Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 285 – Ottobre 2022 – Anno Ventiquattresimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM285 ha diffuso 3'366 copie e il 04/10/2022 per Google eravamo in 6'490 pagine.

Piace? Regalo di Doc, qualche mese fa. "...e perché ce lo fai vedere solo adesso?" Eh, perché adesso *serve*.

1. Taccuino di viaggio[1] - Padova

"Tranio, since for the great desire I had
To see fair Padua, nursery of arts,
I am arrived for fruitful Lombardy,
The pleasant garden of great Italy."[2]

(William Shakespeare, "*The Taming of the Shrew*", Act I, Scene I)

1 *Palazzo della Ragione*

La prima coppia di spritz arriva allo stesso tavolino dove si consumerà poi un pranzo veloce. Veloce non per ripartire in fretta verso l'albergo ancora sconosciuto, ma proprio per liberare il tavolo suddetto e far posto al portatile che ci consentirà di ripassare la prima delle due conferenze, prevista per la sera stessa.

Padova ci sta già tutta attorno: abbiamo da poco attraversato un ponte e, come sempre, l'idrografia patavina si è mostrata troppo complicata per lasciarci capire quale fosse il nome del corso d'acqua che abbiamo superato, ma la stazione ferroviaria che ci ha accolto è già alle nostre spalle, lontana almeno un chilometro, e i palazzi intorno a noi cominciano a mostrare le architetture proprie di una città orgogliosa del suo centro storico. Noi abbiamo deciso di fermarci perché gli zaini pesano: sono pieni solo delle solite cianfrusaglie, telefoni computer libri tabacco, con l'aggiunta di un cambio di biancheria per la singola notte prevista fuori dalle solite case, ma pesano lo stesso. E poi l'ora era giusta, no? Quindi spritz, pranzetto, ripasso della prima conferenza, birra conclusiva come premio per aver fatto il compitino, e poi via, di nuovo pronti ad un altro chilometro abbondante da fare a piedi, prima di trovare l'albergo misterioso, che i tre stelle sono misteriosi sempre, per definizione.

Fatto sta che finora abbiamo proceduto in chiara e lineare direzione sud, ma per arrivare all'albergo il GPS urla chiaro e forte che dovremo fra poco girare un po' a sinistra, per poi proseguire un altro chilometro. Vabbè, ci siamo riposati, non sarà la passeggiata di un altro quarto d'ora a debilitarci, pensiamo. E non sarebbe neppure un pensiero sbagliato,

[1] I "compleanni" di RM diventano sempre più corti e più ritardatari. Ci sono diverse ragioni per questo, le principali delle quali sono il ridursi dei "matematici nuovi" di cui parlare e – di gran lunga più significativo – l'esaurimento della vena creativa del tradizionale compilatore dei compleanni medesimi. In parte (minima) contribuisce talvolta anche il punto di accumulazione di impegni sull'agenda: ovviamente, spacceremo quest'ultima come la ragione principale, o meglio unica, per rifilarvi un altro compleanno breve e poco in linea con la forma consolidata dei compleanni.

[2] "*Tranio, per il gran desiderio che avevo di visitare la bella Padova, culla delle arti, sono giunto nella fertile Lombardia, ridente giardino della grande Italia*". È (quasi) l'inizio de "La Bisbetica Domata", che contiene il più celebre errore geografico di Shakespeare: Padova è sempre stata in Veneto, e lo era anche ai tempi del Bardo. Ma a un genio come Shakespeare si può perdonare questo e altro. Il "quasi" tra parentesi del periodo precedente dipende dal fatto che, anche se si tratta delle primissime battute della prima scena del primo atto della commedia, non sono le prime che ascolta il pubblico al teatro, perché a precedere il primo atto ci sono anche due scene del "Prologo".

di per sé, se non fosse che è proprio a questo punto che Padova ci salta addosso. Lo fa con la prima piazza dal nome curioso, ricordo mercatale di tempi lontani, e soprattutto con la mole orgogliosa del Palazzo della Ragione. Per la miseria, come si fa a non rimanere colpiti anche solo dal nome, per non parlare dell'architettura? Palazzo della Ragione, una specie di manifesto illuminista nel centro esatto della "culla delle arti", come la chiama Shakespeare. Che poi magari quella "ragione" cantata dal nome dell'edificio è forse meno filosoficamente impegnativa di quanto pensassero Diderot, D'Alembert, Voltaire e tutto un altro stuolo di sapienti, ma l'effetto rimane. Piazza della Frutta, dice la targa sull'angolo, e il giorno e l'ora sono quelli in cui indigeni e turisti si godono il tepore imprevisto di quest'autunno troppo soleggiato e caldo; ma siamo mammiferi pieni di atavici istinti di sopravvivenza e chimiche animalesche, e se la Ragione osannata dal palazzo sa che una meteorologia così attraente nasconde un veleno cupo e pericoloso, la parte meno razionale di noi non riesce a non godere dei venticinque gradi centigradi e dei sorrisi scanzonati degli esseri umani che celebrano il rito del fine settimana.

2 *Caffè Pedrocchi, XIX secolo*

Poi non si fa nemmeno in tempo a guardare dove finisce la piazza che si arriva in un'altra, più grande e luminosa, e dal nome ugualmente tradizionale e alimentare: Piazza delle Erbe, che del Palazzo della Ragione e di Padova tutta mostra la fronte e il volto. Da qui partono tutte le vie che ci interessano: quella da cui siamo arrivati, che quindi punta a nord, e che domani ci riporterà alla stazione, e quindi a casa; e siccome da quella stazione partirà un treno di cui abbiamo il biglietto e l'orario, saranno tanti i posti che, pur non distanti da questa piazza, non riusciremo a vedere. Da qui, più o meno verso nordest, mancano giusto poche centinaia di passi per raggiungere il Caffè Pedrocchi, il famoso "caffè senza porte", perché un tempo era sempre aperto e pieno di avventori, e le porte non servivano. Lo vedremo fra poche ore – incredibilmente – perché è in una sala dal sapore musicale e neoclassico che dovremo parlare a chi avrà avuto voglia di venirci a sentire. Prima però scarpineremo a lungo, inizialmente verso est e poi decisamente a sud, arrivando quasi a sfiorare la basilica del santo che da Padova prende il nome, pur essendo nato davvero lontano dal Veneto, e dalla sua stessa chiesa. Sarà una via antica e accogliente, protetta da portici più stretti di quelli bolognesi, più popolareschi di quelli aristocratici di Torino, e solo alla loro fine troveremo l'albergo e due stanze piccole, quasi da pellegrini. Non lo sappiamo ancora, ma sempre da qui, da piazza delle Erbe, sarà facile trovare il misterioso "palazzo Moroni" che ci attende l'indomani mattina, e che ci riderà in faccia dall'alto della sua mole e facciata, visto che tutto il mondo, di sicuro, sa benissimo che Palazzo Moroni è la sede del Comune, cuore della città.

E tutto andrà poi come previsto, in fondo, e vedremo tutto quanto previsto; la lussureggiante Sala Rossini che ci ospita per la prima conferenza serale, la più moderna e efficiente aula del Municipio che farà lo stesso nella tarda mattinata di domenica. Vedremo l'ombra scura d'un monumento della piazza che si apre all'angolo del caffè senza porte, nella sera tarda e quasi notturna del sabato, e riconosceremo solo dal profilo in penombra della sua pancetta la sagoma di Cavour, mentre ceniamo in una sorta di fast-food che sforna sofisticati piatti a base di pesce, mentre i giovanotti che ci lavorano già oziano fumando fuori la porta, pronti a chiudere la saracinesca. Rivedremo i portici al mattino, che nei primi incroci che li interrompono rivelano le cupole della basilica di sant'Antonio, ci ritroveremo sulla via giusta che porta a Palazzo Moroni, che al mattino della domenica ospitano, distanziati ordinatamente di cinquanta metri l'uno dall'atro, tre musicisti di strada: un trombettista che alterna *Besame Mucho* alla colonna sonora de *Il Padrino*, una coppia di giovani nordeuropei con chitarre elettriche che suonano bene in piedi e cantano canzoni di un misterioso pop internazionale, e infine un distratto rocker ultrasessantenne che arpeggia sapientemente su una chitarra acustica amplificata, semisdraiato su un muretto, vestito come fosse appena uscito da Woodstock, e stanco come se avesse già avuto tutto dalla vita.

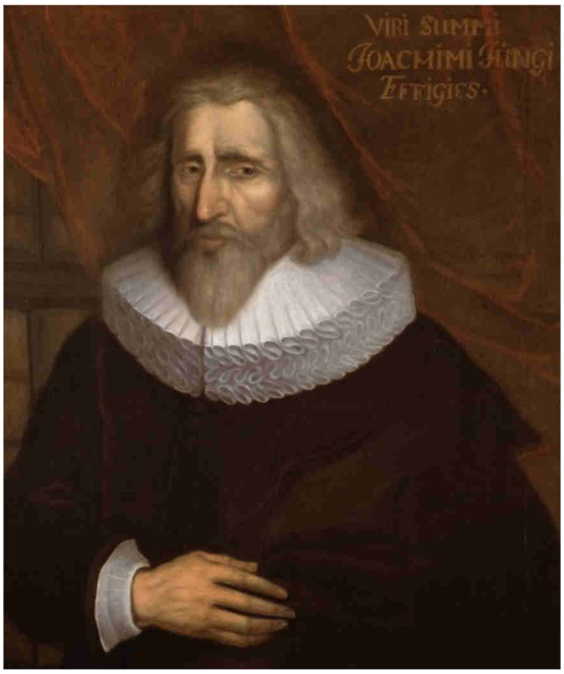

3 *L'orologio di Piazza dei Signori.*

Sappiamo già che poi, a conferenza finita, faremo l'unico pasto decente e vizioso di tutta la trasferta; ci immaginiamo già ripercorrere parte della strada già intravista ieri sera, quella col nome che lusinga il cognome di uno di noi due. Sappiamo già che, compiuti gli impegni a cui siamo stati chiamati, rimarrà ben poco tempo prima di dirigere il naso e il mento di nuovo verso occidente. Soprattutto, sappiamo benissimo che ci farà male tutto quello che non riusciremo a vedere: neanche pensare di fare visita alla Cappella degli Scrovegni, figuriamoci; né la Basilica di Sant'Antonio, pur così vicina all'albergo, che non ha abbastanza ascendente da richiamarci all'interno, rispetto all'ascendente poco spirituale dell'orologio da polso. E, dannazione, neppure rispetto a quello altissimo di quell'altro orologio, ben più affascinante e antico dei nostri, che troneggia in Piazza dei Signori e resterà visto solo in fotografia.

Ma il rimpianto maggiore – non vale quasi la pena dirlo – stava proprio lì, davanti all'ultimo edificio notevole che ci ha accolto tra le sue mura, Palazzo Moroni. Proprio lì davanti, pigro e autorevole come un vecchio saggio che prende il sole sulla veranda della sua casa di campagna, stava il Bo, sede storica dell'Università di Padova. L'aggettivo "storico" non è speso senza ragione. Per quanto le classifiche abbiano spesso meno importanza di quanto si è soliti attribuir loro, è difficile non ricordare che solo quattro università al mondo registrano dei natali più antichi: Bologna, Oxford, Salamanca e Cambridge. E proprio in quest'anno 2022 cade un anniversario notevole, quello degli otto secoli trascorsi dalla fondazione del 1222.

Il rimpianto di mancare una visita guidata al suo interno è forte, e per tante ragioni: un po' perché abbiamo ancora in tasca un invito ufficiale che ci chiamava ad entrarvi, proprio ieri, quando la Padova culturale e scientifica celebra forse il suo momento migliore: la cerimonia di premiazione del Premio Galileo. Si poteva star lì anche noi, a festeggiare quello che studenti e studiosi patavini avevano giudicato come il miglior libro di divulgazione scientifica dell'anno; sarebbe stato una specie di premio per aver percorso la val Padana e raccontato alcune nostre sciocchezze in due talk, forse. Ma erano sempre loro due, i colpevoli: l'orologio e il treno, perché quando dentro il Bo si premiavano i vincitori noi sferragliavamo ancora sull'Italo veloce, tra Desenzano e Verona. Così, non ci restavano adesso che pochi minuti per vedere l'entrata, e subito quella specie di chiostro laico, e i cento stemmi sulle volte del portico. Stemmi che ricordano studenti, famiglie di studenti, laureati, quasi a testimoniare che un tempo una laurea in pergamena valeva ben più d'una lapide in marmo o pietra. In mezzo al cortile, una grossa installazione circolare, bianca e nera come quelle della Op-Art degli Anni Sessanta, che certo racconta e spiega qualcosa che non abbiamo il tempo di conoscere. Ma lo sapevamo già, che non c'era il tempo; e il Bo resterà per noi misterioso come il suo nome, che forse viene solo da un bove, o forse no.

Così restiamo sulla soglia, consapevoli che proprio sotto quegli archi ha calcato migliaia di passi Galileo, che su quel selciato saranno caduti qualche volta gli occhialetti tondi di Levi-Civita, e chissà di quanti altri personaggi conosciuti solo attraverso i libri. Già, quanti altri, in quanti tempi, a quali scopi? Ottocento anni sono più che sufficienti a cambiare non solo le conoscenze, ma anche il concetto stesso di conoscenza. C'è differenza grande, oggi, tra un chimico e un fisico, differenza impossibile a capirsi quando i primi studenti correvano a Padova per farsi eruditi; e venivano da lontano, a studiare e basta, che tutto era studiabile, indagabile, e le specializzazioni dei saggi erano appena accennate, quasi solo piccoli vezzi che indicavano veniali preferenze, quasi dei difetti.



4 *Joachim Jungius.*

La pensava certo così Joachim Jungius, quando arrivò a Padova nel 1616. Era nato nel lontano nord germanico, a Lubecca, il 22 Ottobre 1587, e arrivava per studiare medicina. Erano tempi nei quali un trentenne era già uomo più che maturo, e Joachim non faceva eccezione, anzi: originario di una famiglia di insegnanti – lo erano sia il padre, che morì quando Joachim aveva appena due anni, sia il patrigno – era entrato all'Università di Rostock dieci anni prima, nel 1606. Le sue poliedriche capacità intellettuali sprizzano fuori anche da una biografia sintetica, appena accennata: si iscrive per studiare metafisica, ma viene presto attratto da logica e matematica; si laurea nel 1608 e l'anno dopo è già professore di matematica, e si distingue soprattutto perché la usa per approfondirne le applicazioni in acustica, ottica, geografia, astronomia. Fin dal suo discorso d'insediamento come docente all'università di Giessen chiarisce che a suo parere i metodi di insegnamento devono essere migliorati e approfonditi, e che particolare attenzione deve essere posta nell'insegnamento della matematica, che reputa fondamentale per tutte le scienze liberali. Sono gli anni in cui Galileo inizia appena a fondare l'astronomia moderna, e Jungius è uno di coloro che contenderanno all'italiano la primogenitura dell'osservazione delle macchie solari.

Mentre porta avanti il suo progetto di riforma dell'insegnamento, probabilmente si rende conto di avere quelle che lui giudica imperdonabili carenze in medicina, ed è per questo che torna a Rostock per studiarla, nel 1614; ma probabilmente la fama di Padova arrivava già fin lassù, se due anni dopo fa le valigie e arriva proprio qui, a palazzo Bo. Del resto, non sarà un caso se il più antico teatro anatomico ancora esistente sta ancora protetto da queste mura. Padova lo laurea nel 1619, e la medicina resterà la sua scienza preferita per diversi anni, tornando ad insegnarla a Rostock, poi a Brunswick, a Wolfenbüttel e a Helmstedt. Non deve essere difficile immaginarlo come uno dei maggiori luminari della medicina dell'Europa del Nord, tra il 1620 e il 1630; ma, ciò nonostante, dai suoi discorsi traspare forte e chiaro di non aver cambiato opinione: è soprattutto la matematica il fondamento di ogni conoscenza. Infatti, torna alla matematica: studia Apollonio, cercando di ricostruirne l'opera principale; si appassiona alla nuova algebra di François Viète e, naturalmente, continua a lavorare al suo progetto di riforma dell'insegnamento.

E ci tiene così tanto, al suo progetto di riforma, che compie un passo che davvero pochi insegnanti hanno avuto il coraggio di compiere: lascia la cattedra all'Università – dove certo gli si prospettava una carriera luminosissima – e torna ad insegnare nei ginnasi. Lo fa nel 1629, trasferendosi ad Amburgo, dove organizza il lavoro di due scuole, il Ginnasio Reale e una scuola di Latino. E ad Amburgo resterà fino alla sua morte, che arriva il 23 settembre 1657.

5 *Cortile di palazzo Bo.*

Forse, la sola cosa più sorprendente della sua vastissima pletora di conoscenze e interessi è proprio notare che Joachim Jungius ha costruito tutto il suo sapere nel periodo forse più terribile d'Europa, e nella regione più colpita: la sanguinosissima Guerra dei Trent'Anni imperversa dal 1618 al 1648, ed è stupefacente che qualcuno riuscisse, a quei tempi, a far altro che cercare di sopravvivere. Ma Jungius lo faceva; forse non brillava come una stella di prima grandezza in nessuno dei molti campi della sua conoscenza, ma era alla pari con i più grandi in ogni disciplina: è lui il primo ad usare gli esponenti per rappresentare le potenze e a mostrare a Galileo che la catenaria è una curva diversa dalla parabola, come il pisano credeva; è così ferrato in chimica da porre sotto spietata critica gli approcci della giovane chimica del suo tempo; è già un sostenitore della teoria atomica, secoli prima che questa riesca ad affermarsi. Soprattutto, è lui che viene riconosciuto come saggio, gentile e affabile da ogni persona che lo conosce, e non c'è autore che scriva di lui senza lasciar trasparire ammirazione e rispetto.

Tutta un'altra cosa rispetto a noi che, intimiditi, sotto le volte di palazzo Bo misuriamo con il nonio la nostra misera statura culturale, guardiamo l'orologio e, con reciproco sguardo complice, decidiamo di dirigerci verso il ristorante trovato in rete, calcolando mentalmente se riusciremo a finire in tempo il pranzo con tanto di caffè e ammazzacaffè[3].

[3] Per i temerari che fossero incuriositi o interessati, le due conferenze tenute a Padova in occasione della Settimana della Scienza 2022 sono entrambe disponibili in rete sul sito del Comune di Padova e dovrebbero restarci per un annetto, insomma fino alla prossima Settima della Scienza padovana. Sono ovviamente lunghe e noiosissime, ma ecco i link per i temerari:

"*Dalle Calende Greche al 30 Febbraio*", Sala Rossini del Caffè Pedrocchi, Padova, 15 ottobre 2022. (https://www.youtube.com/watch?v=XRzWQ4ranqM)

"*La Matematica Addosso*", Sala Paladin di Palazzo Moroni, Padova, 16 ottobre 2022. (https://www.youtube.com/watch?v=eJo0CAXWyiU-

2. Problemi

Non garantisco, ma secondo il mio computo il secondo di questi è il ***seicentesimo*** problema pubblicato su RM (esclusi i BJ e i Q&D). Quindi, roba tosta, stavolta. Il primo sarebbe da quattro pipe, almeno, e il secondo quasi sicuramente da tre...

2.1 Supertask, ma noi ci fermiamo prima (voi, no)

A quanto ci risulta, questo problema è stato proposto nel 1991 (da cui, potete capire perché c'è dentro proprio quel numero lì). Una leggenda (probabilmente senza fondamento, ma sono le nostre preferite) narra che *non* sia stato proposto ad un'olimpiade della matematica in quanto "troppo difficile".

Vi ricordate cos'è un "supertask"? Ne avevamo già affrontato uno e vi avevamo, per spiegarci, fatto un esempio. Siccome è più facile riportare l'esempio che stare a dare una definizione formale, ce la caviamo alla svelta.

Sono le 11, e avete una borsa (di capacità infinita) vuota. Alle 11:30 (metà del tempo a disposizione) mettete dentro delle palline numerate da 1 a 10, e estraete quella marcata 1; alle 11:45 (metà del tempo a disposizione restante) mettete dentro le palline da 11 a 20, e estraete quella marcata 2. E avanti in questo modo: dimezzate l'intervallo restante ogni volta, mettete dentro 10 palline e estraete quella con il numero opportuno.

La domanda era: "Quante palline ho nella borsa a mezzogiorno?" E Martin Gardner, (nella persona di Mr. Apollinax, personaggio piuttosto balordo che non ha mai avuto seguito) paradossalmente, rispondeva "Nessuna, visto che la pallina con numero n l'ho estratta all'n-esima operazione".

Abbiamo un segmento, e ai suoi estremi scriviamo il numero 1 (sì, uno per parte). Nel mezzo, scriviamo il numero *somma* dei due numeri più vicini, quindi il numero 2; questo divide il nostro segmento in due segmenti, e quindi facciamo la stessa operazione, inserendo il numero 3 sia tra 1 e 2 che tra 2 e 1; definiamo queste due operazioni "passi": un "passo" è, data la nostra linea, mettere tutti i numeri necessari, ognuno a metà di un intervallo. E andate avanti in questo modo.

Quello che ci chiediamo, è: ma dopo il 1991-esimo passo (eccolo, il numero! Capita, adesso, la nostra brillante deduzione?), quante volte scrivete il numero 1991?

E, sin qui, potete risolverlo per forza bruta con un semplice (uh, beh... mica tanto) programmino; quello che vorremmo da voi, però, è un metodo per calcolare, appunto, quante volte compare n dopo l'n-esimo passo ("...e prima, non vuoi saperlo?" No, troppo facile).

A titolo di incoraggiamento (e di aiutino) specifichiamo che abbiamo parlato di "metodo", non di "formula": quindi, se non riuscite a far stare tutto in forma chiusa, non preoccupatevi.

2.2 Leone atletico e arrabbiato

È molto probabile lo si sia già detto, ma ad almeno uno di noi (Rudy) il circo non piace. Un po' per i motivi soliti di crudeltà verso gli animali, ma in buona parte anche per la cattiveria implicita negli spettacoli dei clown. Da piccolo, si chiedeva come facessero, persone che se ne combinavano di tutti i colori in pista, a non farlo anche nella vita reale. Poi ha capito, ma l'impressione di fondo di un ambiente nel quale tutti cercavano di "fare del male" a tutti gli altri è comunque rimasta, e... Insomma, l'ultimo circo probabilmente lo ha visto quando aveva sei o sette anni, poi basta. Comunque, questo è un suo problema: lasciamo perdere, e parliamo del problema che ha il leone.

Il Nostro (Leone) è chiuso in una gabbia circolare avente raggio di 10 metri e, essendo piuttosto seccato, si comporta in modo un po' strano: parte di corsa in linea retta, poi "a un certo punto" svolta di un angolo casuale (svolta puntiforme) e ricomincia a correre in linea retta. In pratica, disegna una spezzata che si trova tutta all'interno del recinto, magari qualche punto sul bordo, ma non necessariamente tutti: insomma, la spezzata è tutta contenuta nel recinto circolare, ma i vertici non sono necessariamente sulla circonferenza.

Sappiamo, inoltre, che il nostro leone ha percorso in questo modo la bellezza di 30 chilometri.

Ora, la biologia insegna che la grandezza del mal di testa che si ritrovano i leoni a fare stupidaggini del genere è pari alla somma degli angoli di svolta (espresso in radianti). Riuscite a dare un limite minimo all'emicrania leonina?

Oh, attenzione che abbiamo parlato di "limite minimo": quindi, ci aspettiamo una risposta del tipo "il mal di testa sarà maggiore di millanta radianti", solo, un po' più preciso...

Mah, qui non ci sembra generalizzabile. Comunque, se volete provarci...

3. Bungee Jumpers

Un cerchio è diviso in p settori uguali, dove p è un numero primo. In quanti modi può essere colorato il cerchio, avendo a disposizione n colori, escludendo le rotazioni? I colori possono essere ripetuti nel cerchio e colori uguali possono anche essere adiacenti.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Ottobre!

Veramente?

Come promesso riprendiamo le soluzioni che ci siamo persi per strada, cominciando dalle più vecchie. Portate pazienza.

4.1 [282]

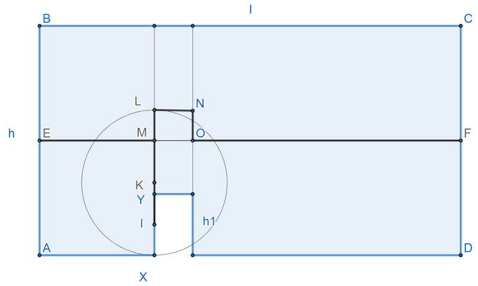
4.1.1 Affettare la torta. Anzi, due.

Cominciamo con i problemi che avevamo già considerato risolti in RM283, ecco il primo:

> *La pasticcera ha fatto una torta rettangolare ed assaggiato una fetta rettangolare, come dividerla in due parti equivalenti in area?*
>
> *La seconda torta è quadrata e da dividere in cinque parti, le fette devono avere sia pari superficie superiore che pari superficie laterale esterna.*

In RM283 abbiamo pubblicato la soluzione di ***Emanuele*** e ***Valter***, ci siamo però persi quella di ***Galluto***:

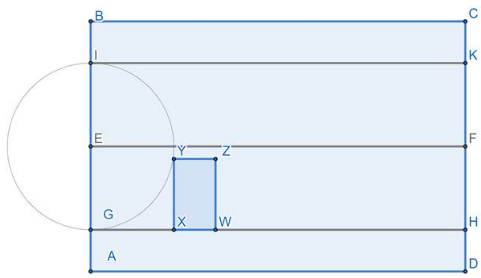
> Allora, abbiamo una torta rettangolare di dimensioni h ed l, dalla quale è stata sottratta una parte, anche essa rettangolare, e di dimensioni h_1 e l_1. Il problema è di dividere la parte restante in due porzioni di pari superficie, usando solo riga e compasso.
>
> Do per acquisito che con riga e compasso posso ottenere i seguenti risultati, senza bisogno di fare ogni volta la costruzione:
>
> - Trovare il punto medio di un segmento
> - Tirare la perpendicolare ad una retta per un punto dato della retta
> - Tirare il piede di perpendicolare da un punto ad una retta che non lo contiene
> - Tracciare la parallela ad una retta passante per un punto
>
> Inizio col caso più semplice (che è quello della figura sulla rivista), con la parte sottratta che inizia su un bordo della torta, ed ha i lati paralleli a quelli della torta stessa.



1. Trovo il punto medio E di AB e il punto medio F di CD e li congiungo
2. Prolungo il lato XY della fetta sottratta, incontrando EF nel punto M; stessa cosa sul lato parallelo, incontrando EF nel punto O
3. Trovo il punto medio I di XY e considero il segmento MI: la sua lunghezza è $h/2-h_1/2$
4. Trovo il punto medio K di MI e considero il segmento XK: la sua lunghezza è pari alla metà di quella di MI più $h_1/2$ e quindi è: $(h/2-h_1/2)/2 + h_1/2 = h/4 + h_1/4$
5. Centro in K e raggio KX, traccio il cerchio, che interseca il L la prosecuzione di XY e quindi LX è un diametro del cerchio e la sua lunghezza è $(h/2 + h_1/2)$
6. Finalmente considero il segmento LM, la cui lunghezza è: $(h/2 + h_1/2) - h/2 = h_1/2$
7. Faccio la stessa cosa sul lato parallelo (o tiro la perpendicolare per L ad LM), trovo il punto N e considero il rettangolo MLNO: la sua area è la metà di quella della fetta sottratta, perché ha la stessa base ed altezza pari alla metà
8. E quindi una delle due porzioni è quella sotto la linea EF più il rettangolo MLNO e l'altra è quella sopra EF meno MLNO

Il giochino funziona anche se la fetta sottratta arriva oltre la metà dell'altezza h della torta (cioè, arriva sopra alla linea EF); semplicemente la porzione "inferiore" sarà fatta di tre parti.

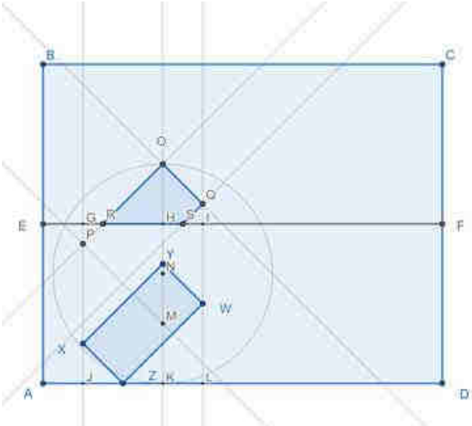
Passo successivo: la fetta sottratta è ancora parallela, ma sta "in mezzo alla torta" e non su un bordo



1. Come prima, trovo il punto medio E di AB e il punto medio F di CD e li congiungo
2. Dal lato in cui la parte prima del buco è "meno spessa" allungo il lato (XW nella figura) della fetta sottratta fino ad incontrare i lati AB e CD della torta rispettivamente in G ed in H
3. Centro in E e raggio EG, traccio l'arco di circonferenza fino ad incontrare AB in I
4. Traccio la parallela a BC passante per I, fino ad incontrare CD in K

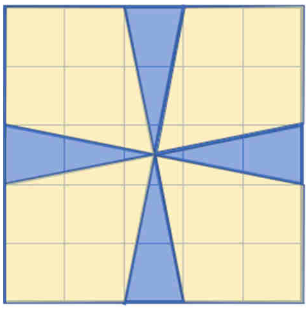
5. La striscia AGHD appartiene alla porzione inferiore, la striscia IBCK, che ha la stessa superficie, appartiene alla porzione superiore e al rettangolo GIKH applico lo stesso procedimento del caso precedente

E finalmente arriviamo al caso con la fetta sottratta NON parallela alla torta; basta il caso in cui il buco "tocca" il bordo della torta:



Applico il solito procedimento al punto "più alto" Y del rettangolo sottratto e individuo il punto O; da O ricostruisco il rettangolo sottratto tracciando le parallele ai lati di quello originale e individuo su EF i punti R ed S; il trapezio RSQO vale metà della fetta sottratta e quindi una porzione comprende l'area sotto EF più il trapezio e l'altra l'area sopra EF meno il trapezio.

Passiamo alla seconda torta: la superficie è di 25 quadratini, il bordo glassato è di 20 unità; quindi, a ciascuna porzione spettano 5 quadratini e 4 unità di bordo. Credo che l'espressione "vagamente a forma di fetta" significa che le porzioni debbano essere "monopezzo", altrimenti basterebbe dividere la torta in 25 quadratini e darne appropriatamente 5 a ciascuno.

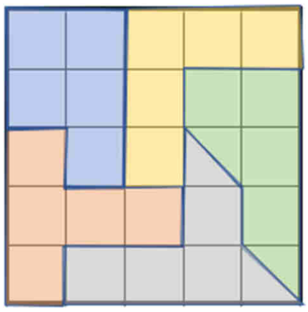


Una delle porzioni è la croce blu costituita dai 4 triangoli basati ciascuno sul bordo del quadratino centrale di un lato della torta e tenuti **saldamente** insieme dal punto centrale; le altre sono i quattro "aquiloni" sugli angoli della torta.

Che ciascuna porzione abbia 4 unità di bordo è evidente dal disegno; per quanto riguarda la superficie, ciascun braccio della croce vale 1 * 2,5 / 2 = 1,25, e quindi i 4 triangoli messi insieme valgono 5 quadratini; per evidenti (eheh) motivi di simmetria i 4 aquiloni si spartiscono in parti uguali i 20 quadratini restanti e quindi ne valgono 5 ciascuno.

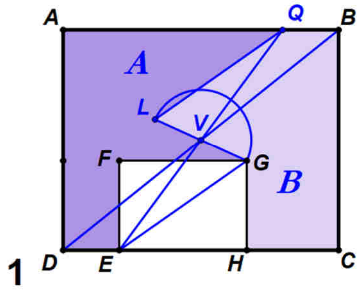
Le uniche linee che devo tracciare congiungono punti noti e quindi mi basta la riga. Comunque, se i bordi dei quadratini non fossero disponibili, la suddivisione in (5) parti uguali di un segmento è un procedimento noto.

P.S. presento il quesito ai compagni di vacanza ed ***Enrico*** mi produce la seguente soluzione, meno elegante (dico io…) ma decisamente più robusta:



Gli amici in vacanza che accettano di discutere di problemi di geometria con le torte sono rari. Come sarebbe un peccato ignorare la soluzione di ***trentatre***:

torta 1 – fig. 1



soluzione

- rettangolo ***R1*** : *ABCD* con pezzo mancante ***R2*** : *EFGH*
- con *V* centro di *R1* il segmento *EQ* che passa per *V* divide *R1* in due parti uguali
- con *L* simmetrico di *G* sulla retta *GV* si hanno i triangoli *EVG*, *QVL* di area uguale
- l'area della parte *B* si ottiene da *ECBQ* con
- aggiunta di *QVL* e sottrazione di *EVG* e di *EGH* (metà di *R2*)
- l'area *A* è quanto resta della torta

– bastano quindi i due tagli *GL* e *LQ*

- la soluzione è generale e si applica ad ogni rettangolo *R1* con qualsiasi pezzo mancante *R2*.

riga e compasso

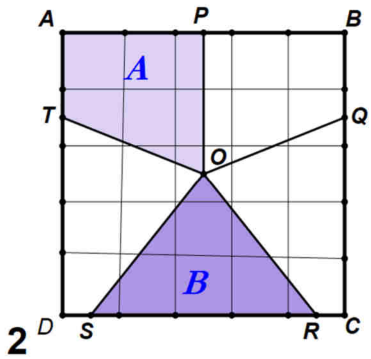
- si tacciano di seguito gli elementi

retta *DB*; *V* asse di *DB*; retta *EQ* passante per *V*;

retta *GV*: *L* sul cerchio di centro *V* per *G*

- le due parti *A* e *B* sono date dai percorsi *HGLQBC*, *EDAQLGF*.

torta 2 – fig. 2



soluzione

- quadrato *ABCD* di lato 5 con perimetro e area
  $p = 20, S = 25$
- il perimetro è divisa dai punti *PQRST* in 5 parti uguali di lunghezza 4
- i tagli da *O* (centro del quadrato) ai cinque punti dividono sia l'area laterale che quelle superiore in 5 parti uguali, come si ricava direttamente dalla figura (*A* e *B* sono un trapezio e un triangolo).

riga e compasso

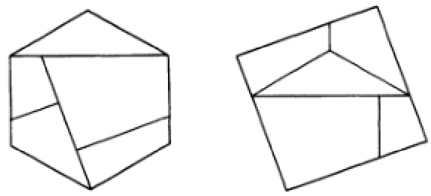
- tracciata la griglia bastano poche operazioni semplici, che non disegno.

Bene, andiamo avanti.

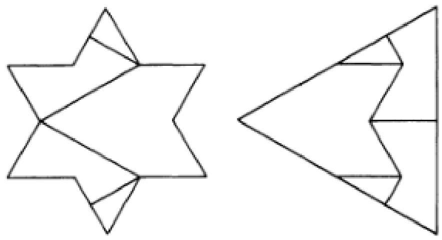
4.1.2 Martin è sempre una certezza...

Riproporre questo problema è un piacere:

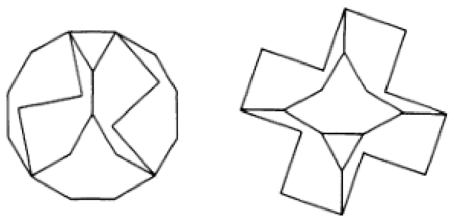
Martin aveva fornito alcune dissezioni:



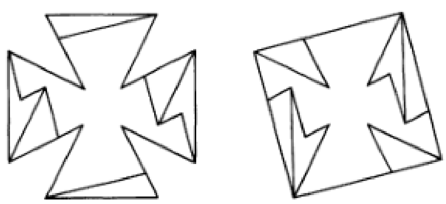
Da esagono a quadrato, in cinque pezzi



Da stella a sei punte a triangolo, in cinque pezzi



Da dodecagono a croce greca, in sei pezzi

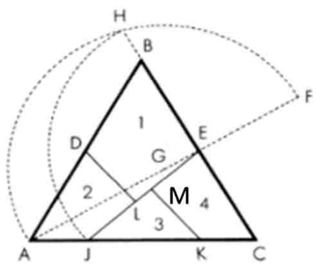


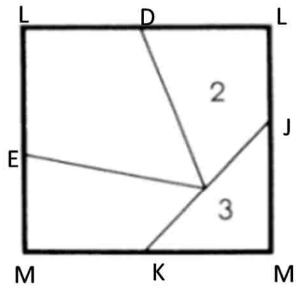
Da croce maltese a quadrato, in sette pezzi

sapendo che le costruzioni sono corrette, come si costruiscono questi cosi?

In RM283 abbiamo proposto la soluzione di ***Valter*** e ***trentatre***, qui di seguito la versione di ***Galluto***:

Giusto per scaldarci…





… chiudo il tavolino nella sua forma quadrata e riporto sul quadrato le lettere dei punti salienti del triangolo.

Intanto, visto che i quattro vertici hanno tutti angoli di 90°, il tavolino o è quadrato o comunque è un rettangolo, il che significa:

- che il lato superiore è uguale a quello inferiore (e quindi che LD è uguale a MK e tutti e due valgono metà del lato)
- che quello sinistro è uguale a quello destro e cioè che EM+EL = JL+JM; con qualche passaggio, questo porta a dimostrare che JL è uguale ad EM, che EL è uguale a JM, e
- che i lati verticali sono uguali al segmento EJ del triangolo

perché il tavolino sia quadrato, resta da dimostrare che i lati orizzontali sono uguali a quelli verticali; per questo, considero che le due figure sono comunque equivalenti e che quindi la loro area vale:

$$\text{Area} = (L_t * H_t)/2 = (L_t * \sqrt{L_t^2 - (\frac{L_t}{2})^2})/2 = L_t^2 * \frac{\sqrt{3}}{4}$$

dove L_t e H_t sono il lato e l'altezza del triangolo equilatero

e quindi, assumendo per semplicità il lato del triangolo uguale ad 1, se il tavolino fosse quadrato, il suo lato L_q varrebbe:

$$L_q = \sqrt[4]{3}/2$$

Ora, in base alla costruzione, e sempre assumendo il lato del triangolo uguale ad 1:

- $AF = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
- $GF = GH = AF/2 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$
- $GE = GF - 1/2 = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$
- $EJ = HE = \sqrt{GH^2 - GE^2} = \ldots = \sqrt[4]{3}/2$

Ma avevamo visto che l'"altezza" del rettangolo era pari a EJ; quindi, abbiamo un rettangolo la cui altezza è pari alla radice quadrata della sua area e pertanto la stessa misura deve avere anche la sua "base".

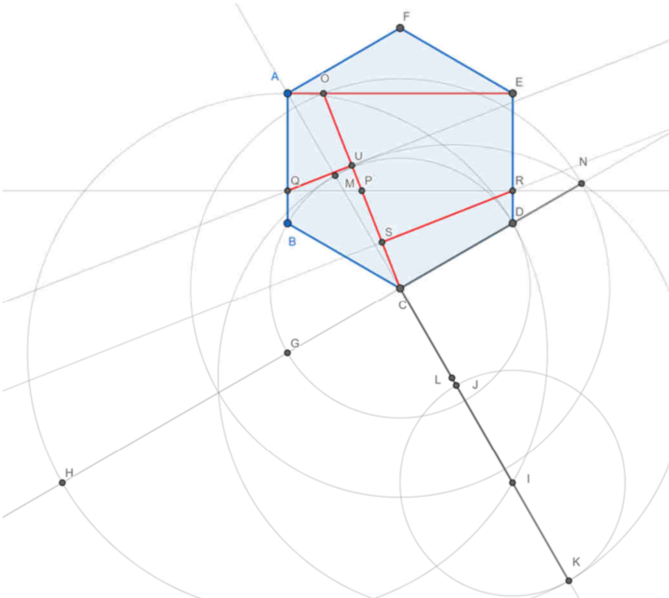
E meno male che era solo il riscaldamento…

Da esagono a quadrato…

Poiché sappiamo che la costruzione è corretta, troviamo la misura del lato del quadrato, anche qui assumendo pari a 1 quella del lato dell'esagono: la superficie dell'esagono è pari al semiperimetro per l'apotema e cioè:

$$1 * \frac{\sqrt{3}}{2} * 6 /2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

e quindi il lato del quadrato vale: $\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$; il primo passo è di tracciare un segmento con questa misura:



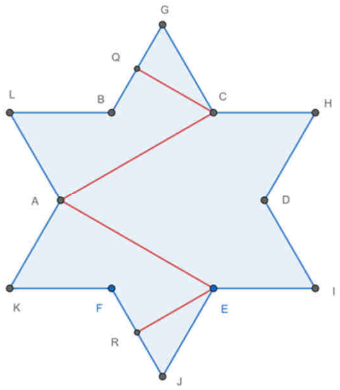
1. prolungo il lato CD dell'esagono oltre C e trovo il punto H tale che CH = 3 (basta tracciare la circonferenza con centro in C e raggio CD per trovare il punto G e poi tracciare la circonferenza con centro in G e raggio DG)
2. tiro la perpendicolare a DH passante per C, che incontra la circonferenza C;CD in M e quella G;DG in A ed in I; per il secondo teorema di Euclide, CI è pari a $\sqrt{3}$
3. trovo il punto medio J di CI e traccio la circonferenza con centro in I e raggio IJ; prolungo CI e trovo il punto di intersezione K con questa circonferenza; CK è pari ai 3/2 di CI e quindi a $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
4. riapplico il secondo teorema di Euclide al segmento CK: trovo il punto medio L di MK, traccio la circonferenza L;LK con centro il L e raggio LK, tiro la perpendicolare a MK passante per C e trovo il punto di intersezione N tra la circonferenza e la perpendicolare; il segmento CN vale $\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

a questo punto traccio il segmento AE e poi trovo l'intersezione O tra AE e la circonferenza con centro in C e raggio CN; e finalmente posso tracciare il segmento OC;

restano da tracciare le due perpendicolari; trovo il punto medio P di OC e traccio la perpendicolare ai lati dell'esagono AB e DE; le intersezioni sono rispettivamente Q e R; da questi due punti traccio le perpendicolari ad OC e ho finito (prima di esaurire l'alfabeto)

Da stella sei punte a triangolo

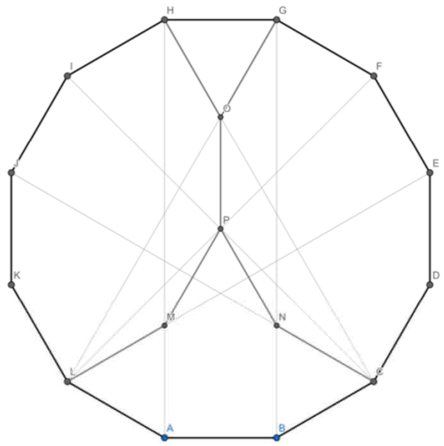
Questa è facile:



Traccio AC e AE, congiungo C col punto medio Q di BG ed E col punto medio R di FJ.

Da dodecagono a croce greca

Cominciamo con la parte facile, la losanga in basso, il triangolino in alto e il segmento che li congiunge:



Traccio le diagonali indicate in figura, alle loro intersezioni individuo i punti M,N,P, e O e li congiungo opportunamente.

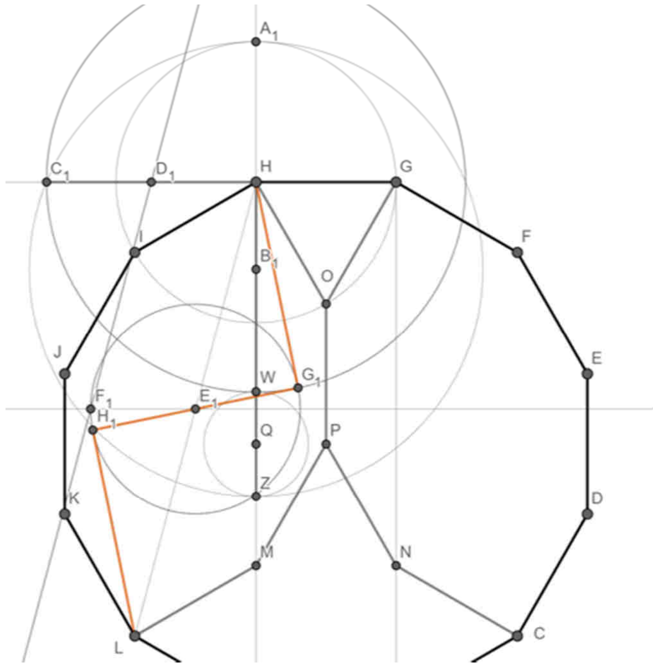
Adesso passiamo alla parte difficile, e cioè lo "zigozago" tra i vertici H ed L (e similmente tra G e C).

Sfrutto anche questa volta l'equivalenza delle due figure; l'Area del dodecagono è pari (sempre con lato = 1):

A = Lato * Apotema * 12 / 2 = 6 * Apotema

La croce greca è composta da 5 quadratini uguali, il cui lato deve essere pari a $\sqrt{\frac{6}{5} * \text{Apotema}}$

E quindi devo sfruttare un'altra volta il secondo teorema di Euclide e applicarlo ad un segmento pari ai 6/5 dell'Apotema del dodecagono:



- trovo il punto medio Q di AH; QH è l'Apotema
- trovo il punto W tale che WQ = 1/5 di QH; ho omesso la costruzione ma ho usato il metodo GLAD
- centro il Q e raggio WQ trovo il punto Z di intersezione con AH; ZH vale 6/5 dell'Apotema
- prolungo AH oltre H e trovo il punto di intersezione A_1 con la circonferenza con centro H e raggio HG (e quindi, raggio uguale al lato del dodecagono)
- trovo il punto medio B_1 di A_1Z e traccio la circonferenza con centro in B_1 e raggio A_1B_1
- tiro la perpendicolare per H ad AH fino ad intersecare la circonferenza testè disegnata in C_1; il segmento C_1H è pari al lato dei quadrati della croce

A questo punto:

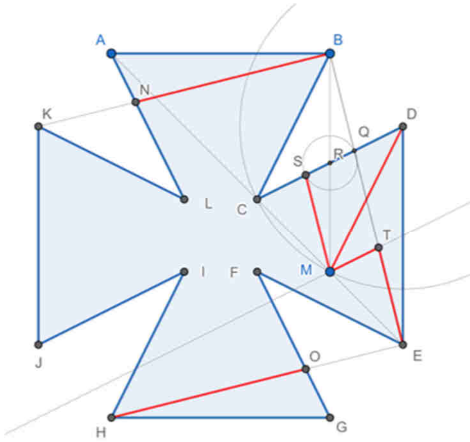
- trovo il punto di mezzo D_1 di C_1H
- congiungo L con H e trovo il punto di mezzo E_1
- traccio la perpendicolare per E_1 ad AH e la parallela a LH per D_1; il punto di incontro è F_1
- traccio la circonferenza con centro in E_1 e raggio E_1F_1 e la circonferenza con centro in H e raggio C_1H; la loro intersezione "più a destra" è G_1
- congiungo G_1 con H e con E_1 e prolungo G_1 E_1 fino ad incontrare nuovamente la circonferenza in H_1
- congiungo H_1 con L

Fatto!!! L'altro lato ve lo risparmio

e finalmente…

da croce maltese a quadrato

Qui le cose sono un po' diverse perché la croce maltese non è una figura univoca come le precedenti (salvo ovviamente la dimensione) perché cambia a seconda del rapporto tra base ed altezza dei quattro triangoli isosceli uguali e della misura della loro "compenetrazione", e solo alcune croci permettono la costruzione.



Infatti la croce deve essere tale che i segmenti BC, CD e DM siano uguali (con BC e DM paralleli) e il segmento BM sia uguale, e parallelo, ad AB.

Alla fine ho trovato che la configurazione che funziona è con i triangoli isosceli con altezza uguale alla base e i punti C e M allineati sulla retta AE (che è a 45° rispetto ad AB).

Una volta disegnata così la croce, la costruzione è facile:

- congiungo H ed E e disegno il segmento HO; congiungo B e K e disegno il segmento BN
- congiungo B ed E e individuo il punto Q di intersezione con CD
- trovo il punto di mezzo R di CD
- traccio la circonferenza di centro R e raggio RQ e individuo il punto S che è l'altra intersezione della circonferenza con CD
- traccio la circonferenza con centro D e raggio CD e trovo l'intersezione M con AE
- congiungo M con S e con D
- traccio la parallela a CD passante per M e individuo l'intersezione T con BE
- congiungo T con M e con E

L'altro lato ve (e me) lo risparmio.

Grazie! Passiamo ora ai problemi di agosto.

4.2 [283]

4.2.1 Un problema riformulato.

Eccoci a proporre le soluzioni dei problemi che avreste dovuto trovare in RM284, partendo da questo bel gioco combinatorio:

Alice, Doc, Rudy, Albert e Fred espongono un problema a testa, catalogati in base alla loro difficoltà da 1 a 5, e non ci sono due problemi di ugual difficoltà. Ognuno ha una maglietta di colori e diverso; per ognuno dei problemi, abbiamo ricevuto un numero diverso di soluzioni, tra 70 e 74.

Il numero di solutori del problema di chi ha la maglia gialla (che non è Alice) sono 3 in meno del numero di solutori del problema di Doc.

Il problema di Rudy ha avuto ha avuto 72 solutori e la sua maglietta non è né gialla né verde.

Il problema di Albert ha un solutore in meno rispetto a quello di chi ha la maglietta blu e la difficoltà del suo problema è un numero dispari.

La difficoltà del problema di Alice e quella del problema di Fred assomano ad un totale di 7 (e quello di Fred è più difficile di quello di Alice).

> *Chi ha la maglia rossa ha presentato un problema di due punti più difficile di quello presentato da chi ha la maglia blu.*
>
> *Uno tra Doc e chi ha avuto 74 solutori per il problema ha la maglietta rossa, mente l'altro aveva un problema di difficoltà 5.*
>
> *La maglietta di Fred non è né blu né verde; tra Fred e Doc, almeno uno ha un numero dispari di solutori*
>
> *Chi ha presentato un problema di difficoltà 3 è o chi ha avuto 73 solutori o Alice, il cui problema ha avuto 71 solutori.*
>
> *Quanti solutori ha avuto il problema di Alberto?*
>
> *Di che colore è la maglietta di Fred?*
>
> *Qual era la difficoltà del problema di Rudy?*

Cominciamo con l'inizio di soluzione di ***Valter***:

> Non sono riuscito a risolverlo perché, ad un certo punto, mi blocco, non potendo assegnare una condizione. Propongo, comunque, le mie deduzioni; nel caso potreste indicarmi dove mi sto sbagliando nel ragionamento. Elenco le condizioni come da testo, poiché per comodità, invece di dichiararle, le indico col loro numero:
>
> 1. Il numero di solutori del problema di chi ha la maglia gialla (che non è Alice) sono tre in meno del numero di solutori del problema di Doc.
> 2. Il problema di Rudy ha avuto ha avuto 72 solutori e la sua maglietta non è né gialla né verde.
> 3. Il problema di Albert ha un solutore in meno rispetto a quello di chi ha la maglietta blu e la difficoltà del suo problema è un numero dispari.
> 4. La difficoltà del problema di Alice e quella del problema di Fred assommano ad un totale di 7 (e quello di Fred è più difficile di quello di Alice).
> 5. Chi ha la maglia rossa ha presentato un problema di due punti più difficile di quello presentato da chi ha la maglia blu.
> 6. Uno tra Doc e chi ha avuto 74 solutori per il problema ha la maglietta rossa, mente l'altro aveva un problema di difficoltà 5.
> 7. La maglietta di Fred non è né blu né verde; tra Fred e Doc, almeno uno ha un numero dispari di solutori.
> 8. Chi ha presentato un problema di difficoltà 3 è o chi ha avuto 73 solutori o Alice, il cui problema ha avuto 71 solutori.
>
> **Inizio assegnando il numero dei loro solutori ai cinque:**
> <u>Doc/73</u>
> - dalla 1.: "<u>Doc/73</u> gialla/70" oppure "Doc/74 gialla/71"
> - dalla 8.: "Alice/71"
> - dalla 1.: Alice non ha la maglia gialla
> - quindi Doc può, solo, avere 73 solutori
> <u>Rudy/72</u> dalla 2.
> <u>Alice/71</u> dalla 8.
> <u>Albert/70</u>
> - dalla 3.:
> -- elenco possibili accoppiate "sui solutori"/"chi ha la maglia blu":
> -- 70/71, 71/72, 72/73, 73/74
> - siccome 71 72 e 73 sono già assegnati:
> -- Albert ha 70 solutori
> -- Alice, con i suoi 71 solutori, ha la maglia blu
> <u>Fred 74</u>: per esclusione.
> **Informazioni, al momento, disponibili sul colore delle magliette:**

la coppia Doc – Fred:
- dalla 5./6. due alternative:
-- Doc/73/rossa - Fred difficoltà 5 …oppure
-- Doc difficoltà 5 - Fred/74/rossa
Albert/70/gialla dalla 1.
Alice/71/blu dalla 3.
Rudy/72/x
- dalla 2. non può essere gialla, oppure verde
- non può essere rossa in quanto di Doc o Fred
- non può essere blu in quanto colore di Alice
- è, quindi, il restante colore non dichiarato
Fred 74/verde cioè colore non ancora assegnato.
Rimangono da attribuire le difficoltà:
coppie Doc – Alice oppure Fred - Alice
- dalla 8., assieme alla 5., avrei due possibilità, ma…
(ricordo che se Doc/73/rossa allora Fred difficoltà 5):
-- Doc/73/rossa/3 - Alice/71/blu/1 e, quindi, Fred/74/verde/5, …oppure
-- Alice/71/blu/3 …ma con blu di difficoltà 3, non è possibile:
--- dalla 5. chi ha la maglia rossa dovrebbe avere difficolta 5
--- dalla 6 però, chi ha la maglietta rossa non ha difficoltà 5

Concludendo:
Alice/71/blu/1
Doc/73/rossa/3
Fred/74/verde/5
Rudy/72/x/2 oppure 4
Albert/70/gialla/?
…dalla 3. avrebbe difficoltà dispari, ma sono tutte assegnate.

La stessa difficoltà è di ***trentatre***, che comunque adatta il problema e lo corregge:

Ho trovato questa soluzione completa

[1]

	Alice	*Doc*	*Rudy*	*Albert*	*Fred*
colore	*blu*	*verde*	*nero* *	*giallo*	*rosso*
difficoltà	3	5	2	1	4
n° soluzioni	71	73	72	70	74

* colore aggiunto: il testo cita solo gli altri 4.

Tutte le condizioni sono rispettate salvo la 5. Ma penso che questa sia l'unica soluzione corretta e che l'errore sia nel testo del problema; spiego la cosa nella dimostrazione che segue.

I dati del problema si possono ridurre a 4 sequenze ognuna di 5 interi

$\boldsymbol{n} = (1,2,3,4,5)$: nomi: *Alice, Doc, Rudy, Albert, Fred*

$\boldsymbol{c} = (1,2,3,4,5)$: colore: *rosso, blu, verde, giallo, nero*

$\boldsymbol{d} = (1,2,3,4,5)$: difficoltà

$\boldsymbol{s} = (1,2,3,4,5)$: n° soluzioni (diminuito di 69).

Ad ogni nome corrisponde uno e uno solo dei valori $\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{s}$, cioè le relazioni $\boldsymbol{n} \leftrightarrow \boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{s}$

sono corrispondenze biunivoche, che corrispondono a tre funzioni, con i valori di $\boldsymbol{n}$ come dominio e i valori di $\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{s}$ come codominio, ognuna con le proprietà

(i) $p \neq q \leftrightarrow f(p) \neq f(q)$

(ii) esiste l'inversa $f(p) = q \leftrightarrow f^{-1}(q) = p$.

Il problema si riduce a una semplice algebra fra interi compresi fra 1 e 5.

Indico le funzioni con la stessa lettera dei parametri

- p.es. $c(1)$: colore di *Alice*
$c^{-1}(3)$: nome di chi ha il colore verde
$d(s^{-1}(4))=1,3$: chi ha 73 soluzioni ha difficoltà 1 o 3.

Le condizioni si traducono in

$$[1]\quad \begin{array}{ll} \mathbf{0.}\ s(1)=2, s(3)=3 & \mathbf{5.}\ d(c^{-1}(1))=d(c^{-1}(2))+2 \\ \hline \mathbf{1.}\ s(c^{-1}(4))=s(2)-3 & \mathbf{6.}\ \{c(2)=1,\ d(s^{-1}(5))=5\} \\ \quad c(1)=1,2,3,5 & \quad \oplus\{c(s^{-1}(5))=1, d(2)=5\} \\ \mathbf{2.}\ c(3)=1,2,5 & \mathbf{7.}\ c(5)=1,4,5 \\ \mathbf{3.}\ s(4)=s(c^{-1}(2))-1 & \quad \{s(5)=2,4\}\oplus\{s(2)=2,4\} \\ \quad d(4)=1,3,5 & \mathbf{8.}\ \{d^{-1}(3)=s^{-1}(4)\}\oplus\{d^{-1}(3)=1\} \\ \mathbf{4.}\ d(1)+d(5)=7, d(5)>d(1) & \end{array}$$

- dove ho separato nel gruppo **0.** i valori certi e $\{a\}\oplus\{b\}$ sono condizioni alternative.

Si possono eliminare le funzioni inverse introducendo 6 incognite

$$[2]\quad x=c^{-1}(1), y=c^{-1}(2), z=c^{-1}(4),\ w=d^{-1}(3), u=s^{-1}(4), v=s^{-1}(5)$$

- da cui le condizioni aggiuntive, che includo nel gruppo **0.**

$c(x)=1,\quad c(y)=2,\quad c(z)=4,\quad d(w)=3,\quad s(u)=4,\quad s(v)=5$

- le [1] diventano

$$[3]\quad \begin{array}{ll} \mathbf{0.}\ s(1)=2, s(3)=3, c(x)=1, c(y)=2, & \mathbf{5.}\ d(x)=d(y)+2 \\ \quad c(z)=4, d(w)=3, s(u)=4, s(v)=5 & \mathbf{6.}\ \{c(2)=1,\ d(v)=5\} \\ \hline \mathbf{1.}\ s(z)=s(2)-3, c(1)=1,2,3,5 & \quad \oplus\{c(v)=1, d(2)=5\} \\ \mathbf{2.}\ c(3)=1,2,5 & \mathbf{7.}\ c(5)=1,4,5, \\ \mathbf{3.}\ s(4)=s(y)-1, d(4)=1,3,5 & \quad \{s(5)=2,4\}\oplus\{s(2)=2,4\} \\ \mathbf{4.}\ d(1)+d(5)=7, d(5)>d(1) & \mathbf{8.}\ \{w=u\}\oplus\{w=1\} \end{array}$$

<u>calcolo sequenza ***s***</u>

- in **6.** $v=2$ va esclusa (per garantire l'alternativa)
- da **0.** $s(1)=2, s(3)=3, s(v)=5 \to v\neq 1,2,3 \to v=4,5$

se $v=4\to s(4)=5$ e da **3.** $s(y)=s(4)+1=6>5$: impossibile

quindi $\underline{v=5}$ e da **0.** $\underline{s(5)=5}$

in **7.** resta solo la seconda opzione $s(2)=2,4$

da **0.** $s(1)=2\to \underline{s(2)=4}$

- la sequenza ***s*** si chiude con $\underline{s(4)=1}$, da cui

$$[4]\quad \begin{array}{c|ccccc|} \boldsymbol{n}= & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \boldsymbol{c} & & & & & \\ \boldsymbol{d} & & & & & \\ \boldsymbol{s} & 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{array}$$

- le [3] diventano

$$[5]\quad \begin{array}{ll} \mathbf{0.}\ c(x)=1, c(y)=2, c(z)=4, & \mathbf{5.}\ d(x)=d(y)+2 \\ d(w)=3, s(u)=4 & \mathbf{6.}\ \{c(2)=1, d(5)=5\}\oplus\{c(5)=1, d(2)=5\} \\ \hline \mathbf{1.}\ s(z)=s(2)-3, c(1)=1,2,3,5 & \mathbf{7.}\ c(5)=1,4,5 \\ \mathbf{2.}\ c(3)=1,2,5 & \mathbf{8.}\ \{w=u\}\oplus\{w=1\} \\ \mathbf{3.}\ s(4)=s(y)-1, d(4)=1,3,5 & \\ \mathbf{4.}\ d(1)+d(5)=7, d(5)>d(1) & \end{array}$$

<u>calcolo sequenza ***c***</u>

- da **1.** e **0.** $s(z)=s(2)-3=4-3=1\to \underline{z=4}\to \underline{c(4)=4}$
- da **3.** e **0.** $s(y)-1=s(4)=1\to s(y)=2=s(1)\to \underline{y=1}\to \underline{c(1)=2}$

- in **2.** non può essere $c(3)=1$ in contrasto con **6.**

$\rightarrow c(3) \neq 1,2 \rightarrow \underline{c(3)=5}$

- da **7.** $c(5) \neq 4,5 \rightarrow \underline{c(5)=1}$

- la sequenza ***c*** si chiude con $\underline{c(2)=3}$, da cui

[6]

$\boldsymbol{n}=$	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{c}$	2	3	5	4	1
$\boldsymbol{d}$					
$\boldsymbol{s}$	2	4	3	1	5

- le [5] diventano

[7] **0.** $\underline{c(x)=1, d(w)=3, s(u)=4}$
3. $d(4)=1,3,5$
4. $d(1)+d(5)=7, d(5)>d(1)$
5. $d(x)=d(1)+2$
6. $\{c(2)=1, d(5)=5\} \oplus \{c(5)=1, d(2)=5\}$
8. $\{w=u\} \oplus \{w=1\}$

<u>calcolo sequenza ***d***</u>

- da **0.** $c(5)=1 \rightarrow \underline{x=5}$

- in **6.** $c(2) \neq 1, c(5)=1 \rightarrow \underline{d(2)=5}$

- in **4.** se $7=2+5 \rightarrow d(1)=2, d(5)=5$ proibita da $d(2)=5$

quindi $7=3+4 \rightarrow \underline{d(1)=3}, \underline{d(5)=4}$

e da **3.** $d(4) \neq 3,5 \rightarrow \underline{d(4)=1}$

- la sequenza ***d*** si chiude con $\underline{d(3)=2}$, da cui la soluzione completa

[8]

$\boldsymbol{n}=$	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{c}$	2	3	5	4	1
$\boldsymbol{d}$	3	5	2	1	4
$\boldsymbol{s}$	2	4	3	1	5

- che tradotta è la [1] iniziale.

<u>**nota**</u>

- la **8.** può essere tolta dal testo, a parte il riferimento ad Alice, infatti

da **0.** e **8.** $d(w)=3 \rightarrow w=1 \rightarrow d(1)=3$

valore corretto ma già trovato senza usare **8.**

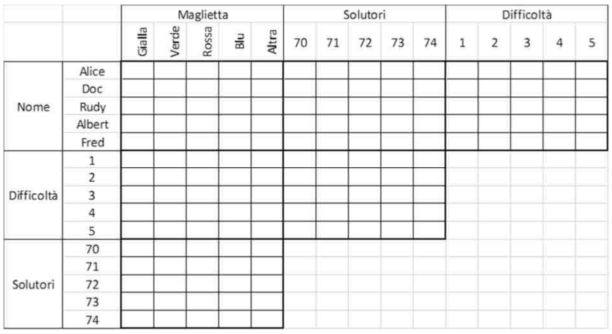
- la **5.** non è stata usata per la soluzione, con $x=5$ dà

$d(5)=d(1)+2=3+2=5$

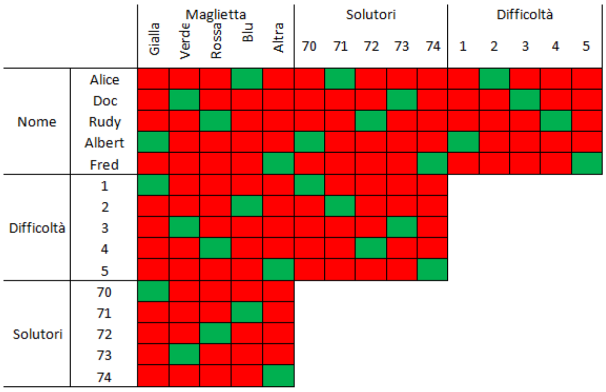
- invece di 4, ma l'errore non può essere nella dimostrazione, che porta a una soluzione <u>unica, completa e corretta</u> per tutti gli altri valori. Per correggere il testo basta eliminare la **5.** oppure scriverla con "uno" al posto di "due".

Vediamo che cosa ne dice ***Galluto***:

Non sto a spiegare i singoli passaggi, ma usando lo schema che segue,



e utilizzando ricorsivamente le informazioni (anche induttivamente, ad es.: *"Il problema di Albert ha un solutore in meno rispetto a quello di chi ha la maglietta blu…"* comporta che la maglietta di Albert non è blu), coloro di rosso una cella non buona (ad esempio l'incrocio tra Albert e il blu) e di verde una buona (che comporta il rosso sulle altre celle della stessa riga e della stessa colonna dello stesso riquadro), arrivo a questo schema completato:



E quindi:

- Quanti solutori ha avuto il problema di Albert(o)? **70**
- Di che colore è la maglietta di Fred? **Non lo so, visto che il quinto colore non è mai indicato, sicuramente non è gialla, verde, rossa o blu**
- Qual era la difficoltà del problema di Rudy? **4**

Chiaramente i lettori non l'hanno presa benissimo, ma siamo famosi per fare pasticci piccoli o grossi, non vi arrabbiate!.

4.2.2 Siete inciampati e avete battuto la testa...

Anche qui si tratta di giocare con poche informazioni e poca capacità in memoria:

> *Ascoltate un elenco di 100 nomi; tre nomi compaiono più della metà delle volte, e dovete individuarli. Ogni volta che sentite un nome potete decidere se memorizzarlo, compiere qualche altra azione o ignorarlo; ma se decidete di memorizzarlo, il nome che vi ricordavate sino a quel momento viene immediatamente cancellato; se volete ignorarlo, il nome appena pronunciato sparisce dalla vostra visibilità. Potete usare un contatore a scatto singolo: potete incrementare o decrementare il valore del contatore di uno. Esiste una strategia per identificare il nome più frequente?*

Al solito la prima soluzione è quella di ***Valter***:

> Siccome il contatore in partenza vale zero, come da esempio, userei questo algoritmo:
>
> - per ogni nome che il capo legge, adotto la strategia descritta nei punti successivi
> - se il valore del contatore è zero, memorizzo il nome e lo incremento portandolo a 1
> - se non è zero e il nome coincide a quello che ho in memoria incremento il contatore
> - se non è zero e il nome non corrisponde a quello in memoria decremento il

contatore
- al termine della lettura il nome memorizzato è quello che è comparso più della metà.

Si poteva semplificare l'algoritmo ma, per chiarezza, ho preferito dettagliare:

- se il valore del contatore è zero memorizzo il nome e passo ai punti seguenti
- se il nome corrisponde a quello memorizzato adesso o in precedenza incremento
- se il nome non corrisponde a quello in memoria decremento il contatore di uno
- al termine della lettura il nome memorizzato è quello comparso più della metà.

Provo a motivare perché tale strategia, dovrebbe fornire, sempre, la soluzione:
- con contatore a zero, il nome compare più della metà delle volte nei restanti
- a fine elenco, quindi, può esserci in memoria soltanto il nome da individuare
- gli altri nomi, infatti, portano sempre prima del termine a zero il contatore
- mi pare, quindi, che la strategia sia valida anche se vi sono più di tre nomi.

È poi arrivata la versione di ***Galluto***:

> Questa soluzione fa schifo e sicuramente non è quella prevista, visto che non usa né la posizione di memoria, né la possibilità di usare il contatore in decremento.
>
> Però funziona e (povero criceto…) si applica anche a più di tre nomi. E poi è l'unica che ho trovato in due mesi.
>
> L'assunto è che ad ogni azione il criceto possa usare il contatore infinite volte e che possa essere mooooolto veloce a spingere il tasto.
>
> Trovo un algoritmo tale da associare ad ogni nome un numero diverso; ad esempio, posso utilizzare il codice ASCII delle varie lettere del nome e quindi, ad esempio, Aldo diventa 65 100 108 111 (senza gli spazi); per semplificare, diciamo che bastano le prime tre cifre del prodotto dei codici delle varie lettere; così Aldo diventa 65*100*108*111/100000 = 779, Berto è 978 e Carlo 888…
>
> Userò il contatore per scrivere numeri di 15 (quindici!) cifre, di cui le 5 più a destra (fino alle decine di migliaia) sono riservate al primo numero che verrà dichiarato, le seconde 5 (dalle centinaia di migliaia ai miliardi) al secondo nome in ordine di apparizione, e le 5 più a sinistra (ci siamo capiti) al terzo.
>
> Quando viene detto il primo nome, il criceto usa l'algoritmo, calcola il valore e spinge il tasto del contatore fino a raggiungere il valore stesso.
>
> Dal secondo nome in poi, il criceto controlla se il valore è un divisore preciso delle ultime tre cifre del contatore; se si, somma il valore al contatore; se no, controlla se è un divisore del numero "formato" dalle cifre dalla sesta alla decima ed eventualmente somma il valore moltiplicato per 100.000; se no, somma il valore moltiplicato per 10.000.000.000.
>
> Perché 5 posizioni per ogni nome? Per evitare che, se sommo troppe volte un certo valore, si vadano a sporcare le posizioni del nome successivo. Perché 3 cifre e non una o due? Per evitare situazioni dubbie in cui il valore da testare potrebbe essere un divisore preciso di due settori diversi del contatore.
>
> All'ennesimo nome, quando il valore che sto testando divide uno dei settori, **con quoto = 51**, fermo il capo (vuoi mettere la soddisfazione?), senza neanche aspettare che arrivi al centesimo nome, e dichiaro che il vincitore è quello appena pronunciato.

Non condividiamo per niente la prima fase, siamo solo impressionati dalle capacità del criceto… ma dobbiamo andare avanti per arrivare finalmente alle soluzioni dei problemi di settembre.

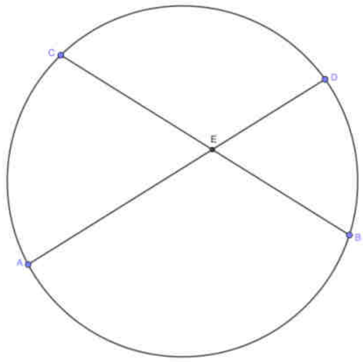
4.3 [284]

4.3.1 È tanto che non parliamo di cerchi...

Il Capo presenta addirittura tre problemi questa volta, ma tutti in forma circolare, se ci passate la battuta patetica:

Sulle rive di un lago perfettamente circolare ci sono quattro moli: A, B, C, D; da A e B sono pronti a partire (a velocità costanti) due equipaggi considerati puntiformi, quando si rendono conto che, se partissero contemporaneamente e alle loro specifiche velocità, dirigendosi direttamente e rispettivamente ai moli D e C, si scontrerebbero di sicuro. Decidono quindi che chi parte da A si recherà in C, e chi parte da B si recherà in D. Chi arriva prima??

Come spesso accade la prima soluzione è di ***Valter***, che spesso ci scrive non appena distribuiamo il nuovo numero:

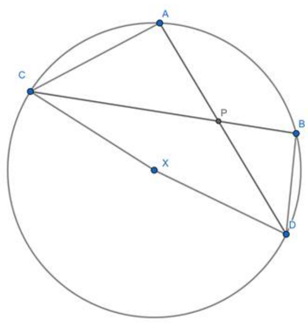


AE BE sono le distanze coperte dai due equipaggi al loro scontro.
Senza perdita di generalità assegno come tempo dello scontro t=1.
AE e BE risultano quindi, le loro, rispettive, velocità costanti.
AC BD sono le distanze dei percorsi effettivi per non scontrarsi.
Il tempo che impiegano, è dato dalle distanze diviso le velocità.
I tempi sono AC/AE e BE/BD, … ma i triangoli ACE BDE sono simili.

Subito dopo, lo avrete già immaginato, arrivano le soluzioni di ***Galluto***:

Arrivano contemporaneamente!

Intanto, se le traiettorie A-D e B-C si intersecano, le posizioni dei quattro moli devono essere con A "opposto" a D e B "opposto" a C.



Il fatto che, date le velocità dei due equipaggi, inevitabilmente ci sia la collisione significa che il rapporto tra le due velocità deve essere pari al rapporto tra i segmenti AP e BP (con P punto di incontro delle due corde AD e BC).

A questo punto basta dimostrare che lo stesso rapporto intercorre tra le corde AC e BD.

Per questo, considero che i triangoli ACP e BDP sono simili; infatti, gli angoli in P sono opposti al vertice e l'angolo in A del primo triangolo e l'angolo in B del secondo sono due angoli alla circonferenza ai quali corrisponde lo stesso angolo al centro CXB (con X centro del cerchio), e quindi sono uguali.

Perciò, **AC : BD = AP : BP** .

Passiamo ora al secondo problema.

4.3.2 A proposito di cerchi...

Un problemino di fisica con riflessioni, sempre su un cerchio:

> *Sulla balconata di una cupola circolare sono dati i due punti Y e Z diametralmente opposti tra loro. Supponendo di avere in Y un emettitore perfetto e in Z un assorbitore perfetto, Y genera un suono di durata t. Quanto dura il suono in Z?*

Lo abbiamo detto che spesso il primo a scrivere è ***Valter***? Ecco:

> Già sono una schiappa così; … se, poi, ci mettete di mezzo anche la fisica.
>
> Provo a dire la mia scemenza perché mi piace comunque provarci; vedete voi.
>
> Niente formule, tanto sbaglio; forse, c'è la velocità del suono nei solidi.
>
> Inizia arrivando a Z dalla direzione breve, finisce terminando dalla lunga.

E che poi arriva ***Galluto***? Ecco:

> Conscio di dire probabilmente delle bestialità, visto che non conosco la materia…
>
> … il percorso più breve del suono è il diametro che congiunge Y e Z, mentre il più lungo è la semicirconferenza sempre da Y a Z.
>
> Se è R è il raggio della cupola e V_s è la velocità del suono, il suono in Z viene udito per un tempo t più la differenza delle lunghezze dei due percorsi minimo e massimo e cioè:
>
> $$t + R(\pi\text{-}2)/\ V_s$$

Chi estende queste note non ha capito né il problema né le due soluzioni proposte, per cui non commenta e passa avanti.

4.3.3 ...qualcuno ha detto "cerchi"?

Ed infine un giochino con ben due cerchi:

> *Abbiamo due monete: una fissa di circonferenza pari a radice di due, mentre l'altra, mobile e di circonferenza unitaria, ruota senza strisciare sul bordo della prima. All'inizio, il punto di contatto tra le due monete è marcato. Quando la moneta ruota, ogni volta che un segno incontra l'altra moneta, la moneta senza segno viene a sua volta marcata. Dopo cento giri della moneta mobile attorno a quella fissa, quante marcature ci sono sulla moneta fissa?*

Chi arriva quasi sempre per primo? Proprio lui, ***Valter***. Ma non dobbiamo presentarlo, perché anche la sua premessa è ormai classica:

> Non sono convinto, completamente, del mio ragionamento, … comunque ci provo.
>
> Inizio ringraziando i Nostri riguardo alla circonferenza della moneta fissa: "*… siccome a noi la radice di due sta simpatica, questa preferiremmo tenerla…*". Almeno, nelle mie farneticazioni, non dovrò preoccuparmi di doppi conteggi:
> - la somma e prodotto di numeri interi è un numero intero
> - la somma di un intero e un irrazionale è un irrazionale.
>
> Parto con alcune premesse che mi servono poi per semplificare l'esposizione:
> - la rotazione di una delle due monete è relativa a quale si considera ferma
> - cioè, si può pure ipotizzare che sia la fissa a girare attorno alla mobile
> - assegno su entrambe le monete, posizione zero alla macchia iniziale comune
> - "giri" della fissa o mobile, lasciamo nuove macchie solo sull'altra moneta
> - le macchie sulla moneta che "gira" restano invariate, non se ne aggiungono
> - giri misti, cioè sia della fissa che della mobile, ne lasciano su entrambe
> - p.e. la macchia a 0 su mobile, dopo un suo giro ne lascia una a 1 su fissa
> - poi tale macchia, dopo un giro su fissa, ne lascia una a $\sqrt{2}$-1 sulla mobile
> - la macchia appare, pure, a 1 su fissa, se invertita la sequenza dei 2 giri
> - la somma dei due giri vale $\sqrt{2}$+1; aggiunge queste due macchie sulle monete.
>
> Disegno le macchie su un segmento di lunghezza 100 cioè i giri della mobile. La macchia iniziale, in posizione zero del segmento, lascia rispettivamente:
> - 100 macchie sulla fissa; cioè, una per ciascuno dei 100 giri, della mobile

- ⌊100/√2⌋=70 macchie sulla mobile; ognuna a √2 dalla precedente sul segmento
- per quanto detto non vi dovrebbero esserci sovrapposizioni di tali macchie.

La macchia iniziale è da calcolare fra quelle presenti su entrambe le monete. Le restanti 100 e 70, sono da conteggiare rispettivamente per fissa e mobile. Le altre, che si aggiungono, durante i giri delle monete, macchiano entrambe. Se, dal totale macchie, tolgo le 100 e le 70, ho quella sulla mobile e fissa. Ovviamente, per fare i conteggi precisi, devo aggiungere la macchia iniziale.

Tento di motivare la procedura, con cui conteggio il totale macchie presenti:
- calcolo quante macchie sono generate con n giri fra mobile "M" e fissa "F"
- per capirci, con 3 giri si originano quattro macchie cioè: MMM FMM FFM FFF
- le macchie lasciate, sono sempre una in più del numero di giri considerato
- dopo 71 giri, però, non si potranno considerare quelle con più di 70 fisse
- questo perché oltre 70 giri sulla fissa moltiplicando per √2 si supera 100
- per questi casi, il numero macchie vale uno più il massimo fisse possibile
- per esempio con 98 giri, al massimo, possono essere presenti quattro fisse
- già 98 giri, formati da 5 fisse e 93 mobile andrebbe oltre: 5√2+93=100.07…
- di 98 giri ce ne sono, quindi, 4+1=5: 4F+94M, 3F+95M,2F+96M, 1F+ 95M e 98M
- la formula per ottenere tale valore è ⌈(100-98)*(1+√2)⌉; vedi OEIS: A080754
- quindi il totale macchie presenti sul segmento, si ottiene dalla somma di:
- 1 cioè la prima macchia in posizione zero sulle due le monete
- sommatoria ⌈(100-x)*(1+√2)⌉, con "x" che parte da 99 sino a 70
- 70*71/2, somma delle macchie con numero "giri" da 70 sino a 1.

Il totale ammonterebbe a 3'624;… ma, c'è una piccola rettifica da apportare:
- nel caso di 71 "giri", la formula ⌈(100-x)*(1+√2)⌉, con x=70, darebbe 73
- in totale, però, ne sono presenti soltanto 71 in quanto: 70√2+1 = 99.9…
- risulta che tale valore, data la lunghezza del segmento, vale da 0 a -2
- la formula per ottenere la rettifica, non la dimostro per non appesantire:
-- ⌊[(lunghezza segmento) - (numero massimo giri fissa) * √2] / (√2-1)⌋
-- siccome il primo decimale di √2 è 4, ovviamente al massimo ottengo 2.

Quindi, in totale, 3'622 macchie: 3'552 presenti su fissa e 3'522 su mobile. Ho scritto un programma che, dati i giri di F, impostati, genera le macchie. Ne conteggia, poi, quelle su fissa e mobile e come verifica, tramite formula (trovate nel codice una istruzione commentata che, volendo, le stampa tutte).

Beh, al solito il programma è con noi, in caso interessi. È l'ultimo problema, ma anche per questo abbiamo un contributo di ***Galluto***:

Ogni volta che la moneta mobile completa una "rotazione" su sé stessa mentre "rivoluziona" intorno alla moneta fissa, il primo punto macchiato della moneta mobile (che chiamo A) vernicia un nuovo punto di quella fissa a distanza 1 dal precedente; questi nuovi punti sono tutti diversi perché, essendo $\sqrt{2}$ irrazionale, A non torna mai periodicamente su punti già macchiati.

Dopo che un altro punto della moneta mobile si è verniciato toccando una macchia di quella fissa, non fa altro che "seguire le orme" di A, tornando, sempre a distanza di 1, sulle altre macchie generate da A. Quindi tutti gli altri punti verniciati della moneta mobile non aggiungono mai altre macchie su quella fissa.

E dunque, il numero di macchie è pari al numero di volte che A ritorna ad essere il punto di tangenza della moneta mobile con la moneta fissa, ricordandosi di contare anche quella iniziale; per n giri, le macchie saranno $\mathbf{int}(\boldsymbol{n} * \sqrt{\mathbf{2}}) + \mathbf{1}$; per 100 giri saranno **141 + 1 = 142.**

Decidete voi se hanno raggiunto la stessa conclusione, noi con questo chiudiamo. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

...doppio, questa volta, per farci perdonare. “Cosa?” Eh, non lo sappiamo ancora.

Esistono molti modi per dividere un n-agono (convesso) in triangoli attraverso diagonali non intersecantesi.

1. Dimostrate che il numero di triangoli ottenuto è indipendente dal modo scelto (trovandone il numero)
2. Dimostrate che il numero di diagonali coinvolte nella decomposizione è indipendente dal modo scelto (trovandone il numero).

6. Pagina 46

Indichiamo uno dei settori come S_0 e gli altri settori, procedendo lungo il cerchio in senso trigonometrico, come S_1, S_2, …, S_{p-1}. Inoltre, sia $S_p=S_0$, $S_{p+1}=S_1$ …, $S_{2p}=S_0$, eccetera.

Supponiamo ora di considerare due colorazioni C_1 e C_2 del cerchio differenti se differiscono nel modo nel quale uno qualsiasi dei settori è colorato. Se ogni settore può essere colorato in n modi, esistono n^p colorazioni del cerchio; questa, però, non è la risposta al problema, in quanto alcune di queste colorazioni possono essere ottenute da altre semplicemente ruotando il cerchio; diciamo che C_1 è *equivalente* a C_2 (e scriviamo C_1~C_2) se una delle due configurazioni può essere ottenuta dall’altra ruotando il cerchio.

Possiamo ora dividere l’insieme delle colorazioni in classi, inserendo C_1 e C_2 nella stessa classe se C_1~C_2. Quindi, la classe contenente una data colorazione C_1 conterrà tutte le colorazioni equivalenti a C_1, e la chiameremo la ***classe di equivalenza*** di C_1.

Il problema si riduce quindi alla determinazione delle classi di equivalenza, per risolvere il quale dobbiamo sapere quante colorazioni sono equivalenti ad una data colorazione C.

È evidente che, se i p settori sono tutti dello stesso colore, allora C è equivalente solo a sé stesso; quindi, abbiamo n classi di equivalenza composte da un unico elemento, una per ognuno dei colori disponibili.

Se, invece, C_0 è una colorazione nella quale almeno due settori hanno colori diversi, allora possiamo mostrare che le colorazioni C_0, C_1, …, C_{p-1} ottenute ruotando C_0 in senso trigonometrico di angoli di 0°, 360°/p, 2(360°/p), …, (p–1)(360°/p) sono tutte diverse[4].

Supponiamo che sia $C_i=C_j$, con $0 \leq i < j \leq p-1$. Ponendo $k=j-i$, questo significa che la colorazione C_i non cambia attraverso una rotazione di k(360°/p) (con $0<k<p$). Per semplicità, ma senza perdere in generalità, supponiamo S_0 sia colorata in rosso in C_i. Allora anche S_k deve essere rosso, e ugualmente per S_{2k}, S_{3k}, eccetera. Ora, i settori S_0, S_k, S_{2k}, …, $S_{(p-1)k}$ sono tutti differenti; quindi, per $S_{lk}=S_{mk}$ (dove $0 \leq l < m \leq p-1$), $mk-lk = (m-l)k$ dovrebbe essere un multiplo di p; questo è però impossibile, in quanto $0 < m-l < p$, con $0 < k < p$, e p è primo. Essendoci però solo p settori, ogni settore è nella forma S_{lk}, e quindi è colorato di rosso nella colorazione C_i. Questo contraddice il fatto che non tutti i settori erano dello stesso colore in C_0.

Quindi, quando C_i è una colorazione nella quale due settori hanno colori diversi, la classe di equivalenza C_0 contiene p elementi.

Sia N il numero totale delle classi di equivalenza; abbiamo mostrato che ci sono n classi di equivalenza composte da un solo elemento, devono esserci $N-n$ classi di equivalenza di p elementi ciascuno. Essendo però il numero totale delle colorazioni n^p, abbiamo:

$$n + (N - n)p = n^p$$

e, risolvendo in N,

$$N = \frac{n^p - n}{p} + n$$

[4] Si noti che qui stiamo utilizzando implicitamente il fatto che *p è primo*: senza questa condizione, non potremmo affermare che tutte le colorazioni sono diverse.

che è la soluzione cercata.

Si noti che essendo il numero N è, per definizione, un intero, questa formula indica che per ogni valore di n il valore n^p-n deve essere divisibile per n: che è il Teorema di Fermat di Teoria dei Numeri.

7. Paraphernalia Mathematica

Se vi sembra che Rudy questa volta la metta molto sul formale e sembri quasi serio, non preoccupatevi: poi gli passa.

È che ***forse*** ha trovato una cosa che cercava da almeno vent'anni anni, e sta cercando di non rendere troppo evidenti i festeggiamenti...

7.1 La topologia del saliscendi

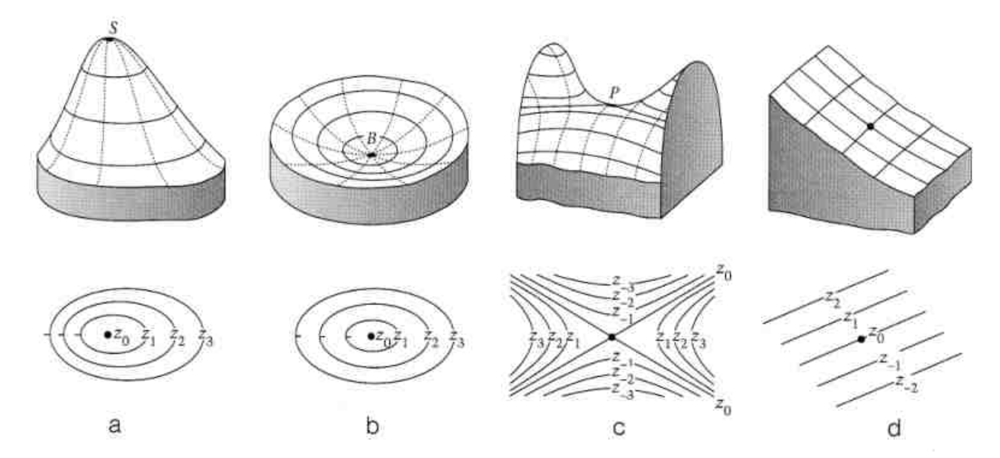
Una delle più grandi confusioni poste in atto dalle persone "*mathematically challenged*" è quella tra topologia e topografia: hai voglia a spiegare loro che non sono la stessa cosa, la confusione continua imperitura. Il bello è che esiste una parte della topologia che, per spiegare una serie di concetti, parte proprio dalle mappe, un po' idealizzate, soggette a considerazioni non esattamente geopolitiche ma, comunque, mappe: questo campo è noto come la ***Teoria di Morse***. Il nostro scopo, questa volta, è di farci un giro.

La prima cosa che salta all'occhio, in una carta geografica fisica, sono le isoipse e le isobate.

Sfoggiata la nostra cultura classica, le chiameremo genericamente ***curve di livello***[5], intendendo "la linea che connette punti che si trovino alla stessa altezza sul livello del mare". Se consideriamo un'area del globo terracqueo, potremo descrivere la sua struttura (in un'approssimazione, per il momento, di terra piatta) attraverso una superficie di equazione $z = f(x, y)$; le curve di livello, quindi, sono i punti giacenti su questa superficie per cui z è costante, e quindi potremo considerarli su un piano xy descritti dall'equazione $f(x, y)=costante$; in un certo senso, le diverse "costanti" enumerano le curve di livello della nostra mappa; la superficie terrestre è, sperabilmente, continua, e le nostre curve di livello selezionano alcune costanti e mostrano quelle.

Che forma può avere la nostra superficie? O meglio, di che tipi possono essere le nostre superfici? Che oggetti possiamo incontrare?

Un punto, nella nostra superficie, può essere di tre (più uno, che tenderemo ad ignorare) tipi: questi sono punti cosiddetti ***critici***, o ***di equilibrio***: se posate una biglia *esattamente* in uno di questi punti, rimane lì (attenzione però che solo uno di questi punti – il bacino – è di equilibrio *stabile*). Cominciamo col vedere "come sono fatte".



6 *Le ~~quattro~~ tre forme del terreno (più una).*

In [a], vediamo la ***cima***; potremo definirlo semplicemente come il punto "più alto" del suo intorno, ma è possibile inventarsi dei casi neanche poi tanto particolari per i quali questa definizione può causare dei problemi: ad esempio, per un concetto abbastanza grande di

5 Nota per i pignoli: le *isobate* sono quelle bagnate, le *isoipse* le altre. Ossia, le prime sono sotto il "livello zero", le altre sono sopra. Secondo alcuni, le prime andrebbe specificato che sono anche "salate", nel senso che il "livello zero" è quello del mare. Abbiamo però sentito parlare anche di isobate di lago, quindi fate un po' come vi pare.

"intorno", le Tre Cime di Lavaredo diventerebbero soltanto una, la più alta. E un matematico può inventarsi dei casi anche più complicati, come ad esempio una superficie infinitamente complessa nella quale ogni punto di massimo è il punto di accumulazione di massimi sempre crescenti... Insomma, ci serve qualcosa di più robusto. Oppure, qualcosa che ci permetta di escludere i casi patologici.

La soluzione – non pienamente soddisfacente, se possiamo dire – è stata trovata definendo la cima non solo come il punto che si trova più in alto dei suoi vicini, ma anche come il punto per il quale le cure di livello attorno si comportano come nella seconda parte della figura [a]: ossia, ci sono una serie di curve non intersecantesi nidificate, le cui rispettive altezze diminuiscono man mano che ci allontaniamo alla cima.

In [b], vediamo un ***bacino***: qui, possiamo cavarcela alla svelta, dicendo che non è altro che una cima al contrario, ossia abbiamo un bacino quando cambiamo il segno della funzione $f(x, y)$.

In [c], la cosa è più complessa: questo oggetto è noto come ***passo*** o ***punto di sella***, e la miglior descrizione possibile è che, in un intorno del punto, sembra una sella; il comportamento "strano" nasce anche dal fatto che nel caso della cima e del bacino le curve di livello, raggiungendo il punto, degeneravano in un punto; nel passo, le curve di livello degenerano in due rette, come si vede dalla seconda parte della figura [c]; queste linee (o meglio, le loro tangenti nel punto di sella, per non perdere in generalità) dividono la zona limitrofa in due coppie di "angoli". Se vi muovete all'interno dei settori definiti da due di questi angoli, andate in salita; per gli altri due, andate in discesa. Abbiamo messo le virgolette ad "angoli" per mantenere l'ambiguità tra le due e le tre dimensioni, ma crediamo la cosa sia chiara.

Dicevamo, tre punti più uno, che non considereremo in quanto è il più comune: trattasi del ***punto di pendenza***. Di norma, quasi tutti i punti di una mappa sono punti di pendenza: cime, bacini e punti di sella sono punti singoli, circondati da un insieme continuo di punti di pendenza.

Ci sono evidentemente altri tipi di punti: non è difficile inventarsi punti di sella con tre "discese" (la zona della Diga delle Tre Gole, in Cina), altopiani (l'Altopiano di Asiago) o creste (la Serra di Ivrea). Esiste un teorema (da Rudy soprannominato "Vanga e Carriola"), nella Teoria di Morse che, permettendo "leggere modifiche" al terreno, trasforma il tutto in un sistema di cime, bacini e selle: la dimostrazione è complessa e noiosa, quindi lavoriamo di intuito e andiamo avanti.

Siccome sappiamo che siete molto delusi del non avere le dimostrazioni, passiamo ad un teorema che dimostreremo, visto che il metodo utilizzato è "esteticamente valido secondo Rudy" (e anche secondo Doc, riteniamo: nelle dimostrazioni, a lui piace portare le cose agli "estremi").

Teorema 1*: in un'isola nella quale ogni punto è un punto di pendenza, una* ***C****ima, un* ***B****acino o un* ***P****asso e tutti i punti della costa sono punti di pendenza, se C, B e P sono rispettivamente i numeri delle Cime, dei Bacini e dei Passi, vale la relazione*[6]*:*

$$C + B - P = 1$$

Per rendere più chiara la dimostrazione, dividiamola in tre parti. Vi ricordo che stiamo parlando di un'***isola***, quindi di una zona limitata, almeno come numero di "punti CBP": Terraforming, Diluvio Universale e Allagamento dei Passi.

Terraforming (facile, anche se un po' noioso): tutte le cime sono dell'altezza dell'Everest e tutti i bacini sono al livello della Fossa delle Marianne: in base al Teorema della Vanga e della Carriola, questo è possibile; non solo, ma facciamo anche in modo (in base al nostro TdVedC) che tutti i passi siano ad altitudini differenti. Il motivo del tirare via terra dai bacini potrebbe non essere immediato, ma proviamo a pensarci un attimo: se cercassimo di equalizzarli ad un altro livello (ad esempio al livello del mare...), potremmo correre il rischio di "cancellare qualche punto di sella", e noi vogliamo tenerli; portandoli

[6] … e, a questo punto, avete capito come va a finire....

tutti al *minimo* livello presente sul globo, evitiamo questo problema. Esattamente lo stesso ragionamento ci permette di portare tutte le cime all'altezza dell'Everest. "Rudy, guarda che così rischiamo di avere un mucchio di Olande, zone al di sotto del livello del mare" Beh, abbassate il mare. Problemi[7]?

Per "mettere a posto" le selle, probabilmente è necessario un po' più di lavoro: supponiamo che il territorio attorno al punto di sella sia, per una zona delle dimensioni necessarie (OK, non è una definizione molto corretta... Potete tornare un attimo alla realtà e smetterla di fare i Veri Matematici, per favore?) ragionevolmente modificabile; in particolare, sia una zona di raggio r attorno al punto di sella *rigida*, e la zona a distanza tra r e $2r$ dal punto di sella perfettamente elastica (valori di r tali che tutto funzioni); alziamo quanto basta la zona interna, fidando nella zona elastica per mantenere la continuità tra le due zone. *Et voila*.

Diluvio Universale: questa è la seconda fase. Comincia a piovere su tutta l'isola e sul mare; essendo il tutto perfettamente impermeabile, il livello dell'acqua sale, e arriva sino al livello dell'Everest, quando scompare tutto. Nei bacini appaiono dei laghi che (uno per volta, visto il lavoro che abbiamo fatto sui punti di sella) si uniscono tra loro e al mare. Possiamo monitorare la comparsa di laghi e di nuove isole man mano che l'acqua sale (ricordiamoci di *non* considerare il mare come un lago).

All'inizio del diluvio, si forma un lago in ogni bacino, quindi il numero iniziale dei laghi è B. Verso la fine del diluvio, tutti i laghi sono connessi con il mare, e sporgono solo le cime. Quindi, *i **laghi** passano da B a 0, mentre le isole passano da 1 a C.*

Allagamento dei Passi: Come cambia il numero dei laghi e delle isole? È evidente che non basta si allaghi un punto di pendenza, deve allagarsi un passo, in modo tale da connettere i due laghi presenti dalle due parti. Siccome abbiamo fatto in modo che i passi fossero *tutti ad altitudini diverse*, l'allagamento dei passi avverrà *uno per volta*. Ogni volta, possono presentarsi un paio di casi:

Una possibilità è che l'acqua che sommerge il passo dalle due parti arrivi *dallo stesso posto* (o un lago, o il mare); prima la nostra cima era una penisola collegata alla "terraferma" da un punto di sella. Un esempio possono essere i Faraglioni di Capri: il faraglione è la cima, tra la terraferma e il faraglione c'è una sella, se l'acqua sale sommerge il punto di sella e il faraglione diventa un'isola. In questo caso, ***il numero dei laghi è costante ma il numero delle isole aumenta di* 1**.

L'altra possibilità (quella più intuitiva) è che due laghi si uniscano, sommergendo il punto di sella. In questo caso, ***il numero dei laghi diminuisce di* 1 *ma il numero delle isole resta costante***.

Quindi, ogni volta che si sommerge un passo, o aumenta di uno il numero delle isole o diminuisce di uno il numero dei laghi.

Ma le variazioni totali di questi due numeri sono, rispettivamente, B e S–1, e quindi:

$$P = B + (C-1) \rightarrow C + B - P = 1$$

che è il nostro teorema.

Questo simpatico teorema ha un corollario: *se ogni punto della Terra è un punto di pendenza, una cima, un bacino o un passo, allora $C + B - P = 2$.*

Per verificarlo, si procede in questo modo: togliete tutta l'acqua dal mare (che, in questo caso, essendo sferico[8], è finito), mettete un po' d'acqua nel più profondo dei bacini e chiamatelo, temporaneamente, "mare", mentre il resto del globo è l'"isola". Se adesso non lo chiamate più "mare", la vostra Terra avrà tante cime e passi quanti ne ha l'isola, ma un lago in più. E adesso applicate il teorema precedente. Fatto.

[7] OK, vediamola più nei dettagli. Potete abbassare il mare sino alla Fossa delle Marianne (il punto più basso della nostra mappa) supponendo burroni ripidissimi sulla costa che vanno giù sino alla FdM, e prosciugare il mare. In questo modo, tutti i nostri bacini hanno il fondo "al livello del mare" (che non c'è più).

[8] Con sommo dispiacere dei terrapiattisti, dobbiamo abbandonare l'approssimazione iniziale.

Ora, anziché la terra sferica, supponetela un poliedro convesso[9], ossia tale che un punto O al suo interno abbia proiezioni perpendicolari alle facce, agli spigoli e ai vertici tutte interne al poliedro.

Definiamo l'altezza di un punto sul poliedro come la distanza del punto da O: allora, i ***V***ertici del nostro poliedro sono le ***C***ime, le proiezioni del nostro punto sulle *F*acce sono i *B*acini e le proiezioni sugli *S*pigoli sono i punti di *S*ella. Quindi, vale il teorema:

Se F, V e S sono rispettivamente il numero delle facce, dei vertici e degli spigoli in un poliedro convesso, allora F+V–S=2.

Finalmente, dopo tanti anni, una dimostrazione ***decente*** della Più Bella Formula della Matematica (secondo Rudy, almeno: dibattito in corso, da circa vent'anni).

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[9] ...ve l'ho detto, vero, che Doc mi ha regalato un mappamondo *icosaedrico*? Beh, se non ve l'ho detto, ve lo dico adesso. Bellissimo.