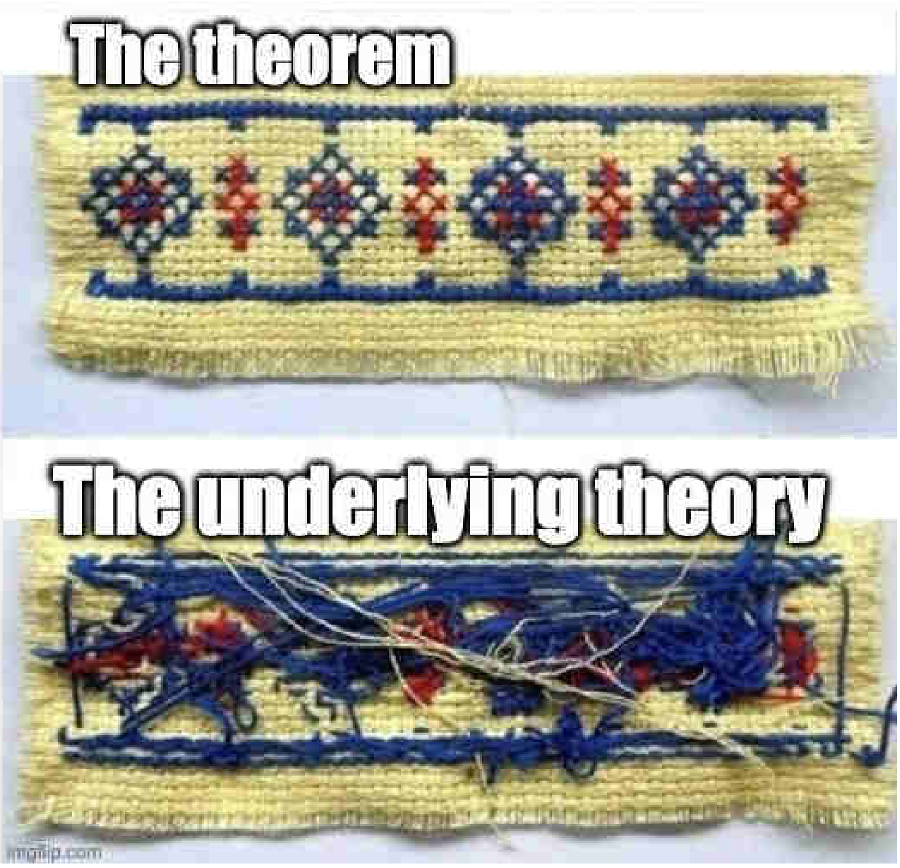
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 282 – Luglio 2022 – Anno Ventiquattresimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM277 ha diffuso 3'356 copie e il 21/06/2022 per Google eravamo in 6'110 pagine.

L’immagine è di ***Danny Thompson*** su Twitter (@DThompsonDev).

1. Punto triplo inesistente

*"Salve, Regina, Mater misericordiae,
vita, dulcedo, et spes nostra, salve."*

L'unica maniera per capirci qualcosa, probabilmente, è volarci sopra.

Oh, certo, ci sono le mappe; carte geografiche di tutte le scale, con tutti i dettagli possibili, ma c'è poco da fare: è davvero un luogo geografico maledettamente complicato. Troppi rami, troppi nomi tedeschi, troppe città e perfino troppe nazioni. Il tutto, nell'unico posto d'Europa in cui non sono stati disegnati i confini. No, non c'è mappa che tenga: farci un voletto lento sopra, invece, potrebbe essere davvero l'unica soluzione. Gli occhi leggono meglio la realtà che la sua rappresentazione, quasi sempre.

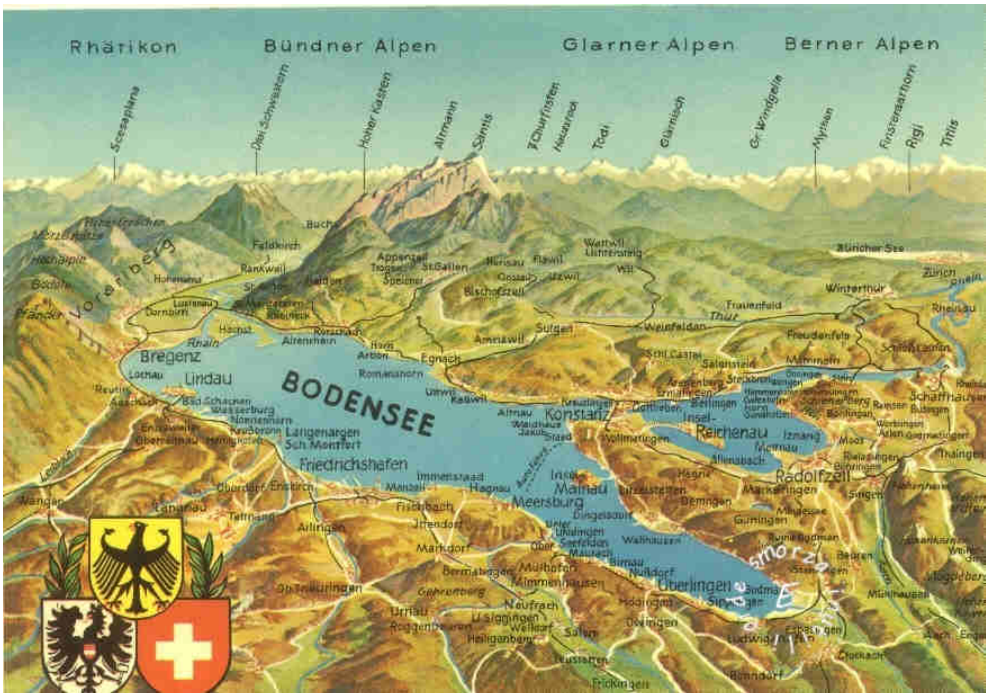
Il Lago di Costanza non è il più grande dei laghi alpini. Per estensione, è superato – anche se non di molto – dal Lago di Ginevra, che arriva fino a 582 chilometri quadrati; invece il Bodensee (come lo chiamano quelli che abitano sulle sue rive) non supera i 536. Ma è comunque un lago molto grande, se si pensa che il maggiore dei laghi italiani, il Garda, arriva solo a 370; e, soprattutto, la grandezza superficiale non è tutto. Il Lago di Ginevra – o Lemano – figlio del Rodano, ha proprio la forma che uno si aspetta dai laghi alpini: allungato, stretto all'inizio dove l'immissario principale sbocca in una valle inaspettata, più largo al centro e poi si nuovo stretto, quando l'emissario, dopo aver concluso il suo lavoro di inondare la valle suddetta, trova un varco tra le montagne per proseguire la sua corsa verso il mare. E il Lemano fa proprio così: mantiene il Rodano come fosse una sua lunga spina dorsale, e costruisce la sua forma attorno: compatta, allungata e pertanto elegante, e sembra quasi il disegno d'un basco appoggiato gentilmente su una testa femminile, come lo portava Faye Dunaway interpretando Bonnie Parker in "*Gangster Story*"[1]. Del resto, è ovvio: il Lago di Ginevra è mezzo francese e mezzo svizzero (francese) e si sa che i cugini transalpini all'eleganza ci tengono molto.

Il Lago di Costanza è totalmente diverso, da questo punto di vista: il fiume che lo genera e governa (anche se sono tanti i corsi d'acqua che lo alimentano) è il fiume più significativo d'Europa: quel Reno che fin dai tempi dei Romani ha assunto il ruolo impegnativo di segnare i confini più guerreschi del continente. Ma qui non è il Reno largo e severo popolato da armate diverse sulle sue due rive; è un fiume ancora giovane, adolescente, e da adolescente sembra comportarsi. Nasce del tutto svizzero: e il "del tutto" sta a chiarire la sua duplice genesi, visto che – quasi fosse indeciso – nasce in due forme diverse, il Reno Anteriore e il Reno Posteriore: ma sono rami svizzeri, che entrambi nascono (più meno) nel grande acrocoro d'Europa, quello del San Gottardo. Da bravi gemelli, i due rami se ne vanno quasi paralleli verso oriente, poi piegano a nord, decidono di congiungersi, e una volta uniti il Reno comincia la sua attività preferita, quella di fare le funzioni di confine. Separa ordinatamente Svizzera e Liechtenstein, l'uno a destra e l'altra a sinistra; e probabilmente è qui che scopre che svolgere l'attività di guardia di confine è il suo destino, perché continua subito a farlo con passione. È nel bel mezzo del suo letto che ospita un "punto triplo" ovvero un punto in cui si incontrano tre stati: ai due citati, si aggiunge anche l'Austria, che continuerà a possedere la sua riva destra ancora per qualche chilometro.

Poi, quasi senza accorgersene, entra per intero in Austria. Sappiamo bene che entità inanimate come i fiumi non hanno emozioni, e men che mai emozioni dettate dalle

[1] Film del lontano 1967, diretto da Arthur Penn. Ad interpretare Clyde Barrow c'era Warren Beatty. Si tratta di un altro caso di inspiegabile cambio di titolo nell'edizione italiana: visto che il titolo con cui è stato diffuso in Italia è stato appunto "Gangster Story", si potrebbe pensare che gli incaricati dell'italica distribuzione abbiano deciso di mantenere il titolo originale, e invece no. Il titolo originale del film è "*Bonnie and Clyde*"; peraltro, è anche la formula con cui tutti gli spettatori italiani hanno continuato a chiamare la pellicola (fatta salva la sostituzione dell'anglica congiunzione "*and*" con la più facile "*e*").

sciocche geopolitiche degli esseri umani; ma, volendo giocare un po' con le umanizzazioni, sembrerebbe proprio che qui il Reno, come un bambino che si è allontanato inconsapevolmente da casa, venga preso dal panico. Il pieno ingresso in Austria, l'aver lasciato la natia Svizzera, l'aver cessato il suo ruolo di demarcatore di confini sembrano gettarlo nel panico: percorre in territorio austriaco a malapena cinque chilometri, e poi scoppia a piangere. E se un fiume piange, il risultato è un lago. Un lago grande e strano, che si allarga e protende rami senza sbocco verso la Germania, mentre a trovare la via d'uscita è un altro pezzo di lago, l'Untersee, che è certo parte del Bodensee ma sembra frutto proprio dell'ansia di ritorno del Reno: ripiega verso ovest, riprende addirittura l'aspetto di fiume – un fiume all'interno d'un lago, si è mai visto? – e poi si allarga in questo lago-dependance mezzo svizzero e mezzo tedesco[2]. Qui, quasi fosse contento d'essere tornato a marcare il confine svizzero (con la Germania, adesso) festeggia nei pressi di Sciaffusa con rigogliose cascate, e poi prosegue verso occidente fino a Basilea, dove ospiterà un altro punto triplo di confine, quello tra Svizzera, Germania e Francia. Da qui in avanti diventa adulto e perfino troppo significativo, confine di guerra per secoli, e vettore di nomi che hanno passato gran parte della loro esistenza cambiando nazionalità: Alsazia, Lorena, Saar, Ruhr.



1 *Cartolina postale sul Lago di Costanza (vista da NordEst verso SudOvest)*

Due punti tripli di confine sono già un bel record, per un solo fiume. Ma il proverbio assicura che "non c'è due senza tre", e questa volta il proverbio potrebbe persino aver ragione, perché il terzo punto triplo effettivamente c'è, o meglio dovrebbe esserci: solo che nessuno ha mai stabilito dove sia. Germania, Svizzera e Austria si incontrano da qualche parte nel Lago di Costanza, ma nessuno si è mai preso la briga di definire esattamente dove. E questo perché quei confini acquatici non sono mai stati definiti da trattati internazionali. Le tre nazioni che convergono nel Bodensee sanno bene quali siano le rive tedesche (la maggior parte: è il maggiore specchio d'acqua della Germania, e viene anche chiamato con il nomignolo di "Mare di Svevia"), quali svizzere e quali austriache, ma una

[2] Non vorremmo togliervi il piacere di giocare da soli con una cartina dettagliata del lago, quindi ci limiteremo a pubblicare solo una vecchia cartolina postale invece di una mappa. Tanto per orientarvi, sappiate che "il ramo senza sbocco" verso Nord si chiama Überlinger See, che il "lago-dependance", l'Untersee, è diviso nelle tre parti del Zeller See, Gnadensee e Rheinsee, e che il pezzetto di lago che torna fiume pur restando lago è ovviamente chiamato See-Rhein.

barca in mezzo al lago non sa mai con precisione in che stato si trova. Difficile capire la ragione: in genere, certe cose sono sempre rigorosamente definite. Probabilmente, la causa risiede essenzialmente nel fatto che tutta la zona del Lago di Costanza, per quanto ripartito in tre nazioni, è storicamente sempre stata una regione che si riconosceva come comunità, unita proprio dalla natura lacustre, a prescindere dai governi dei diversi stati nazionali a cui le varie città rivierasche appartenevano. In tutto questo, deve aver certo contribuito anche l'identità culturale: la comune lingua tedesca, sopra ogni altra cosa.


2 *"Am Bodensee" di Paul Klimsch*

Grazie alla sua posizione, il Bodensee è sempre stato visto come un luogo ideale per i commerci, gli scambi e, di conseguenza, per gli importanti incontri ufficiali. Gli stessi confini nazionali sembrano meno rigorosi, da queste parti: la città di Costanza[3], tedesca, possiede anche qualche quartiere oltre il confine naturale del Reno che dovrebbe decretare quei quartieri come terra svizzera, quasi a sottolineare la prevalenza dell'unità cittadina rispetto a quella nazionale. Per contro, poco più nordovest e quasi fosse una sorta di compensazione, la zona di Sciaffusa è svizzera pur restando sulla riva destra, solitamente tedesca, del fiume. E questo nonostante che gran parte delle rive del Lago di Costanza siano tedesche, specie nella parte nord del lago. Dopo Costanza, che oltre a dare il nome al lago (almeno nelle lingue romanze come l'italiano e il francese) è anche l'area metropolitana maggiore, la città più grande e notevole sulle sponde del Bodensee è Friedrichshafen. A differenza di Costanza, è una città inaspettatamente giovane: la sua fondazione risale appena al 1811, anche se, ovviamente, è sorta su centri abitati preesistenti. A quel tempo l'Europa era sotto il dominio di Napoleone, e Federico I Württemberg costituì (e battezzò in suo nome) la nuova città, eretta sulla preesistente città imperiale di Buchhorn e sul vicino centro di Hofen. L'intenzione era proprio quella di stabilire, grazie al lago, una via commerciale verso la Svizzera e la Francia. La città si rivela un buon successo, commerciale e turistico, anche ben oltre l'epoca napoleonica: il "mare di Svevia" è luogo attraente per la villeggiatura e le vacanze, e Friedrichshafen sembra destinata a restare una ridente cittadina la cui economia si regge sul clima lacustre e sul fascino delle vicine montagne. Poi, improvvisamente e certo inaspettatamente per la maggioranza dei suoi abitanti, diventa un centro industriale unico al mondo: tutta colpa del conte Ferdinand che, pur essendo nativo di Costanza, è proprio a Friedrichshafen che inaugura il suo stabilimento.

Il conte Ferdinand di cognome fa von Zeppelin, ed è un cognome che, oltre ad essere famoso in tutto il mondo, in molte lingue è traslato fino a definire un oggetto, e un oggetto davvero gigantesco, a ben vedere: il dirigibile.

C'è una strana coincidenza, nella storia del volo umano, anche questa, in fondo, caratterizzata da un punto triplo: innanzitutto, l'arrivo del XX secolo, che dopo i fasti dell'Ottocento, mostra subito la sua intenzione di voler passare alla storia come il Secolo della Modernità. Gli storici, impietosi come è giusto che siano, lo etichetteranno poi con termini diversi: Secolo Breve, il Secolo più Sanguinario della Storia, e altri appellativi quasi sempre poco lusinghieri. Resta il fatto che all'inizio, ma proprio all'inizio del secolo, sembra ci sia una vera corsa alla conquista del volo. I fratelli Wilbur e Orville Wright

[3] Della città di Costanza, del suo celebre Concilio del 1414 nonché della sua sfacciata statua Imperia, parliamo a lungo nel compleanno dedicato a Jacopo Riccati, "*Honni soit qui mal y pense!*", RM232, Maggio 2018.

faranno sollevare da terra il loro *Flyer* nel 1903, e sono i campioni della scuola "più pesante dell'aria", ovvero di coloro che pensavano che la strada giusta per conquistare i cieli fosse quella di costruire macchine, appunto più pesanti dell'aria, in grado di volare grazie ad accorgimenti aerodinamici, giocando su spinta, portanza delle ali, resistenza e peso. L'altra scuola di pensiero – non è certo difficile immaginarne il nome – è quella del "più leggero dell'aria", ovvero di quelli che, senza scomodare troppo la legge di Bernoulli e l'Effetto Venturi, suggerivano semplicemente di affidarsi al caro vecchio Principio di Archimede. Il più grande dei progressi di questa scuola era stato fatto proprio allo scoccare del secolo, nel 1900, quando Ferdinand von Zeppelin inventa il dirigibile ad armatura rigida.

3 *Graf Zeppelin: 590 viaggi, 1'700'000 chilometri, 17'000 ore di volo, 143 traversate atlantiche, un giro del mondo, 34'000 passeggeri trasportati, nessun incidente.*

In tempi come quelli in cui viviamo, con migliaia di aeroplani che solcano i cieli ogni giorno, per non parlare di stormi di satelliti – tutti decisamente più pesanti dell'aria – che orbitano attorno al pianeta o ancora più lontano, questo duello "più pesante versus più leggero" può far sorridere. A inizio Novecento, però non lo era affatto: alla fin fine, alcune persone erano già da decenni salite in mongolfiera, e il problema da risolvere era solo quello che le mongolfiere vanno dove va il vento, e non dove vogliono i passeggeri. Il "dirigibile", come annuncia il nome stesso, risolveva benissimo questo problema, soprattutto grazie proprio all'idea della struttura rigida del conte (Graf) von Zeppelin. E, a dirla tutta, decidere se fare un volo turistico sul marchingegno dei fratelli Wright o su un grosso pallone a forma di sigaro sul lago di Costanza era una questione a cui la maggior parte delle persone avrebbe scelto senza dubbio la seconda ipotesi.

Anche dal punto di vista tecnologico e commerciale, la guerra tra aeroplani e dirigibili non fu una guerra lampo: i dirigibili erano assai competitivi, specie per i servizi forniti ai passeggeri, e tra gli Anni Venti e Trenta erano tanti a prevederli vincitori; certo, trovarsi in mezzo a una perturbazione atmosferica – cosa assai spiacevole anche per gli aerei – per un dirigibile è davvero un mezzo disastro. Ma a chiudere definitivamente la competizione a favore del "mezzo più pesante dell'aria" è stato il celeberrimo incidente dell'Hindeburg, il più grande oggetto volante mai costruito, che il 6 maggio del 1937 prese fuoco in fase di atterraggio a Lakehurst, causando la morte di 37 persone. La ripresa cinematografica, uno dei più celebri servizi sui disastri in diretta, fece perdere totalmente la fiducia nel mezzo, che di fatto scomparve dalla storia. Un po' come è poi successo al Concorde, a cui bastò un solo, unico incidente a decretarne la cessazione totale di utilizzo e produzione[4]: e questo nonostante che quello dell'Hindeburg fu il solo incidente mai occorso a un dirigibile uscito dalla fabbrica di Friedrichshafen di Ferdinand von Zeppelin.

Così, Friedrichshafen ha smesso di essere uno dei pochi poli mondiali dell'aviazione: è rimasta città piccola – supera di poco i 60.000 abitanti – ed è tornata a coltivare la sua

[4] Il Concorde F-BTSC si schiantò in fase di decollo il 25 luglio 2000, a causa di una striscia metallica di titanio perduta da un DC-10 decollato poco prima che lacerò una ruota del carrello del Concorde. Il primo volo commerciale del Concorde era avvenuto nel gennaio 1976, e per i ventiquattro anni della sua vita operativa nessun Concorde aveva avuto incidenti.

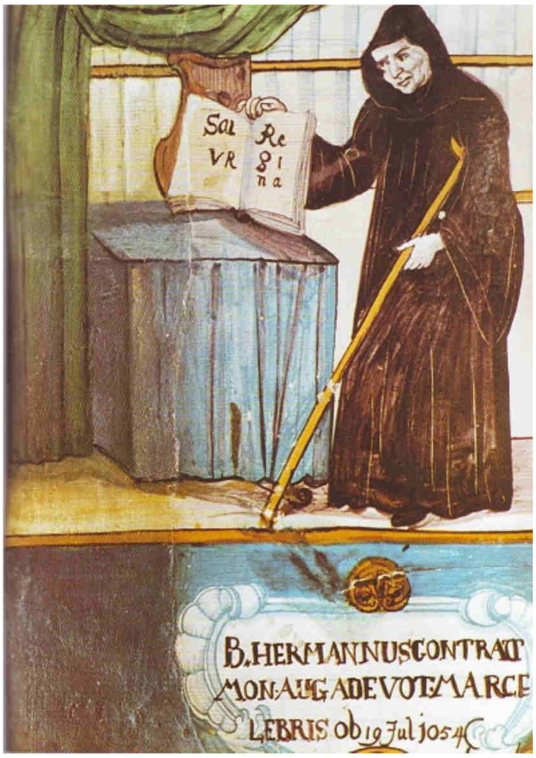
vocazione lacustre e turistica. Ma solo fino a un certo punto: un passato glorioso nei cieli non si dimentica facilmente, la città ospita infatti il Museo Zeppelin, il più grande del mondo di quelli dedicati ai dirigibili, e non è raro, ancora oggi, vedere dei moderni dirigibili prendere il volo dalle rive del Bodensee. Negli Anni Novanta, dalle ceneri della vecchia *Luftschiffbau Zeppelin*, l'azienda del conte Ferdinand, è nata la *Zeppelin Luftschifftechnik*, che produce dirigibili di nuovo tipo. Ha avuto abbastanza successo da contribuire alla fondazione di una università a Friedrichshafen, che si chiama, com'è facile indovinare, Università Zeppelin.

4 *Un nuovo Zeppelin NT, in servizio sul Lago di Costanza, sorvola l'isola di Reichenau. Voli turistici da trenta minuti a due ore, tariffe decisamente superiori a quelle di un volo aereo di una compagnia low-cost, ma in grado di fornire l'ebbrezza di un "volo lento".*

E, naturalmente, su quei dirigibili si può volare. Sembra che esistano solo quindici piloti abilitati a governare questi sigari volanti del XXI secolo, ma è certo che, acquistando un biglietto che sarebbe pleonastico definire "poco economico", è possibile provare l'ebbrezza di un volo lento e silenzioso, molto diverso da quelli che offrono le centinaia di compagnie aeree.

Eccolo, il volo lento sul Bodensee in grado di far capire al meglio strana forma del lago che invocavamo all'inizio di quest'articolo. Forse così si riesce davvero a vedere le Alpi che generano il Reno, forse si capisce come la geografia alpina si trasformi, più o meno rapidamente, più o meno dolcemente, in geografia mitteleuropea. Forse si riconosceranno le vie di Costanza e di Friedrichshafen, che in fondo sono città piccole e vicine, separate e allo stesso tempo unite solo dal lago. E forse si capirà davvero dove il Bodensee propriamente detto si trasforma in Untersee, quando il Reno torna fiume spacciandosi come See-Rhein. E forse si vedrà, proprio dentro l'Untersee, anche l'isola più grande di tutto il lago: Reicheneau, che sembra staccarsi solo a fatica dalla terraferma[5], e che l'UNESCO ha dichiarato essere Patrimonio dell'Umanità, soprattutto a causa della sua famosa abbazia: abbazia che, un po' sorprendentemente, ha avuto un ruolo significativo anche nella storia della matematica.

[5] Tanto a fatica che, di fatto, alla terraferma è stabilmente connessa tramite un ponte-diga. Ma, ovviamente, resta un'isola…



5 *Hermann von Reichenau, o Ermanno il Contratto.*

Hermann da Reichenau nasce il 18 Luglio 1013 ad Altshausen, una cittadina della Svevia non troppo distante dalla riva settentrionale del Lago di Costanza. La sua fortuna principale è quella di nascere in una famiglia nobile e ricca: era figlio del conte Wolverad II di Altshausen-Veringen e della sua sposa Hiltrud; non fosse stato di così augusti natali, probabilmente non sarebbe sopravvissuto all'infanzia. Non se ne conosce bene la causa, né se sia stata accidentale o congenita, ma il punto è che Hermann è fortemente disabile: passa alla storia con nomi diversi, tra cui quello più diretto di "Ermanno lo Zoppo", o il più frequentemente usato "Ermanno il Contratto". Fatto sta che ha limitatissime possibilità di muoversi, e anche gravi difficoltà nel parlare. Sono state avanzate diverse ipotesi sull'origine della malattia, anche relativamente recenti, sulla base dei sintomi descritti nelle cronache del tempo, senza peraltro arrivare a una conclusione certa. Si è parlato di epilessia, o di una forma di tetraparesi; si è ipotizzato sia un trauma al momento della nascita, sia un qualche incidente nella primissima infanzia. L'unica cosa certa, qualunque fosse la causa e la forma della sua disabilità, è che non ha in alcun modo colpito le sue capacità psichiche e intellettuali.

Hermann ha appena compiuto sette anni quando, nel Settembre 1020, entra nell'Abbazia di Reichenau: un monastero benedettino che aveva alle spalle già tre secoli di storia. È un luogo fortunato, per l'epoca: uno dei maggiori centri in cui si cerca di salvaguardare la cultura, copiando testi antichi e tramandando il sapere dei classici alle generazioni future. Come tutte le abbazie che ospitavano monaci amanuensi, l'abbazia era dotata di una ricca biblioteca, cosa assai rara in quei tempi in qualsiasi altro luogo d'Europa che non fosse un monastero.

Nonostante le stampe lo raffigurino spesso in piedi, delegando alla sola presenza di una stampella il compito di ricordare le sue difficoltà fisiche, la vita di Hermann di Reichenau è da immaginarsi come eternamente associata ad una sedia che lo conteneva, non avendo mai imparato a camminare, e quasi del tutto impossibilitato a parlare. Una situazione non troppo diversa di quella vissuta negli ultimi anni di vita da Stephen Hawking, ma avendo a disposizione solo la rudimentale tecnologia dell'Alto Medioevo.

Ma Hermann è indubbiamente assai intelligente e capace. All'interno dell'abbazia, che non lascerà mai per tutta la vita, Ermanno il Contratto percorre tutto il *cursus studiorum et honorum* possibile: prende i voti, diventa monaco, e poi arriva anche ad essere nominato abate. I contemporanei, stupefatti dalla sua saggezza, lo chiameranno "la meraviglia del secolo", ed è indubbio che, specie se comparate con la conoscenza media degli uomini dei tempi bui in cui vive, è solo una esagerazione veniale. Hermann diventa una vera e propria autorità in musica, matematica, storia e astronomia.

Per quanto riguarda la matematica, il contributo fondamentale di Hermann è quello di far conoscere agli europei le conquiste della matematica araba: non è del tutto certo che egli fosse in grado di leggere l'arabo, ma sicuramente aveva contatti con la Spagna, che a quel tempo era sotto il dominio arabo, ed è da lì che scopre quanto sia avanzata la scienza e la tecnica dei musulmani, se comparata con quella degli europei. Così, introduce in occidente i vantaggi di strumenti preziosi come l'astrolabio, la meridiana portatile, e i primi quadranti e sestanti. L'astrolabio, soprattutto, viene da Hermann profondamente studiato, e su di esso scriverà due libri fondamentali per l'astronomia dei suoi tempi: il *De Mensura Astrolabi* e il *De Utilitatibus Astrolabi.* Tutti i dati astronomici riportati nei suoi libri sono basati su osservazioni prese a una latitudine di 48° Nord, che è la latitudine della sua isola di Reichenau. Sulla matematica pura, Hermann von Reichenau si applica scrivendo un saggio sulle operazioni fattibili con l'abaco, intitolato *Qualiter multiplicationes fiant in abbaco*, anche se non trova il coraggio di usare in quel testo le cifre indo-arabe, che verosimilmente aveva incontrato negli originali testi arabi.

6 *Ermanno lo zoppo, circondato da allievi e da simboli.*

Era indubbiamente un uomo tra i più colti del suo tempo: i suoi contributi alla storia non sono inferiori a quelli che portò alla matematica e all'astronomia, e ancora più significativi sono quelli che apportò alla giovane scienza della musica; come tutti i saggi dei suoi tempi, del resto, considerava in tutto e per tutto la musica nient'altro che una particolare sezione della matematica.

Ma altrettanto indubbia era la sua fede religiosa: in quasi tutte le immagini che lo ritraggono – e sono tante, perché la Chiesa Cattolica lo riconosce come beato e molte diocesi nei dintorni del Lago di Costanza lo venerano direttamente come santo – il filo rosso che lo identifica ancor più della stampella o della sedia a rotelle è una scritta che accompagna la sua immagine: due parole, il titolo della preghiera "*Salve Regina*", che viene ancor oggi insegnata dal catechismo cattolico come una delle preghiere più importanti per lodare la vergine Maria. È quasi sempre riportata nell'iconografia di Hermann von Reichenau per la semplice ragione che è stato lui a scriverla, a inventarla.

Erano i primi anni del secondo millennio: con la religione forte e totalizzante, con la scienza ancora giovane, giovanissima, per non dire ancora nascitura. Anni in cui il sapere era ancora visto come un tutto unico, senza separazioni ideologiche tra una disciplina e l'altra. Ermanno il Contratto, privo di mobilità e di parola, rinchiuso in una piccola isola d'un grande lago alpino senza né voglia né l'intenzione di allontanarsene, riesce a volare alto con la mente su ogni campo di conoscenza disponibile ai suoi tempi: cerca il sapere nei numeri e nei regoli, negli strumenti che leggono il moto delle stelle e nel rincorrersi delle note musicali; nel redigere le cronache civili e militari dei suoi luoghi e dei suoi tempi, nelle preghiere da recitare e in quelle nuove, inventate per impetrare ancora più grazia alla divinità. Non sapeva camminare né muoversi, ma evidentemente sapeva volare: volare alto, leggero e lento, proprio come un dirigibile.

2. Problemi

Dai Piani Alti del Potere ci è arrivato il "paterno consiglio" di insistere sui problemi geometrici[6]. Il che, può anche essere comodo (per voi): con a disposizione un'intera spiaggia per fare disegni, non dovrebbe essere difficile lavorare sulle eventuali generalizzazioni.

A margine, facciamo solo notare che siccome ci siamo un po' stufati di torturare il solito giardino, non ci saranno grandi dematizzazioni dei problemi originali. Rischia anche di essere tutto più facile... per non fare le cose troppo facili, avete a diposizione una riga greca e un compasso serio[7]. E nient'altro.

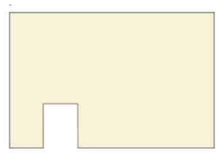
Attenzione comunque a non affrontare questi problemi sottogamba: tenete il compasso lontano dal salvagente.

2.1 Affettare la torta. Anzi, due.

Come ben sanno tutti coloro che da piccoli hanno fatto le torte di fango, una torta è un ottimo sostituto del giardino.

Cominciamo in pochi: due golosi. Sappiamo tutti che il metodo "uno taglia, l'altro sceglie" è un ottimo metodo per e torte di forma "semplice", ma in alcuni casi può essere problematico e, di solito, si viaggia "a muzzo", come ebbe a dire tempo fa un nostro lettore.

Siamo, logicamente, in una di queste condizioni: trattandosi di un modello sperimentale, la VPN (Valida Pasticcera Nostra. Sì, pun *intended*. Fa caldo e siamo lontani) ha ritenuto opportuno assaggiarne un pezzo. Vedete il risultato nella figura qui di fianco: non fatevi ingannare dal fatto che la "parte mancante" ha l'aria abbastanza simile alla "parte restante", vorremmo una soluzione piuttosto generale.



7 *Arriva la torta!*

Per fare i conti e trovare qualsiasi punto ausiliario vi serva, avete a disposizione i suddetti RG (Riga Greca) e CS (Compasso Serio); come "area di disegno, supponendo la torta inamovibile" (sì, è "piuttosto pesante") avete a disposizione l'intera superficie del tavolo: come dicevamo, la torta non si sposta.

Oh, forse vi manca uno strumento: avete anche a disposizione un coltello "Quasi di Banach-Tarski", nel senso che è in grado di fare tagli (una volta tracciata l'opportuna linea) di complessità finita qualsiasi (quindi il giochino della "palla da tennis che diventa due palle da tennis" non funziona).

Oibò, dimenticavamo un particolare importante! Confessiamo che ce lo siamo ricordati mentre stavamo scrivendo la seconda parte, dove questo non è valido. Questa torta è glassata solo sopra. Quindi, l'importante è il volume (anzi, no, l'area: è una multistrato), non ci interessa quanto vengono lunghi i bordi.

Da quei due golosastri che siete, vi siete mangiati la torta senza pensare ai vostri tre amici che stanno arrivando; fortunatamente, la VPN ne aveva preparata un'altra (che, stavolta, "per evidenti motivi" non ha assaggiato).

Questa volta la torta è quadrata, ed è divisa sulla glassa superiore in venticinque quadrati uguali (...insomma, una cosa a scacchiera) disegnati con la granella di zucchero. Ora, da esperti e inveterati tortofagi quali siete, sapete benissimo che la granella ha le stesse caratteristiche organolettiche di una spolverata di segatura di betulla (che ci dicono essere zero), quindi prendere più o meno granella è indifferente a tutti voi cinque; siccome però questa volta, oltre che sopra, la glassa è anche sul bordo, e questa è una

[6] La seconda parte della richiesta era di ridurre i problemi di Probabilità. Dal che, dovreste aver dedotto quali sono, qui, i "Piani Alti".

[7] Per chiarire il concetto, siete invitati a rivolgervi alla Sezione Storica (che sarebbe Doc).

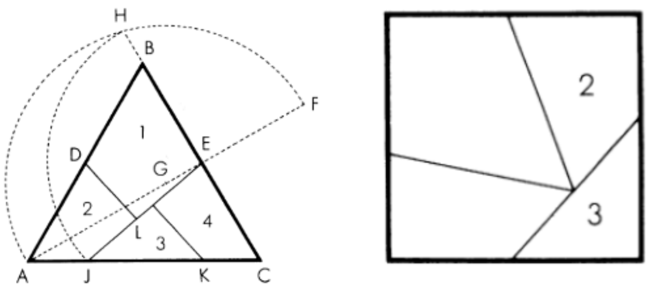
meravigliosa bomba calorica all'ipercioccolato, volete questa sia equamente suddivisa: quindi le fette devono avere sia pari superficie superiore che pari superficie laterale esterna. Fuor di matematica, devono essere delle cose vagamente a forma di fetta, senza giochini strani tipo "taglio cinque fette rettangolari seguendo i bordi della glassa verticale o in orizzontale: in questo caso quelli che si beccano la prima e l'ultima fetta sentitamente ringraziano, ma gli altri tre non vi lasciano di sicuro uscire vivi dalla stanza.

Come fate?

2.2 Martin è sempre una certezza...

...e siamo fermamente convinti che se ne debba approfittare, anche se ci pare di averne già parlato. In ogni caso, non ci pare di aver visto proprio una marea di soluzioni.

Se vi ricordate, tempo fa un nostro lettore (***Sawdust***) aveva costruito un esemplare di "tavolino triangolare quadrato" funzionante: in pratica, in funzione del modo nel quale lo assemblavate (in realtà era incernierato, e bastava "chiuderlo" in un senso o nell'altro) potevate ottenere un tavolino triangolare (equilatero) o quadrato. Lo schema era quello che vi forniamo nella figura qui sotto e, di fianco, avete il metodo per costruirlo (tranquilli, segue spiegazione. No, i due disegni non sono nella stessa scala):



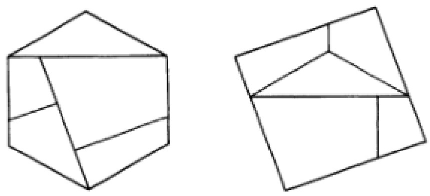
In pratica, bisecate AB in D e BC in E. Estendete AE sino a F in modo tale che EF sia uguale a EB. Bisecate AF in G e, con centro G, tracciate l'arco AHF. Estendete CB sino ad H e, con E come centro, tracciate l'arco HJ. Trovate K tale che JK=BE (...e qui, potrebbe servirvi un "compasso serio", come dicevamo...). Da D e K tirate le perpendicolari su EJ.

Fatto. E Adesso, giusto come riscaldamento, potreste dimostrare che partendo da un triangolo equilatero viene proprio un quadrato.

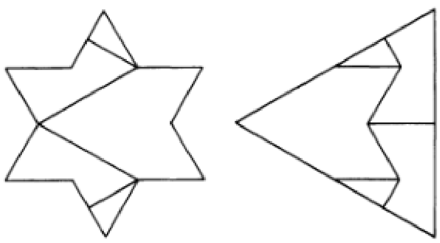
"Rudy, se questo è il riscaldamento, qual è il problema?"

Semplice: il contrario.

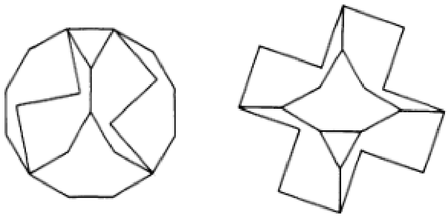
Se ricordate, il buon Martin aveva fornito alcune dissezioni:



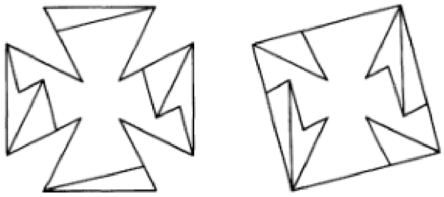
Da esagono a quadrato, in cinque pezzi



Da stella a sei punte a triangolo, in cinque pezzi



Da dodecagono a croce greca, in sei pezzi



Da croce maltese a quadrato, in sette pezzi

Ora, il problema è (o meglio, sono...) sapendo che le costruzioni sono corrette, come si costruiscono (sempre con RG e CS) questi cosi?

...capito, perché consigliavamo la spiaggia?

3. Bungee Jumpers

Qual è il massimo numero di parti nelle quali un piano può essere diviso da n linee rette? E da n circonferenze?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Luglio!

4.1 [278]

4.1.1 Esame di Maturità

Ancora una volta ritorna questo problema:

> *All'esame di Maturità, la prova di Matematica era composta da tre problemi, e ogni partecipante ha ricevuto per ognuno dei problemi una valutazione da zero a sette (estremi inclusi). Durate la fase di correzione dei compiti, ci si è accorti che, dati due qualsiasi maturandi, questi hanno ricevuto la stessa valutazione in al più un problema; quanti sono, al massimo, i partecipanti?*

In RM279 pubblicavamo la soluzione di ***Valter*** e ***trentatre***, in RM280 quella di ***Galluto***, in RM281 quella di ***Valter***, vi passiamo ora le note di ***Heaviside***:

> Viste le diverse possibili soluzioni proposte, provo ad azzardarne una anche io.
>
> Chiamando P il numero di problemi proposti, e V il numero di possibili voti, il numero massimo di studenti (con al più un voto uguale nello stesso problema) dipende sia da P che V.
>
> Nel caso di P<3, la risposta è V^P.
>
> Nel caso di P>3, la risposta è V.
>
> Nel caso di P=3, la risposta è V^2.

Bene, andiamo avanti.

4.2 [279]

4.2.1 "Giuseppi", Francesi, Inglesi, Turchi e Cristiani

È arrivato un nuovo contributo per il problema dei pirati:

> *I pirati hanno catturato cinque marinai inglesi e cinque francesi, che vengono messi in cerchio, secondo quest'ordine: FIFIIFIFIF. Il Capitano dei Pirati statuisce che si partirà dalla posizione a e verranno contati b marinai: il b-esimo verrà escluso dal gioco, e si ricomincerà la conta dal successivo; tutto questo sin quando non saranno rimasti cinque marinai, che verranno gettati agli squali. Decidete i valori di a e b per salvare solo inglesi o solo francesi.*

In RM280 avevamo i risultati di ***Valter*** e ***Galluto***, ***trentatre*** ha raccolto la nostra preoccupazione per i marinai e ci ha mandato una soluzione che commenta anche le soluzioni proposte precedentemente:

> Premetto che le coppie (a,b) proposte da ***Valter*** e ***Galluto*** per i per i francesi e per gli inglesi, per quanto molto diverse, sono <u>tutte corrette</u>. Le ho verificate con un programma che genera da (a,b) la sequenza dei primi 5 marinai da salvare. Nel programma i posti sono numerati a partire da 0.
>
> Le soluzioni di *Valter* per francesi e inglesi sono
>
> $(0,11) \to 0,2,5,9,7$; $(8,29) \to 6,8,3,4,1$.
>
> *Galluto* numera i posti a partire da 1 e non da 0, quindi il posto a va ridotto di 1, l'intervallo b resta uguale, e si ha
>
> $(7,1730) >> (6,1730) \to 5,7,9,0,2$; $(6,290) >> (5,290) \to 4,6,8,1,3$
>
> - le stesse sequenze (che *Galluto* presenta aumentate di 1) in ordine diverso.
>
> Indico con
>
> M una sequenza di 5 marinai scelti in $[0, 9]$
>
> $\{M\}$ l'insieme delle 5!=120 permutazioni di M
>
> <u>soluzione di M</u> : una coppia (a,b) che genera una delle $M' \in \{M\}$.
>
> - le M diverse sono $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$
>
> - i gruppi $\{M\}$ sono $30240/120 = 252$.
>
> *Valter* con le sue tabelle mette in forma grafica il processo $(a,b) \to M$ ma non l'inverso - infatti non dice come ha trovato le sue soluzioni. Lo schema funziona per ogni coppia e consente di verificare anche le soluzioni di *Galluto*.
>
> *Galluto* affronta il vero problema $M \to (a,b)$; poiché i marinai possono essere trovati in qualsiasi ordine, sceglie una particolare sequenza $M' \in \{M\}$ e da questa ricava la coppia.
>
> Riscrivo il procedimento nel caso $(6,1730) \to M = 5,7,9,0,2$
>
> - assumo all'inizio $a = M_0 + 1,\ M_{-1} = M_0$
>
> $$\begin{aligned} M_0 &= M_{-1} + b \bmod 10 = 5 \to b: \text{multiplo di } 10 \\ M_1 &= M_0 + b \bmod 9 = 5 + 2 = 7 \\ M_2 &= M_1 + b \bmod 8 = 7 + 2 = 9 \\ M_3 &= M_2 + b \bmod 7 = 9 + 1 = 10 \equiv 0 \\ M_4 &= M_3 + b \bmod 6 = 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$
>
> - dove i valori M vanno riportati nell'intervallo $[0, 9]$
>
> - con $d_k = M_k - M_{k-1}$, le condizioni su (a,b) sono quindi
>
> [1] $$\begin{aligned} &a = M_0 + 1 \\ &b \bmod (10-k) = d_k\ ,\ \ k = 0...4 \end{aligned}.$$

Indico con ***G*** le *M* che ammettono questa soluzione.

Mentre tutte le *M* (e quindi tutte le disposizioni di Francesi e Inglesi) hanno molte soluzioni, pochissime sono ***G***. Quindi la soluzione di *Galluto* non è applicabile in generale. Per dimostrarlo osservo che

- $e = 2520$ è il minimo intero divisibile per 10,9,8,7,6
- aggiungere a *b* un multiplo di *e* non cambia le [1] e quindi *M*
- questo vale anche per le soluzioni non ***G*** (si verifica dalle tabelle di *Valter*)
- *b* va limitato a $b \in [1, 2519]$ e da $a \in [0...9]$ il numero delle coppie è 25190.

Si può quindi usare il programma per calcolare $(a,b) \to M$ per tutte le coppie e confrontando i risultati con l'insieme $\{M\}$ di una sequenza *M* data, ottenere tutte le sue soluzioni, distinte fra ***G*** - se rispettano le [1] - e no.

In questo modo, via computer, si risolve il problema $M \to (a,b)$; *Galluto* pensa ci sia sicuramente un modo più semplice, ma io ho trovato solo questo.

Alcuni risultati

- le 25190 coppie generano altrettante *M* di cui solo 54 sono ***G***
- non sono ***G*** tutte le *M* che contengono almeno 4 o 5 numeri consecutivi, oppure due gruppi separati di 2 numeri consecutivi, fra cui p.es.

$M = 0,1,2,3,x$ con x scelto in $4,5,6,7,8,9$
$M = 1,2,x,7,8$ con x scelto in $0,3,4,5,6,9$

- e tutte le loro permutazioni.

P.es. se il problema fosse stato *FFFFIIIFII* con $F = 0,1,2,3,7;\ I = 4,5,6,8,9$

non avremmo avuto le soluzioni di *Galluto*, ma forse quelle di *Valter* nella forma

$(1,13) \to 3,7,2,0,1$; $(1,14) \to 4,9,6,5,8$.

Ogni *M* ammette circa 100 soluzioni diverse, cioè 100 coppie $(a,b) \to M' \in \{M\}$

- infatti ad ogni gruppo $\{M\}$ spettano in media $25190/252$; 100 coppie
- p.es. $M = 0,1,2,3,4$ ha 98 soluzioni con (a,b) da $(2,30)$ a $(3,2491)$
- fra le "soluzioni" una delle $M' \in \{M\}$ può essere ripetuta – generata da coppie diverse - e la *M* iniziale può non esserci; questo perché le *M* sono più delle coppie e ce ne sono $30240 - 25190 = 5050$ a cui non corrisponde una coppia
- il caso più patologico di ripetizione è $M = 0,2,4,6,8$ prodotta dalle 10 coppie

$(x,1010)$ con $x = 1,3,5,7,9$
$(9,1),(9,2),(5,506),(7,1514),(3,2018)$

- le prime 5 sono tutte ***G*** : *Galluto* avrebbe trovato la $(1,1010)$
- tutte le *b* salvo in $(9,1)$ sono della forma

$b = 2 + k \cdot s \ con\ k = 0,1,2,3,4,\ \ s = e/5 = 504$

- riporto il caso perché mostra le complicate relazioni fra le (a,b) di una stessa *M*
- ho provato, inutilmente, a capirci qualcosa.

Il caso corrisponde al problema che invece *Valter* avrebbe scritto così

IFIFIFIFIF con $F:(9,1) \to 0,2,4,6,8$; $I:(0,1) \to 1,3,5,7,9$

- ogni francese tra due inglesi e ogni inglese tra due francesi; così si ammazzano tra di loro anche senza i pirati.

Come vedete il nostro ***trentatre*** ha risolto la questione per tutti. Passiamo ora ai problemi del mese scorso.

4.3 [281]

4.3.1 Il Dittatore dello Stato Libero di Bananas

Il Capo, da buon dittatore del nostro piccolo gruppo di tre, sa bene come vincere le elezioni ogni volta, lo sapete anche voi? Vediamo le regole in questo caso:

> *Lo Stato Libero di Bananas è popolato da venti milioni di votanti, ed è tempo di elezioni che voi volete vincere. L'esercito (che vota e rappresenta l'uno per cento della popolazione votante) è tutto con voi. I votanti sono divisi in gruppi uguali, ognuno di questi gruppi è diviso in una serie di gruppi più piccoli e avanti in questo modo. I gruppi più piccoli scelgono i loro "rappresentanti"; successivamente, questi rappresentanti (di primo livello) scelgono i rappresentanti di secondo livello, ... eccetera: in ogni gruppo le elezioni si svolgono a maggioranza, e se la divisione è 50/50, vincono le opposizioni. Siete voi che decidete come debbano essere composti i gruppi, come dividete il corpo elettorale per avere la certezza di essere rieletto?*

Cominciamo con la soluzione di ***Valter***:

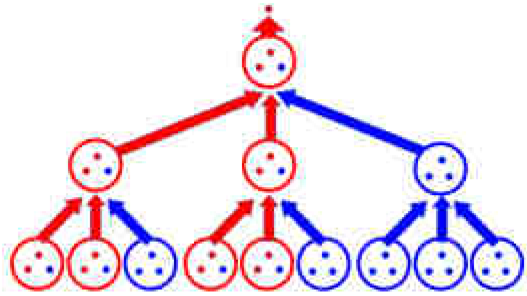
> Farei così:
> - divido i 20'000'000 in 8 gruppi da 2'500'000
> - divido i 2'500'000 in 8 gruppi da 312'500
> - divido gli 312'500 in 4 gruppi da 78'125
> - divido i 78'125 in 5 gruppi da 15'625
> - divido i 15'625 in 5 gruppi da 3'125
> - divido i 3'125 in 5 gruppi da 625
> - divido i 625 in 5 gruppi da 125
> - divido i 125 in 5 gruppi da 25
> - divido i 25 in 5 gruppi da 5
>
> Dei primi 8 gruppi almeno 5 devono sceglermi come rappresentante, e così ad ogni livello, almeno la metà più uno lo devono fare.
> Contando i votanti per gruppi ho: 8^2*4*5^7 = 20'000'000; per quanto detto, quindi, ne bastano: 5^2*3*3^7 = 164'025 per essere eletto.
> I miei sodali, vale a dire l'esercito, rappresentano l'uno per cento della popolazione votante cioè 200'000; ne ho a sufficienza.

Che ne dite? Soluzione brevissima, come anche quella di ***Galluto***:

> A tutti i livelli i gruppi sono composti da 3 votanti ed è mia cura che i miei fedeli soldati siano sempre a coppie in alcuni dei gruppi; così, al primo livello, avrò 100.000 rappresentanti eletti su un totale di 6.666.667 (poiché sono un convinto democratico arrotonderò sempre per eccesso i gruppi e per difetto i miei rappresentanti).
>
> Così ottengo che il numero dei miei rappresentanti si dimezza ad ogni passaggio, mentre quello dei rappresentanti totali si divide ogni volta per tre.
>
> Arrivato al decimo livello avrò ancora 195 rappresentanti su un totale di 340, il che significa che vincerei con il 57,35% dei voti, ma poiché sono democratico ma voglio dimostrare che il popolo mi ama, preferisco fare anche un undicesimo livello, alla fine del quale mi acclameranno 97 dei 114 rappresentanti rimasti, e cioè l'85,09%.
>
> Se facessi anche un dodicesimo passaggio arriverei alla unanimità, ma la modestia è una delle mie tante virtù e quindi mi fermo all'undicesimo.

Siccome il Capo ha preparato una soluzione, ve la passiamo, così decidete voi quanto sia chiara senza che ci tocchi commentare:

> La soluzione più sicura consiste nel riuscire a garantire le vincite all'opposizione per unanimità, vincendo però ad ogni round per una maggioranza di un solo voto nei gruppi nei quali si vince.



Esaminiamo un esempio ridotto nella figura qui sopra: in questo caso, abbiamo tre round con, all'inizio, una proporzione di 8/27 a di votanti a vostro favore. Nonostante ciò, la divisione suggerita (che dà a voi la vittoria per un voto dove vincete, e l'unanimità all'opposizione dove vince lei) vi permette di essere rieletti (il puntino in cima è rosso, e siete voi).

Generalizzando, si vede che M voti "rossi" su un totale di N votanti possono vincere in un'elezione a *r* fasi se il rapporto M su N può essere rappresentato come il prodotto di *r* frazioni ciascuna maggiore di 1/2.

Nel nostro esempio, 8/27=(2/3)(2/3)(2/3) e, come abbiamo visto dal grafico, la cosa funziona. Nel problema originale, avendo:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^2 = \frac{3^{11}}{5^7 \cdot 2^8} = \frac{177147}{20000000}$$

si ha che un'elezione ben organizzata a nove stadi vi garantisce l'elezione anche con meno di duecentomila supporter. Se la vostra situazione è particolarmente disperata, basta aumentare il numero degli stadi: ad esempio, con 164'025=38 ·25 supporter sugli elettori di Bananas avete bisogno di dieci stadi

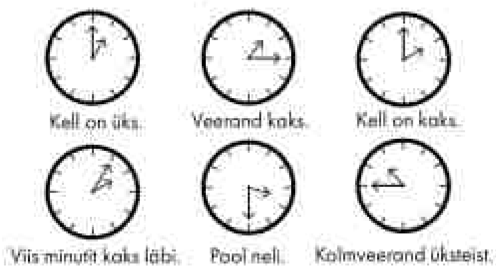
$$\left(\frac{3}{5}\right)^7 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{164025}{20000000}$$

...ho sentito "*Gerrymandering*"? Chi l'ha detto, vince una bambolina!

Beh, ci fermiamo qui. Il Capo ha vinto ancora una volta e decide sempre lui.

4.3.2 Tempo Estone

Traduciamo dall'estone le ore, e ci divertiamo tantissimo:



Qui sopra, vedete degli orologi che segnano delle ore, e la risposta di un'onesta estone quando, a quell'ora, le chiedete che ore sono. In base a quanto detto, dovreste essere in grado di capire quando vi dice:

1. *Kakskümmend viis minutit üheksa läbi.*
2. *Kolmveerand kaksteist.*
3. *Pool kolm.*
4. *Veerand neli.*
5. *Kolmkümmend viis minutit kuus läbi.*

> *Adesso è lei che chiede "Che ore sono?". Rispondete in estone alle 04:15, 08:45, 11:30, 07:05, 12:30, sapendo che 6 = kuus, 7 = seitse, 8 = kaheksa, 10 = kümme.*

La prima soluzione è di ***Valter***:

> Ci provo anche se ho molti dubbi (i principali riguardano "Kakskümmend" e "Kolmkümmend"). I numeri potrebbero essere in grado di:
> - 1 = üks (ad esempio "Kell on ü^{ks}" come "ora 1^{a}")
> - 2 = kaks (ad esempio "Kell on ka^{ks}" come "ora 2^{a}")
> - 3 = neli
> - 4 = üheksa (ü^{heksa} come 1° quarto)
> - 5 = viis
> - 6 = kuus
> - 7 = seitse
> - 8 = kaheksa (ka^{heksa} come 2° quarto)
> - 9 = kolm
> - 10 = kümme
> - 11 = üksteist (üks-teist, invento!, prima dopo le 10)
> - 12 = kaksteist (kaks-teist, invento!, seconda dopo le 10).
>
> Quindi:
>
> Kakskümmend viis minutit üheksa läbi → 5 minuti e 2/10 dopo le 4:00 (Kakskümmend=2/10? …visto che kümme=10)
>
> Kolmveerand kaksteist →11:45
>
> Pool kolm → 9:30
>
> Veerand neli → 2:15
>
> Kolmkümmend viis minutit kuus läbi → 5 minuti e 9/10 dopo le 6:00 (vedi commento precedente)
>
> 04:15 → Veerand viis
>
> 08:45 → Kolmveerand kolm
>
> 11:30 → Pool üksteist
>
> 07:05 → Viis minutit seitse läbi
>
> 12:30 → Pool kaksteist

Bene, vediamo la versione dell'onesto e modesto ***Galluto***:

> a. Confronto il primo e il terzo orologio; dato che "kell on üks" corrisponde all'una e "kell on kaks" alle due, decido che üks è l'1, kaks è il 2, che "kell on" è qualcosa che equivale al nostro "in punto" e infine, che nella formazione della frase ragionano al contrario di noi italiani ("in punto l'una" e non "l'una in punto")
>
> b. Il secondo orologio indica l'una e un quarto, ma la frase estone contiene "kaks", che si è detto essere il 2; quindi decido che "veerand" significa "un quarto d'ora verso"; quindi "veerand kaks" significa "un quarto d'ora verso le due"
>
> c. Il quarto orologio indica le due e 5 minuti; quindi viis è il 5, minutit vuol dire minuti (meno male) e stavolta costruiscono la frase col "dopo" e non col "verso"; perciò "labi" è "dopo" e al solito lo mettono al contrario di noi italiani, alla fine della frase: 5 minuti le due dopo
>
> d. Il quinto orologio indica le 3 e mezza ma anche qui direi che applicano il "verso" e non il "dopo", perché (vedi l'ultimo orologio) "kolmveerand" dovrebbe significare i tre quarti e quindi "kolm" è il 3; perciò Pool è "mezz'ora verso" e "neli" è il 4
>
> e. Il sesto orologio indica le dieci e tre quarti (dette anche "le undici meno un quarto) e quindi "kolmveerand" vuol dire "tre quarti d'ora verso" e üksteist è l'11

f. Guardando le altre informazioni e le 5 frasi da decifrare dell'amica estone faccio altre ipotesi:

  a. Se kümme è 10, kümmend deve essere qualcosa come "decina" e quindi kakskümmend sarà 20 e kolmkümmend sarà 30

  b. Se kaheksa vuol dire 8, üheksa dovrebbe essere 9 (qualcosa tipo "due meno di dieci" e "uno meno di dieci")

  c. Se üksteist è 11, kaksteist deve essere 12

Riassumendo:

1	üks
2	kaks
3	kolm
4	neli
5	viis
6	kuus
7	seitse
8	kaheksa
9	üheksa
10	kümme
11	üksteist
12	kaksteist
Venti	kakskümmend
Trenta	kolmkümmend
Un quarto d'ora verso le	veerand
Tre quarti d'ora verso le	kolmveerand
Mezz'ora verso le	pool
Dopo	labi
Minutit	minuti

E quindi andiamo a tradurre…

- Kakskümmend viis minutit üheksa läbi: venti cinque minuti dopo le 9: 9:25
- Kolmveerand kaksteist: tre quarti d'ora verso le 12: 11:45
- Pool kolm: mezz'ora verso le tre: 2:30
- Veerand neli: un quarto d'ora verso le quattro: 3:15
- Kolmkümmend viis minutit kuus läbi: trenta cinque minuti dopo le sei: 6:35
- 4:15: un quarto d'ora verso le cinque: veerand viis
- 8.45: tre quarti d'ora verso le nove: kolmveerand üheksa
- 11:30: mezz'ora verso le dodici: pool kaksteist
- 07:05: cinque minuti dopo le sette: viis minutit seitse labi
- 12:30: mezz'ora verso l'una: pool üks

Sono le nelikümmend minutit kaheksa labi, vado a cena.

Benissimo, tardi per un buon appetito, ma apprezziamo che il meccanismo sia stato compreso, anche se ***Galluto*** e ***Valter*** hanno interpretazioni diverse! È quasi agosto, chiudiamo qui. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Vi sono fornite due piramidi *non* costruite da Rudy (quindi, perfette), le cui facce laterali sono dei triangoli equilateri uguali tra loro. Una delle piramidi ha anche la base triangolare (quindi è un tetraedro regolare), mentre l'altra ha una base quadrata. Se incollate tra di loro le due piramidi attraverso due facce triangolari, quante facce ha il solido risultante? 5, 6, 7, 8 o 9?

Non ne ha 7. Ne ha 5. Infatti, le due coppie di facce triangolari aventi uno spigolo in comune sono complanari; essendo le piramidi perfette, diventano due facce, non quattro.

6. Pagina 46

Parte 1

È immediato verificare che n linee dividono il piano in un numero massimo di parti solo se due linee qualsiasi si intersecano (ossia se non esistono due linee parallele) e se non esistono tre linee concorrenti nel medesimo punto.

Supponiamo k linee siano già state tracciate sul piano; tracciamo la linea (k+1)-esima e vediamo di quanto aumenta il numero delle parti nelle quali viene diviso il piano.

Dalle nostre ipotesi, la (k+1)-esima linea incrocia tutte le k linee già presenti in k punti, e questi punti dividono la linea che stiamo considerando in (k+1) parti. Quindi, la (k+1)-esima linea divide in due parti le (k+1) parti preesistenti. Ossia, la nuova linea aumenta il numero delle parti di (k+1).

Ma se viene tracciata solo una retta, dividerà il piano in 2 parti: quindi, dopo aver tracciato n linee, il piano si troverà diviso in:

$$2 + 2 + 3 + 4 + ... + n$$

parti; infatti, la prima linea divide il piano in 2 parti, la seconda aggiunge 2 parti, la terza aggiunge 3 parti e così via. Quindi, il piano viene diviso in:

$$2+2+3+\ldots+n=(1+2+3+\ldots+n)+1=\frac{n(n+1)}{2}+1=\frac{n^2+n+2}{2}$$

parti.

Parte 2

n cerchi dividono il piano in un numero massimo di parti se due qualsiasi di loro si intersecano (ossia, se non ci sono due cerchi mutuamente tangenti e se nessuno di essi è completamente interno ad un altro cerchio) e se non esistono tre cerchi concorrenti in un punto.

Si noti che è sempre possibile soddisfare queste condizioni, anche con un numero infinito di cerchi. Ad esempio, si costruiscano due cerchi di ugual raggio che si intersechino in due punti, e siano i loro centri A e B; qualsiasi cerchio di pari raggio avente centro su AB (estremi esclusi) soddisferà le condizioni date.

Ragionando lungo le stesse linee utilizzate nella prima parte, vediamo che il (k+1)-esimo cerchio aumenta di $2k$ il numero delle parti nelle quali è diviso il piano; il (k+1)-esimo cerchio interseca ognuno dei k cerchi preesistenti in 2 punti, e questi $2k$ punti dividono il (k+1)-esimo cerchio in $2k$ archi, ciascuno dei quali divide in due una delle regioni formate dai primi k cerchi.

Ma se viene tracciato un solo cerchio, il piano viene diviso in 2 parti; quindi, il numero totale di parti risulta pari a:

$$2+2+4+6+8+\ldots+2(n-1)=2+2\cdot(1+2+3+\ldots+(n-1))=2+2\frac{n(n-1)}{2}=n^2-n+2$$

È lasciata al lettore la (ragionevolmente) semplice estensione allo spazio tridimensionale, utilizzante piani e sfere come elementi settori. Per i più temerari, può essere interessante esaminare l'estensione ad un numero qualsiasi di dimensioni, dividendo l' N-spazio attraverso gli opportuni iperpiani e ipersfere.

7. Paraphernalia Mathematica

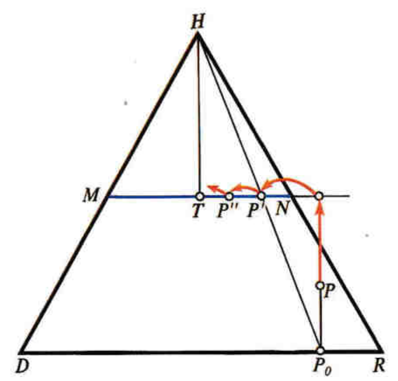
Una volta tanto, riprendiamo il discorso della volta scorsa. Non vorremmo pensaste che le coordinate triangolari siano un qualche cosa di quelle che si usano per il "modello base", poi si abbandonano per cominciare a lavorare sul serio (come dicono gli ingegneri, lavoriamo pure con i punti materiali, ma quando passiamo alla realtà meglio usare qualcosa di più sensato): con questo aggeggio, si riescono a fare dei conti anche piuttosto complicati. Il titolo nasce dall'ipotesi di alcuni maldicenti che Obelix (il gatto al momento convivente con Rudy) sia il frutto dell'incrocio di una Norvegese delle Foreste con un Camionista di Aci Trezza.

7.1 L'aitante camionista di Aci Trezza

Se siete sopravvissuti all'esempio della volta scorsa (una popolazione generica che si riproduceva unicamente con portatori di caratteri dominanti puri), possiamo passare a qualcosa di più complesso.

Sempre tenendo ferma la nostra popolazione generica $P(d, h, r)$, supponiamo questa volta si riproducano con una popolazione unicamente ibrida (e quindi nel punto H del nostro triangolo). Con la stessa notazione (e, suppergiù, gli stessi calcoli della volta scorsa), si vede che metà dei discendenti acquisiscono il gene G dai genitori e l'altra metà il gene g; nella nuova generazione quindi la proporzione dei discendenti portatori di G come secondo gene è pari a Γ, mentre quella dei portatori di g (sempre come secondo gene) è pari a γ. Quindi, nella nuova generazione:

$$\begin{cases} d' = \dfrac{\Gamma}{2} = \dfrac{d}{2} + \dfrac{h}{4} \\ h' = \dfrac{\Gamma}{2} + \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{1}{2} \\ r' = \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r}{2} + \dfrac{h}{4} \end{cases}$$



8 *Tutta un'altra strada.*

Se confrontiamo le coordinate dei punti $P'(\Gamma/2, 1/2, \gamma/2)$ e $P_0(\Gamma, 0, \gamma)$, vediamo che P' è ottenuto da P attraverso una similitudine di centro H e fattore di scala 1/2; ossia, la trasformazione f_2 che trasforma P in P' può essere vista come una combinazione di una proiezione in direzione h sulla linea MN che congiunge i punti medi di DH e HR e di una similitudine relativa al centro T di MN con un fattore di scala ½. Esaminando la figura, tutto dovrebbe essere più chiaro.

Guardando la strada che abbiamo fatto, vediamo che la trasformazione f_2 trasforma il triangolo DHR (che sarebbe poi l'insieme di tutte le popolazioni possibili) nel segmento MN (che sarebbe poi l'insieme di tutte le popolazioni nelle quali metà della popolazione è ibrida) con un unico punto fisso in $T(1/4, 1/2, 1/4)$ (che sarebbe una popolazione stabile che mantiene la propria composizione); il succedersi delle generazioni P', P'', ... è rappresentato in figura come la serie di punti in sequenza, ciascuno dei quali viene trasformato nel successivo dalla similitudine di centro T e fattore di scala ½ senza bisogno di ulteriori proiezioni, e quindi la popolazione tenderà a una stabilità genetica in T.

Adesso, un altro po' di cibo per la mente:

> *Sia f_{abc} la trasformazione corrispondente alla riproduzione di una popolazione generica $P(d, h, r)$ con una popolazione fissa $P(a, b, c)$: nei due esempi precedenti abbiamo visto i casi particolari f_{100} e f_{010}. Quali sono le formule (e le relative trasformazioni) della funzione f_{abc}? Esiste una popolazione stabile? E, se sì, quale?*

Sino ad ora, abbiamo considerato dei modelli altamente pianificati nei quali il legame riproduttivo era rigorosamente deterministico; nella realtà, possiamo considerare la scelta delle coppie di geni da unire come probabilistica su un generico pool genetico *P*. Quindi la frequenza della coppia *GG* (ossia la percentuale *d'* di organismi dominanti nella prossima generazione *P'*) è pari a Γ^2, quella della coppie *Gg* e *gG* (che sono gli ibridi) varrà $2\Gamma\gamma$ e quella delle coppie *gg* (i recessivi) γ^2. Quindi abbiamo:

$$\begin{cases} d'=\Gamma^2=\left(d+\dfrac{h}{2}\right)^2 \\ h'=2\Gamma\gamma=2\left(d+\dfrac{h}{2}\right)\left(\dfrac{h}{2}+r\right) \\ r'=\gamma^2=\left(\dfrac{h}{2}+r\right)^2 \end{cases}$$

E adesso, un colpo di scena per quanto riguarda la storia della matematica: queste formule sono note come ***formule di Hardy-Weinberg***! Niente Littlewood! Incredibile, vero[8]?

Più prosaicamente, queste formule rappresentano la composizione di una popolazione e i suoi cambiamenti quando siamo in condizioni di ***panmixia***, ossia quando non ci sono fattori addizionali che possano influenzare la formazione delle coppie[9].

Cerchiamo adesso di capire quale sia, nel nostro modello, il significato di questa trasformazione. Tanto per cominciare, consideriamo che $\Gamma=d'+h'/2=\Gamma^2+\Gamma\gamma=\Gamma(\Gamma+\gamma)=\Gamma$. ***La composizione del pool genetico delle popolazioni** P **e** P' **è la stessa***: ossia, i punti *P* e *P'* giacciono sulla perpendicolare a *DR*.

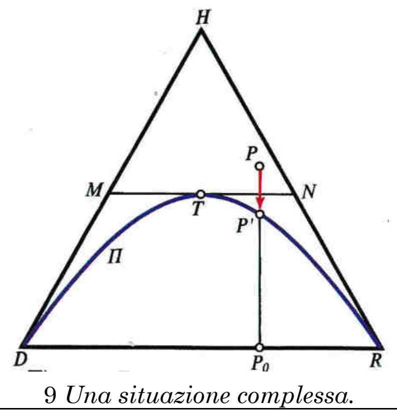
Se poniamo $DP_0=x$, abbiamo:

$$\gamma=r_0=x\sin 60°=x\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ossia:

$$h'=2\Gamma\gamma=2(1-\gamma)\gamma=\sqrt{3}\,x\left(1-x\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

In un sistema cartesiano di coordinate questa equazione è un arco Π di parabola (con $0\leq x\leq DR=2/3$); nelle nostre coordinate triangolari questa equazione diventa $h^2=4dr$, visto che $h'^2=4\Gamma^2\gamma^2=4d'r'$. La nostra parabola passa dai punti *D*, *R* e *T* e in questi punti è tangente alle linee *DH*, *RH* e *MN*.



9 *Una situazione complessa.*

Il punto $P'=f(P)$ è dove la perpendicolare a *DR* passante per *P* interseca la parabola; quindi, la trasformazione *f* proietta il triangolo *DHR* sulla parabola che abbiamo appena ottenuto; quindi, tutti i punti sulla nostra parabola sono fissi, ossia tutte le popolazioni *P*(*d, h, r*) per cui è $h^2=4dr$ sono stabili rispetto ad *f*. Il che sembra paradossale: in assenza di mutazioni, l'evoluzione della popolazione procede ***in un passo solo***, e qualsiasi generazione successiva alla prima sarà identica alla precedente.

[8] Per non lasciarvi in ambasce, vi riveliamo che la regola è stata trovata *indipendentemente* da Hardy e Weinberg nel 1908; quindi, probabilmente Hardy e Littlewood non si conoscevano ancora.

[9] Quasi". Queste formule considerano le popolazioni maschile e femminile come perfettamente equivalenti. Le complicazioni dei caratteri legati al sesso per il momento le ignoriamo.

Nella realtà, però, questa è un'approssimazione piuttosto rozza; esistono dei modelli migliori? Beh, potete provare ad ottenerli voi:

> *Supponiamo le coppie in una popolazione siano formate casualmente (ossia siamo in condizioni di panmixia), ma supponiamo gli ibridi abbiano una minor probabilità di sopravvivenza rispetto ai dominanti e ai recessivi; in particolare, supponiamo che solo la k-esima parte degli ibridi sopravvivano*[10]*. Come si comportano popolazioni di questo tipo nel triangolo DHR? Quali sono le trasformazioni che corrispondono ai valori di k pari a zero (estinzione totale degli ibridi) e pari a infinito (estinzione totale dei gruppi D e R)?*

Nessun articolo sulla genetica delle popolazioni può considerarsi completo se non tira in ballo, prima o poi, il daltonismo; e chi siamo noi per violare questa regola?

Il gene del daltonismo ha, come tutti, una variante dominante (che garantisce la visione normale) e una versione recessiva, che causa appunto la cecità ai colori[11], ed è legato al cromosoma X che, congiuntamente a quello Y, definisce il sesso dell'individuo nei mammiferi (e in alcuni insetti). Le cellule di una femmina contengono due cromosomi X, mentre le cellule di un maschio contengono un cromosoma X e un cromosoma Y. Un individuo eredita un cromosoma dalla madre (che non può essere che X) e uno dal padre (che può essere X, nel qual caso l'individuo sarà una femmina, o Y, che darà origine a un maschio: quindi, è il padre che definisce il sesso del nascituro). Quindi, per quanto riguarda il daltonismo, un maschio riceve il gene unicamente dalla madre, mentre una femmina ne riceve uno dal padre e uno dalla madre.

Consideriamo ora una popolazione P e la serie dei suoi discendenti P', P'', ... generata attraverso panmixia: vogliamo vedere quale sia la dinamica della genetica di queste popolazioni e, in particolare, vedere quale sia la proporzione di donne e uomini con i genotipi rispettivamente gg e g, ossia quante siano le persone, in entrambi i sessi, affette da daltonismo.

Vista l'attribuzione dei relativi geni, sono possibili tre genotipi femminili (GG, Gg e gg) e due genotipi maschili (G e g); indichiamo le loro proporzioni nei due gruppi (maschi e femmine) come $[d, h, r]$, $[\delta, \rho]$ (le parentesi servono solo a suddividere i maschi dalle femmine); la proporzione dei geni G e g nel pool genetico del sottoinsieme femminile di P sono, rispettivamente, Γ e γ.

Per P', le quantità corrispondenti risultano essere:

$$\begin{cases} d' = \Gamma\delta \\ h' = \Gamma\rho + \gamma\delta \\ r' = \gamma\rho \end{cases}$$
$$\begin{cases} \delta' = \Gamma \\ \rho' = \gamma \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Gamma' = \dfrac{\Gamma + \delta}{2} \\ \gamma' = \dfrac{\gamma + \rho}{2} \end{cases}$$

Utilizziamo un modello geometrico per studiare la trasformazione da P a P'; avendo i vincoli $d+h+r=\delta+\rho=\Gamma+\gamma=1$, possiamo esprimere tutti i parametri che determinano la composizione della popolazione utilizzandone solo tre, ad esempio Γ, δ e h, assegnando ad ogni popolazione questi tre valori come coordinate.

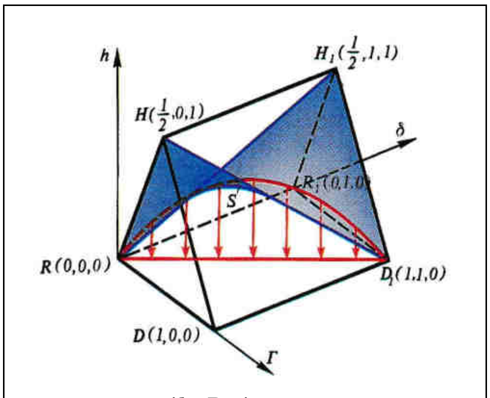
[10] Si noti che, se $k>1$, l'effetto è che solo la k-esima parte delle popolazioni D e R sopravvivono. Quindi, questo parametro può funzionare anche al contrario.

[11] Sì, la cosa è più complicata, ma nasce dal fatto che ci sono diversi organi nel nostro occhio sensibili a colori diversi. Contiamone uno e andiamo avanti in questo modo.

Dovendo essere soddisfatte le diseguaglianze

$$
\begin{aligned}
&0 \leqslant \Gamma \leqslant 1 \\
&0 \leqslant \delta \leqslant 1 \\
&0 \leqslant h \leqslant 2\Gamma \\
&h \leqslant 2\gamma = 2(1-\Gamma)
\end{aligned}
$$

i punti devono trovarsi all'interno del prisma $DHRD_1H_1R_1$, limitato dai piani $\delta=0$, $\delta=1$, $h=0$, $h=2\Gamma$, $h=2-2\Gamma$, come in figura.

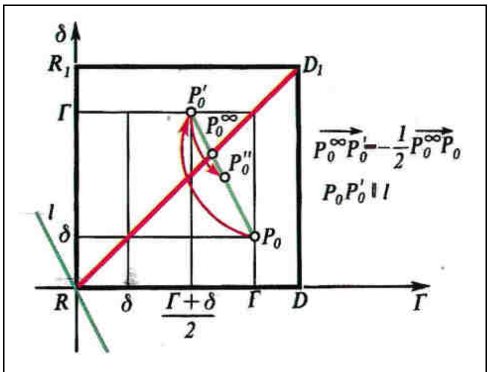


10 ...*il 3D ci mancava...*

La trasformazione ereditaria porta il punto $P(\Gamma, \delta, h)$ nel punto P' e successivamente nei punti P'', ...; tutti questi punti appartengono alla superficie definita dall'equazione $h=2\Gamma-4\Gamma\delta+2\delta$ e quindi i nostri punti sono univocamente definiti dalla proiezione sul piano $h=0$. Inoltre, dalle equazioni:

$$\Gamma' = \frac{\Gamma+\delta}{2}$$
$$\delta' = \Gamma$$

e dalla figura (che rappresenta una "vista dall'alto" del nostro sistema) possiamo dedurre che i punti P_0, P_0', ... sono tutti su una stessa linea parallela alla linea (passante per l'origine R) $\delta=-2\Gamma$.



11 ...*il 3D ci mancava...*

E qui, abbiamo un problema di traduzione, visto che la funzione di passaggio da P_0 a P_0' è nota in letteratura come *shear compression*, e a noi il concetto di "potatura" in certi ambiti piace molto poco; comunque, il fattore di scala è il solito 1/2.

Sempre dalla figura (e con qualche calcolo) si vede che la sequenza dei punti generazionali tende al punto intersezione tra la nostra linea (verde) e la congiungente di R con D_1 (rossa).

Tornando al tridimensionale, si vede che la composizione di generazioni successive tende ad una popolazione stabile; il punto di equilibrio appartiene (come tutti i punti di stabilità) all'intersezione tra la nostra superficie e il piano $\Gamma=\delta$, che è la parabola (rossa) della figura precedente.

Per ognuno dei punti di stabilità possiamo calcolare tutti gli altri parametri della popolazione; vi risparmiamo i dati, ma questi sono in ragionevole accordo con i dati reali relativi al daltonismo.

Se la cosa vi ha appassionato, avremmo (oltre a quelli che vi abbiamo rifilato nel testo) un po' di problemini; siccome ci rendiamo conto che calcoli di questo genere sono la passione di pochi eletti, ditelo e potremmo passarveli.

E il terzo PM, poi, lo scrivete voi.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms