Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 280 – Maggio 2022 – Anno Ventiquattresimo

Attenzione!
La rivista che state leggendo potrebbe essere al contrario.

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM277 ha diffuso 3'356 copie e il 11/05/2022 per Google eravamo in 17'400 pagine.

Scott Kim, certo. E chi altri, se no?

1. Londra val bene una mossa

"Andate da lui:
conosce queste cose
meglio di me"
(Isaac Newton)

Anche a guardarlo con occhi moderni, non si può negare che l'Editto di Nantes rappresenti un bell'esempio di quella virtù che ha sempre avuto vita difficile, nella storia degli uomini: la tolleranza.

Deve esserci qualche ragione biologica, o quantomeno qualche paura atavica, che spinge gli esseri umani non solo a cercare di dominare gli altri, ma anche di imporre loro regole e direttive su come organizzarsi l'esistenza. Anche le ragioni economiche, utilitaristiche, sembrano non essere sufficienti a giustificare la predisposizione all'intolleranza: un dominatore che è riuscito a rendere in schiavitù il nemico, costringendolo a una vita agra di lavoro forzato senza speranza di miglioramento, solitamente non si accontenta di una tale violenza, esige anche che il dominato segua regole ben precise anche nel suo privato più intimo. Sentimenti e famiglia a parte, cosa c'è di più personale del sentimento religioso, almeno per coloro che un sentimento religioso ce l'hanno? E per quale ragione si dovrebbe mai imporre a forza il proprio agli altri?

Qualunque sia la risposta, è innegabile che, dal punto di vista storico, la religione sembra un elemento dirompente in tutte le epoche non per la sua caratteristica personale e intima, quella che dovrebbe aiutare le persone a trovare le risposte ai grandi interrogativi sul significato della vita, dell'universo e di tutto quanto, ma per i suoi strettissimi rapporti con il potere temporale. E già questa banale osservazione potrebbe costituire il nucleo forte della spiegazione: le religioni potrebbero forse esercitare tolleranza le une verso le altre, ma chi esercita il potere non è mai tollerante verso la concorrenza. Fatto sta che la storia è costellata da guerre di religione, o guerre di conquista nel nome della religione, o, come minimo, da guerre di potere comunque benedette dalla religione; anche quando le parti in causa seguono la stessa fede, o quasi.

È virtualmente impossibile anche solo provare a raccontare la formazione degli stati nazionali, soprattutto in Europa, senza tener conto del ruolo cruciale della religione. A partire dalla caduta dell'Impero Romano (che, peraltro, non è che fosse esente da interferenze religiose, anzi: la religione romana era così interconnessa con il potere politico e militare che è quasi impossibile affrontare i due aspetti separatamente) è tutto un susseguirsi di conflitti tra potere temporale e spirituale. Dalla lotta per le investiture tra papato e impero al succedersi di vari scismi – tutti con inevitabili conseguenze politiche e militari – fino all'esplodere della Riforma Protestante, le cui tracce sono ancora ben leggibili nelle carte geografiche dell'Europa contemporanea.

L'Inghilterra risolve abbastanza in fretta i terremoti politico-religiosi dei primi secoli dell'Età Moderna, sostanzialmente per l'irritazione di Enrico VIII che non voleva rendere conto al Papa dei suoi desideri di cambiare moglie nella maniera che preferiva. Finisce che diventa disobbediente al pontefice romano, e fonda la chiesa anglicana, di cui, ovviamente, si riserva la carica suprema; la pagherà rendendo i rapporti con Scozia e Irlanda, cattoliche, un po' più complicati, ma dando al suo regno la possibilità di evitare gran parte dei massacri che devasteranno l'Europa durante la Guerra dei Trent'anni. La Spagna, ad un certo punto, decide di rinunciare al rigoglioso mélange dato dalla convivenza di tre culture – la cristiana, la musulmana e l'ebraica – ed espelle sia i giudei che i seguaci dell'Islam, per rivendicare il diritto di potersi chiamare "cattolicissima". Invece culla della Riforma, la Germania (che al tempo non è ancora Germania ma solo

Sacro Romano Impero) pagherà il principio del "*cuius regio eius religio*"[1] con una frammentazione politica che si risolverà solo nella seconda metà dell'Ottocento, in ritardo persino sulla rocambolesca unità nazionale italiana. Ma è così un po' dovunque: nazioni intere, anche se di dimensioni geografiche minori, come i Paesi Bassi, la Svizzera, il Belgio devono la loro stessa identità alla maniera in cui preferiscono pregare l'onnipotente: non troppo diversa è la situazione degli stati del Nord Europa, e se i territori dell'Europa orientale sembrano rimanere relativamente esenti dal turbinio che ha sconvolto il resto del continente tra Cinquecento e Seicento, è solo perché loro avevano già vissuto uno scisma analogo cinque secoli prima, nel 1054.

1 *Cattolici e Ugonotti*

In tutto questo travaglio, è abbastanza singolare la posizione della Francia, che pure ha qualche buon diritto di vantarsi si essere stato il primo stato europeo a darsi la forma di stato-nazione. La Riforma incontra molti entusiasti anche in terra francese, e lo fa nella forma proposta dal connazionale Jean Cauvin, che in Italia è più noto con il nome latinizzato di Calvino. Come nel resto dell'Europa occidentale, anche in Francia le divergenze di culto generano entusiasti massacri[2], il più famoso dei quali è proprio quello, francesissimo, della Notte di San Bartolomeo. Il giorno di San Bartolomeo è il 24 Agosto, e nell'anno 1572 è nella notte tra il 23 e il 24 che i parigini cattolici fanno strage di ugonotti, come venivano chiamati i protestanti francesi[3]. Gli storici moderni stimano tra cinquemila e trentamila vittime il numero dei protestanti assassinati: e, come sempre in questi casi, tra i morti si annoverano una buona percentuale di donne, vecchi e bambini.

Parigi era città cattolica: il protestantesimo, in Francia, era diffuso soprattutto nelle regioni meridionali come la Navarra, la Guascogna, il Lionese e il Delfinato; se tanti ugonotti si trovavano a Parigi in quella notte fatale, è perché si stavano per celebrare le nozze tra la cattolica "regina Margot", sorella del re[4], ed Enrico re di Navarra, protestante.

Vent'anni dopo la strage di San Bartolomeo, per diventare re Enrico si dispone a cambiare religione diventando cattolico, nonché a pronunciare una delle frasi regali più famose della storia, quella "Parigi val bene una messa" che ancora oggi si sente pronunciare spesso sia dai turisti che vogliono manifestare il loro apprezzamento per la Ville Lumiere, sia dai pragmatici disposti a fare qualche sacrificio di coerenza morale in

[1] Tradurre il latino è difficile soprattutto quando, come in questo caso, nella traduzione si perde l'estrema potenza e capacità di sintesi della lingua di Tacito. Il senso è chiaro e facile da capire: impone ad ogni suddito di seguire la fede del proprio principe; ma è difficile trovare una formula in italiano che sia parimenti breve ed efficace.

[2] Sono tempi in cui l'Italia è lontanissima dall'idea di formarsi in uno stato unitario, e per di più è ovviamente una roccaforte cattolica, vista l'influenza del pontefice romano che, nelle parti centrali della penisola, è anche il vero e proprio sovrano di uno stato, quello pontificio. Ciò nonostante, anche in quella che oggi chiamiamo Italia si registra qualche strage di rispetto: del "Sacro Macello" della Valtellina, avvenuto nella notte tra il 18 e il 19 Luglio 1620 e che causò l'assassinio ci circa 700 persone, parlammo già nel compleanno dedicato a Galileo Galilei, "Rigoroso Esame", RM085, Febbraio 2006.

[3] L'etimologia del termine è tuttora abbastanza misteriosa; esistono diverse ipotesi solide, ma nessuna certezza, se non quella che, almeno inizialmente, la parola era usata in senso dispregiativo.

[4] Non vale la pena perdersi troppo in parentele regali, perché non si finisce più: basti ricordare che il vero nome della "regina Margot" è Margherita di Valois, figlia del re Enrico II di Francia e di Caterina de' Medici, e che ad essere "sorella di re" era ben abituata, visto che ben tre suoi fratelli cinsero la corona. Suo marito, Enrico di Navarra, diventerà a sua volta re di Francia, segnando il cambio di dinastia: termina quella dei Capetingi, e con lui inizia quella dei Borbone (francesi).

cambio di sostanziali contropartite pratiche. Ed è forse proprio il suo innegabile pragmatismo a suggerirgli di mettere fine alle lunghe guerre di religione francesi: l'Editto di Nantes è emanato da lui, nell'Aprile del 1598 e, pur con tutte le limitazioni del tempo e una pletora di codicilli, resta pur sempre un editto di tolleranza[5], che a quei tempi era indubbiamente una rarità. L'editto concede libertà di culto e pari diritti a cattolici e ugonotti, anche se riserva, su base geografica, il concetto di religione dominante: non si può essere ugonotti a Parigi o Rouen, non si può essere cattolici a Montpellier o La Rochelle, e così via.

2 *Il cardinale Richelieu all'assedio di La Rochelle (Henri-Paul Motte, 1881)*

Come spesso accade alle espressioni di tolleranza, anche l'editto di Nantes non avrà vita facile. Non sarà mai applicato fino in fondo, e subirà di volta in volta limitazioni su limitazioni. Tra le varie garanzie, riservava agli ugonotti un buon numero di piazzeforti, che però negli anni successivi verranno prese con la forza, una ad una, dai cattolici: il "vero" D'Artagnan, colui che ispirò il celeberrimo personaggio del moschettiere, morirà agli ordini di Luigi XIII e Richelieu nell'assedio dell'ultima fortezza ugonotta, quella di La Rochelle.

Alla fine, sarà il Re Sole, Luigi XIV, che straccerà definitivamente l'Editto di Nantes contrapponendogli l'Editto di Fontainebleau. In precedenza, aveva già fatto intendere di non avere molta simpatia per i protestanti imponendo le cosiddette *dragonnades*, ovvero l'obbligo, per ogni protestante, di fornire vitto e alloggio ai dragoni cattolici; questi, inoltre avevano l'ordine di provare a convertire gli ugonotti che li ospitavano al cattolicesimo, e nel loro sacro tentativo di conversione erano liberi di usare qualsiasi mezzo, peggior violenza inclusa. L'editto viene promulgato il 16 Ottobre 1685, e i suoi dodici articoli[6] hanno il solo scopo di togliere qualsiasi efficacia al tollerante Editto di Nantes.

Saranno molte le conseguenze dell'Editto di Fontainebleau: un ulteriore riavvicinamento tra Parigi e il papa, un riposizionamento più deciso della Francia tra le grandi potenze cattoliche, dopo che Luigi XIV aveva dato poco o nullo contributo nel respingere l'assalto dei musulmani ottomani alla cristiana Vienna, e certo un innalzamento dei commerci con

[5] La tolleranza è sempre stata un problema, per le fedi religiose, e lo è tuttora: e professare ateismo o agnosticismo non è meno pericoloso, anzi: anche in questo XXI secolo, ad esempio, secondo uno studio del 2013, sono ancora almeno 12 i paesi in cui non credere in una divinità è punibile con la pena di morte: Afghanistan, Iran, Malesia, Maldive, Mauritania, Nigeria, Qatar, Arabia Saudita, Somalia, Sudan, Emirati Arabi Uniti, Yemen.

[6] Con qualche contraddizione, in realtà: l'articolo XII, relativo alla possibilità di permanenza nel regno degli ugonotti purché non celebrassero le loro funzioni religiose, sembra in contraddizione con gli altri articoli, soprattutto con il decimo.

le nazioni più rigorose nel mostrarsi pienamente cattoliche. Ma ci saranno, per contro, anche delle perdite: la più tangibile e concreta delle quali è certamente la dispersione di trecentomila ugonotti i quali, non sentendosi più al sicuro, decidono di lasciare la Francia. Tra questi c'erano senz'altro sudditi che potevano essere una grande risorsa per la nazione e la corona francese: come, ad esempio, un giovanotto di vent'anni assai portato per la matematica.

3 *Abraham De Moivre*
(J. Highmore - Cambridge University Library)

Abraham De Moivre nasce a Vitry-le-François il 26 Maggio 1667, figlio di un medico chirurgo. La famiglia è protestante, anche se la cittadina natale di Abraham è cattolica, posta nel nordest della Francia, tra Parigi e Metz. Non si può certo dire che i De Moivre fossero una famiglia ricca, e forse neppure benestante; ma in tempi come quelli in cui nasce e cresce Abraham, un lavoro fisso come quello di chirurgo era già una sicurezza rispetto a quel che poteva aspirare la maggioranza della popolazione. Tant'è che, dopo i primi anni di scuola – peraltro svolti in una scuola cattolica, nel segno di una decente tolleranza religiosa – i genitori riescono a inviarlo a Sedan, a studiare all'Accademia Protestante.

È ancora molto giovane, appena undicenne: erano tempi in cui il termine "studi universitari" era abbastanza diverso da quello che intendiamo oggi. Il suo programma di istruzione è quasi interamente classico, prevalentemente destinato allo studio della lingua greca; ciò non di meno, De Moivre trova nella biblioteca dell'Accademia testi sufficienti a fargli capire che il suo interesse principale è diretto verso la matematica, e soprattutto verso il nascente Calcolo delle Probabilità. Ben presto, che la sua religione possa diventare un problema gli diventa ben chiaro: benché teoricamente ancora protetta dall'Editto di Nantes, l'Accademia Protestante di Sedan è forzata alla chiusura quando Abraham è ancora solo quindicenne; si sposta allora a Saumur, dove studia logica, e poi direttamente a Parigi, dove nel frattempo si era spostata la sua famiglia. Qui entra al Collegio di Harcourt cominciando ad interessarsi di fisica e anche – pagando di tasca propria delle lezioni private – di matematica.

Ma non c'è più tempo: il 1685 incombe, e con esso anche l'Editto di Fontainebleau; e che la situazione sia diventata ormai insostenibile lo dimostra il fatto che, quando l'Editto viene ufficialmente promulgato, trova il giovane De Moivre già in carcere. Le fonti, a questo proposito, discordano – quasi fosse un prolungamento della diatriba religiosa – e mentre quelle di stampo cattolico sostengono che De Moivre rimase incarcerato per poco tempo, quelle protestanti affermano che restò in galera per tre anni, fino alla primavera del 1688, quando finalmente riuscì ad attraversare la Manica e arrivò a Londra.

Giungendo da esule in Inghilterra, De Moivre ci guadagnò certo in serenità, ma è verosimile che a fare l'affare migliore sia stata l'Inghilterra stessa; e poi, in ultima analisi, anche l'accogliente Inghilterra non era del tutto accogliente: era ormai un matematico affermato e non avrebbe dovuto aver difficoltà nel trovare un'università pronta a riservargli una cattedra, ma era straniero, e per i ruoli accademici anche l'illuminato governo di Londra riservava qualche discriminazione. De Moivre cominciò a guadagnarsi da vivere dando lezioni private ai figli dei ricchi inglesi che potevano permettersi di pagare un insegnante privato.

Così, buona parte delle prime giornate inglesi di De Moivre passavano tra nobili magioni e viaggi in carrozza, ma non sembra che Abraham ne risentisse: durante una delle sue prime visite ai maggiorenti della nobiltà inglese[7] aveva avuto occasione di sfogliare una copia dei *Principia Mathematica* di Newton, e aveva subito capito la forza rivoluzionaria di quel testo. Ne comprò subito una copia, e si narra che ne tolse la rilegatura, facendone piccoli insiemi di pagine da potersi portare appresso e studiare durante i suoi interminabili spostamenti quotidiani.

Quando aveva un po' di tempo libero, lo passava alla *Slaughter Coffee's House*, dove per un po' alloggiò anche, affittando un paio di camere. Per molti versi, era davvero un posto ideale per lui. Le coffee-house abbondavano a Londra, ma la Slaughter era nota soprattutto per due caratteristiche: era considerata una sorta rifugio prediletto per gli ugonotti fuoriusciti dalla Francia, e anche un luogo di ritrovo per i giocatori di scacchi. De Moivre si riconosceva benissimo in entrambe le categorie.

4 *Slaughter Coffee's House*

In ambito scacchistico, divenne famoso soprattutto per aver posto – e ovviamente risolto – il problema del "percorso del cavallo", ovvero la ricerca del percorso necessario affinché si possano toccare tutte le 64 caselle della scacchiera con una sequenza di mosse di cavallo. Dal punto di vista dei rapporti personali, è proprio alla Slaughter che De Moivre coltiva le sue migliori amicizie: e sembra probabile che, nonostante la nota ritrosia dell'autore dei *Principia*, i tavoli da scacchi della coffee-house abbiano avuto più di un'occasione di ospitare scontri scacchistici De Moivre-Newton.

È forse questo l'aspetto più sorprendente in cui è riuscito il profugo francese: Isaac Newton è senza ombra di dubbio uno dei più grandi scienziati di tutti i tempi, ma non riusciamo ad immaginarlo molto aperto ai contatti umani. Certo, non c'era scienziato in Inghilterra che non ne riconoscesse il valore, e per la maggior parte degli studiosi britannici era appena mezzo gradino al di sotto del pianerottolo della divinità, ma non sappiamo quanti di essi potessero considerarsi davvero amici, nel senso più comune del termine, del grande sir Isaac. Quello che forse va più vicino a questo grado di intimità è probabilmente proprio Abraham De Moivre: certo, il francese fu folgorato sulla proverbiale via di Damasco dalla lettura dei Principia Mathematica, e questo ha senza dubbio contribuito. In pochi anni di permanenza a Londra, De Moivre riuscì a farsi conoscere dall'ambiente scientifico: incontra Halley, l'uomo della cometa, che incidentalmente è anche il segretario della Royal Society; sarà lo stesso Halley a presentare alla augusta società di intelletti la prima memoria di De Moivre, che non per niente è uno studio sul metodo delle flussioni. Nel giro di un paio d'anni, De Moivre viene accolto nei ranghi della Society. Non sarà poi stato un caso se la stessa Royal Society nominerà De Moivre alla Commissione che doveva risolvere la triste questione tra Newton e Leibniz sulla priorità della scoperta del calcolo.

Dal punto di vista dei contributi personali alla matematica, De Moivre si staglia come uno dei massimi pionieri del Calcolo delle Probabilità: al pari del suo mentore e amico, finirà anche lui in una disputa per la priorità con Pierre Remond de Montmort, che però si risolse amichevolmente e senza lasciare strascichi polemici.

[7] Secondo la biografia di De Moivre scritta dal quasi contemporaneo Matthew Maty, fu presso il Conte (poi Duca) del Devonshire William Cavendish che scoprì l'esistenza dei *Principia* di Newton; ma De Moivre fece da *tutor* a molti rampolli della nobiltà britannica, e molti di loro, naturalmente divennero poi parte dell'aristocrazia inglese e membri del Parlamento.

Da eterni studenti, per chi scrive il nome di De Moivre è però legato alla fondamentale sua formula sulle potenze dei numeri complessi:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

…anche per la relazione e somiglianza che manifesta con "la formula più bella della matematica".

Per il resto, anche solo l'essere probabilmente il migliore amico di Isaac Newton è un'opera meritoria, per la matematica; anche perché fu lui il revisore della traduzione in latino della newtoniana *Ottica*, e il genio inglese certo ricambiava la stima, visto che solitamente rispondeva con la frase posta in testa a quest'articolo a coloro che gli ponevano domande sui suoi *Principia Mathematica*. Erano certo grandi soddisfazioni, che in parte dovevano ripagarlo di una vita abbastanza tormentata e tutt'altro che facile: una vita adulta iniziata dovendo scappare dalla madrepatria, e poi trascorsa in terra inglese dove, nonostante il suo evidentissimo talento e l'elezione a membro della Royal Society[8], dovette sempre cavarsela come insegnante privato – e immaginiamo, pertanto, sempre muovendosi in carrozza da castello a castello – perché non ebbe mai assegnata una cattedra.

Il più celebre aneddoto su Abraham De Moivre resta ancora quello che assicura che riuscì a prevedere la sua morte: si accorse che a un certo punto aveva cominciato a dormire ogni giorno un quarto d'ora di più del precedente, e calcolò di conseguenza la progressione aritmetica fino al giorno in cui avrebbe dovuto dormire sempre, senza svegliarsi. L'aneddoto assicura che, anche questa volta, i suoi calcoli risultarono esatti. Se ne andò il 27 Novembre 1754, in quella Londra che lo accolse e gli riconobbe quella che, seppur non perfetta, era comunque una dignità ben superiore di quella che era disposta a riconoscergli la sua intollerante madrepatria.

[8] Il 27 giugno 1754, cinque mesi esatti prima della sua morte, ricevette la notizia – che lo commosse fino alle lacrime – della sua elezione all'Accademia delle Scienze di Parigi. Naturalmente, come associato "straniero".

2. Problemi

2.1 Conigli, api, microbi ed amebe

Siamo fermamente convinti non avrete dubbi sulla strada da percorrere ma, come da un po' di tempo a questa parte, ci stiamo divertendo a generalizzare le cose; con l'arrivo della "ragionevole stagione" (nel senso che fa caldo ma non troppo), un po' di ozio creativo ci pare una buona cosa.

Bene, in origine erano dei conigli, almeno nel pensiero di Leonardo Bigollo, che svolgevano con solerzia il compito di "crescete e moltiplicatevi" affidato loro dalla natura.

Ora, la cosa ci ha sempre lasciato piuttosto perplessi, anche perché nell'andazzo venivano coinvolte unicamente le coniglie che provvedevano a generare coniglie: un paragone più azzeccato ci è sembrato quello delle api, con una regina e il numero necessario di fuchi[9] (anche perché non è che si nutra una grande simpatia per le amebe). Comunque, il problema resta lo stesso. Anzi, *i problemi*, perché ne abbiamo trovati un paio. Anzi, di più, visto che vorremmo generalizzare, appunto.

Nella nostra "qualcosoliera" (generalizzazione della conigliera) abbiamo una femmina che diventa fertile dopo 6 (o anche a) mesi; una volta fertile, produce ogni 1 (o anche b) mesi 6 (o anche c) coniglietti, dei quali 3 (o anche d) sono femmine; la speranza (diciamo meglio: la certezza) di vita alla nascita di un coniglio è di 7 (o anche e) anni.

Siccome questo problema lo abbiamo trovato a Natale e a Natale son tutti più buoni (...ditelo al coniglio...), il nostro suggerimento è che a sia un divisore di dodici. Ma, comunque, fate voi.

Ora, tutti vi ricordate la formula di Binet[10]: esiste un qualcosa di simile, qui? Che mi permetta di calcolare i valori all'anno n senza dover calcolare i precedenti?

Un problema simile (matematicamente parlando: la rollata di amebe non ci risulta sia molto apprezzata) prevede due tipologie di microrganismi, non-tanto-allegramente conviventi in una scatola di Petri: al momento, abbiamo 30 (ma anche f) Q e 1 (ma anche g) P.

Un'ameba di tipo P mangia un microbo di tipo Q al minuto, posto che ce ne siano di divorabili. Un volta mangiato un Q, la nostra P si riproduce generando 2 (...ma anche... OK, non lo diciamo più) copie di sé stessa (e lei sparisce, come fanno tutte le amebe). Un microbo di tipo Q si riproduce generando 2 (...) copie di sé stesso ogni 1 (…) minuto. In pratica, l'ameba deve mangiare per scindersi, il microbo ce la fa senza nutrirsi.

La situazione raggiunge in breve tempo (quanto? Questo era il problema originale) una forma di stabilità "antipatica secondo Q"; ma stiracchiando un po' i numeri, cosa succede?

Anche qui, sarebbe carino avere la "forma di Binet" della soluzione...

2.2 Le formiche, l'universo e tutto quanto

Giusto per stare nell'aneddotica personale, quando abbiamo trovato questo problema ci è venuto in mente un "compito (s)fortunato".

Ai tempi dell'Università (quindi, *When Dinosaurs Ruled the Hearth*) avevamo fatto una simpatica simulazione MonteCarlo di un universo monodimensionale (...quasi... la gravità continuava ad andare con l'inverso del quadrato) "viscoso": le stelle erano su una linea, ciascuna si muoveva con velocità e direzione casuale (all'inizio, poi solo forze gravitazionali) ma il tutto era "attenuato" appunto dalla viscosità. Secondo il prof c'era una certa probabilità che il tutto si trasformasse in uno stato stazionario (a "pianeti fermi"): dopo alcune migliaia di simulazioni, si è convinto anche lui che l'unico finale

[9] Non ci ricordiamo se l'abbiamo già detto, ma lo sapete come si dice "fuco" in inglese? "*Drone*". Sì, proprio quello.

[10] No? Male. Andatevela a cercare, *fainéants*! (cit. Sylvie Coyaud, aka *OcaSapiens*)

accettabile di una cosa del genere è un Big Crunch (che un collega inguaribile ottimista definiva come "...finalmente incontrerò qualche ragazza...").

Se volete provarci, fate pure, ma non è questo il problema.

Nel nostro problema abbiamo una sbarra della lunghezza di 1 (...eh? No, no... Certo che no... Forse.) metro, sulla quale sono posizionate 6 (…) formiche, identificate (da sinistra verso destra) come Aldo, Bea, Carlo, Daniela, Ernesto e Freya. Aldo, Bea, Daniela e Ernesto si muovono verso destra, mentre Carlo e Freya si muovono verso sinistra, alla velocità sconsiderata (per delle formiche) di 1 centimetro al secondo. Ogni volta che due formiche si incontrano, immediatamente si girano e procedono nella direzione inversa. Se qualcuna arriva ad un estremo, cade giù.

Le loro posizioni sulla sbarra sono definite a partire dall'estremo sinistro: Aldo è "sul bordo", Bea a 20 (...già... e vale anche per tutti i successivi, tranne Carlo) centimetri, Daniela a 50, Ernesto a 60 e Freya a 80.

"Rudy, ti sei dimenticato Carlo" No, di Carlo sappiamo solo che è da qualche parte tra Bea e Daniela.

Contrariamente al "Problema (del prof) di Rudy", qui la situazione si conclude con un'espansione infinita dell'universo, nel senso che prima o poi le formiche cadranno tutte dalla sbarra; quello che ci interessa sapere è quale sarà l'ultima a cadere, e dopo quanto tempo.

Possibilmente, prima della fine dell'universo.

3. Bungee Jumpers

Quante soluzioni intere dell'equazione $x + y + z = n$ soddisfano le diseguaglianze:

$$\begin{gathered} x \leqslant y+z \\ y \leqslant x+z \\ z \leqslant x+y \end{gathered}$$

se consideriamo differenti le soluzioni per le quali varia solo l'ordine dei termini?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Maggio!

4.1 [278]

Prima di partire con le soluzioni del mese scorso, un piccolo passaggio a quelle del mese precedente. Ci è arrivata il giorno dopo aver montato RM279 una soluzione di ***trentatre*** al primo problema, che lui stesso ha deciso di farci cestinare. Noi non buttiamo mai via niente, ma glissiamo per una volta e vediamo che cosa è arrivato sul secondo problema.

4.1.1 Esame di Maturità

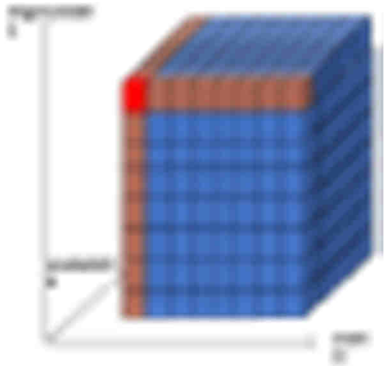
Prima della soluzione, ancora una volta il testo:

> *All'esame di Maturità, la prova di Matematica era composta da tre problemi, e ogni partecipante ha ricevuto per ognuno dei problemi una valutazione da zero a sette (estremi inclusi). Durate la fase di correzione dei compiti, ci si è accorti che, dati due qualsiasi maturandi, questi hanno ricevuto la stessa valutazione in al più un problema; quanti sono, al massimo, i partecipanti?*

Il mese scorso abbiamo pubblicato la soluzione di ***Valter*** e ***trentatre***, ora vi passiamo quella di ***Galluto***:

> Dati P problemi e V voti possibili il numero di permutazioni possibili è V^P e quindi nel caso proposto sono $8^3 = 512$ (si, lo so, sto copiando **trentatre**, ma da adesso in poi le nostre strade si dividono…).

Immaginiamo ciascuna di queste permutazioni come un cubetto di un grande cubo 8×8×8.



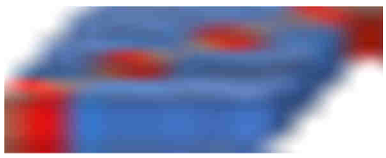
Se (ad esempio) un candidato ha preso 0 in analisi e probabilità e 7 in trigonometria (il cubetto rosso nella figura), "inibisce" le possibilità che stanno sulla stessa riga e sulla stessa colonna dello strato 7 di trigonometria, e le possibilità che stanno "impilate" lungo l'asse di trigonometria (i 3×7=21 cubetti rosa nella figura).

Guardiamo ora il solo strato 7 di trigonometria; sono rimaste valide tutte le possibilità ancora blu; diciamo, sempre per costruire un esempio, che un candidato ha preso 7 in trigonometria e 1 negli altri due problemi; come prima vengono inibite le possibilità della stessa riga e colonna, comprese due possibilità che erano già state inibite prima, e la pila sottostante (che nel disegno non si vede).

Andando avanti, ogni volta che scelgo un candidato, inibisco (oltre alla pila che al solito non si vede) tutte quelle della stessa riga e colonna; quindi posso scegliere in tutto 8 candidati.

Diciamo che scegliamo gli 8 candidati che formano la diagonale 0/0-7/7 e scendiamo ora allo strato 6 di trigonometria: i cubetti corrispondenti alla diagonale sono inibiti ma ho, per ciascuna delle 8 righe e colonne, le altre 7 scelte disponibili.

Sempre per continuare a costruire un esempio, scelgo le 8 possibilità in rosso.



Man mano che scendo le alternative sono sempre più limitate, finché, quando arrivo allo strato 0, la scelta è obbligata perché sono rimasti solo 8 cubetti possibili, uno per ogni riga e colonna; ma, ad ogni strato, ho potuto scegliere 8 (e non più di 8) cubetti.

E quindi i candidati possibili sono **8×8=64** e cioè V^2.

Provo a generalizzare. È chiaro che la questione non è il numero di voti ma il numero di problemi.

- Con P=1 i candidati possono essere infiniti, visto che al più avranno preso lo stesso voto nell'unico problema
- Con P=2, ho un quadrato fatto di V×V quadratini e sono tutti validi: al massimo due quadratini stanno sulla stessa riga **o** sulla stessa colonna; quindi la soluzione è ancora V^2 (uhm!)
- Quando (con P=3) questo quadrato diventa lo strato di 64 cubetti che hanno lo stesso valore nella terza dimensione, i validi si riducono a 8, e cioè un set

di 8 che non avevano né riga né colonna uguali (ad esempio, gli 8 della diagonale 0/0-7/7) e quindi da V^2 si riducono a V; dato che gli strati sono 8, torno a 64 e quindi a V^2.

- Per P>3 il disegno non ve lo faccio: già mi sono venuti sbilenchi i cubi, non mi voglio cimentare con gli iper-cubi, e quindi ci vuole uno sforzo di immaginazione:
  - Con P=4 (Teoria dei Numeri, ovviamente) abbiamo un iper-cubo fatto di 4.096 iper-cubetti (continuando con l'esempio di V=8)
  - ogni strato di 512 iper-cubetti mi fornisce solo 8 iper-cubetti validi, ciascuno dei quali deve avere diversi valori su tutte le altre 3 dimensioni (ad esempio, sullo strato 7 di Teoria dei Numeri, gli 8 iper-cubetti della diagonale 0/0/0-7/7/7)
  - gli strati sono 8, e quindi ancora una volta la soluzione è 64, cioè V^2.
- E quindi la soluzione, per P>1, è sempre V^2.

Belli i cubetti, vero? Passiamo ai problemi attuali, che – come al solito – siamo molto in ritardo.

4.2 [279]

4.2.1 Andirivieni di cammelli quantistici

Come avete visto, questo mese il Capo si è dato ai problemi teorici. Partendo dal vecchio problema dell'eredità dei cammelli, arriva all'espansione:

> *Dati k figli, ciascuno dei quali riceve 1/a, 1/b, eccetera di una mandria di z cammelli. L'esperto, prestando w cammelli, risolve il problema riportandosi a casa i propri. Per quali numeri il problema è valido?*

Il primo a scriverci è stato ***.mau.***, che comincia subito con la critica all'esempio iniziale (che noi abbiamo pensato bene di non riportare qui sopra):

> La prima parte del problema funziona solo perché né il padre né i figli sanno di matematica; 1/2 + 1/3 + 1/4 > 1 e quindi la divisione non si può fare. Togliendo un attimo il cammello numero 13, la vecchia saggia fa la divisione (6-4-3) e dice "toh, la somma fa 13 ma c'era giusto il cammello che avevo tenuto da parte".
>
> In generale, se si hanno frazioni 1/*a*, 1/*b*, 1/*c*... si fa la loro somma, che è uguale a $(m-k)/m$. Se k=0 la divisione è possibile, se k<0 si ha il caso dei 13 cammelli (qualcuno mette da parte k cammelli prima dell'operazione e li aggiunge dopo), se k>0 si ha il caso dei 17 cammelli (qualcuno presta k cammelli per fare l'operazione e poi se li riprende).

Benissimo, problema risolto. Meno male, perché ***Valter*** non sembra essere molto convinto su come procedere:

> Ho un vago ricordo di un problema simile ma non so più in quale contesto fosse presente. Non saprei dire molto al riguardo; solo alcune farneticazioni, che risolvo poco o nulla.
>
> Nel caso dei tre figli e 13 cammelli ovviamente, sommando 1/2 + 1/3 + 1/4 ottengo 13/12. Se la vecchia si prende un dei cammelli si ha 12/2=6, 12/3=4, 12/4=3; per cui: 6+4+3=13. La vecchia e saggia donna restituisce perciò il cammello per permettere la suddivisione.
>
> Nel caso dei 17 cammelli si ha 1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18; qui, invece, deve prestarne uno. I 18 si suddividono poi così: 18/2=9, 18/3=6, 18/9=2; ma 9+6+2=17 quindi se lo riprende.
>
> Il "gioco" mi pare, forse, questo; provo a proporre altri due casi per spiegarmi meglio:
>
> - 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/12 = 23/24; la diversamente giovane ne presta uno e se lo riprende

- 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/11 + 1/22 = 89/88; se ne prende uno che restituisce per completare

Anche ***Galluto*** si lamenta delle distribuzioni di cammelli inesistenti, date un'occhiata alla prima condizione:

Direi che le condizioni sono le 3 che seguono:

1. $1/a_1 + 1/a_2 + \ldots\ 1/a_k = (\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}) < 1$, altrimenti il compianto ha distribuito più di quanto possedesse; BTW, questa condizione "ammazza" il primo esempio della presentazione del problema , perché 1/2+1/3+1/4>1 (a parte il fatto che 13+1=14 è divisibile per 2 ma non per 3 e per 4)
2. $z+w$ deve essere divisibile per a_1, per a_2, … per a_k; quindi deve essere uguale al mcm($a_1, a_2, \ldots a_k$) o a un suo multiplo
3. deve essere rispettata la seguente proporzione:

$$z: (z+w) = (\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}) : 1$$

faccio un esempio con 1/3, 1/4, 1/5, 1/6:

- 1/3+1/4+1/5+1/6= (20+15+12+10)/60 = 57/60
- $z+w$ = mcm(3, 4, 5, 6) = 60
- z : 60 = 57/60 : 1
- z = 57, e quindi w = 3 (oppure z=114 e w = 6, ecc.),

E quindi, dati gli a_x, e a patto che rispettino la condizione 1., è sempre possibile trovare una z, e di conseguenza un w, che risolve il problema.

Ma allora il problema è facile? Come hanno fatto generazioni di saggi beduini a giustificare la loro presenza? Vediamo la versione di ***Trekker***:

Estendiamo il problema assumendo che le frazioni di mandria destinate ad ogni figlio non siano necessariamente del tipo 1 su "qualcosa". Il nostro scopo è però trovare tutte e sole le soluzioni dati il numero di figli e le frazioni (minime) da dare in eredità.

Poniamo:

- k: numero dei figli eredi;
- p_i/q_i con i=1,2, …, k e p_i e q_i fra loro primi: k frazioni che esprimono la quota parte di allocazione (minima) dell'eredità ai k figli;
- z: numero dei cammelli costituenti il patrimonio da dividere;
- w: numero di cammelli che la "saggia signorina" può prestare temporaneamente;
- c_i: numero di cammelli che verranno assegnati all'i-esimo figlio, cioè la sua eredità.

<u>Condizione 1: dividere quello che si possiede</u>

La prima condizione che imponiamo è che la somma delle frazioni p_i/q_i sia minore di 1 perché altrimenti divideremmo un patrimonio che … non c'è.

Quindi:

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i}{q_i} = \frac{p}{q} \leq 1$$

con p e q due numeri interi positivi e primi fra loro.

Nota: il primo problema con 13 cammelli da dividersi come metà al più anziano, un terzo al mediano e un quarto al gioviano si riferisce ad un padre che vuole lasciare in eredità la mandria che non possiede interamente...

Condizione 2: tutti i cammelli vanno assegnati

Al figlio i-esimo, dopo l'aggiunta temporanea dei w cammelli della "saggia signorina", spetta il seguente numero di cammelli $c_i = \frac{p_i}{q_i}(z+w)$.

È necessario che la somma dei cammelli assegnati sia uguale a quanto lasciato in eredità dal padre, niente di più, niente di meno. Allora possiamo scrivere:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{q_i}(z+w) = z$$

Cioè anche:

$$(z+w)\sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{q_i} = z$$

e

$$(z+w)\ \frac{p}{q} = z$$

equivalente a:

$$pw = (q-p)z$$

Essendo p e q primi fra loro saranno primi fra loro anche p e $(q–p)$ e pertanto, posto che h sia un intero positivo, l'equazione sopra ha soluzione se e solo se:

$$z = hp$$
$$w = h(q-p)$$

da cui anche:

$$z + w = hq$$

Condizione 3: i cammelli non si fanno a pezzi

Il numero di cammelli c_i che verranno assegnati all'i-esimo figlio dopo l'intervento della "saggia signorina" è la frazione p_i/q_i applicata al totale numero di cammelli $z+w$ (tutti i figli ringraziano perché è più di quanto in effetti ammonti la loro corrispondente eredità), cioè:

$$c_i = \frac{p_i}{q_i}(z+w) = \frac{p_i}{q_i}hq$$

Essendo p_i e q_i primi fra loro, i vari c_i saranno dei numeri interi se e solo se lo saranno i k rapporti $\frac{hq}{q_i}$.

Si osservi che quando si sommano le frazioni p_i/q_i prima di tutto si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori mcm(q_1, q_2, …, q_k), poi si "adeguano" i nuovi numeratori delle frazioni, si fa la somma dei numeratori e, se possibile, si semplifica tutto quanto è semplificabile per ottenere alla fine la frazione p/q ridotta ai minimi termini. Nel processo di semplificazione che porta a p/q possono essere stati semplificati alcuni fattori del minimo comune multiplo dei denominatori (presenti in qualche q_i) e quindi non vi è certezza che tutti i rapporti $\frac{q}{q_i}$ siano interi.

Introduciamo la funzione $mcd\_prmt\left(\frac{n_1}{d_1},\frac{n_2}{d_2},\dots,\frac{n_k}{d_k}\right)$ che prende in input k frazioni, le riduce ai minimi termini e restituisce il minimo comune denominatore (da cui il nome mcd_prmt, **m**inimo **c**omune **d**enominatore **p**ost **r**iduzione **m**inimi **t**ermini).

Riduciamo ai minimi termini le k frazioni $\frac{q}{q_i} = \frac{a_i}{b_i}$ con a_i e b_i primi fra loro. Possiamo quindi rendere interi contemporaneamente tutti i k rapporti $\frac{hq}{q_i} = \frac{ha_i}{b_i}$ imponendo che h sia pari ad un multiplo del minimo comune multiplo dei k denominatori delle k frazioni $\frac{a_i}{b_i}$.

Con la definizione di funzione mcd_prmt(·,·,…,·) che abbiamo introdotto sopra possiamo scrivere:

$$h = n \cdot mcm(b_1, b_2, \ldots, b_k) = n \cdot mcd\_prmt\left(\frac{q}{q_1}, \frac{q}{q_2}, \ldots, \frac{q}{q_k}\right)$$

con n intero positivo.

In sintesi date k frazioni p_i/q_i si trovano tutte e sole le soluzioni ammissibili in quattro step, precisamente:

Step 1: Calcolo di p e q

verificare che $\sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{q_i} = \frac{p}{q} \leq 1$, con p e q primi fra loro. Se questa disuguaglianza non è verificata il problema **non** ha soluzione;

Step 2: Calcolo di h

$h = n \cdot mcd\_prmt\left(\frac{q}{q_1}, \frac{q}{q_2}, \ldots, \frac{q}{q_k}\right)$, con n numero intero positivo;

Step 3: Calcolo di z e w

i valori z e w che rendono risolvibile il problema sono tutti e soli questi:

$$z = h\,p$$
$$w = h\,(q - p)$$

Step 4: Calcolo del numero di cammelli da dare ad ogni figlio

il figlio i-esimo riceve in eredità questa quantità di cammelli:

$$c_i = \frac{p_i}{q_i} hq$$

<u>Esempio 1: classico problema dei 17 cammelli</u>

Nel caso del classico problema con 17 cammelli da dividere fra tre figli a cui si vorrebbero (almeno) dare rispettivamente la metà, un terzo ed un nono della mandria si ha:

Step 1: Calcolo di p e q

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18} \leq 1$$

Quindi p=17 e q=18.

Step 2: Calcolo di h

I valori di h ammissibili sono:

$$h = n \cdot mcd\_prmt\left(\frac{18}{2}, \frac{18}{3}, \frac{18}{6}\right) = n \cdot mcd\_prmt\left(\frac{9}{1}, \frac{6}{1}, \frac{3}{1}\right) = \mathrm{n} \cdot 1 = \mathrm{n}$$

Step 3: Calcolo di z e w

Le uniche soluzioni ammissibili con la collezione di frazioni date sono:

$$z = 17 \cdot n$$
$$w = (18\text{-}17) \cdot n = 1 \cdot n = n$$

Quindi con 17 cammelli (n=1) bisogna che la "saggia signorina" ne aggiunga 1, con 34 cammelli (n=2) ne deve aggiungere 2, etc.

Step 4: Calcolo del numero di cammelli da dare ad ogni figlio

Con n=1, cioè con z=17, ciascun figlio riceverebbe rispettivamente il seguente numero di cammelli: 9, 6 e 2.

<u>Esempio 2: una grande famiglia ed una grande mandria di cammelli</u>

E se invece, ad esempio, i figli fossero 9 ed il padre volesse dare rispettivamente ai propri figli 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10, 1/11, 1/100 e 1/46200 della mandria?

Step 1: Calcolo di p e q

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{100} + \frac{1}{46200} = \frac{9371}{9900} \leq 1$$

Quindi p=9371 e q=9900.

Step 2: Calcolo di *h*

Dopo la riduzione ai minimi termini, i denominatori di 9900/5, 9900/6, 9900/9, 9900/10, 9900/11 e 9900/100 valgono **1**, mentre

9900/7 è una frazione già ridotta ai minimi termini e quindi resta 9900/**7**

9900/8 = 2475/**2**

9900/46200=3/**14**

Il minimo comune denominatore delle frazioni ridotte ai minimi termini è quindi pari a 14.

Pertanto: $h = 14 \cdot n$

Step 3: Calcolo di *z* e *w*

$z = h \cdot p = 14 \cdot n \cdot 9371 = 131194 \cdot n$

$w = h \cdot (q\text{-}p) = 14 \cdot n \cdot (9900 - 9371) = 7406 \cdot n$

Il problema è risolvibile se il numero dei cammelli da dare in eredità fosse, ad esempio con n=1, z=131194 e la "saggia signorina" ne aggiungesse temporaneamente w=7406.

Step 4: Calcolo del numero di cammelli da dare ad ogni figlio

Con n=1, cioè con z=131194, ciascun figlio riceverebbe rispettivamente il seguente numero di cammelli: 27720, 23100, 19800, 17325, 15400, 13860, 12600, 1386 e 3.

Ci siamo capiti, si può fare abbastanza arbitrariamente se si rispettano i cammelli – e ci teniamo in questo momento a dire che nessun animale è stato maltrattato per queste dimostrazioni, come vedete i cammelli non vengono nemmeno virtualmente frazionati. Anche ***Camillo*** ci ha mandato un bel programma per ereditare i cammelli, che non vi passiamo, ma decidiamo di concludere la passerella con ***trentatre***:

I dati iniziali del gioco sono in generale

- k il numero di figli
- z il numero iniziale di cammelli
- $(1/a_1, 1/a_2, \dots 1/a_k)$ le frazioni con gli interi a_n crescenti.

Le condizioni sono

a. occorre almeno un prestito che va restituito

- con w e w^* cammelli prestati e restituiti deve essere $w^* \geq w > 0$

- quindi z non può essere direttamente divisibile senza prestiti

b. il prestito w deve essere il minimo possibile

- per non diminuire i cammelli divisi fra i figli.

La parte p_n di cammelli ricevuto dal figlio n-esimo è intera se

$p_n = g\,M / a_n$ con $M = mcm(a_1, a_2, \dots a_k)$ e g un intero positivo

- il totale P dei cammelli "interi" distribuiti è quindi

[1] $P = \sum_1^k p_n = gMS$

- dove $S = \sum_1^k (1/a_n)$

- i cammelli w e w^* prestati e restituiti sono

[2] $w = g\,M - z,\ \ w^* = g\,M - P = gM\,(1 - S)$

- ***a.*** e ***b.*** dicono che z/M non è intero e g è minimo

- cioè $w > 0 \rightarrow g > z/M$ da cui $g \geq 1 + \lfloor z/M \rfloor$ e quindi

[3] $g = 1 + \lfloor z/M \rfloor$

- da [2] si ricava

[4] $S = \sum_1^k (1/a_n) < 1$

- infatti $w^* = gM\,(1-S)$ deve essere positivo.

Nel testo del problema si citano due casi.
Il primo $a_n = (2,3,4),\ \ z = 13$ è <u>sbagliato</u> perché

$M = 12,\ \ S = 13/12 > 1$ cioè non vale [4]

- inoltre fatti i conti $w^* = -2$ è negativo.

Il secondo caso è invece corretto

$a_n = (2,3,9),\ \ z = 17,\ \ S = 17/18 < 1$
$M = 18,\ g = 1,\ P = gMS = 17,\ \ w = w^* = 1$

- il problema arabo originale aveva 35 cammelli

$a_n = (2,3,9),\ \ z = 35,\ \ S = 17/18$
$M = 18,\ \ g = 1 + \lfloor 35/18 \rfloor = 2,\ \ P = g\,M\,S = 34$
$w = 2M - z = 1,\ \ w^* = 2M - P = 2$

- viene prestato 1 cammello e ne sono restituiti 2 (uno come regalo)
- così i figli ricevono più dei cammelli che avrebbero preso senza il prestito (cioè quelli rimasti interi dopo il "frazionamento"), il prestatore riceve più di quanto prestato, e tutti ci guadagnano. E a noi non resta che inchinarci al mitico arabo (negli antichi racconti si chiama *Beremiz Samir*) che ha inventato il problema.

La [4] impone delle condizioni agli interi a_n ; partendo da

$a_1 = 2$ (il minimo possibile)

$a_2 > \dfrac{1}{1-1/a_1} = 2$ e prendendo <u>il valore minimo</u> $a_2 = 3$

$a_3 > \dfrac{1}{1-(1/a_1 + 1/a_2)} = 6 \rightarrow a_3 = 7$ e proseguendo si ha la sequenza

$(a_1, a_2, \ldots) = (2,3,7,43,1807,\ \ldots)$

- per cui vale la ricorrenza

$a_{n+1} = a_n(a_n - 1) + 1$

- usando i primi *k* termini si ha $M = P + 1 = a_k(a_k - 1)$

e con $z = P$ è sempre $g = w = w^* = 1$ (un cammello prestato e restituito)

- questo vale per ogni numero *k* di figli
- p.es. con $k = 4$ figli si ha $M = P + 1 = 43 \cdot 42 = 1806$ e $z = 1805$.

La sequenza risponde all'ultima domanda, cioè il problema "vale" per un numero infinito di valori a_n ; i cammelli crescono in modo geometrico e con 5 figli sono più di 3 milioni, ma non importa: parliamo di cammelli "quantistici".

Notare che nei casi validi citati sopra è sempre $a_1, a_2 = 2,3$ e $a_3 \geq 7$.

La sequenza è anche lo sviluppo di 1 in *frazioni egizie* (numeratore 1)

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1807} + \ldots$$

- e in Egitto ci sono milioni di cammelli.

In generale per ogni valore di *k* e *z*, con *k* valori a_n crescenti le formule forniscono sempre una soluzione corretta; come <u>unica condizione</u> deve valere [4].

Le soluzioni si possono anche trovare fissando alcuni valori iniziali, p.es. k, z, w (figli, gregge iniziale e prestito) e poi ricavare gli a_n, lo schema di calcolo è

- da $gM = z + w$ si vede che M è un divisore di $m = (z + w)$
- m sviluppato in fattori primi fornisce l'elenco D dei suoi divisori diversi
- con d dimensione di D, se $d < k$ (p.es. se m è primo) non esiste soluzione
- i k valori a_n vanno scelti fra i termini di D ordinati in modo crescente
- le scelte possibili sono $\binom{d}{k}$ e questo è il massimo delle soluzioni diverse
- scelti gli a_n si ha una soluzione se $S = \sum_1^k (1/a_n) < 1$
- gli altri valori si ricavano dalle formule

$$M = mcm(a_1, a_2, \dots a_k),\ \ g = 1 + \lfloor z/M \rfloor .$$
$$P = gMS,\ \ w^* = gM - P$$

Fra gli infiniti possibili, riporto un solo esempio

$k = 3, z = 50, w = 1$ da cui $z + w = 51 = 3 \cdot 17$ con divisori $D = (3, 17, 51)$

- questi solo sono gli unici a_n possibili con la soluzione

$$S = 21/51 < 1,\ \ M = 51,\ \ g = 1,\ \ P = 21,\ \ w^* = 30 .$$

Naturalmente prestare un cammello e riaverne indietro 30 lasciando ai figli solo 21 dei 50 originali dovrebbe essere illegale anche in un mercato arabo, ma siamo sempre in ambito "quantistico".

Il numero di soluzioni dipende molto dai valori iniziali; p.es. cambiando la mandria in $z = 52$ abbiamo $z + w = 53$ primo e non esiste soluzione

- invece con $z = 47$ si ha $z + w = 48 = 2^4 \cdot 3,\ D = (2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48)$
- e si hanno 56 terne di valori a_n tutte con soluzioni corrette; la più semplice è la prima con

$$a_n = (2, 4, 6),\ \ S = 11/12 < 1,\ \ M = 12$$
$$g = 4,\ \ P = gMS = 44,\ \ w = 1,\ \ w^* = 4$$

- quindi ai figli spettano 44 cammelli su 47.

E qui ci fermiamo, che il secondo problema attende.

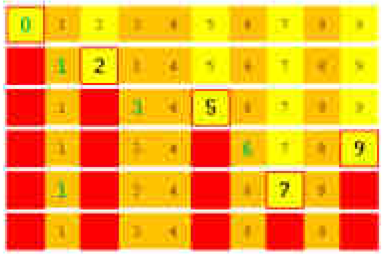
4.2.2 "Giuseppi", Francesi, Inglesi, Turchi e Cristiani

Problema sanguinario, questo mese:

> *I pirati hanno catturato cinque marinai inglesi e cinque francesi, che vengono messi in cerchio, secondo quest'ordine: FIFIIFIFIF. Il Capitano dei Pirati statuisce che si partirà dalla posizione a e verranno contati b marinai: il b-esimo verrà escluso dal gioco, e si ricomincerà la conta dal successivo; tutto questo sin quando non saranno rimasti cinque marinai, che verranno gettati agli squali. Decidete i valori di a e b per salvare solo inglesi o solo francesi.*

Come spesso succede, il primo a mandare una soluzione è stato ***Valter***:

> Per comodità li ho numerati da 0 a 9; la prima "F" vale 0, le "F" sono in giallo, le "I" arancione:

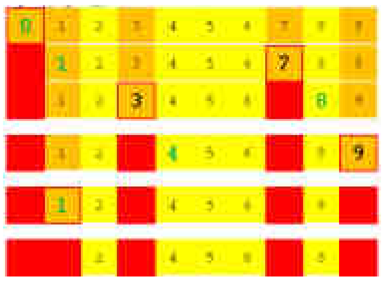


Per salvare i francesi "*a*"=0,"*b*"=11; sopra i 5 passaggio, restano 5 inglesi, gettati agli squali.

Per salvare gli inglesi "*a*"=8,"*b*"=29; mostro lo schema: verde le partenze, cornice rossa esclusi:

- parto con "*a*"=8; gli sommo 29(mod10)≡-1, per la prossima partenza
- quindi il prossimo "*a*" è 7; il marinaio che precede di un posto 8
- il marinaio 6 precede 7, primo salvato lo elimino, quadrato rosso
- proseguo con "*a*"=7; sommo 29(mod9)≡-2, per la prossima ripartenza
- quindi il successivo "*a*" è 4; è quello che precede di due posti 7
- il marinaio 3 che precede 4 è secondo salvato, poi, riparto con 4
- … .

Ne propongo uno io; se l'ordine invece fosse: IIFIFFFIFI; per salvare gli inglesi "*a*"=0,"*b*"=61:



Siccome lo schema è analogo, sia per francesi che inglesi; i francesi si salvano: "*a*"=5,"*b*"=61.

Speriamo di non aver perso troppo eliminando i colori nel testo… ma vediamo la versione di ***Galluto***:

Boh? C'è sicuramente qualcosa di più semplice, ma questa funziona e si presta ad una generalizzazione.

Per salvare i Francesi; ***a* = 7** e ***b* = 1.730,** e vado a spiegare come ci si arriva:

- i Francesi stanno nelle posizioni 1, 3, 6, 8, 10 e cioè tre in posizioni pari (e consecutive, il che come vedremo semplifica) e due dispari (anch'esse consecutive)
- voglio che il primo ad essere salvato sia il n.6, perché è il primo dei tre "pari"

- per ottenerlo, comincio dalla posizione immediatamente successiva, la 7 (che quindi è la nostra ***a***), e comincio a dire che ***b* è un multiplo di 10**; così otterrò che la decina verrà sempre contata sulla posizione 6. per qualsiasi *b*
- una volta salvato 6, il cerchio si stringe a 9 posizioni e quindi la decina viene contata, ad ogni giro, una posizione più avanti
- poiché ora voglio salvare il n. 8, che dista due posizioni dal 6, devo fare 2 giri, oppure 2 + 9, o 2 + 18, ecc.; in termini matematici mi serve che ***b* mod(9) = 2** e quindi ***b* = 20+90*x***
- salvato l'8, adesso voglio salvare il 10, che dista due posizioni dall'8; il cerchio si è ristretto a 8 posizioni, e quindi mi serve che ***b* mod(8) = 2**; il primo x per cui questo avviene è $x = 3$ (il che darebbe $b = 290$), e poi si ripete ogni 4 x (7, 11, 15, …), … cioè $x = 3 + 4y$ e ***b* = 290+360*y***
- adesso voglio salvare l'1, che dista dal 10 una sola posizione; il cerchio si è ristretto a 7 posti e quindi mi serve che ***b* mod(7) = 1**; la prima occorrenza è per $y = 4$ (il che mi da $b = 1.730$) e poi si ripete ogni 7 y (11, 18, …)
- e finalmente salvo il 3, che sta a due posizioni dall'1; mi serve che ***b* mod(6) = 2**; per fortuna la condizione è già realizzata con la prima occorrenza ***b* = 1.730** e quindi non ho bisogno di investigare oltre

Gli inglesi stanno nelle posizioni 2, 4, 5, 7, 9 e cioè 3 in posizioni dispari (e consecutive) e due in posizioni pari.

Con un procedimento del tutto analogo trovo che ***a* = 6** (in modo da salvare per primo 5, che è il primo dei tre dispari consecutivi) e ***b* = 290**, perché 290 ha già i resti giusti per gli ultimi due passaggi.

Una considerazione: il momento delicato è quando devo passare dai pari ai dispari o viceversa, perché mi serve che il resto della divisione sia dispari (1 per i Francesi da 10 ad 1, 3 per gli Inglesi da 9 a 2) e questo è possibile solo se il divisore è un numero dispari. Salvando prima il gruppetto di 3, passo all'altro gruppetto quando il divisore è 7; questo è anche il motivo per cui è una semplificazione che il gruppetto di 3 sia costituito da numeri pari (o dispari) consecutivi. In questo modo, devo fare soltanto 1 "salto".

Comunque, scegliendo accuratamente da dove cominciare e l'ordine di salvataggio, il sistema funziona anche per le altre disposizioni dei 10.

Per un numero di marinai diverso da 10 la logica rimane la stessa, con *b* multiplo del numero di marinai (e sempre scegliendo da dove cominciare e ordine di salvataggio).

Altre versioni non sono arrivate, così non siamo proprio certi se i nostri inglesi e francesi possono essere salvati con i numeri di ***Valter*** e ***Galluto***, ma restiamo fiduciosi in attesa di nuovi risultati. Alla prossima!

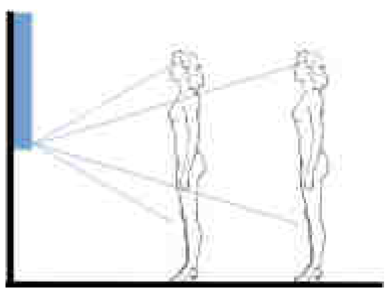
5. Quick & Dirty

Volete vedere come stanno le scarpe nuove con il vestito: davanti allo specchio, a un metro di distanza, riuscite però a vedere al massimo le ginocchia. Per vedere le scarpe, vi spostate verso lo specchio o indietro?

Nessuna delle due: dovete abbassare lo specchio.

Infatti, per la legge della riflessione, in due angoli di incidenza e di riflessione sono uguali rispetto alla normale allo specchio, e allontanandovi o avvicinandovi entrambi si riducono o aumentano.

Data la nostra inettitudine nel ramo, il disegno è copiato da Loomis (1943), Figure Drawing.



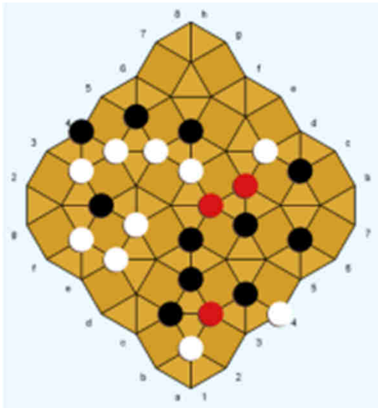
6. Zugzwang!

6.1 Diamond

...che poi sarebbe una variazione su Kensington, e che secondo noi ha l'aria un po' più veloce.

Giusto per garantire una piccola nota polemica, un grande grazie a tutti coloro che, con abnegazione e sprezzo del ridicolo, hanno risposto alla gentile richiesta della volta scorsa di un sistema per orientarsi in Kensington. Bene, qui qualcosa c'è. E potrebbe essere un'idea...

Prima, però, gli *administrivia*: il gioco è stato inventato da ***Larry Black***, ma non si sa bene quando; infatti, il Nostro comincia a lavorare alle regole nel 1985, che vengono chiuse però solo nel 1994, per essere recensito (da *Games*) nel 2013 (...quindi, non lamentatevi più dei nostri ritardi, chiaro?).



5 *...cominciamo da un centro partita.*

Cominciamo con la ***scacchiera***, che è "problematica"; tant'è che la prendiamo da Wikipedia (inglese), come tutte le altre immagini. Come vedete, è formata da un mosaico di triangoli e quadrati, piuttosto resistente a qualsiasi tentativo di disegnarla in PowerPoint o in Draw; non solo, ma vedete anche l'interessante modo per codificare le mosse: lettere in un senso, numeri nell'altro, ma le "linee" identificate sono tutt'altro che dritte[11].

Passiamo poi ai ***pezzi***. Vi servono trentasei pedine: dodici bianche, dodici nere e dodici rosse. Questo non perché si giochi in tre, ma perché quelle rosse sono *neutre*.

Il gioco, esattamente come Kensington, è diviso in due parti, il ***posizionamento*** e il ***movimento***; si comincia dal posizionamento, e comincia il nero ma, cosa piuttosto interessante, la prima mossa del bianco (per poco...) potrebbe essere quella di applicare la ***regola della torta*** ("pie rule", in inglese), richiedendo lo scambio delle parti. Questo dovrebbe impedire al "nero originale" di fare una prima mossa troppo vantaggiosa[12]. Il posizionamento, comunque, procede ma non è possibile catturare pezzi (v. dopo) in questa fase; come nel Kensington, se in questa fase uno dei due giocatori riesce ad occupare i quattro vertici di un quadrato vince (ma ci pare dobbiate essere proprio dei polli, per perdere in questo modo).

Nella fase di ***movimento***, al proprio turno un giocatore può o muovere uno dei propri pezzi da un vertice ad un vertice adiacente libero, o rimuovere un pezzo neutro dalla scacchiera, ma *solo se il pezzo neutro non ha pezzi bianchi o neri adiacenti*.

"...e da dove spuntano i pezzi neutri?" Un attimo, prima dobbiamo vedere la cattura, che è possibile solo durante la fase di movimento. Se i vertici di un triangolo contengono ***esattamente*** un pezzo bianco e un pezzo nero, qualsiasi giocatore che occupi con un proprio pezzo il vertice restante prende il pezzo avversario: non ci viene in mente un termine italiano, ma il nome originale di questa mossa è "cornering" il pezzo avversario. Ci sono varie possibilità, ad esempio un cornering simultaneo di un pezzo da parte di due triangoli, che portano tutti alla stessa conclusione (il pezzo viene preso); quello che ***non*** si può fare è un ***cornering simultaneo*** di due pezzi avversari: in questo caso, i pezzi

[11] Mettiamo in nota una domanda (alla quale non stiamo cercando risposta): ma volendo giocare "sulle caselle" anziché "sugli incroci", come va modificata la scacchiera? Insomma, qual è il duale di questo grafo? A occhio e croce, dovrebbero venire fuori un mucchio di pentagoni, ma non ci è chiaro come farli stare assieme. Qualche idea?

[12] Se vi state chiedendo il motivo del nome, ricordatevi che il metodo ottimale per dividere una torta in due è "uno taglia, l'altro sceglie".

avversari non vengono catturati. E il vostro pezzo non viene preso se si "butta in bocca al leone", chiudendo un triangolo con due vertici occupati da pezzi avversari.

Quando catturate un pezzo avversario, ***lo sostituite con un pezzo neutro***. Visto, che ci siamo arrivati? E i pezzi neutri non si muovono.

Le regole della partita patta sono le solite: o si è d'accordo entrambi per la patta, o il giocatore con il tratto è in stallo, o la stessa posizione si ripete tre volte o, infine, in cinquanta mosse (venticinque per giocatore) non si sono prese pedine avversarie o neutre.

"E quando si vince?" Allora non siete attenti, ve lo abbiamo già detto. Quando si riescono a mettere quattro pedine del vostro colore ai vertici di un quadrato (o quando avete mangiato tutte le pedine dell'avversario, ovvio).

Esiste anche una notazione per le mosse "speciali": se una mossa è seguita da un asterisco, è un mossa di cattura, se invece una posizione è tra parentesi, un pezzo neutro è stato prelevato da quella posizione.

Siccome sappiamo che non costruirete mai la scacchiera, tornate all'inizio: il bianco muove e vince.

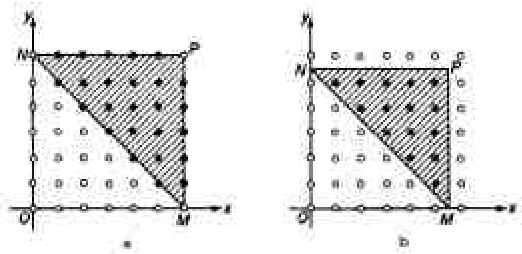
7. Pagina 46

Essendo $z = n - x - y$, una soluzione è completamente determinata una volta che siano specificati x e y. Le condizioni cui devono sottostare x e y per soddisfare le diseguaglianze date sono:

1. $z \geq x + y$ impone $n - x - y \leq x + y$, che equivale a $x + y \geq n/2$.
2. $y \leq x + z$ impone $y \leq x + n - x - y$, che equivale a $y \leq n/2$.
3. $x \leq y + z$ impone $x \leq y + n - x - y$, che equivale a $x \leq n/2$
4. $x > 0, y > 0, \ z > 0$ diventano $x > 0, y > 0, x + y < n$

Quindi, il problema è equivalente al trovare il numero di coppie di interi (x, y) sotto le condizioni:

$$0 < x \leq n/2$$
$$0 < y \leq n/2$$
$$n/2 \leq \ x + y < n$$



Queste condizioni possono essere interpretate geometricamente, considerando un sistema di coordinate nel quale definire le tre condizioni come rette. Le tre linee di equazione $x = n/2$, $y = n/2$ e $x + y = n/2$ formano il triangolo tratteggiato e le nostre diseguaglianze impongono che il punto (x, y) si trovi all'interno del triangolo o sul suo bordo, ma non può essere in uno dei vertici M, N o P. Dobbiamo quindi determinare il numero di punti aventi coordinate intere in questa regione: dobbiamo distinguere due casi, in funzione del fatto che n sia pari (caso *a*, per n=12) o dispari (caso *b*, per n=11).

Se *n è pari*, $n/2$ è un intero e abbiamo $n/2+1$ punti sul segmento *OM*, quindi il numero totale dei punti all'interno del quadrato *OMPN* risulta $(n/2+1)^2$. Di questi punti, $n/2+1$ si trovano sulla diagonale e quindi il numero dei punti alla destra della diagonale è pari a:

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{n}{2}+1\right)^2-\left(\frac{n}{2}+1\right)\right)=\frac{n(n+2)}{8}$$

Considerando anche i punti sulla diagonale, risultano:

$$\frac{n}{2}+1+\frac{n(n+2)}{8}$$

Ricordando che stiamo considerando anche i tre vertici, che dobbiamo sottrarre, in totale i punti risultano quindi, per il caso di *n* pari:

$$\frac{n}{2}-2+\frac{n(n+2)}{8}=\frac{(n-2)(n+8)}{8}.$$

Se *n è dispari*, *n*/2 non è un intero, e quindi i punti all'interno del quadrato *OMPN* formano un quadrato più piccolo *S*. Il numero dei punti su OM è:

$$1+\frac{(n-1)}{2}=\frac{(n+1)}{2}$$

e quindi *S* contiene $(n+1)^2/4$ punti.

Considerato che di questi $(n+1)/2$ sono sulla diagonale e che *i vertici M, N, P non hanno coordinate intere* e quindi questi tre punti non vanno sottratti, si ha:

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\left(\frac{n+1}{2}\right)\right).$$

8. Paraphernalia Mathematica

Rudy non fa che lamentarsi di Android Auto, associato alla sua macchina. Infatti, anche in ricarica continua, dopo sette-otto ore di viaggio il ciarlofono si ritrova completamente scarico. Il che non è bello visto che, se state *andando* da qualche parte, si presume sia quello il momento nel quale vi servono più informazioni.

Bene, a quanto pare, non è colpa di AA o di Quaspa (sarebbe la macchina di Rudy), ma di un ingegnere.

Posto che i più diversamente giovani tra noi vogliano capirne di più, il nostro consiglio è, per prima cosa, di recuperare gli occhiali: qui, anche i pedici hanno pedici...

8.1 La posizione dell'alluce sinistro

Se avete visto la promo del cane robot della U.S.Robotics[13], probabilmente vi ha colpito una cosa: il RoboBobi si muove guidato dal GPS ma, come ben sappiamo dalle nostre esperienze con un qualsiasi navigatore, la precisione è dell'ordine del metro; ma allora, come fa a muoversi così sicuro?

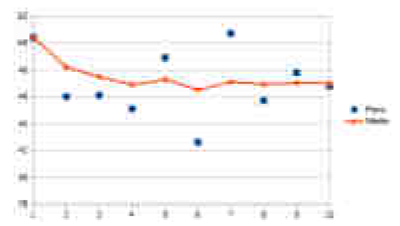
Come al solito, tutta colpa di un ungherese (naturalizzato americano): ***Rudolf Emil Kàlmàn***[14].

Per capire come funziona, cominciamo da un caso semplice: dovete misurare un peso con una bilancia imprecisa. La vostra inaffidabile bilancia vi ha comunicato, con una serie di pesate successive, i seguenti risultati:

Pesata	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Peso	50.4	46.0	46.1	45.1	48.9	42.6	50.7	45.7	47.8	46.8

Man mano che otteniamo le misure, possiamo aggiornare la nostra stima del peso "vero" del campione, calcolando la media (aritmetica) dall'inizio della serie sino al termine opportuno: se x_n è la nostra n-esima stima e z_n è l'n-esima misura corrispondente, avremo:

$$x_n = \frac{1}{n}\left(z_1 + z_2 + \ldots + z_n\right)$$



6 *Passin passetto….*

Qui di fianco, vediamo come la media (aritmetica) dei diversi pesi procede, punto per punto.

In pratica, ogni volta che registriamo un peso z_n, aggiorniamo la stima come:

$$x_n = \frac{1}{n}\left(z_1 + z_2 + \ldots + z_n\right) = \frac{1}{n}\left((n-1) * x_{n-1} + z_n\right) * x_n = x_{n-1} + \frac{1}{n}\left(z_n - x_{n-1}\right)$$

Questa espressione ci dice come ogni nuova misura influenzerà la nostra prossima stima del valore vero; in particolare, la nuova stima x_n viene ottenuta aggiungendo a x_{n-1} il termine:

$$\frac{1}{n}\left(z_n - x_{n-1}\right)$$

che è proporzionale alla differenza tra la nuova misura e la stima precedente. La costante di proporzionalità

$$K_n = \frac{1}{n}$$

è detta ***guadagno di Kalman***: il fatto che decresca con l'aggiunta di nuove misure significa, detto in soldoni, che più facciamo misure e più possiamo essere confidenti che la

[13] Sì, il nome è lo stesso. No, non potete permettervelo.

[14] Per quanto ne sappiamo, è nato nel maggio del 1930 ed è mancato nel luglio del 2016. Ma lasciamo volentieri i dettagli di questo tipo a Doc.

nostra stima x_n sia vicina al valore vero e che ogni nuova misura abbia un'influenza sempre minore sulla stima.

Cerchiamo di generalizzare il concetto, tornando al nostro GPS: data l'incertezza della posizione, ci si aspetta che la probabilità che il valore vero sia ***distribuita normalmente*** attorno a z_n con deviazione standard σ_{z_n}.

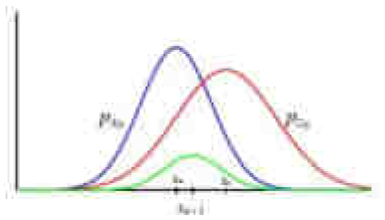
Se torniamo ai pesi, questo significa che possiamo stimare la nostra deviazione standard effettuando misure ripetute di un peso noto, e quindi la probabilità che valore vero sia vicino a z_n diventa:

$$p_{z_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{x_n}}} e^{-\frac{(z-z_n)^2}{2\sigma^2_{x_n}}}$$

Se, inoltre, supponiamo di avere anche delle stime dell'incertezza delle nostre stime x_n (anche queste distribuite normalmente), avremo:

$$p_{x_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{x_n}}} e^{-\frac{(x-x_n)^2}{2\sigma^2_{x_n}}}$$

...sorvoliamo, per il momento, su come sia possibile stimare σ_{z_n}.



7 *Anche se non sembra, è un'ottima idea...*

Le due distribuzioni sono quelle blu e rossa della figura qui di fianco.

L'idea di Kalman è stata di considerare il fatto che le due distribuzioni descrivono la posizione del valore vero che stiamo cercando, e possiamo combinarle assieme per ottenere una stima migliore del nostro valore; siccome le gaussiane si combinano ***moltiplicando*** tra di loro i valori, moltiplichiamo tra di loro le due espressioni sopra e, una volta normalizzato il risultato, otteniamo la curva in verde. Andando nel dettaglio dei calcoli (sappiamo che voi non li farete mai, quindi li svolgiamo con calma), si ha che il prodotto vale:

$$e^{-\frac{(x-x_n)^2}{2\sigma^2_{x_n}}} * e^{-\frac{(x-z_n)^2}{2\sigma^2_{z_n}}} = e^{-\frac{(x-x_n)^2}{2\sigma^2_{x_n}} - \frac{(x-z_n)^2}{2\sigma^2_{z_n}}}$$

Espandendo gli esponenti e ricombinando, otteniamo la nuova distribuzione normale:

dove:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{n+1}}} e^{-\frac{(x-x_{n+1})}{2\sigma^2_{x_{n+1}}}}$$

Che, come espressione, somiglia molto a quella che possiamo trovare aggiornando le nostre stime prendendo il valor medio delle misure fatte sino a quel momento; per confronto, vediamo che il guadagno di Kalman in questo caso vale:

$$x_{n+1} = \frac{\sigma^2_{z_n}}{\sigma^2_{x_n} + \sigma^2_{z_n}} x_n + \frac{\sigma^2_{z_n}}{\sigma^2_{x_n} + \sigma^2_{z_n}} z_n = x_n + \frac{\sigma^2_{x_n}}{\sigma^2_{x_n} + \sigma^2_{z_n}} (z_n - x_n)$$

Inoltre, l'aver moltiplicato tra di loro due gaussiane ci porta ad una nuova deviazione standard che, utilizzando la formula qui sopra, può essere espressa come:

$$K_n = \frac{\sigma^2_{x_n}}{\sigma^2_{x_n} + \sigma^2_{z_n}}$$

Con $0 < K_n < 1$.

Ora, nel caso sia $\sigma_{x_n} \ll \sigma_{z_n}$, ci fidiamo molto di più della nostra stima x_n che della nuova misura z_n, e quindi $K_{n+1}\approx 0$ e quindi $x_{n+1}\approx x_n$: ossia, una nuova misura ha scarsa influenza sulla nostra prossima stima.

Se, al contrario, $\sigma_{x_n} \gg \sigma_{z_n}$, ci fidiamo molto di più della nostra nuova misura z_n che della nostra stima x_n, e quindi $K_n\approx 1$ e quindi $x_{n+1}\approx z_n$.

Comunque, ***in entrambi i casi***, l'incertezza sulla nuova stima decresce, e quindi possiamo formalizzare i passaggi:

1. Inizializziamo la prima stima x_1 e l'incertezza σ_{x_1}: a scelta, possiamo utilizzare la prima misura o fare un'ipotesi scegliendo un'incertezza abbastanza grande.
2. Ogni volta che otteniamo una nuova misura z_n, aggiorniamo la stima x_{n+1} e l'incertezza come segue:
    a. Troviamo il guadagno di Kalman
    $$K_n = \frac{\sigma_{x_n}^2}{\sigma_{x_n}^2 + \sigma_{z_n}^2}$$
    b. Aggiorniamo la stima
    $$x_{n+1} = x_n + K_n(z_n - x_n)$$
    c. Aggiorniamo l'incertezza
    $$\sigma_{x_{n+1}}^2 = (1 - K_n)\sigma_{x_n}^2$$

Si noti che nell'ultimo passaggio, essendo $0 < 1 - K_n < 1$, l'incertezza continuerà a decrescere, rendendo il nostro algoritmo insensibile all'inizializzazione.

Bene, sin qui abbiamo spiegato la prima figura, e il motivo per il quale la linea rossa varia sempre meno; adesso, agitiamo un po' le acque, o meglio, facciamo muovere le cose. Supponiamo di avere un oggetto in movimento (verticale), con velocità variabile: a questo punto le gaussiane che dobbiamo considerare sono due, una relativa all'altezza e l'altra relativa alla velocità: in prima approssimazione (sicuramente valida per la prima misura) possiamo comunque definire queste grandezze come non correlate, il che ci porta ad un matrice di covarianza diagonalizzata: nelle misure successive, invece, ci sarà una correlazione.

Se, nel nostro esempio, supponiamo che l'altezza aumenti a velocità costante e la velocità resti costante, possiamo scrivere:

$$x_{n+1,n} = F_n x_n$$

dove

$$F_n = \begin{Vmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Logicamente, l'incertezza in uno stato $x_{n,n}$ si trasformerà in un'incertezza nello stato successivo e quindi la nostra matrice di covarianza diventa

$$P_{n+1,n} = F_n P_{n,n} F_n^T .$$

Il nostro algoritmo diventa allora:

1. Definiamo lo stato iniziale $x_{1,1}$ e la matrice di covarianza $P_{1,1}$
2. Man mano che otteniamo nuovi dati, ripetiamo i passi seguenti:
    a. Costruiamo lo stato estrapolato e la covarianza:
    $$x_{n+1,n} = F_n x_{n,n}$$
    $$P_{n+1,n} = F_n P_{n,n} F_n^T$$
    b. troviamo il guadagno di Kalman:
    $$K_n = P_{n+1,n}\left(P_{n+1,n} + R_{n+1}\right)^{-1}$$
    c. assembliamo (attraverso il guadagno di Kalman) lo stato previsto con lo stato misurato e aggiorniamo la matrice di covarianza:

$$x_{n+1,n+1} = x_{n+1,n} + K_n \left(z_n - x_{n+1,n} \right)$$
$$P_{n+1,n+1} = P_{n+1,n} - K_n P_{n+1,n}$$

...e, se applicate il tutto, la cosa non funziona. La nostra stima presenta un ritardo rispetto alla situazione reale, dovuta al fatto che non abbiamo considerato le variazioni di velocità, ossia le accelerazioni.

Alla cosa di solito si rimedia introducendo un'ulteriore matrice di covarianza nota come ***rumore di processo*** $\boldsymbol{Q_n}$, ottenendo quindi:

$$P_{n+1,n} = F_n P_{n,n} F_n^T + Q_n$$

il che "diminuisce la nostra confidenza" negli stati interpolati e dà un peso sufficiente alle nuove misure. In pratica, il sistema considera la velocità costante solo "tra un misura e l'altra": la cosa è verificabile (con cautela, in una strada deserta) frenando in modo piuttosto brusco, il vostro segnale GPS "va avanti" per poi tornare alla posizione corretta.

Quindi, quando vi ritrovate la batteria del telefono scarica, non prendetevela con il costruttore: tutta colpa di Kalman.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms