

nella quale possiamo riconoscere l'espressione della media armonica h.

...e ci sarebbe dell'altro, ma ci rendiamo conto che per ora è meglio fermarsi qui.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms