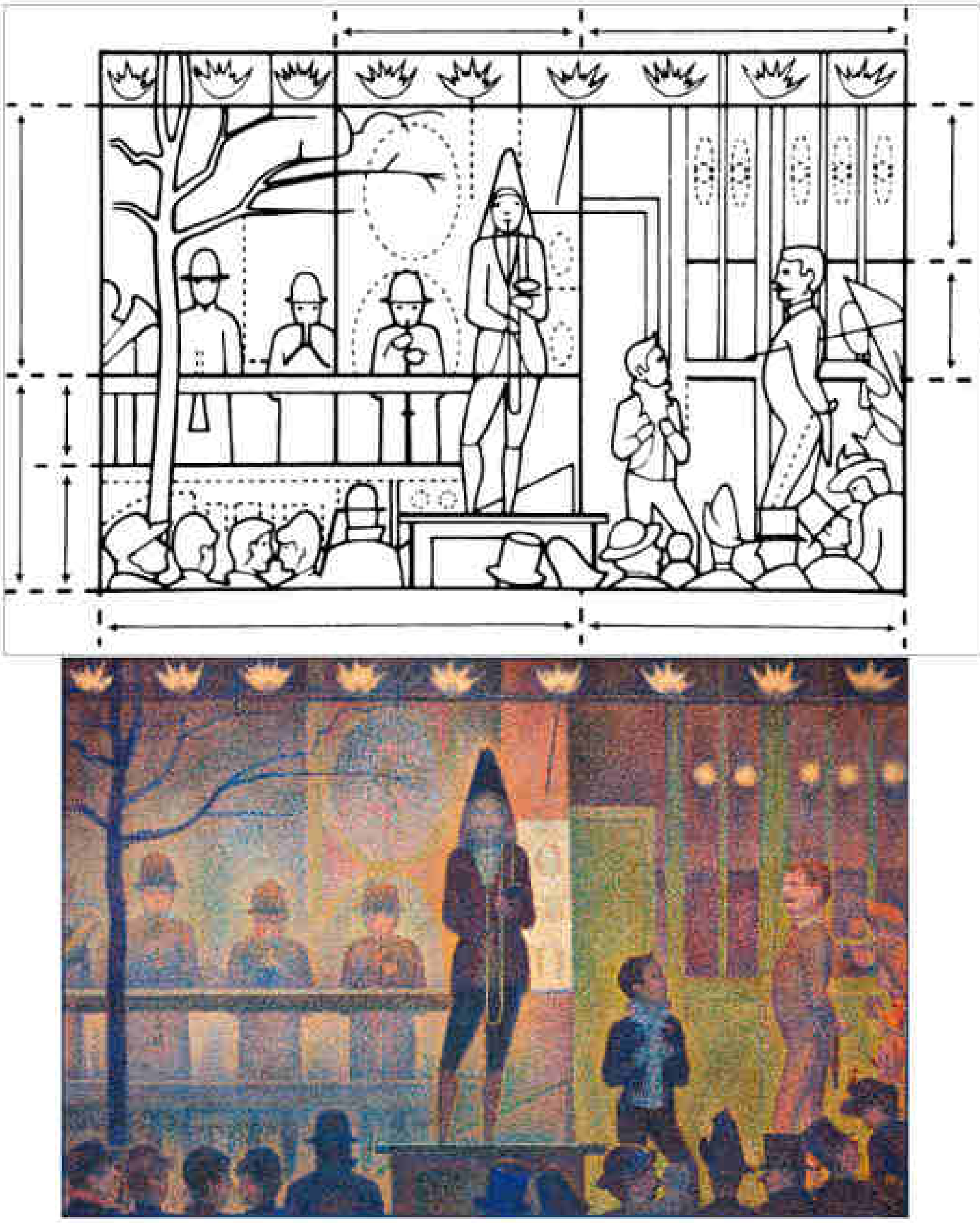
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 286 – Novembre 2022 – Anno Ventiquattresimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM285 ha diffuso 3'366 copie e il 25/11/2022 per Google eravamo in 6'170 pagine.

...ce l'hanno raccontata tanto con la presenza della sezione aurea nell'arte che ormai la diamo per scontata, ma se dovessimo citare un quadro dove compare avremmo probabilmente dei problemi. Finalmente, il buon ***Manfred Schroeder*** ha fatto i conti. In copertina, *Parade du Cirque*, di Georges Seurat.

1. Le ali di San Pietroburgo

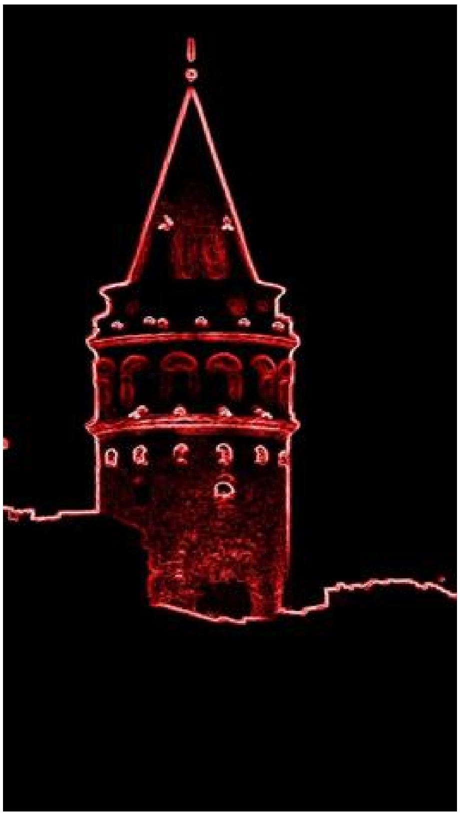
"Ma Sasha veniva dalla Russia, dove i tramonti sono più lunghi, le albe meno improvvise e le frasi vengono spesso lasciate in sospeso dal dubbio su come sia meglio concluderle."

(Virginia Woolf, "*Orlando*")

Le città russe sono abituate a cambiare nome. Certo non sono le sole a farlo, il mondo brulica di nomi geografici che cambiano: talvolta cambiano poco, quasi senza ragione; altre volte il cambio è radicale e drammatico, eseguito con tutte le intenzioni di voler marcare una cesura profonda. I cambi più semplici sono quelli dovuti alla naturale evoluzione della lingua: quasi tutti i toponimi italiani, ad esempio, sono mutazioni di nomi più antichi latini, quando non addirittura ellenici, come accade spesso in quell'Italia meridionale che una volta era la Magna Grecia. Di poco diversi sono quei nomi che cambiano per adeguarsi alla lingua che ora è dominante, come è accaduto di recente a molte città indiane: Bombay è mutata in Mumbai e Calcutta in Kolkata, ma è evidente che cambiamenti del genere sono solo cosmetici, volti ad allineare il suono e la traslitterazione del nome in modo più coerente con la lingua della popolazione. Ma c'è anche, senza dubbio, l'intenzione di rimarcare la fine del colonialismo inglese e la riappropriazione della lingua: e in alcuni casi la cosa è del tutto palese, visto che Madras adesso si chiama Chennai e c'è la proposta di mutare il nome della capitale da Delhi a Indraprashta. E, come l'India, molte giovani nazioni rinominano luoghi e città per rivendicare la conquistata indipendenza.

Oltre alle guerre coloniali, a generare cambi più o meno volontari di nome ci si mettono anche le guerre ordinarie. Parliamo di volontarietà relativa perché a volte la decisione di mutare un nome, più che dichiarazione di supremazia militare o politica, è semplicemente un'affermazione linguistica. Le città più grandi e famose hanno spesso il nome "tradotto" in lingue straniere (London, Londra, Londres), e anche città meno importanti hanno la stessa caratteristica, specialmente se si trovano in zone in cui i confini cambiano spesso e cambiano anche i popoli che le controllano. Danzica è così chiamata dagli italiani certamente sul calco del nome tedesco Danzig, ma ormai i polacchi rivendicano con orgoglio il nome Gdańsk; una città dalla lunga e prestigiosa storia come Königsberg si cela sotto l'attuale nome russo di Kaliningrad, da quando, nel 1946, ha perduto la sua identità prussiana per diventare città dell'Unione Sovietica, e sì che aveva nome tradotto persino in italiano (Conisberga) e addirittura in latino (Regiomontum). Altre città di quell'Europa piatta e senza confini naturali che va dall'Elba agli Urali hanno nomi diversi e difficili da riconoscere come appellativi dello stesso toponimo: non è per niente facile individuare in L'viv, Lwòw, Lemberg o L'vov la bella Leopoli.

Certo è che le città con una storia antica e gloriosa resistono meglio delle altre ai cambi di nomi: è difficile immaginare che possano cambiare nome Roma o Parigi; ma le previsioni sono difficili, specie quelle che riguardano il futuro (cit. Niels Bohr), e soprattutto esistono illustri precedenti che dimostrano il contrario. Poche città erano più grandi e famose di Costantinopoli, nell'antichità, e ancora oggi Istanbul è la città più popolosa d'Europa; eppure non è riuscita a conservare il nome storicamente più famoso. Ma il suo caso è verosimilmente un'eccezione, perché il passaggio da "Costantinopoli" a "Istanbul" è assai più recente di quello che comunemente si crede e non è dovuto alla conquista ottomana del 1453. Fondata dai greci come Bisanzio, diventa "la città di Costantino" quando l'imperatore eponimo la promuove a capitale dell'Impero Romano d'Oriente; abbastanza curiosamente, non è Costantino ad imporre il nome di Costantinopoli, anzi: lui la battezza "Nova Roma", ma il nome non attecchisce, se non nei primi documenti ufficiali e nella denominazione della Chiesa Ortodossa. In compenso il nome Costantinopoli resiste alla conquista turca e oltre, ed è solo nel 1930 che viene ufficialmente sacramentata la



1 *Istanbul, Galata Kulesi (la Torre di Galata).*

denominazione più comune, quell'Istanbul che, lungi dall'essere un nome arabeggiante, è il modo in cui i suoi cittadini si riferivano alla grande città, in lingua greca: "εiς τὴν Πόλιν", cioè "nella Città", dicevano, e probabilmente da queste espressioni deriva il nome di Istanbul, la "Città" per eccellenza.

Le città russe, invece, cambiano nome soprattutto per ragioni politiche, anzi: rivoluzionarie. Le rivoluzioni lasciano sempre un segno profondo, anche nei nomi più comuni: quella francese cambia le misure, il calendario e cento altre denominazioni, ma tutto sommato lascia indenni i nomi delle città principali[1]; la Rivoluzione Russa del 1917, invece, sembra prendersela soprattutto proprio con queste denominazioni. Uno degli esempi più significativi è certo quello di Tsaritsyn[2], che ha nel nome quel "tsar" che sembra inneggiare allo zar, anche se in realtà è a causa di un fiume, lo Tsaritsa, che si porta dietro quella sillaba. Nel 1925 diventa Stalingrado, e con quel nome diventerà teatro di quella che è forse la battaglia più cruenta e significativa di tutta la Seconda Guerra Mondiale. Lo scontro è dovuto principalmente a cause strategiche, con i tedeschi che volevano raggiungere i ricchi giacimenti petroliferi del Caucaso, ma gli storici concordano nel dire che anche il nome della città, dedicata al nemico giurato di Hitler, abbia avuto un suo peso nell'accanimento degli attacchi tedeschi. Adesso è tornata a dedicare il nome a un fiume, ma non più il piccolo Tsaritsa, ma al fiume più grande della Russia e d'Europa: Stalingrado non esiste più, al suo posto c'è Volgograd.

C'è da consolarsi al pensiero che, dopo la caduta dell'URSS, la decisione se mantenere il nome "sovietico" o meno è stata affidata perlopiù a democratici referendum, in modo che la scelta fosse effettivamente deputata agli abitanti delle città, e non stabilite per decreto. I risultati sono stati a volte anche sorprendenti, come nel caso di Togliatti[3]: la città si era chiamata Stravopol fin dalla fondazione, ma venne ribattezzata Togliatti nel 1964, dopo che la Russia vi impiantò la maggiore fabbrica di automobili del paese, con la collaborazione della Fiat. Nel dicembre 1996 fu indetto un referendum per decidere se mantenere il nome Togliatti o tornare all'originale Stravopol: l'affluenza dei votanti si fermò poco sotto la metà degli aventi diritto, ma la percentuale dei favorevoli a mantenere il nome dedicato al vecchio segretario del Partito Comunista Italiano superò l'82%.

---

[1] In realtà, anche se le città maggiori conservarono il nome, non furono pochi i toponimi a cambiare anche nella Francia rivoluzionaria: i cambi si attuarono soprattutto sui nomi che erano troppo legati all'*Ancien Régime,* come *Versailles,* mutata in *Berceau-de-la-Liberté*, o – con un certo senso dell'umorismo – *Grenoble*, alla quale fu assegnato il nome *Grelibre*. In Italia, durante il fascismo, alcune modifiche vennero attuate su nomi (Girgenti in Agrigento è forse l'esempio più noto), e per contro alcuni nomi originariamente fascisti, come quello di Littoria, nel bonificato Agro Pontino, fu cambiato in Latina, che era coerente sia dal punto di vista geografico che con la sigla provinciale LT.

[2] Ne parliamo un po' più diffusamente su RM148, maggio 2011, "*Il nazista e l'ebreo*", compleanno dedicato a Paul Teichmüller e Lipman (Lipa) Bers.

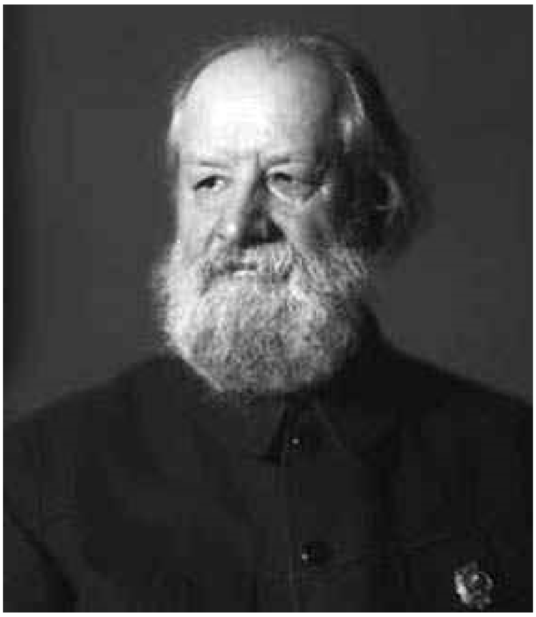
[3] In Italia – e solo in Italia – è invalso l'uso di chiamare la città russa "Togliattigrad", ma è errato: il nome è semplicemente Togliatti, come il cognome di Palmiro, a lungo segretario del PCI. La desinenza slava "*grad*", presente in molti nomi delle città russe, in Togliatti (città) non c'è.

2 San Pietroburgo, Pietrogrado, Leningrado, e ancora San Pietroburgo ("Piter" per gli amici).

In ogni caso, se quello di cambiare nome fosse uno sport, non ci sarebbe dubbio che il titolo di campione del mondo spetterebbe a San Pietroburgo. Un po' per l'importanza della città, che fin dalla sua fondazione si è trovata carica di aspettative e di simboli, un po' per le sue prestazioni di scarsa perseveranza onomastica. La città superiore al milione di abitanti posta più a nord di tutto il pianeta è frutto di una vera e propria pianificazione: la vuole lo zar Pietro I Romanov, meglio noto come Pietro il Grande, con il preciso intento far volgere lo sguardo russo verso Occidente. Lo zar la battezza San Pietroburgo (Санкт-Петербург, che traslitterato suona *Sankt-Peterburg*) nel maggio del 1703, dedicandola al santo di cui porta il nome e mostrando già nell'uso di quella desinenza tedesca ("*burg*") l'intenzione di farne la porta occidentale di tutte le Russie. Ma due secoli dopo arriva la Grande Guerra, e il nome della città diventa imbarazzante – proprio come suona imbarazzante il nome pieno di toponimi germanici della regnante dinastia inglese – e bisogna correre ai ripari. I monarchi d'Inghilterra cestinano il nome della dinastia "Sassonia-Coburgo-Gotha" e inventano il bel nome di casata "Windsor", e lo zar Nicola II, allo scoppio della guerra antitedesca del 1914, fa qualcosa di simile, slavizzando (e, di fatto, laicizzando) il vecchio nome in "Pietrogrado". È un nome che durerà giusto un decennio: il decennio della guerra e della rivoluzione; poi, la neonata Unione Sovietica piangerà il suo leader nel 1924 e in suo nome ribattezzerà la sua città più famosa – perché è più famosa anche della stessa Mosca – con il nome di Leningrado.

Il nome Leningrado dura quanto dura l'Unione Sovietica, e in fondo c'era d'aspettarselo, visto che la città si identificava con il fondatore di quello stato. Il referendum per decidere quale nome attribuire alla città si svolge il 6 settembre 1991, e in gara ci sono tutti e tre i nomi storici della città, che pure non ha ancora compiuto tre secoli di vita. Il 54% dei votanti si pronuncia a favore del nome originario, San Pietroburgo, ed è così che la conosciamo oggi; ma bisogna riconoscere lungimiranza a Virginia Woolf, quando parla dei russi nel suo "Orlando": quasi a voler smorzare la risonanza del cambio di nome della città, il referendum sul nome dell'Oblast – l'analogo delle nostre province o regioni – viene vinto dal vecchio nome. Così, ancora oggi, i turisti vanno a visitare San Pietroburgo, la meravigliosa città situata nell'Oblast di Leningrado.

Questa elevata variabilità, per non dire volatilità, dei nomi di città rende oggettivamente faticoso orientarsi, soprattutto quando si esercita in un linguaggio complicato (e in un alfabeto non familiare) come il russo. Non è facile riconoscere nella Gorki che compare in alcuni romanzi russi del Novecento la più antica (e più recente) Nižnij Novgorod. Se si pianifica un viaggio verso San Pietroburgo si può rimanere perplessi quando nell'agenzia di viaggi propongono una deviazione verso Puškin, non solo perché (anche grazie a Gorki) ci si chiede se tutte le città russe tendono a celebrare i loro massimi scrittori, ma anche perché, magari, letture precedenti chiamavano ancora quella regale cittadina con il nome di Tsarskoe Selo. Si sente quasi l'esigenza di una maggiore stabilità, un desiderio di contrappasso, una voglia di costanti dopo così tante variabili; curiosamente, la Russia riesce facilmente a soddisfare anche questo capriccio. Basta passare dai nomi di città a quelli di persone, richiedere una continuità puramente onomastica e non genetica né parentale, e magari aggiungere la richiesta (legittima, vista la natura della rivista che ospita questo articolo) che le persone suddette facciano tutte lo stesso mestiere, quello del matematico.


3 *Aleksei Nikolaevic Krylov (1863-1945)*

Aleksei Nikolaevic Krylov nasce a Visyaga, un villaggio nei pressi di Simbirsk, il 15 Agosto 1853. La città natale sembra voler entrare di forza nel balletto raccontato nelle pagine precedenti, sia per rivendicare una sorta di parentela con San Pietroburgo, sia per ricordare che anch'essa ha cambiato nome: non è più possibile trovare Simbirsk sulla carta geografica perché nel 1924 (come San Pietroburgo) ha cambiato nome passando a quello di Ulianovskaya. Se si ricorda il nome di famiglia di Lenin, il cui nome completo all'anagrafe era Vladimir Il'ič Ul'janov, è facile capire che il cambio di denominazione della città è fatto per onorare il padre della rivoluzione russa (come San Pietroburgo). A dirla tutta, i diritti di Simbirsk a celebrare Lenin sono probabilmente maggiori di quelli della metropoli sulla Neva, perché Simbirsk/Ulianovskaya è la città natale non solo di Aleksei Krylov, ma anche dello stesso Lenin.

In russo, "krylo" (Крыло) vuol dire "ala": se valesse sempre la vecchia regola del *nomen-omen*, Aleksei Nikolaevic avrebbe dovuto dedicarsi al volo o quantomeno, se proprio avesse voluto seguire una carriera militare, dedicarsi all'aviazione. Invece non fa così: già a 15 anni di età entra nella Scuola Superiore Marittima di San Pietroburgo, e per tutta la vita preferirà dedicarsi al mare, piuttosto che al cielo.

Tutta la sua istruzione di base è marinaresca, e volta agli aspetti pratici della navigazione: si occupa fin da giovane della deviazione magnetica, di cui il suo insegnante Ivan De Collong era un luminare, e continua a farlo quando entra all'Accademia Navale di San Pietroburgo. Qui incontra Korkin, un temibile insegnante allievo di Chebyshev, che però riconosce in Krylov uno studente assai brillante: in effetti, ad Aleksei bastano due anni per laurearsi, e Korkin lo invita a restare in Accademia per dedicarsi all'insegnamento. Krylov accetta, e non lascerà l'Accademia per il successivo mezzo secolo.

La carriera di Krylov, per ragioni storiche e anagrafiche, si sviluppa in uno dei periodi più tormentati per la Russia: il ventesimo secolo registra subito la rivoluzione del 1905, causata anche dalla disastrosa sconfitta (soprattutto navale, a Tsushima) nella guerra contro il Giappone. Poi, di seguito e quasi senza soluzione di continuità, lo scoppio della Grande Guerra, la Rivoluzione d'Ottobre, e la nascita dell'Unione Sovietica. In tutto questo marasma, Aleksei Krylov sviluppa e teorizza buona parte dei progetti navali russi, fino al punto di entrare in conflitto con il Ministero della Marina, una volta raggiunto il più alto grado, quello di presidente, nel Comitato d'Ingegneria Marittima.

La sua conoscenza della teoria navale gli frutta un dottorato *honoris causa* dall'Università di Mosca, oltre all'elezione come membro della russa Accademia delle Scienze. Più tardi, tra il 1927 e il 1932, sarà il presidente della sezione Matematica e Fisica della stessa Accademia. Anche se ben inserito nel nuovo corso che trasforma la Russia in Unione Sovietica, Krylov cerca sempre di favorire i contatti con gli scienziati stranieri, anche nel difficile periodo tra le due guerre mondiali. Dal punto di vista scientifico, la ricerca di soluzioni pratiche ai pratici problemi della navigazione lo conduce a ottenere risultati migliori di quelli presenti in letteratura per l'accelerazione della convergenza delle Serie di Fourier, le soluzioni approssimate alle equazioni differenziali, e anche un metodo per risolvere l'equazione secolare per la determinazione della frequenza delle vibrazioni nei sistemi meccanici, migliorando quelli trovati in precedenza da Lagrange, Laplace, Jacobi e Le Verrier.

Raccontava che erano state proprio le opere di questi grandi predecessori, che lui leggeva con avidità, a suggerirgli il suo nuovo e più efficace metodo: del resto, che la storia della scienza lo appassionasse è indubbio, visto che fu il primo a tradurre in russo i *Principia Mathematica* di Newton. Il matrimonio con Elisaveta Dranitsyna generò un'unica figlia, Anna: questa ebbe la ventura di sposare un futuro Premio Nobel e di essere la protagonista dell'unico aneddoto, fra i molti esistenti su Paul Adrien Maurice Dirac, in cui il genio inglese fa un po' la figura dello sciocco.

4 *I signori Kapitza: Piotr e Anna (nata Krylov)*

L'aneddoto è raccontato da George Gamow nel suo famosissimo libretto «*Trent'anni che sconvolsero la fisica*». Dirac era molto amico di Piotr Kapitza (che vincerà il Nobel per la Fisica nel 1978 proprio grazie all'Effetto Kapitza-Dirac) e una sera, invitato a casa dell'amico, si mette ad osservare la signora Kapitza che lavora a maglia.

Dopo averla osservata attentamente per un po', le comunica con malcelata soddisfazione che esistono solo due modi possibili per intrecciare la maglia, e prende i ferri per mostrarle il metodo alternativo da lui «scoperto». La signora risponde: «*Sì, noi donne le conosciamo da un po': le chiamiamo diritto e rovescio*». La signora Anna Kapitza, passata alla storia della fisica per questa risposta, era la figlia di Aleksei Krylov.

A San Pietroburgo Aleksei vive e muore, mentre Nikolai vi vede la luce. Anche se non risulta – almeno a noi – che sussista alcuna parentela tra i due, il Nikolai Mitrofanovic che nasce a San Pietroburgo il 29 Novembre[4] 1879 ha lo stesso cognome: Krylov.

5 *Nikolai Mitrofanovic Krylov (1879-1955)*

Le tre caratteristiche di Nikolai Mitrofanovic sono la perfetta coincidenza degli anni di nascita e morte con quelli di Albert Einstein, il patronimico abbastanza raro e il fatto di essere un vero artigiano della matematica: anche se ha indubbiamente prodotto risultati di rilievo, sembra brillare soprattutto per il grandissimo numero di buone pubblicazioni, anche se non tali da superare la soglia dell'interesse per i non addetti ai lavori. Se cominciamo a sospettare che il cognome Krylov sia abbastanza comune[5], ci prendiamo la libertà di ipotizzare che il patronimico di Nikolai sia piuttosto raro: e forse è un peccato, perché "Mitrofan" suona bene, e l'etimologia – che sembra quasi più greca che slava – sta a significare "somigliante alla mamma".

Dal punto di vista matematico, Nikolai Mitrofanovic si laurea all'Istituto Minerario di San Pietroburgo, e lì comincia a insegnare subito dopo la laurea. Nel 1927 prende la

[4] È evidentemente grazie a lui che possiamo pubblicare questo compleanno in questo numero…

[5] Ma non comunissimo, comunque: siamo riusciti a trovare solo una lista dei primi venti cognomi russi più diffusi, e in questa ventina "Krylov" non figura.

cattedra prima all'Università di Crimea e poi in quella di Kiev, dove diventa anche direttore dell'Istituto di Fisica dell'Accademia Ucraina delle Scienze. Tutta la sua carriera professionale sembra centrata sulla ricerca di metodi computazionali e applicativi: un po' come il suo omonimo Aleksei Nikolaevic (e forse un po' come gran parte dei matematici sovietici) il cuore dei suoi interessi matematici sembrano convergere verso quei meccanismi in grado di velocizzare e ottimizzare i calcoli e realizzare applicazioni matematiche.

Dal punto di vista professionale, è certo che l'incontro più significativo di Nikolai Krylov è quello con Nikolai Nikolaevic Bogolyubov, destinato a diventare uno dei matematici più importanti del ventesimo secolo: il loro primo incontro avviene dai lati opposti della cattedra, perché Bogolyubov è inizialmente uno studente di Krylov. Diventeranno poi colleghi, e pubblicheranno insieme un gran numero di lavori, molti dei quali saranno le fondamenta sulle quali Bogolyubov costruirà il suo grande edificio della Teoria delle Perturbazioni, caposaldo della fisica quantistica.

Curiosamente, è solo in tarda età che N.M.Krylov sembra concedersi degli studi meno indirizzati alla matematica applicativa: è ormai settantenne quando pubblica tre memorie del tutto estranee a quanto aveva ricercato durante la sua carriera accademica, uno studio sui numeri primi, uno sui quaternioni e uno sui complessi di Galois.

Nikolai Mitrofanovic, nato a San Pietroburgo, morirà a Mosca nel 1955, dopo aver passato una vita in Ucraina. Un altro Nikolai nasce invece a nord di Mosca, e finirà con il morire a San Pietroburgo: anzi no, vista l'epoca e la causa della morte, è più giusto dire che questo secondo Nikolai ha finito i suoi giorni a Leningrado. E, ovviamente, anche lui si chiamava Krylov.

6 *Nikolai Sergeevitc Krylov (1917-1947)*

La storia di Nikolai Sergeevic Krylov è inevitabilmente più triste di quella dei suoi omonimi (anche in questo caso, nessuna parentela rilevata), e basta guardare alle date di nascita e morte per rendersene conto. Nasce il 10 Agosto 1917 nei pressi di Vologda e non riuscirà a vedere il suo trentesimo compleanno, perché spirerà il 21 Giugno 1947 a Leningrado. È evidentemente uno studente assai brillante, quando entra appena diciassettenne all'Istituto di Fisica dell'Università di Leningrado, nel 1934. Si potrebbe pensare che l'università gli abbia procurato qualche difficoltà, visto che gli occorrono cinque anni per arrivare alla laurea, nel 1939; ma sarebbe un pensiero errato. Ancor prima di laurearsi pubblica due memorie di altissimo livello, una di fisica statistica e una sulla Distribuzione di Gibbs. Resta a far ricerca nell'università, e nel 1941 presentala candidatura per ottenere una cattedra, ma la Storia insegna che tempo e luogo sono tra i peggiori possibili, per intraprendere una carriera accademica: nel 1941 inizia l'assedio tedesco a Leningrado, che durerà per più di due anni, dal settembre 1941 al gennaio 1944.

Il conto delle vittime dell'assedio è difficile da fare: il numero più probabile è quello che arriva a valutare un totale di un milione di morti, dei quali più di seicentomila sono deceduti civili per fame. Nikolai Sergeevic continua a recarsi in Istituto durante l'assedio e a lavorare; la sua costituzione fisica non è però delle migliori, e per questo riesce ad essere evacuato prima della fine dell'assedio: con altri colleghi dell'ateneo arriva a Kazan, dove si era ricostituita una sorta di università di Leningrado in contumacia, e lì difende la sua tesi di dottorato. Nonostante le sofferenze patite durante l'assedio e il perdurare della guerra, Krylov continua a lavorare, e a rivoluzionare la Meccanica Statistica, applicandole le nuove scoperte sulla Teoria Ergodica. A guerra finita, nel 1946, nell'introduzione del suo ultimo libro spiega come ha intenzione di sviluppare le sue idee rivoluzionare in sei capitoli, ma quel libro resterà fermo a metà del secondo capitolo: le sofferenze patite durante l'assedio hanno minato il suo fisico, che non si è mai completamente ripreso. Buona parte dei suoi lavori sono ancora oggetto di studio e di ricerca da parte degli esperti, e non solo per ragioni storiche.

Dei tre Krylov, sia Aleksei Nikolaevic che Nikolai Mitrofanovic hanno visto la città cambiare nome due volte, da San Pietroburgo a Pietrogrado e da Pietrogrado a Leningrado. Nikolai Sergeevic non riesce a vedere il nome San Pietroburgo, perché nasce quando la città sulla Neva si chiama Pietrogrado e scompare quando è ormai consolidato il nome Leningrado. Abbastanza curiosamente, però, il nome Krylov continua ad aderire bene ai matematici russi, perché non è difficile trovare notizie di un quarto Krylov (e un terzo Nikolai): si tratta di Nikolai Vladimirovic Krylov, nato il 5 giugno 1941 a Sudogda, città ad est di Mosca, dal nome simile alla città natale di Nikolai Sergeevic, dalla quale dista meno di 500 chilometri.


7 *Nikolai Vladimirovic Krylov (1941)*

Ha studiato nella famosa Università Lomonosov, il più prestigioso ateneo di Mosca, dove ha ottenuto il dottorato di ricerca studiando equazioni differenziali parziali stocastiche. Ha insegnato nella sua alma mater per quasi un quarto di secolo, e nel 1990 – quando il Muro di Berlino era già caduto e l'Unione Sovietica era sul punto di scomparire dagli atlanti – si è trasferito negli Stati Uniti, all'Università del Minnesota.

È il coautore della Teoria Evans-Krylov, che è stata premiata con uno dei premi più importanti della matematica, lo Steele Prize dell'AMS, l'American Mathematical Society. È stato per due volte speaker ai grandi Congressi Internazionali di Matematica, quello di Helsinki del 1978 e quello di Berkeley del 1986, quei congressi in cui vengono assegnate le Medaglie Fields. Ci siamo dimenticati di ricordarlo, ma ormai è quasi scontato, no? Non ci risulta che abbia alcuna parentela con A.N. Krylov, né con N.M. Krylov, né tantomeno con N.S. Krylov.

Non sappiamo neppure se sia mai passato per San Pietroburgo, o se l'abbia mai vista quando si chiamava ancora Leningrado: ma ci stupiremmo molto se così non fosse.

2. Problemi

2.1 Qualcosa a proposito...

...di Krylov.

Leggendo le bozze del Compleanno [286], ci è tornato in mente un simpatico problema. Cambiano i cognomi, ma siamo sicuri che a famiglia Petrov non se ne avrà a male. Come d'uso, la prima lettera è l'iniziale del nome, la seconda l'iniziale del patronimico.

Se seguiamo il ramo maschile della famiglia Krylov, vediamo che ogni padre ha due figli, il patriarca della famiglia ha quattro nipoti, e ognuno dei suoi figli ha due nipoti.

Siccome il gatto Мурлыка[6] ha giocato con l'albero genealogico, tocca a voi rimettere ordine: A. N. Krylov, K. T. Krylov, N.K. Krylov, B. M. Krylov, M. M. Krylov, N. T. Krylov, G. K. Krylov, M. N. Krylov, T. M. Krylov, K. M. Krylov, N. M. Krylov.

2.2 … ma che combinazione!

Questo problema nasce dal ritorno in auge, nella famiglia di Rudy, di una molto vecchia valigia "Pilota"; è talmente vecchia che, all'epoca, passava agilmente come bagaglio mano, mentre oggi vi dicono "spiacenti, ma non abbiamo abbastanza stiva". La borsa è dotata di due serrature a combinazione di tre numeri ciascuna *che Rudy si ricorda benissimo* (sono i voti di laurea suo e di sua moglie: essendo mancino, il suo sulla sinistra), quindi non è questo il problema. Ma ha fatto scattare nel Nostro una domanda...

Avete una valigetta con una combinazione a sette cifre, con le cifre che possono andare da zero a nove; quello che sapete è che le cifre della combinazione sono tutte diverse; la serratura, per motivi suoi, ha un comportamento un po' strano: infatti, dovete inserire sempre *sette cifre diverse*, ed è sufficiente che una cifra sia nella posizione esatta per aprire la valigetta.

Avete inoltre altri due dati: tanto per cominciare siete dei grandi pianificatori; inoltre, siete enormemente sfortunati. Quindi, per quanto pianifichiate, la valigetta si aprirà solo all'ultimo tentativo.

Quanti tentativi vi sono necessari, per aprire la valigetta?

2.3 Società (molto poco) sportiva

Questo problema ha un paio di premesse.

Per cominciare, sappiamo tutti (sì, anche voi) benissimo che ad Alice non piace la teoria della probabilità, e in questo problema è facile parlarne; ma è una cosa che sta, diciamo così, abbastanza sullo sfondo a guardare cosa succede; la via risolutiva passa, come è facile vedere, tutta da un'altra parte.

La seconda premessa è che tempo fa avevamo proposto un non-problema, nel senso che vi chiedevamo di "pensarci" e la soluzione è poi diventata un PM. Forse, sarebbe stato più semplice pensarci se avessimo proposto prima questo; non solo, ma nell'originale l'ambientazione era la stessa.

Ci sarebbe una terza premessa, scarsamente importante: a noi sembra fortemente legato ad un ramo della matematica nel quale Rudy ha sempre avuto dei problemi ad orientarsi. No, come dovrebbe essere subito evidente, non si tratta di trigonometria. Pronti? Via.

La società sportiva della quale voi e altre novantanove persone fate parte ha appena cambiato tutti gli armadietti (...ve l'avevano detto, quindi siete stati costretti a estinguere come rifiuti speciali i vostri calzini portafortuna che non venivano lavati dal Cretaceo); volendo stimolare l'ambiente al pensiero creativo, il Presidente della società ha preso

[6] Premio speciale della giuria a chi riconosce l'origine della citazione. Il numero, non l'autore. Troppo facile, questo. Nel caso, Obelix (lo sapete, vero, che il nuovo gatto convivente con Rudy si chiama così?) gradirebbe avere ulteriori notizie (...tipo cosa vuol dire il nome, come si legge, qual è la sua visione del mondo e cose del genere...).

tutti e cento i tagliandini con i vostri nomi e li ha messi uno dentro ogni armadietto, senza alcun ordine prestabilito; poi, vi ha radunati tutti nella bolla del tennis e, dall'alto della sedia arbitrale, ha tenuto un discorsetto dal quale scoprivate che siete tutti quanti nei guai: attentamente sorvegliati dal custode, il vostro compito sarà di trovare il vostro armadietto. O meglio, sperarci.

In pratica, dopo mezz'oretta per pensare tutti assieme ad una strategia, uno per volta entrerete nello spogliatoio e sarete autorizzati ad aprire cinquanta (la metà) armadietti: se in uno dei cinquanta trovate il vostro nome, vi verrà garantito un accesso vitalizio alle strutture; altrimenti verrete cacciati con ignominia e non vi verrà restituita neppure la quota sociale. E siccome sta tornando di moda il Team Building, basta che *uno di voi* non trovi il proprio nome che verrete cacciati tutti (no, il contrario non è valido: per l'accesso vitalizio, dovete trovare *tutti* il proprio nome. Evidentemente, una volta eseguito il compito, non potete parlare con nessuno dei vostri consoci.

Ora, se procedete a casaccio, 0.5 elevato 100 ve lo calcolate voi, e grande sarà la vostra soddisfazione nel sapere quale sia la probabilità di restare soci seguendo questa strada; ma, pensandoci, vi viene in mente che forse potreste sfruttare la mezz'ora per definire una strategia comune per aumentare le vostre probabilità.

Siccome anche noi siamo buoni, vi diciamo che, secondo alcuni, si può arrivare a un trenta per cento di probabilità di restare *tutti* soci e conquistare l'accesso vitalizio. Qualcuno ha un'idea?

Oh, nel caso la risposta sia "sì", Rudy si è posto una domanda (no, non ha la risposta): con la strategia che avete appena trovato, come procede la crescita delle probabilità, modificando quel "cinquanta"? Quanti dovreste estrarne, secondo la vostra strategia, per avere una probabilità (tutti assieme, logico) maggiore di 0.5?

Ah, "Gli tiro un calzino ed eleggo un nuovo Consiglio Direttivo" non vale. Troppo facile!

3. Bungee Jumpers

Un *grafo semplice* è un grafo nel quale non esistono archi che partano e arrivino da uno stesso nodo.

La *valenza* di un nodo è il numero di archi uscenti da un nodo.

Un *circuito hamiltoniano* è una visita all'intero grafo che passa una e una sola volta da ogni nodo, terminando sul nodo di partenza.

Dimostrare che in un grafo semplice di $n \geq 3$ nodi nel quale ogni nodo ha valenza maggiore o uguale a $n/2$ esiste sempre un circuito hamiltoniano.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Novembre!

Quasi finito, veramente, ma che ci volete fare…

4.1 [283]

4.1.1 Un problema riformulato.

Ritorna questo problema che aveva tanto fatto discutere:

> *Alice, Doc, Rudy, Albert e Fred espongono un problema a testa, catalogati in base alla loro difficoltà da 1 a 5, e non ci sono due problemi di ugual difficoltà. Ognuno ha una maglietta di colori e diverso; per ognuno dei problemi, abbiamo ricevuto un numero diverso di soluzioni, tra 70 e 74.*
>
> *Il numero di solutori del problema di chi ha la maglia gialla (che non è Alice) sono 3 in meno del numero di solutori del problema di Doc.*

Il problema di Rudy ha avuto ha avuto 72 solutori e la sua maglietta non è né gialla né verde.

Il problema di Albert ha un solutore in meno rispetto a quello di chi ha la maglietta blu e la difficoltà del suo problema è un numero dispari.

La difficoltà del problema di Alice e quella del problema di Fred assomano ad un totale di 7 (e quello di Fred è più difficile di quello di Alice).

Chi ha la maglia rossa ha presentato un problema di due punti più difficile di quello presentato da chi ha la maglia blu.

Uno tra Doc e chi ha avuto 74 solutori per il problema ha la maglietta rossa, mente l'altro aveva un problema di difficoltà 5.

La maglietta di Fred non è né blu né verde; tra Fred e Doc, almeno uno ha un numero dispari di solutori

Chi ha presentato un problema di difficoltà 3 è o chi ha avuto 73 solutori o Alice, il cui problema ha avuto 71 solutori.

Quanti solutori ha avuto il problema di Alberto?

Di che colore è la maglietta di Fred?

Qual era la difficoltà del problema di Rudy?

Il mese scorso abbiamo pubblicato le soluzioni di ***Valter***, ***trentatre*** e ***Galluto***, quest'ultimo ci ha ancora scritto:

> Dopo aver visto nell'ultimo numero che tutti gli altri lamentavano un errore nelle condizioni, ho ripercorso la mia soluzione che confermo e ripropongo aggiungendo i vari passaggi. Come Valter, ho numerato le otto condizioni e man mano che coloravo le celle in rosso o verde, ci scrivevo dentro la condizione che mi permetteva di colorarle; ho fatto due giri delle condizioni; partendo dallo schema vuoto, il primo giro mi porta al seguente risultato:

		Maglietta					Solutori					Difficoltà				
		Gialla	Verde	Rossa	Blu	Altra	70	71	72	73	74	1	2	3	4	5
Nome	Alice	1					8	8	2	6	8	4			4	4
	Doc	1		6			1	1	1	6	6					
	Rudy	2	2				2	2	2	2	2					
	Albert						8	8	2	6	3		3		3	
	Fred		7		7		8	8	2	6	8	4	4	4		
Difficoltà	1			5												
	2			5												
	3															
	4				5											
	5			6	5											
Solutori	70				3											
	71															
	72	1	2													
	73	1														
	74	1														

1. Né Alice né Doc hanno la maglia gialla
2. chi ha la maglia gialla ha al massimo 71 solutori
3. Doc ha almeno 73 solutori
4. Rudi ha 72 solutori e quindi riga Rudi e colonna 72 del riquadro Nome/Solutori è rossa
5. La maglietta di Rudi non è né gialla né verde; la maglietta di chi ha 72 solutori non è verde (gialla era già esclusa)
6. Albert non ha la maglietta blu e la sua difficoltà non è né 2 né 4
7. La difficoltà di Fred è 4 o 5, quella di Alice è 2 o 3
8. Chi ha la maglia rossa non può avere difficolta 1 o 2; chi ha la maglia blu non può avere 4 o 5
9. Doc non ha 74 solutori e non ha la maglia rossa

10. Doc ha per forza 73 solutori (unica cella libera della riga) e il resto di riga e colonna sono rosse
11. Chi ha la maglietta rossa non ha difficoltà 5
12. Fred non ha la maglia né blu né verde
13. **13.** Alice ha avuto 7 solutori; ad Albert rimane libera solo la cella del 70 e quindi a Fred quella del 74.

Dopodiché, ricomincio dalla 1 e completo lo schema:

		Maglietta					Solutori					Difficoltà				
		Gialla	Verde	Rossa	Blu	Altra	70	71	72	73	74	1	2	3	4	5
Nome	Alice	1	3b	3b	3b	3b	8	8	2	6	8	4	5b	5b	4	4
	Doc	1	3b	6	3b	3b	1	1	1	6	6	8b	5b	8b	6b	6b
	Rudy	2	2	6b	3b	6b	2	2	2	2	2	6b	5b	6b	6b	6b
	Albert	1b	1b	1b	1b	1b	8	8	2	6	3	8b	3	8b	3	6b
	Fred	1b	7	6b	7	6b	8	8	2	6	8	4	4	4	6b	6b
Difficoltà	1	8b	8b	5	3b	6b	8b	5b	6b	8b	6b					
	2	3b	5b	5	5b	5b	5b	5b	5b	5b	5b					
	3	8b	8b	5b	5b	6b	8b	5b	6b	8b	6b					
	4	3b	5b	5b	5	5b	6b	5b	6b	6b	6b					
	5	6b	6b	6	5	6b	6b	5b	6b	6b	6b					
Solutori	70	1b	1b	1b	1b	1b										
	71	1b	3b	3b	3b	3b										
	72	1	2	6b	3b	6b										
	73	1	3b	1b	3b	3b										
	74	1	3b	6b	3b	6b										

1b

dato che Doc ha avuto 73 solutori, chi ha maglia gialla ne ha avuti 70

dato che Doc ha avuto 73 solutori e non ha la maglia rossa, la cella rossa/73 va colorata di rosso

dato che è Albert ad avere 70 solutori, è Albert ad avere la maglia gialla, e giallo non può avere difficoltà 2 o 4

3b

dato che Albert ha 70 solutori, chi ha la maglia blu ne ha 71, e quindi è Alice ad avere la maglia blu

A questo punto, per la maglietta verde è rimasto solo Doc e posso colorare di verde anche la cella verde/73

oltre a identificare Alice/Blu e Blu/71 (e arrossare righe e colonne) posso colorare di rosso Blu/difficoltà 1

5b

poiché la difficoltà della maglietta blu non può più essere 1, l'unica combinazione possibile rimane Rosso/4 - Blu/2

Alice, che ha la maglietta Blu, ha difficoltà 2

posso anche finalmente cominciare a riempire il riquadro difficoltà/solutori

6b

Doc ha la maglietta verde, e quindi è chi ha la maglietta rossa ad avere 74 solutori

a questo punto, l'unica possibilità rimasta è 72/altro colore

e posso completare anche il riquadro nome/maglietta: Rudi che ha 72 solutori ha la maglietta rossa e Fred ha quella di colore sconosciuto

nel riquadro nome/difficoltà posso associare Rudy a 4 e di conseguenza Fred a 5 (anche per la informazione 4, visto che Alice ha difficoltà 2)

nel riquadro difficoltà/solutori posso associare 72/4 e 74/5

nel riquadro maglietta/difficoltà posso associare 5/altro colore

8b

Dato che non è Alice ad avere difficoltà 3, deve essere quello con 73 solutori; l'altro incrocio è 70/1

E' Doc ad avere 73 solutori e quindi ha la difficoltà 3; Albert con 70 solutori ha la difficoltà 1

rimane da completare il riquadro difficoltà/maglietta, ma è facile vedere che gli accoppiamenti sono Gialla/1 e Verde/3.

Insomma, … per me non avete fatto errori!

Mah, errori o no, è sempre bello vedere un ragionamento alternativo, grazie ***Galluto***. Andiamo avanti.

4.2 [284]

4.2.1 ...qualcuno ha detto "cerchi"?

Il mese scorso abbiamo pubblicato le soluzioni di ***Valter*** e ***Galluto*** per questo problema:

Abbiamo due monete: una fissa di circonferenza pari a radice di due, mentre l'altra, mobile e di circonferenza unitaria, ruota senza strisciare sul bordo della prima. All'inizio, il punto di contatto tra le due monete è marcato. Quando la moneta ruota, ogni volta che un segno incontra l'altra moneta, la moneta senza segno viene a sua volta marcata. Dopo cento giri della moneta mobile attorno a quella fissa, quante marcature ci sono sulla moneta fissa?

Ci ha scritto ***trentatre***, che trova il problema sia rimasto aperto:

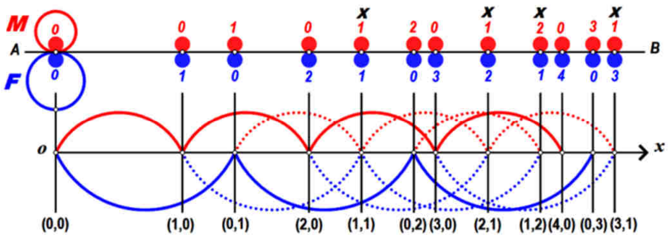
Commento le soluzioni di ***Valter*** e ***Galluto*** che danno risultati diversi, e a mio parere sbagliati. Indico con

$\boldsymbol{M}$: moneta mobile – circonferenza lunga 1

$\boldsymbol{F}$: moneta fissa – circonferenza lunga $\sqrt{2}$

P : il punto di contatto di $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{M}$

$\boldsymbol{f}_n$, $\boldsymbol{m}_n$: i segni colorati sulle circonferenze di $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{M}$.



Il processo è descritto in figura dove

- $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{F}$ (in rosso e blu) sono visti come ingranaggi che ruotano in versi opposti con P che si sposta lungo una retta AB (come in *Valter*)

- i segni $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{f}$ sono i pallini colorati (in rosso e blu) posti a fianco di AB, con indicato il numero progressivo con cui sono generati, e nascono tutti dalla coppia $\boldsymbol{m_0} | \boldsymbol{f_0}$

- un segno $\boldsymbol{m}$ situato in P descrive una cicloide e torna in P dopo uno spostamento 1, lo stesso per un $\boldsymbol{f}$ dopo un spostamento $\sqrt{2}$

- le cicloidi sono gli archi (in rosso e blu); le distanze percorse da P sull'asse $\boldsymbol{x}$ sono indicate con

[1] $x = (a,b) = a + b\sqrt{2},\ \ a,b : \text{interi} \geq 0$

- un nuovo segno $\boldsymbol{f}$ è generato sull'asse $\boldsymbol{x}$ in un estremo di un arco rosso ; il processo inverso genera gli $\boldsymbol{m}$; quindi i segni sono <u>sempre accoppiati</u> come $\boldsymbol{m_n} / \boldsymbol{f_k}$.

Ogni segno ritorna su P dopo un giro della sua moneta, quindi produce una serie continua di cicloidi, con $(0,0)$ che genera i segni $\boldsymbol{m_n}$ e $\boldsymbol{f_n}$ rispettivamente nei punti $(0,n)$ e $(n,0)$, che limitano gli archi blu e quelli rossi; per $\sqrt{2}$ irrazionale questi valori sono tutti diversi.

I segni si accumulano sulle monete ***F*** e ***M***, e in un certo istante ognuna mantiene tutti quelli creati in precedenza; dopo n giri di ***M*** il segno terminale è $(n,0)$ che corrisponde a $\boldsymbol{f_n}$ su ***F***; aggiungendo $\boldsymbol{m_0 | f_0}$ dopo 100 giri completi di ***M*** si ha la soluzione corretta

[2] i segni colorati su ***F*** sono **101**

i segni colorati su ***M*** sono $\left\lfloor 100/\sqrt{2} \right\rfloor + 1 = \mathbf{71}$.

Ho aggiunto nel disegno i segni marcati con ***X*** generati dalla rotazione dei precedenti, che a loro volta si ripresentano su P (cicloidi puntinate)

- tutti gli ***X*** hanno valori irrazionali dati da

[3] $x = (a,b) = a + b\sqrt{2}, \quad a,b$: interi ≥ 1

- in ogni ***X*** arrivano due archi dei due colori, cioè coincidono in P due segni creati in precedenza; in questo caso non si creano nuovi segni perché

a) nel testo si parla di segni lasciati "sulla moneta senza segno"

b) i segni ***X*** coincidono con gli esistenti e tutti sono punti sulle circonferenze, ma due punti coincidenti sono in geometria lo stesso punto, e due numeri uguali sono in algebra lo stesso numero.

Tornando alle soluzioni pubblicate, ***Galluto*** considera correttamente solo i punti generati da $(0,0)$ ma nel conto finale calcola i segni sulla moneta mobile fatti da 100 giri della fissa, anziché il contrario.

Valter, se ho capito bene, include anche i punti ***X*** (cioè conta le macchie *fisiche* e non i punti *matematici*)

- si può trovare (ometto la dimostrazione) che il numero di ***X*** inclusi in un intervallo unitario, cioè i valori di tipo [3] che rispettano $(n,0) < x < (n+1,0)$, è dato da $p_n = \left\lfloor n/\sqrt{2} \right\rfloor$

- il numero di ***X*** dopo k giri di ***M*** è quindi

$s(k) = p_1 + p_2 + \ldots p_{k-1}$

- la cui sequenza $1,3,5,8,12,16\ldots$ si trova in OEIS A183139.

Dopo 100 giri i punti ***X*** sono $s(100) = p_1 + p_2 + \ldots p_{99} = \mathbf{3451}$

- che aggiunti a quelli della soluzione [2] danno **3552** punti su ***F*** e **3522** su ***M***.

Questi sono esattamente i valori di *Valter*, quindi il suo calcolo è esatto (o forse è esatto il suo programma più che il calcolo, piuttosto criptico), ma resta che gli ***X*** non andrebbero inclusi.

In conclusione, le due soluzioni peccano soltanto per una lettura imprecisa del testo del problema (peccato veniale, spesso causato da una "ambientazione" lucidamente contorta).

Poiché interessano solo le circonferenze di ***F*** e ***M*** e il punto P di contatto, il problema si può generalizzare: le "monete" possono avere qualsiasi forma purché convessa, con P che descrive una linea continua. P.es. due ellissi che ruotano uno sull'altro oppure a cavallo di un cerchio, un quadrato e un triangolo lungo una retta, ecc. Il processo è infinito se il rapporto dei perimetri è irrazionale, termina se razionale.

Notate le delicate parole di ***trentatre*** sull'ambientazione "lucidamente contorta" del Capo? In Redazione siamo molto meno gentili… E adesso finalmente i problemi presentati ad ottobre.

4.3 [285]

4.3.1 Supertask, ma noi ci fermiamo prima (voi, no)

Il Capo dà da fare a tutti, a voi più che a noi a quanto pare:

> *Abbiamo un segmento, e ai suoi estremi scriviamo il numero 1. Nel mezzo, scriviamo il numero somma dei due numeri più vicini, quindi il numero 2; questo divide il nostro segmento in due segmenti, e quindi facciamo la stessa operazione, inserendo il numero 3 sia tra 1 e 2 che tra 2 e 1; definiamo queste due operazioni "passi": un "passo" è, data la nostra linea, mettere tutti i numeri necessari, ognuno a metà di un intervallo. E avanti in questo modo. Dopo il 1991-esimo passo, quante volte scrivete il numero 1991? Esiste un metodo per calcolare quante volte compare n dopo l'n-esimo passo?*

Al solito la prima soluzione è quella di ***Valter***:

> Non penso che con "metodo" intendiate quanto sono riuscito a realizzare; propongo comunque, meglio non saprei fare. Il metodo permette di ottenere, direttamente, i valori presenti sul segmento al passo n senza iniziare dal passo 1. All'n-esimo passo sul segmento vi sono 2^n+1 valori, li indico numerandoli partendo da 1; i primi due valgono:1,n+1. Poi il metodo si serve, per i valori seguenti, solo del numero con cui li indico e dai due valori che li precedono.
>
> Basta conoscere man mano solo gli ultimi due valori calcolati dato che il loro numero di posizione incrementa di 1. Un programma, in questo modo, ha in memoria poche informazioni, non deve iniziare da 1-2-1 e procedere con i passi. Il programma non ha problemi di memoria ma dato che 2^n è esponenziale, diventa intrattabile per tempi elaborazione.
>
> Già con n=70, quello che ho realizzato, dopo ore di elaborazione, non aveva, ancora, terminato di calcolarli tutti. Lo allego se interessasse; fornisce due risultati, conviene commentarne uno dei due e non eccedere con il valore n:
> - confronta il segmento ottenuto partendo dal passo 1 sino a n con quello del metodo, come verifica di correttezza
> - conteggia quante volte è scritto x dopo l'x-esimo passo per x che va da 3 sino ad n; ovviamente, non sino a 1991.
>
> Metodo:
> - siccome, dopo il 2 a centro segmento, i seguenti sono speculari, ma in ordine inverso, genero i valori sino al 2
> - calcolo la massima potenza di 2 divisibile per il numero posizione del valore da inserire, dopo i due precedenti
> - ad esempio:
> -- il primo, dopo i primi due fissi che valgono: 1 e n+1, è in posizione 3 quindi la potenza massima vale 0: $2^0=1$
> -- per il valore in posizione 4 vale 2, in posizione 5 di nuovo 1, in 6 vale 2, in 7 nuovamente 1, in $8=2^3$ è 3, …
> - nel il calcolo del nuovo valore da inserire, devo utilizzarla per ricavare: "p" = [(potenza massima – 1)*2] + 1
> - indicando con "x" e "y" i valori, nell'ordine, che lo precedono, quello nuovo si ricava con la formula: $y*p – x$.
>
> Proprietà dedotte analizzandone l'output; alcune sono riuscito a dimostrarle altre solo ipotizzate dai suoi valori (non dettaglio per non appesantire ulteriormente le mie farneticazioni; solutori più abili possono commentarmele):
> - un valore che si aggiunge al segmento come somma dei due numeri più vicini, ovviamente resta nei passi seguenti
> - può comparire, però, come somma di più coppie di valori; il valore presente in

posizione tre, equivale al passo
- il valore più piccolo che “nasce” al passo n è in posizione tre il più grande l’(n+2)-esimo numero di Fibonacci
- i numeri di Fibonacci, al passo n, sul segmento, sono n+1; i due 1, sono agli estremi, i restanti in posizione (per quanto detto prima, considero solo la prima metà del segmento e la posizione è di quello creato per primo):
-- 2 a metà segmento cioè in posizione: $2=2^{n-1}+1$
-- 3 a metà a sinistra della metà, cioè a metà fra il primo 1 e il 2: 2^{n-2}
-- 5 a metà strada fra il 2 e il 3: $2^{n-1}+2^{n-2}$
-- 8 a metà strada fra il 3 e il 5: $2^{n-1}+2^{n-2}-2^{n-3}=2^5+2^4-2^3$
-- …
- il numero di valori dispari, sul segmento, al passo n, è: ⌈(2^(n+1)/3)⌉;…ma con n pari è necessario sottrarre 1
- anche per n pari, comunque, al tendere di n ad infinito, tale rapporto fra valori dispari e pari tende a 2 su 1
- come nella sequenza dei numeri di Fibonacci, ogni due valori pari vi è un valore dispari, nel caso di n dispari
- i valori dispari “x” compaiono per la prima volta in posizione quattro al passo ⌈x/2⌉, poi solo ai passi x–1 e x
- regola per ottenere le occorrenze sul segmento dei valori inferiori al passo; che non varia più successivamente:
-- fattorizzo il valore; ad esempio: $63 = 3^2 * 7$, $27 = 3^3$, $49 = 7^2$, $47 = 47^1$
-- sottraggo 1 ai primi che compongono la fattorizzazione, e ricavo: $p_1, p_2, \ldots$
-- elevo i primi alla potenza di fattorizzazione meno 1, ed ottengo: $e_1, e_2, \ldots$
-- il numero di occorrenze si calcola, quindi, con la formula: $p_1 * e_1 * p_2 * e_2 * \ldots$
-- ad esempio le presenze dei valori 63, 27, 49 e 47 elenca più sopra sono:
--- $(3-1)*3^{(2-1)}*(7-1)*7^{(1-1)} = 2*3*6*1 = 36$
--- $(3-1)*3^{(3-1)} = 2*9 = 18$
--- $(7-1)*7^{(2-1)} = 6*7 = 42$
--- $(47-1)*47^{(1-1)} = 46*1 = 46$.

Per rispondere alla domanda: 1’991 si fattorizza in 11*181; dal 1’991-esimo passo, dovrebbe comparire 1’800 volte. Sul segmento i numeri primi “p” non superiori al passo si riconoscono in quanto sono i soli a comparire p–1 volte.

È poi arrivata la versione di ***Luigi***:

Per ora mi sono avvalso della sola forza bruta e sono arrivato comunque a conclusioni che mi sembrano interessanti anche se dimostrate solo empiricamente.

La statistica non è alta, avendo calcolato (con un programma fatto in casa) trenta passi. I risultati però penso siano abbastanza chiari.

Indichiamo con o(n) la funzione che indica le occorrenze del numero n nel segmento

Consideriamo inoltre che il numero n può comparire nel segmento solo fino al passo n–1 (dopodiché compaiono solo numeri più alti)

Ciò premesso, considerata la tabella delle occorrenze dei primi 31 numeri (che allego), ho estrapolato le seguenti regole:

1. Dato un numero primo p, $o(p) = p-1$, (risultato empirico a cui forse qualcuno riuscirà a dare una giustificazione teorica)

2. Dato un numero n composto da due (o più) numeri primi $p*q$, $o(n)=o(p*q) = o(p)*o(q)$

3. Dato un numero primo p, $o(p^k) = o(p)*p^{(k-1)}$

Con queste tre regole possiamo calcolare le occorrenze di qualsiasi numero n nella tabella.

Ad esempio

$o(25) =o(5^2)= o(5)*5 = (5-1)*5 = 20$

$o(20) =o(2^2*5)=o(2^2)*o(5)=o(2)*2*o(5)=1*2*4=8$

o(1991) = o(181+11)=o(181)*o(11)=(181–1)*(11–1)=180*10= **1800**

Voi mi direte (giustamente) che occorre dimostrarlo, ed io vi risponderò “dimostratemi il contrario”! :-).

Ma anche no, come dice il Capo. Vediamo che cosa ne dice ***Galluto***:

È al di sopra delle mie forze, ma presento comunque qualche ragionamento, casomai facesse venire qualche idea agli altri: se scrivo su colonne successive i numeri dei vari passi…

posizione	passo 1	passo 2	passo 3	passo 4	passo 5	passo 6	passo 7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3		1	2	3	4	5	6
4			3	5	7	9	11
5			1	2	3	4	5
6				5	8	11	14
7				3	5	7	9
8				4	7	10	13
9				1	2	3	4
10					7	11	15
11					5	8	11
12					8	13	18
13					3	5	7
14					7	12	17
15					4	7	10
16					5	9	13
17					1	2	3
18						9	14
19						7	11
20						12	19

ad ogni riga vedo quale numero comparirà, ad un determinato passo, in quella posizione; ad esempio, dopo il passo 7, in sesta posizione ci sarà il numero 14 (ho chiamato passo 1 quello con i soli due 1 agli estremi del segmento).

La cosa importante è che ogni riga è caratterizzata da un numero iniziale e poi da numeri crescenti sempre dello stesso modulo; ad esempio, la riga 6 comincia con 5 e poi avanza sempre di 3 in 3.

Per ogni riga, quindi, sono possibili tre casi:

- Il numero che vogliamo (uso come esempio il 1991) NON comparirà mai in quella posizione perché il numero in questione, meno il valore iniziale della riga, non è un multiplo del modulo; è il caso della riga 8, perché 1991 – 4 = 1987 non è un multiplo di 3
- Il nostro numero comparirà in quella posizione “in tempo”, e cioè prima del passo 1991, o esattamente a quel passo; ad esempio, la riga 2, che arriverà a 1991 “giusto in tempo”, o la riga 4, che ci arriverà al passo 997
- Il nostro numero comparirà, ma troppo tardi; è il caso della riga 3

Ad ogni passo, tutte le sequenze si ripetono, traslate di una colonna (ad esempio, la sequenza della riga 4 si ripresenta alla riga 7, e poi alla 13, …), e ne nascono delle nuove.

Quindi, senza bisogno di sviluppare lo schema fino al passo 1991, so già che di sequenze come quella della riga 4 ce ne saranno 1989, in 995 delle quali il nostro 1991 arriverà in tempo, mentre nelle altre arriverà troppo tardi

Per ogni sequenza valida, inoltre, ce ne sarà un’altra simmetrica rispetto al 2 centrale, in cui il 1991 sarà il valore iniziale.

Man mano che, passo dopo passo, i numeri salgono saranno sempre più rari i casi in cui una riga mi produrrà una nuova sequenza valida, fino a non produrne più; da quel momento, ogni passo mi produrrà soltanto una nuova “edizione” di ciascuna

> delle sequenze già individuate e dovrò solo verificare per quali siamo ancora in tempo.
>
> E qui mi sono arenato perché non ho trovato il modo di prevedere quali nuove sequenze si possono produrre, senza bisogno di sviluppare ulteriormente la mega tabella; arrivato al passo 22 e ad un excel di oltre mezzo milione di righe mi sono arreso.

Noi – come dice il titolo – ci siamo fermati molto prima. Andiamo avanti, siamo certi che arriverà altro.

4.3.2 Leone atletico e arrabbiato

Il secondo problema di questo mese aveva a che vedere con un povero leone in gabbia, crudeltà che condoniamo solo perché completamente virtuale ed ideale anche nelle curve:

> *Il Leone è chiuso in una gabbia circolare avente raggio di 10 metri. Parte in linea retta, poi svolta di un angolo casuale (svolta puntiforme) e ricomincia a correre in linea retta, e va avanti così, disegnando una spezzata che si trova tutta all'interno del recinto circolare, ma i vertici non sono necessariamente sulla circonferenza. Dopo che ha percorso in questo modo 30 chilometri, qual è il limite minimo della somma degli angoli di svolta?*

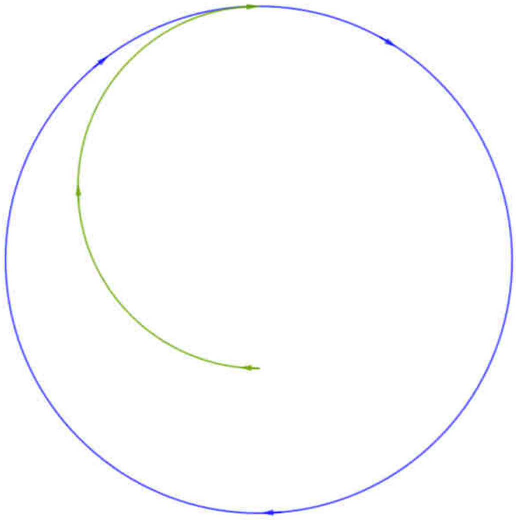
Per cambiare partiamo con ***Galluto***:

> Visto che dovrebbe essere un problema da tre pipe, temo di averla pensata troppo semplice; comunque:
>
> - Ogni volta che la spezzata fa compiere al leone un giro, la somma degli angoli della spezzata è di 2π
> - A parità di angolo di svolta, il singolo segmento ha lunghezza massima se comincia e finisce sulla circonferenza
> - Se il leone percorre un quadrato inscritto nella circonferenza, ad ogni giro fa $4\sqrt{2}$ R metri, e cioè 56,57 metri
> - Se percorre un esagono regolare, un giro vale 6 R metri, e cioè 60 metri
> - Se percorre un dodecagono…
> - Il limite è se la spezzata è composta da segmenti infinitesimi, con il singolo angolo di svolta pure infinitesimo, e il leone corre rasente la circonferenza, percorrendo 2π R metri ogni giro, e cioè 62,83 metri
> - Per fare 30 chilometri deve compiere 477,47 giri e quindi la somma degli angoli è $954{,}93\pi$

Continuiamo con ***Valter***:

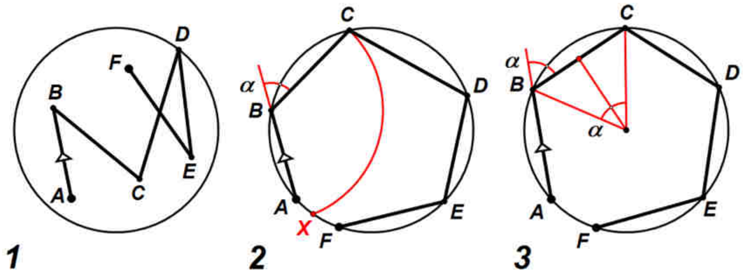
> So che mi ripeto: ho dei dubbi su quanto ho pensato perché strano; lo propongo solo per partecipare:
>
> - faccio tendere verso il limite 0 la lunghezza di tutti le corse in linea retta del Nostro (Leone)
>
> - considero il punto in cui si trova all'inizio della spezzata, che disegna all'interno del recinto
>
> - da qui passando per il centro della gabbia sino ad incontrarla, traccio il diametro di un cerchio
>
> - disegno la semicirconferenza del cerchio, dal punto di partenza fino a congiungersi con la gabbia
>
> - il percorse del Leone seguirà la semicirconferenza e poi continuerà girando accostato alla gabbia
>
> - il limite minimo è π sulla semicirconferenza più tante volte 2π con i rotti, per arrivare a 30 km
>
> - le volte di 2π si calcolano dividendo 30 km meno la semicirconferenza per la circonferenza gabbia
>
> - la circonferenza della gabbia vale 20π metri quella della semicirconferenza da suo

diametro per π
- i rotti si ottengono dai radianti dell'arco di circonferenza gabbia di lunghezza resto divisione.



Per concludere in bellezza, passiamo la parola a ***trentatre***, che ci ha scritto: "*La soluzione numerica è semplice e si può ricavare in vari modi; prevedo che qualcuno sarà più bravo e più breve, ma io ho seguito una strada lunga e tranquilla. Come l'autunno che auguro a tutti voi.*":

Per un percorso p interno al cerchio indico con N il numero di punti di svolta; R il raggio del cerchio; L la lunghezza totale dei tratti di p; θ la somma in radianti degli angoli di svolta; $\theta_{\min}$ il limite minimo chiesto dal problema.



Parto da un caso semplice; in fig. 1 $p = ABCDEF$ con $N = 4$ è il percorso a zig-zag fatto dal leone, con $N+1=5$ lati e $N+2=6$ punti

- p è ridisegnato in fig. 2 con gli stessi lati e i punti posti sul cerchio; dopo AB il successivo punto C può stare solo sull'arco di cerchio CX con centro in B e la posizione scelta garantisce il <u>minimo angolo di svolta</u> α; procedendo si hanno tutti i punti sul cerchio, le svolte con lo stesso verso e θ ridotta a parità di L

- una ulteriore riduzione si ottiene in fig. 3, spostando i punti in modo che tutti i lati abbiano la stessa lunghezza $s = L/(N+1)$

- accenno alla dimostrazione: spostando B nel punto di mezzo dell'arco ABC, l'angolo di svolta α non cambia - perchè AC è una corda - ma $(AB+BC)$ aumenta; ripetendo si ottengono i tratti tutti uguali con L aumentato e θ invariato; la situazione si inverte, con θ ridotto, ricalcolando s come sopra.

Da fig. 3 si ha

$s = L/(N+1) = 2R\sin(\alpha/2),\ \ \theta = N\alpha$

- con i dati del problema $L/(2R) = 30000/20 = 1500$

[1] $(N+1)\sin(\theta/(2N)) = 1500$ e invertendo

[2] $\theta(N) = 2N\arcsin\left(1500/(N+1)\right)$

- la funzione esiste nell'intervallo $0 \le 1500/(N+1) \le 1$ da cui gli estremi di θ

$N \to \infty,\ \theta_0 = \lim_{N\to 0}\ 2N\arcsin(1500/(N+1)) = 2\cdot 1500 = 3000^{rad}$

$N \to 1499,\ \theta_1 = 2\cdot 1499\arcsin(1) = 2\cdot 1499\cdot \pi/2 = 4709.25^{rad}$

- la funzione [2] è dunque decrescente con un asintoto in

$$\boxed{\theta_{\min} = \theta_0 = L/R = \mathbf{3000}^{\boldsymbol{rad}}}$$

- che è la soluzione del problema.

Questo equivale a partire da un punto sul cerchio e correre lungo il cerchio per un tragitto lungo L; quindi il numero di giri è $g = L/(2\pi R)$; ad ogni giro la direzione di marcia ruota di 2π e $\theta = g\cdot 2\pi = L/R = 3000$; il percorso implica infiniti tratti nulli, cosa impossibile per il leone, ma si tratta appunto di un valore asintotico non raggiungibile.

Il valore massimo θ_1 corrisponde invece a un percorso possibile, con tutti i tratti di lunghezza massima, pari al diametro del cerchio e quindi con ogni svolta di π radianti, da cui infatti

$$s = 2R = L/(N+1) \to N = L/(2R) - 1 = 1499 \to \theta_1 = N\pi = 1499\pi\,.$$

L'augurio per l'autunno ci sentiamo di girarlo anche a tutti i lettori che sono arrivati fino a qui, con cui presto scambieremo auguri più invernali. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Esistono molti modi per dividere un n-agono (convesso) in triangoli attraverso diagonali non intersecantesi.

1. Dimostrate che il numero di triangoli ottenuto è indipendente dal modo scelto (trovandone il numero)
2. Dimostrate che il numero di diagonali coinvolte nella decomposizione è indipendente dal modo scelto (trovandone il numero).

    1. *In un n-agono diviso in k triangoli dalle diagonali non intersecantesi, la somma degli angoli interni dei triangoli vale k**180°*, ma questa somma può essere anche valutata in un altro modo: visto che le diagonali non si incrociano tra loro, i vertici dei triangoli devono essere anche vertici dell'n-agono; la somma degli angoli dei triangoli deve allora essere pari alla somma degli angoli dell'n-agono, che è (n–2)**180°. *Eguagliando le due espressioni ottenute, si ricava k=n–2, che non dipende dal modo scelto.*
    2. *Sia l il numero di diagonali della decomposizione. Ogni triangolo ha tre lati, e quindi il numero dei lati di triangoli è pari a* 3*(*n*–2). *A ogni diagonale è lato di due triangoli, mentre ogni lato dell'n-agono è lato di un triangolo. Quindi, deve essere* 3*(*n*–2)=2*l*+*n, da cui si ricava l=n–3, che non dipende dal modo scelto.*

6. Pagina 46

Questa dimostrazione (dovuta a ***Donald Newman***) si basa su una rappresentazione nel "mondo reale" del problema.

Rappresentiamo i vertici del grafo come n persone; se un arco unisce i due nodi A e B, questo significa che A e B sono amici. Il teorema, quindi, stabilisce che n persone, ciascuna delle quali ha almeno $n/2$ amici nel gruppo, possono sedersi attorno ad un tavolo circolare in modo tale che ciascuno abbia ai fianchi due amici.

Procediamo per assurdo, e supponiamo di avere un grafico tale che sia impossibile organizzare il tavolo con le condizioni date; introduciamo, allora, un certo numero k di persone amiche di tutti gli n membri del gruppo.

Se $k=n$, è evidentemente possibile organizzare un tavolo, alternando un "amico di tutti" con un appartenente a gruppo originale; supponiamo quindi esista un k minimo al di sotto del quale è impossibile organizzare l'incontro. Supponiamo inoltre che tra due dati A e B sieda un "amico di tutti" P. È evidentemente uno spreco di risorse avere due "amici di tutti" uno vicino all'altro, quindi A e B devono appartenere al gruppo originale; inoltre, A e B non possono essere amici, altrimenti non avremmo necessità di interporre P tra di loro.

Denotiamo quindi le posizioni attorno al tavolo come $APBX\ldots YA$ (l'ultima A coincide con la prima, essendo la disposizione circolare), e indichiamo con l'apice la condizione di "essere amico di"; quindi, una persona indicata come A' sarà amica di A, e così via; mostriamo che una combinazione $A'B'$ (un amico di A seguito da un amico di B) non può comparire nella nostra configurazione.

Non potendo A essere amico di A (per la definizione di *grafo semplice*), la coppia iniziale AP non può configurarsi come $A'B'$; nello stesso modo, PB non può configurarsi come $A'B'$ in quanto B non può essere B'. Infine, BX non può essere un $A'B'$ in quanto A e B non sono amici.

All'altro capo della catena, YA non può essere un $A'B'$ per le stesse ragioni.

Possiamo ipotizzare che la nostra composizione sia di tipo $APB\ldots A'B'\ldots A$. Invertendo l'ordine del gruppo tra B e A' (estremi inclusi), otteniamo $APA'\ldots BB'\ldots A$. Ma essendo per definizione A' un amico di A, allora non ci è più necessario P; quindi sono necessari solo $k-1$ "amici di tutti", contraddicendo quindi il fatto che k sia il valore minimo; quindi, non possono comparire coppie $A'B'$, e quindi *ogni amico di* A *deve essere seguito da una persona non amica di* B.

Essendo la valenza di ogni vertice almeno $n/2$, ognuno degli originali n nodi ha almeno $n/2$ amici nel gruppo. Quindi, A ha almeno $n/2+k$ amici tra tutte le $n+k$ persone. Ma siccome ognuno di questi A' è seguito da un *non-*B', questi ultimi devono essere almeno nello stesso numero, ossia deve essere *non-*$B' \geq n/2+k$ e $B' \geq n/2+k$ (visto che questo è il numero di amici di qualsiasi persona del gruppo originale, contando anche gli "amici di tutti").

Ma ognuno è o un B' o un *non-*B'; sommando queste due diseguaglianze otteniamo $n+k \geq n+2k$, che è una contraddizione a meno che sia $k=0$. Il che dimostra il teorema.

7. Paraphernalia Mathematica

Anche se l'argomento di cui abbiamo intenzione di parlare questa volta è piuttosto noto, ci pare che di solito si tenda a fermarsi ai punti principali, senza andare a vedere alcune caratteristiche un po' meno note della cosa.

7.1 ...un passo indietro... Perfetto!

Ci ha sempre un po' stupito come vengano ricordate come persone importanti quelle che svolgono il lavoro creativo di sviluppo di un'idea, mentre siano bellamente ignorati quelli che, spesso in sottofondo, mettono ordine e danno un senso compiuto a tutto quanto creato da altri; ***Merin Mersenne***[7] ha fatto un grosso lavoro di riordino nella matematica, mantenendo una corrispondenza epistolare con Cartesio, Pascal, Galileo, Huygens e altri, ma oggi è ricordato (...e solo perché all'improvviso sono diventati *utilissimi*) unicamente per l'insieme di numeri avente caratteristiche piuttosto strane. Che, tra l'altro, potrebbe non aver neanche scoperto lui.

Infatti, i ***Numeri di Mersenne*** sono stati chiamati in questo modo da ***W.W. Rouse Ball***, che ha trovato un riferimento in merito nel *Cogita Physicomathematica* (Parigi, 1644).

I primi numeri di Mersenne, come amiamo dire, sono cultura generale, e sono formati attraverso i primi numeri primi: li trovate, eventualmente scomposti nei loro fattori, nella tabellina qui sotto.

Numero	Fattori
$M_2=2^2-1=3$	Primo
$M_3=2^3-1=7$	Primo
$M_5=2^5-1=31$	Primo
$M_7=2^7-1=127$	Primo
$M_{11}=2^{11}-1=2\,047$	$=23\cdot 89$
$M_{13}=2^{13}-1=8\,191$	Primo
$M_{17}=2^{17}-1=131\,071$	Primo
$M_{19}=2^{19}-1=524\,287$	Primo
$M_{23}=2^{23}-1=8\,388\,607$	$=47\cdot 178\,481$
$M_{29}=2^{29}-1=536\,870\,911$	$=233\cdot 1\,103\cdot 2\,089$

Il loro interesse, almeno per lungo tempo, è stato legato al fatto che possono essere usati per generare i numeri perfetti.

Un ***Numero Perfetto*** è un numero intero uguale alla somma dei suoi divisori propri: ad esempio, 6=1+2+3. Il teorema più importante relativo ai numeri perfetti è stato scoperto metà da Euclide e metà da Eulero; essendo quest'ultimo nato nel 1707, Mersenne ha dovuto accontentarsi di conoscere solo la prima metà, ossia che:

Se 2^p-1 ***è primo, allora*** $2^{p-1}(2^p-1)$ ***è un numero perfetto (pari)***. Prima di vedere il seguito, può essere interessante vedere come Euclide ha espresso la cosa.

> *Se un numero di numeri, a partire dall'unità, sono organizzati in modo continuo in doppia proporzione e se la somma di questi numeri è un primo, e se la somma moltiplicata per l'ultimo dà un qualche numero, il prodotto sarà un numero perfetto*. (Euclide, Elementi, Libro 9, Proposizione 36)

Per capirci:

[7] ...e a questo punto dovreste aver capito la battutaccia del titolo. Per ulteriori dettagli sulla persona, si veda RM092, "Dalla Cella all'Infinito (via Rete)", Settembre 2006.

"n"	2	3	4	5	6	7	8	...	n	...
Sequenza 1	1	2	4	8	16	32	64	...	2^{n-1}	...
Sequenza 2	1	**3**	**7**	15	**31**	63	**127**	...	2^n-1	...

La Sequenza 1 è la sequenza delle potenze di 2; la Sequenza 2 è la somma dei termini della Sequenza 1 sino al termine immediatamente precedente quello che stiamo considerando; se il termine di Sequenza 2 è primo, allora il prodotto di Sequenza 1 e di Sequenza 2 è un numero perfetto. Più chiaro, adesso?

Dobbiamo aspettare circa duemila anni per provare l'inverso, ossia che:

Ogni numero perfetto (pari) ***deve essere nella forma*** 2^{p-1} $(2^p - 1)$***, dove*** $2^p - 1$ ***è primo***. Si noti che se $2^p - 1$ è primo, allora p è primo, ma *non è vero il contrario*. Quindi, per ogni numero di Mersenne primo possiamo generare un numero perfetto, e viceversa.

La dimostrazione di questo ***Teorema di Euclide-Eulero*** presenta dei risvolti interessanti, visto che introduce alcuni nuovi concetti.

> Definiamo la funzione $\sigma(p)$ come la somma dei divisori[8] di p (incluso quest'ultimo); ad esempio, $\sigma(6)=12$, e $\sigma(7)=8$; in particolare, si noti che $\sigma(p)\ \sigma(q) = \sigma(pq)$ solo se p e q sono primi tra loro; quindi, p è un numero perfetto se e solo se $\sigma(p)=2p$.
>
> Per quanto riguarda ***Euclide***, consideriamo il numero $r = 2^{p-1}\ (2^p - 1)$, dove $2^p - 1$ è primo. Da quest'ultima premessa si ricava che (si veda, qui sopra, l'esempio del 7) $\sigma(2^p - 1) = 1+(2^p - 1) = 2^p$. Siccome i soli divisori di un numero potenza di 2 sono sé stesso e tutte le potenze di 2 inferiori ad esso, abbiamo che $\sigma(2^{p-1}) = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{p-1} = 2^p - 1$; quindi,
>
> $$\sigma\left(2^{p-1}\cdot\left(2^p-1\right)\right)=\sigma\left(2^{p-1}\right)\sigma\left(2^p-1\right)=\left(2^p-1\right)\cdot 2^p=2r$$
>
> Quindi, r è un numero perfetto e $2^p - 1$ è primo.
>
> Per quanto riguarda ***Eulero***, supponiamo r sia un numero perfetto (pari), e scriviamolo nella forma $(2^{p-1})q$, dove $p>1$ e q è dispari; essendo 2^{p-1} e q primi tra loro, abbiamo:
>
> $$2^p\cdot q=2r=\sigma\left(2^{p-1}\cdot q\right)=\left(2^p-1\right)\sigma(q)$$
>
> Quindi:
>
> $$\sigma(q)=\frac{2^p q}{2^{p-1}}-q+\frac{q}{2^p-1}$$
>
> Il che significa che $\dfrac{q}{2^p-1}$ è un intero e, assieme a q, è uno dei due divisori di q.
>
> In altre parole, $q = 2^p - 1$ ed è primo. Quindi r è un numero perfetto solo se $2^p - 1$ è primo.

I numeri perfetti hanno alcune curiose proprietà:

- Terminano (quelli pari) tutti per 6 o per 28
- Sono tutti triangolari
- La somma dei reciproci di *tutti* (compresi 1 e il numero stesso, quindi) i suoi divisori è uguale a 2. La dimostrazione di quest'ultima proprietà è piuttosto elegante:

  Sia n un numero perfetto con divisori (incluso n medesimo) d_i. Per definizione di numero perfetto, la somma dei divisori (incluso n) è $2n$; consideriamo allora $n\sum_i \frac{1}{d_i} = \sum_i \frac{n}{d_i}$, dove ognuno dei termini a secondo membro è un d_j per un qualche j; quindi la nostra seconda sommatoria non è altro che $\sum_i d_i = 2n$; quindi $\sum_i d_i = 2$.
- Tutti (quelli pari) sono la somma di potenze successive di 2
- Tutti (quelli pari maggiori di 6) sono la somma dei *cubi* dei primi $2^{p/2}$ dispari.

[8] Si noti che *non abbiamo detto* "primi".

- Tutti hanno *radice*[9] pari a 1.
- Se scritti in base 2 sono formati da n cifre 1 seguite da n–1 cifre 0.

...si è notato che in alcuni casi abbiamo inserito una certa enfasi sul concetto di numero perfetto *pari*? Peccato che nessuno ne abbia ancora trovato uno dispari (o la dimostrazione che non esistono, che va bene lo stesso). Comunque, posto che esistano, dovrebbero avere alcune interessanti proprietà:

- Devono avere più di 150 cifre
- Divisi per 12 o per 4 devono dare resto 1.
- Divisi per 36, devono dare resto 9.
- Devono essere divisibili per almeno 8 primi.
- Non devono essere divisibili per 105 (che è un modo complicato per dire che 3, 5 e 7 non possono essere tutti fattori di un perfetto dispari).
- Devono essere divisibili per la potenza di un primo maggiore di 10^{12}.
- Se hanno esattamente n diversi divisori primi, il più piccolo deve essere minore di $n+1$.

...e, considerato che potrebbe non esisterne nessuno, è incredibile che si sia riusciti a dimostrare tutta questa roba.

Nel 1876, ***Lucas*** (sì, lui) aveva trovato un modo per determinare se un numero della forma 2^p-1 è primo; il test è stato perfezionato da ***D.H. Lehmer***: per determinare se 2^p-1 è primo, sia $S_0=4$, e si calcoli la successione (di p–2 numeri):

$$S_{n+1} \equiv \left(S_n^2-2\right) mod \left(2^p-1\right)$$

Il numero di partenza è primo se e solo se $S_{p-2}=0$. Piccolo problema: S_n^2 tende molto velocemente a $(2^p-1)^2$, che non è esattamente un numerino...

Sempre nell'ambito dei teoremi piuttosto astrusi, può valer la pena di citare il fatto che tutti i divisori primi di 2^p-1 devono essere nella forma $8n\pm1$; inoltre, i conti sono facilitati dal lavorare in basi numeriche maggiori di dieci e, per fare le cose in grande e alla svelta, ***David Slowinski***[10] ha portato tutti i conti in base 2^{24} (che sarebbe 16 777 216); fatica premiata dalla scoperta del ventisettesimo numero di Mersenne.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[9] ...sommate tutte le cifre del numero e ripetete l'operazione sul risultato sin quando ottenete una cifra sola. Il lettore che ha detto "prova del nove" vince una bambolina.

[10] Sì, abbiamo notato il gioco di parole. Ma non è gentile farlo notare a David.