Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 279 – Aprile 2022 – Anno Ventiquattresimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM277 ha diffuso 3'356 copie e il 18/04/2022 per Google eravamo in 20'100 pagine.

Paulo Freire ha tutta la nostra invidia, anche se dobbiamo decidere il perché. Potrebbe essere la pazienza nel costruire un 600-celle e poi aspettare il Sole nella posizione "giusta". Potrebbe essere la decorazione del suo studio. Sicuramente, una volta tanto, le stampe di Escher passano in secondo piano.

1. D'in su la vetta della torre antica

"The bastards have never been bombed like they're going to be bombed this time."[1]

(Richard Nixon)

1 *Il panorama dalla Keangnam Landmark 72.*

L'ultimo piano è destinato alla funzione di belvedere, e per svolgere al meglio il suo compito istituzionale ha di vetro non solo le pareti, ma anche il pavimento. Da lassù, deve fare sensazione vedere il vuoto avendo anche l'impressione ottica di fluttuare nell'aria, senza neppure la consolazione di un solido, opaco e grigio pavimento di cemento a dare la certezza di essere ancora, in qualche modo, ancorati alla terra. Il panorama sfumerà lontano, quasi certamente confuso nella nebbia leggera all'orizzonte, perché a quelle latitudini e in quelle zone umide è rarissimo avere un cielo terso e secco come capita altrove. Laggiù, a est, a un centinaio di chilometri di distanza, c'è anche il mare: e chissà se qualche volta si riesce a vederlo da quassù, da questo pavimento di vetro più alto della punta della Torre Eiffel, a 320 metri dal suolo. Non dovrebbe essere difficile calcolare la distanza di quell'orizzonte umido, laggiù in fondo: ma forse non ne vale la pena, tanto vale lasciar correre gli occhi fin dove riescono ad arrivare, senza chiedersi se lo sguardo atterri finalmente davvero nelle acque del Mar Cinese Meridionale o si fermi prima, magari sui tetti altrettanto lontani del porto di Haiphong; o prima ancora, in quelle terre che abbiamo sempre continuato a immaginare bagnate dalle vasche fangose delle risaie, con donne e uomini curvi sulle piantine, con i piedi a bagno e i volti nascosti dai cappelli di paglia a forma di cono.

Forse per questo il grattacielo sembra sorprendente; alto e sorprendente. Alto lo è, certo; ma neanche in maniera così straordinaria: nella classifica degli edifici più alti del mondo si piazza solo al 112° posto, pur toccando i 328,6 metri di altezza. A ben vedere, non può neppure rivendicare il primato nazionale, perché un migliaio di chilometri a sud, nella città di Ho Chi Minh – quella che per tanto tempo abbiamo chiamato Saigon – svetta orgogliosa la guglia del Vincom Landmark 81, che penetra l'aria vietnamita ben più a fondo, arrivando ai 469,5 metri di altezza e sfiorando quasi la Top Ten dei dieci edifici più alti del mondo, piazzandosi in quindicesima posizione[2]. Sorprendente, invece, lo è forse solo per occhi occidentali e un po' anziani, come quelli di chi scrive.

[1] La facile traduzione suona "*I bastardi non sono mai stati bombardati come stanno per esserlo questa volta*", e la frase è stata pronunciata dal presidente americano Richard Nixon al suo capo dello staff della Casa Bianca Bob Haldeman e al Procuratore Generale John Mitchell il 4 Aprile 1972. Era un commento alla decisione di avviare l'Operazione Linebacker, un attacco di grandi dimensioni mirante a bloccare il porto di Haiphong, la costa nordvietnamita e a iniziare una violenta nuova campagna di bombardamenti nel Vietnam del Nord, segnando così una decisa escalation del conflitto.

[2] Se vi interessano le classifiche e i grattacieli, fate un salto su *ctbuh.org*, e troverete l'inimmaginabile. CTBUH sta per "Council on Tall Buildings and Urban Habitat", e il loro database è davvero completo. Ad esempio, potrete trovare conferma che il grattacielo più alto d'Italia (la Torre Unicredit, a Milano) è a malapena al 1195° posto in classifica; o che in Italia esistono solo otto edifici alti più di 150 metri. Tra questi, però, resiste gloriosa la Mole Antonelliana, che abita quella classifica dal 1889 e tiene ancora orgogliosamente la 4070ª posizione.

Ripensandoci, è un po' come quando si riesce capire il periodo di uscita di un film guardando il modo in cui i personaggi telefonano. È inevitabile notare se usano telefoni fissi o mobili, e classificare i vari modelli dell'uno e dell'altro genere: seguire ispettori americani che leggono SMS su vecchi Motorola, o riconoscere il modello elegante di un telefono da camera in una commedia romantica italiana degli anni Sessanta; o perdersi nel variare di modelli, e soprattutto di dimensioni, degli smartphone di questi anni. Forse, analogamente, le generazioni nate e cresciute dalla fine della Seconda Guerra Mondiale ad oggi sono in qualche modo classificabili, individuabili in funzione della guerra che sentono più "guerra". Certo è un esercizio per privilegiati, riservato alle generazioni senza guerra, fruibile solo da persone fortunate nate in paesi che la guerra non ha devastato negli anni che hanno vissuto (e anche in paesi abbastanza ricchi da consentire ai propri abitanti di avere la possibilità – e il tempo – di informarsi di quello che succede nelle altre parti del mondo).

Perché chi la guerra l'ha vissuta o la vive sulla propria pelle non ha possibilità di scelta: la guerra memorabile, anzi la guerra impossibile da dimenticare, sarà sempre e solo la sua guerra; perché lo stato di guerra è così violentemente totalizzante che cambia radicalmente ogni scala di valori, ogni valutazione d'esperienza, ogni filosofia di vita. Lo si legge ancora nei volti dei vecchi che la guerra ricordano, quando provano a raccontarla: dopo qualche tentativo aneddotico, qualche approccio narrativo, di solito distolgono lo sguardo, lo lasciano correre nel vuoto, e si limitano a dire "Tu non sai…", o "Tu non puoi capire". Ed è certo vero, non si può capire, non si possono capire le emozioni, le sensazioni, le rivoluzioni che modificano menti, corpi, persone. Non si può neppure oggi, quando fotografie, immagini e reportage arrivano nei nostri occhi e nei nostri orecchi: per quanto uno si sforzi di immedesimarsi, per quanto un animo possa essere dotato di empatia, il massimo che si riesce a provare è solo l'ombra di una nuvola, meno di niente al confronto dell'uragano che provano quelli che la guerra l'hanno vissuta o la stanno vivendo.

Neanche un approccio basato sul metodo scientifico aiuta granché alla comprensione, anzi. La biologia e tutte le scienze della vita non potranno fare altro che ricordare che, in fondo, *Homo sapiens* è pur sempre un animale biologicamente egoista, animato da sentimenti atavici naturali, e la natura è biologicamente impietosa. Senza il grandioso costrutto della cultura, senza la didattica delle emozioni, senza la complessa architettura creata per riconoscersi l'un altro parità di diritti, senza un sentimento di comune identità e senza la sublime invenzione della reciproca pietà, quel che rimane non è altro che il solito, banale e naturale istinto del forte che si nutre del debole, del potente che usa l'impotente per qualsivoglia suo capriccio. Le leggi naturali sono spietate, con buona pace di Rousseau, e tutto quanto di buono gli esseri umani sono riusciti a fare è un costrutto gigantesco ma estremamente fragile, in equilibrio instabile, e basta pochissimo perché crolli e cancelli ogni traccia di quella emozione che gli uomini – forse con inconsapevole ironia – sono soliti chiamare "umanità".

Esiste una teoria matematica che non ha certo l'intenzione di spiegare l'umana follia delle guerre, ma che è comunque abbastanza istruttiva in merito, e soprattutto che ha un nome splendidamente calzante: è la Teoria delle Catastrofi, formalizzata dal matematico francese René Thom[3]. È uno di quei casi in cui il termine matematico non è poi troppo distante da quello colloquiale: la catastrofe è essenzialmente un cambiamento di stato, rapido e drammatico, dal quale è poi assai difficile tornare indietro. Certo, in matematica è qualcosa che non chiama in causa il dolore o i sentimenti: come dice lo stesso Thom, persino il bordo di una nuvola in matematica è una catastrofe, perché segna la separazione netta tra due stati radicalmente diversi. Nella lingua che parliamo tutti i giorni, il termine "catastrofe" si porta appresso tutto un corredo di sensazioni negative, dolorose, tragiche: e in questo senso, nulla è probabilmente più catastrofico delle guerre.

[3] Su di lui, maggiori dettagli in "*Tutto sbagliato, tutto da rifare*", RM080, settembre 2005.

Soprattutto quando le guerre sono placidamente decise a tavolino; quando è evidente e palese che c'è qualcuno – a volte un popolo, una nazione, ma più spesso solo una ristretta élite e talvolta, nei casi peggiori, un singolo essere umano – che decide freddamente di varcare la soglia, di cambiare lo stato della situazione, spostando un virtuale interruttore dalla posizione di pace a quella di guerra. Ma la guerra non ha un accidente di virtuale. Il passaggio da uno stato all'altro è sempre cruciale, perché è implicito nella definizione che nei due stati vigono regole diverse: la Teoria delle Catastrofi richiede lo studio dei punti di singolarità, che sempre in matematica indicano punti particolari in cui le leggi che governano il resto della regione non valgono più, in tutto o in parte. La catastrofe accade quando da quei punti singolari si precipita in una regione sostanzialmente diversa, con leggi diverse.

Le regole della pace non valgono in tempo di guerra, mai. Per quanto sia saggio, giusto e meritevole cercare di impedire e perseguire i "crimini di guerra", si tratta quasi sempre di una battaglia perduta: nel migliore dei casi di una battaglia che può ottenere solo vittorie limitate, parziali, perché è tutta la guerra ad essere un crimine di guerra. Così, il vero crimine – ed è un crimine contro l'umanità, anzi contro tutto il pianeta – è quello che si compie quando premeditatamente si decide di scatenarla, la guerra. Poi, nei sempre troppo lunghi giorni che seguiranno, si succederanno atrocità varie e ripetute, da tutte le parti coinvolte. Poi si potrà discutere e concionare sulle cause scatenanti, sulle motivazioni, sulla colpevolezza e innocenza, palese e celata, di ogni parte in causa. L'esperienza insegna che quasi sempre le atrocità peggiori sono compiute da chi invade, da chi attacca per primo, da chi combatte in un territorio che non è il suo: ma anche senza chiamare in causa i precedenti storici, la responsabilità di chi decide di iniziare una guerra è sempre colossale, immane. E, soprattutto, imperdonabile.

La guerra che in questi giorni insanguina l'Ucraina potrà avere anche ragioni recondite, segrete, sconosciute; razionali geopolitici complessi, argomenti nascosti in dossier classificati: le guerre ce le hanno sempre. Le informazioni che ci giungono potranno essere viziate dalle diverse propagande, amplificate o ridotte, inventate o taciute: le propagande lo fanno sempre. Le nazioni implicate potranno avere governi buoni o pessimi, vicini o lontani dalle opinioni di ciascuno, ma anche le ideologie lasciano il tempo che trovano, quando i missili cadono sulle case; quando i militari si uccidono fra loro e massacrano civili, quando ridiventa concepibile, anzi normale il saccheggio, lo stupro, l'assassinio. In tutto questo marasma di tragiche incertezze, brilla una certezza assoluta: si sa benissimo chi questa la guerra l'ha voluta e decisa. Si sa incontrovertibilmente chi ha dato, in piena coscienza di sé, l'ordine fatale di inizio. Non è una grande consolazione, certo: ma in questo caso, quantomeno, sappiamo chi è il colpevole.

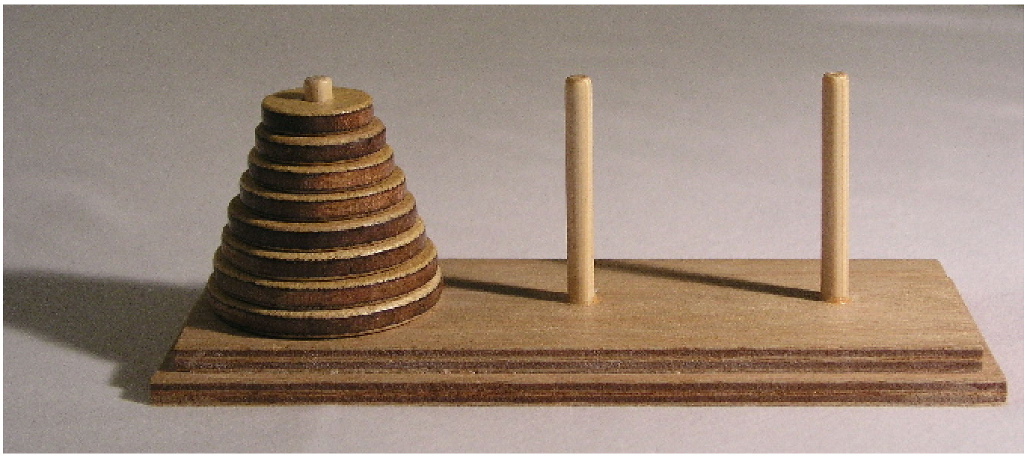
Non sempre è così chiaro. Cinquant'anni fa bisognava studiare, scavare un po' nel passato, per cercare di capire come fosse nata, cresciuta e conclusa la lunghissima guerra del Vietnam. Era presente come un basso continuo nei telegiornali, ma restava misteriosa e lontana: arrivavano immagini di marines americani coi lanciafiamme nella giungla indocinese, si sapeva di soldati nordvietnamiti capaci di diventare giungla essi stessi, si vociferava di villaggi di contadini bombardati, si controbatteva con notizie di soldati americani che saltavano sulle bombe nei bar di Saigon; era tutto complicato, a cominciare dalle parole. Con ogni probabilità, la maggior parte dei ragazzini che, con un po' di dileggio, oggi sono chiamati "boomer" hanno sentito il nome "Vietnam" solo accoppiato al sostantivo "guerra". Non che fosse difficile schierarsi, comunque: dopo poco, bastava chiedersi che cosa ci facessero gli americani in quelle terre, registrare che erano stranieri in terra straniera, armatissimi anche quando entravano nelle risaie abitate da contadine curve, per operare una scelta di campo. Al punto che la sacrosanta domanda "Ma che ci fanno lì?" riceveva solo risposte deboli e lunghe, necessariamente artificiose. Era assai più difficile risalire all'origine, all'inizio fatale di tutto, perché in quel caso l'inizio era confuso, lontano, complicato. E bisognava faticare ad orizzontarsi tra termini complicati e misteriosi: napalm, vietcong, sentiero di Ho-Chi Minh, Mỹ Lai, Dien Bien Phu, e cento altri. Come al solito, leggendo e informandosi le risposte alla fine venivano, ma non davano mai piena soddisfazione. C'era l'Indocina francese, prima; c'era il colonialismo europeo, prima ancora; c'erano le vestigia ottocentesche dell'uomo bianco occidentale che portava la civiltà, secondo qualcuno. E c'erano le rivendicazioni di un popolo, e finalmente le vittorie sul campo delle nazioni piccole e resistenti contro le grandi e stanche. E la Francia che se ne va, sconfitta; e l'America che invece arriva, forse spaventata dal comunismo che dilaga in Asia, e inizia i primi invii di soldati. E poi più soldati, sempre di più, e la guerra che era francese diventa pienamente americana, e l'America che si ritrova con la sua gioventù spaccata tra ventenni con elmetti, divise e lanciafiamme a bruciare villaggi e ventenni con megafoni, fiori e chitarre a bruciare cartoline precetto. Era difficile ricostruire tutta la storia, ma era facile schierarsi. Cionondimeno, le domande più profonde restavano senza risposta, come restano senza risposta anche quelle di oggi: tutte queste ragioni ideologiche, economiche, geopolitiche, come possono rendere gli uomini così facili prede dell'abominio? Come può ripetersi ogni volta il saccheggio, lo stupro, l'assassinio?

Poi, alla fine, le guerre passano, finiscono. Talvolta sull'onda di "gloriose" battaglie, più spesso per banale esaurimento delle forze. Poi, bisogna riabituarsi alla pace: ed è processo lungo, faticoso, spesso incompleto. E quasi mai tale da dare una risposta chiara, lucida, vera alla domanda finale: perché?

Forse, fra cinquant'anni, saranno tanti a chiedersi ancora perché la Russia abbia invaso l'Ucraina. Di certo, molti avranno risposte, e i libri di storia faranno del loro meglio per esporle. Di sicuro, molti dei ragazzi che mezzo secolo fa si interrogavano sulla guerra del Vietnam ancora non hanno separato, nelle loro teste, il nome del paese dal concetto di guerra. E probabilmente non sanno, e forse non gli interessa neppure, sapere come sia il Vietnam oggi. Saigon non si chiama più Saigon, ma Ho Chi Minh: nomi strani come Tonchino e Mekong vanno cercati negli atlanti e non più nei giornali. Hanoi è sempre la capitale, ma probabilmente irriconoscibile da come la si immaginava ai tempi della guerra. Deve essere impressionante guardarla attraverso quel pavimento trasparente dell'ultimo piano della Keangnam Landmark 72, la torre più alta della città. Ancora più impressionante sarebbe agli occhi d'un matematico che, probabilmente senza aver mai visto quella terra che per lui si chiamava Indocina Francese, una torre di Hanoi l'ha resa famosa.

2 *Édouard Lucas.*

François Édouard Anatole Lucas, che si farà sempre chiamare solamente Édouard, nasce ad Amiens il 4 Aprile 1842. La sua carriera di matematico è assai indicativa sia del suo carattere, sia delle sue passioni: nasce in una terra e in un periodo storico estremamente fertili per lo sviluppo della matematica più avanzata, "moderna" in molti sensi del termine, ma non è questa rivoluzione in atto ad attrarre le sue attenzioni e a convogliare le sue passioni. Non che non fosse in grado di seguire con competenza le scoperte della matematica del suo tempo: semplicemente, trovava più affascinanti l'aritmetica e la sua amata Teoria dei Numeri. Ha una formazione matematica di altissimo livello: si forma prima al Politecnico e poi alla Normale, le scuole che al tempo erano forse le più prestigiose del mondo, e che ancora oggi mantengono intatte la loro fama. Lucas ne esce preparato e ricco di competenze, se nel 1864, a soli ventidue anni, viene assunto come astronomo dall'Osservatorio di Parigi, a quel tempo governato da Le Verrier, lo scopritore di Nettuno. Certo, sono anni complicati, per la Francia: nel 1870 ci sarà la sconvolgente tempesta della guerra franco-prussiana, alla quale Lucas partecipa come ufficiale di artiglieria. Dopo la dura sconfitta dell'esercito francese e i mesi sanguinari della Comune di Parigi, Lucas si ritrova ad insegnare come professore al Liceo Saint Louis di Parigi.



3 *Una Torre di Hanoi (non la Keangnam Landmark 72, comunque).*

Continua la sua attività di ricercatore: scrive un libro sulla Teoria dei Numeri che, a detta di molti, è purtroppo assai ingiustamente trascurato al giorno d'oggi; si appassiona a quei quesiti che ormai, in questi tempi informatici, sono diventati territori di caccia soltanto per i computer, ad esempio, la ricerca di numeri abbondanti dispari. Come qualcuno ricorderà, un numero è definito abbondante se la somma dei divisori è maggiore del numero stesso; non è difficile trovare esempi di numeri abbondanti, e 12 è di solito quello che si usa come primo esempio (anche perché è il primo numero abbondante): sommando i suoi sei divisori (1, 2, 3, 4, 6) si ottiene 16, *abbondantemente* superiore al 12 stesso. La lista degli abbondanti non è povera né scarna: 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96, 100 (per limitarsi solo a quelli con due cifre) palesano come l'elenco sia anzi, a un tempo, dovizioso e curioso. La definizione di "abbondante" non intende affatto riservare la qualifica ai soli numeri pari, eppure i dispari sembrano brillare per la loro assenza nella lista. Assenza già nota ai Greci, che hanno dato la caccia agli abbondanti dispari per molto tempo, senza successo. Bisogna aspettare più di un millennio, fino al 1509, prima che Charles de Bouvelle si accorga che 45045 è abbondante pur essendo inequivocabilmente dispari. È difficile capire come abbia fatto Bouvelle ad incocciare in quel grande numero dispari che risolveva un'ambascia millenaria; comunque, era ancora chiaro a tutti che non era dimostrato che 45045 fosse il dispari più piccolo a meritarsi la qualifica di abbondante. Passano altri quattro secoli – la matematica non ha paura dei tempi lunghi – e finalmente arriva il nostro eroe, Édouard, che spiega al mondo che basta fermarsi a contare fino a 945, l'abbondante dispari più piccolo che c'è.

È sempre Lucas a scoprire il numero primo più grande trovato con il solo aiuto di carta e matita, senza l'ombra di un computer: è $2^{127}-1$. Più ancora della singola scoperta è il suo metodo di ricerca dei primi che è davvero notevole: anche i citati computer usano sostanzialmente il suo metodo, anche se riescono ad applicarlo in maniera elettronicamente più veloce. Non per niente, il numero di Lucas perse il primato di "numero primo più grande conosciuto" solo nel 1949, quando un certo John Von Neumann suggerì di far lavorare i primi calcolatori elettronici applicando il metodo di Lucas, e questi tirarono fuori $2^{521}-1$.

Dal punto di vista strettamente professionale, la vera passione di Lucas era quella che coltivava verso un italiano: quel *bigollo* di Leonardo da Pisa, meglio noto come Fibonacci. Non c'è quasi più persona che non conosca la serie di Fibonacci e la sua parentela con i conigli; a Torino, poi, per non conoscerla occorre davvero impegnarsi a fondo, visto che svetta, rossa e orgogliosa, sulla cupola della Mole Antonelliana. Assai meno noto è che la "serie[4] di Fibonacci" non è stata chiamata così dallo stesso autore pisano (che probabilmente era anche modesto), ma proprio da Lucas, che la studiò davvero a fondo, e la generalizzò, al punto che la serie sorella che inizia con 1 e 3 (1, 3, 4, 7, 11, 18, …) prende oggi il nome di "serie di Lucas".

L'altra passione di Lucas, forse ancora più forte, potrebbe sembrare meno professionale (ma non tanto), ma è quella che ce lo rende ancora più simpatico. Non che ne abbia bisogno, in realtà: basta guardare la sua faccia nelle rare fotografie, per capire che doveva essere davvero una sagoma, quel giovanottone di Amiens. Ma basta vedere gli argomenti che stimolavano il suo interesse, per capire che a Lucas piaceva giocare: a ribadire il concetto, ci pensa lui stesso, scrivendo un'opera in ben quattro volumi dedicata ai giochi matematici. La chiama "*Recréations Mathématiques*" e sono un ricco compendio di divertimenti matematici noti ai suoi tempi, in parte raccolti da trascurate opere precedenti – come quella di Gaston de Bachet – e in parte composti da Lucas stesso. Vi si trovano esposti, analizzati e generalizzati problemi di origine popolare, come quello degli attraversamenti in barca[5]; ma anche innumerevoli problemi ormai classici, come il posizionamento di otto regine sulla scacchiera in modo che nessuna attacchi le altre, o le strategie per sopravvivere quando si finisce dentro un labirinto, o i molti segreti di quella che ancora oggi molte persone chiamano "matematica dell'orologio", insomma l'aritmetica modulare. E poi giochi basati sulla notazione binaria (davvero poco nota al grande pubblico ai suoi tempi), sui numeri poligonali, e una pletora di segreti sui calcolatori meccanici.

È proprio nelle sue *Recréations* che Lucas presenta il suo gioco più famoso: la Torre di Hanoi. Tre pioli e un certo numero di dischi impilabili, tutti di dimensioni diverse: si parte da una pila ben ordinata di dischi su uno dei pioli, con il disco più grande in fondo, e bisogna trasferirla su un altro piolo, tenendo conto che non si può mai appoggiare un disco più grande su un disco più piccolo. Lucas la presenta come fosse inventata dal professore "N. Claus (de Siam)", insegnante al collegio "Li-Sou-Stian", e non ci vuole molto a capire che nel fantasioso nome del professore si nasconde "Lucas d'Amiens", e in quello del collegio quello del liceo di "Saint Louis" dove Lucas insegnava. Messo in commercio come gioco in legno, la Torre di Hanoi ha avuto un successo che dura ancora oggi, anche se certo non arricchì l'inventore, che non fu mai particolarmente benestante.


4 *Keangnam Landmark 72 e le sue due ancelle.*

E non fu neppure particolarmente fortunato: scomparve troppo presto, in maniere improvvisa e del tutto imprevista. Non aveva ancora cinquant'anni quando, durante un banchetto, fu accidentalmente colpito alla guancia dalla scheggia di un piatto che era caduto a terra. La ferita gli causò un'erisipela, un'infezione batterica della pelle, che lo stroncò nel giro di pochi giorni.

[4] Qualche purista sosterrà che sia più corretto parlare di "successione" e non di "serie", e probabilmente ha ragione. Ma le abitudini sono dure a morire, al punto che siamo soliti ancora scrivere, ad esempio, che due triangoli sono "uguali" anziché "congruenti". Tutte cose sbagliate, lo sappiamo… ma ci appelliamo alla clemenza della corte.

[5] Nella versione più nota e facile, è quello che ha dato origine al modo di dire "salvare capra e cavoli", con il contadino che deve attraversare un fiume portando in barca solo uno tra cavolo, capra e lupo, ed evitando che nessuno dei tre diventi la cena di un altro. Nella versione più complicata, ci sono un certo numero di coppie di sposi i cui mariti sono tutti più gelosi di Otello. Provate a far attraversare il fiume a quattro coppie facendo in modo che una signora non rimanga mai sola con altri uomini diversi dal marito, e ne riparliamo.

Di lui ci rimane il ricordo, e la sensazione che fosse un signore amabile e simpatico. Ci rimane l'insegnamento, profondo e importante, che la matematica può davvero essere allo stesso tempo profonda e divertente. E non può non venirci in mente il suo nome, guardando le foto di quell'altissimo grattacielo nella capitale vietnamita: ed è quasi inevitabile pensare alle due torri di Hanoi, quella di vetro e cemento e quella di Lucas. È certamente un caso che la grande Keangnam Landmark 72 abbia a fianco due altri grattacieli gemelli, più piccoli e scarni, proprio come la Torre di Hanoi di Lucas ha sempre due pioli di servizio vicino alla pila di dischi. Non fosse un caso, sarebbe certamente il più grande monumento dedicato a un matematico – o quantomeno a un gioco matematico – del pianeta Terra. E viene subito voglia di calcolare quante mosse occorrano per completare il gioco: sappiamo che la torre ha 72 piani; quindi, ci serve un modellino con 72 dischi. Allora, vediamo…

2. imelborP

...una volta si diceva: "Rudy, guarda che hai messo il nastro della macchina da scrivere al contrario". Tranquilli. È che i problemi sicuramente li conoscete già, ma qui li affrontiamo "al contrario".

2.1 Andirivieni di cammelli quantistici

Allora, il primo vecchio problema era che un uomo lascia in eredità ai tre figli 13 cammelli, chiedendo che vengano suddivisi come metà al più anziano, un terzo al mediano e un quarto al gioviano (sì, insomma, al più giovane). Non essendo possibile convincere i cammelli a lasciarsi frazionare, decidono di rivolgersi alla persona più saggia del villaggio[6]; questa, risolve il problema con soddisfazione di tutti.

Il secondo problema ha esattamente la stessa ambientazione, ma cambiano i numeri: abbiamo 17 cammelli, e metà va sempre al più anziano, un terzo sempre al mediano e l'ultimo riceve un nono (mai fidarsi, dei gioviani, e il compianto padre probabilmente lo sapeva). Anche qui, la saggezza risolve brillantemente il problema.

In entrambi i casi, la soluzione come sapete ("*As you surely know, my dear Watson*") è che la *dea ex machina* presta uno dei propri cammelli, effettua la divisione (senza affettare cammelli) e, avanzando un cammello (...guarda caso, il più bello della mandria) se lo riprende e lo riporta a casa.

Insomma, abbiamo k figli, ciascuno dei quali riceve $1/a$, $1/b$, eccetera di una mandria di z cammelli. Arriva la signorina[7] e, prestando w cammelli, risolve il problema riportandosi a casa i propri.

Ma secondo voi, presumendo l'alfabeto infinito, per quali numeri il problema "vale"?

No, non ne abbiamo la più pallida idea. Ve l'avevamo detto, che era un'esplorazione.

2.2 "Giuseppi", Francesi, Inglesi, Turchi e Cristiani

"Giuseppi" nel senso di Josephus Flavius, anzi alcuni. Anche qui, il problema lo conoscete, visto che lo ha scopiazzato anche Loyd nella "Cyclopedia of Puzzles" (con maschietti e femminucce, ma resta la solita cosa); ne abbiamo, di recente, trovato una versione piuttosto interessante, che ci permette di evitare, questa volta, di raccontarvi il problema. Diamo per scontato sappiate che ai francesi stanno antipatici gli inglesi, agli inglesi stanno antipatici i francesi e ai pirati stanno antipatici entrambi.

I pirati hanno catturato cinque marinai inglesi e cinque francesi: vengono messi in cerchio, secondo quest'ordine: FIFIIFIFIF (metteteli in cerchio: su, non è difficile, sapete dividere il cerchio in dieci parti, sì?).

Il Capitano dei Pirati statuisce che si partirà dalla posizione a (la prima "F" vale 1, come posizione), e verranno contati b marinai: il b-esimo verrà escluso dal gioco, e si ricomincerà la conta dal successivo; tutto questo sin quando non saranno rimasti cinque marinai, che verranno gettati agli squali.

Per rendere la cosa un filino più crudele, voi siete stati messi in mezzo al cerchio e dovete decidere i valori di a e b.

Étant vous français, vous voulez sauver vos compatriotes: quels valeurs vous choisis?

Beh, la seconda domanda è evidente[8]:

Being English, you want to save only your compatriotes: which values do you choose?

---

[6] È interessante notare che, nonostante un certo qual maschilismo imperante in molte culture islamiche nelle quali è solitamente ambientato il problema, in questo caso la persona interpellata sia di solito una "vecchia e saggia donna" del villaggio. Volendo restare sul politicamente corretto, se ritenete che il dato sia fondamentale per la risoluzione del problema, potete definire il personaggio in oggetto come "la donna più diversamente giovane del villaggio".

[7] Una che usa trucchi del genere in una comunità islamica non troverà mai marito. Quindi, "signorina". E con questo commento ci siamo giocati il "politicamente corretto".

[8] Se avete compreso la prima. Si tratta di immaginarsi francesi (e poi inglesi) e di voler salvare solo compatrioti.

Ignorate per favore il fatto che, data la sua abituale alimentazione, se buttate un inglese tra gli squali ci spiace per gli squali.

Oh, e se non fossero dieci? E per altre disposizioni? Anche qui, non fate domande. Esplorate!

3. Bungee Jumpers

Ad ogni sequenza consistente di n zeri e n uno viene assegnato un numero pari al numero delle più lunghe sequenze formate ognuna dalla stessa cifra: ad esempio, il numero 001110011 ha 4 segmenti di questo tipo: 00, 111, 00, 1. Per ogni valore di n, tutti i numeri assegnati alle rispettive sequenze vengono sommati.

Determinare il valore della somma in funzione del valore di n.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Aprile!

Presto, che è tardi…

4.1 [278]

4.1.1 Parliamo tanto di me

Questo problema è stato regalato a Rudy, e lo ri-regaliamo a voi nella nuova versione che ci ha inviato ***Bruno***:

> *Il signor Sgurtz gestisce dal febbraio* 1999 *un rinomato agriturismo a* 696 *metri s.l.m. sulle assolate colline piemontesi celebri per il Pichetta, vino aspro ma genuino.*
>
> *Adesso vuole incrementare l'attrattiva della sua attività utilizzando i* 100 *ettari di un campo quadrato incolto a* 985 *metri di quota per costruire, in un angolo del terreno, un recinto triangolare per i suoi* $\aleph_0$ *cavalli di razza Epsilon, una razza nana a basso rischio di estinzione. Per permettere ai cavalli di correre liberamente, il triangolo ideale è quello isoscele più grande possibile.*
>
> *Per delimitare l'area sui tre lati decide di montare una staccionata usando i moduli prefabbricati di quercia che l'OAKea vende online sul portale WoodWideWeb (www.www.com/oakea); questi sono lunghi esattamente un metro e si raccordano l'un l'altro con delle cerniere senza modificarne la lunghezza, seguendo (se si riesce!) le classiche istruzioni di montaggio.*
>
> *Ragionando razionalmente nel tentativo di calcolare il numero di moduli da ordinare, presto il Sig. Sgurtz si rende conto che non può costruire il recinto ideale.*
>
> *Costretto ad accontentarsi della forma che meno si discosta da quella ideale, stabilisce che il triangolo deve avvicinarsi il più possibile a quello isoscele e, secondariamente, che deve essere il più grande che si può costruire su quel terreno.*
>
> *Non riuscendo a calcolare il numero di moduli necessari, il Sig. Sgurtz chiede aiuto al professor Wolf, un celebre matematico di Los Angeles (ma tarantino di origine da parte del bisnonno Nero) che sta trascorrendo una rilassante vacanza nell'agriturismo con Miss Pell, la sua fidanzata e assistente alla PULP University.*
>
> *Gentilmente il professore e la fidanzata determinano il numero di moduli da comprare; anche se, fanno notare, basta un recinto molto più piccolo per permettere ai cavalli di correre liberamente.*
>
> *Il Sig. Sgurtz li ringrazia stappando una bottiglia di Pichetta barrique serie* 697 *del* 1994*; poi, abusando della disponibilità della coppia, spiega loro che vorrebbe anche ricavare, all'interno della staccionata, un piccolo cavalloporto (con mangiatoia e abbeveratoio) da delimitare ancora con i moduli OAKea; per ragioni estetiche anche*

questa zona deve essere un triangolo rettangolo e per non disorientare i cavalli Epsilon, che notoriamente non sono molto acuti, deve essere simile al recinto.

Dopo una breve riflessione rispetto al punto della questione, stimata la misura di Lebesgue della faccia dell'interlocutore e stabilito che la densità è quella del bronzo, il solitamente inappuntabile Prof. Wolf perde la pazienza e sbotta: «OAKay, risolvo problemi, ma non può chiedermi l'impossibile!!»

a) Perché il recinto isoscele non è realizzabile?

b) Quanti moduli deve ordinare il signor Sgurtz?

c) Perché l'ultima richiesta del Sig. Sgurtz non può essere esaudita?

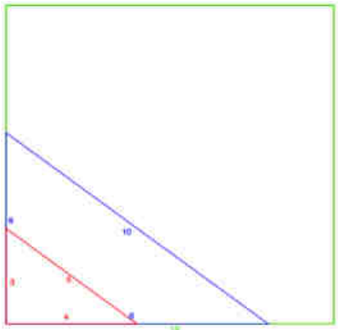
d) Se i moduli hanno lunghezza p/q metri, è possibile costruire il recinto isoscele o il cavalloporto per qualche coppia $(p, q) \in (N - \{0\})^2$*?*

e) In generale, se $p \in N-\{0\}$, $q \in N-\{0\}$, $L \in R^+$*, quanti sono i moduli lunghi p/q metri da ordinare se il lato del terreno è di L metri?*

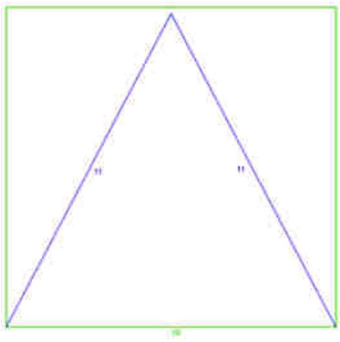
f) Quali sono le dimensioni medie dei cavalli Epsilon? E quanto spazio libero hanno per muoversi nel recinto?

Prima di dirvi di più di ***Bruno***, vediamo che cosa ci ha scritto ***Valter***:

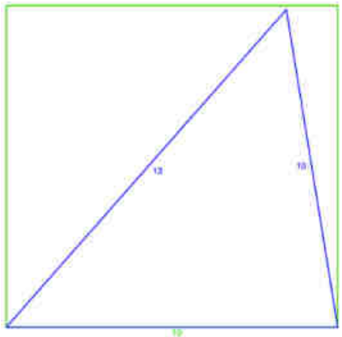
Poche sciocchezze e qualche disegno perché non ho combinato molto; servisse da spunto.
Se: "… in un angolo del terreno", si intende due lati che si incontrano in un vertice:
- il triangolo dovrebbe essere di tipo isoscele rettangolo
- l'ipotenusa varrebbe: √2 moltiplicato per uno dei cateti
- tale lunghezza è, comunque, sempre un numero irrazionale
- la staccionata non si può montare con moduli da un metro
- il triangolo che meno si discosta dall'isoscele è 10-8-6
- quindi i lati del cavalloporto possono valere solo 5-4-3
- numero moduli da un metro da comprare sono 10+8+6+5 = 29.



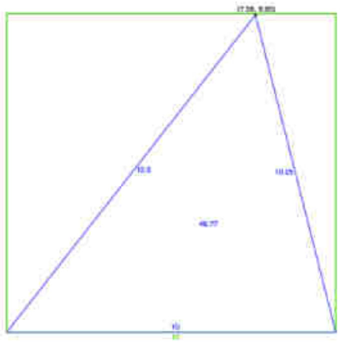
Se si intende uno dei lati del campo quadrato di 100 ettari:
- pure così però il recito ideale non può essere costruito
- il triangolo isoscele più grande possibile ha lati 10-11
- sono numeri coprimi, non si può usare moduli da un metro
- poiché i lati del cavalloporto non possono essere interi.



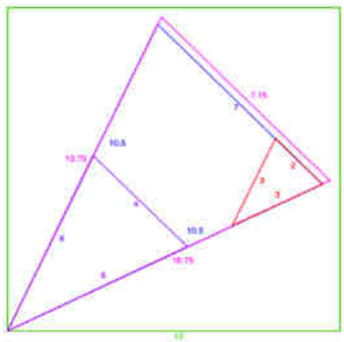
- come richiesto propongo, a mio parere, il triangolo che:
-- deve discostarsi, il meno possibile, da quello isoscele
-- deve essere più grande che si può costruire sul terreno
-- ha un’area di 49.4 metri quadrati e 33 moduli da un mt.
-- vedo ora che è isoscele; riprova della mia sbadataggine



Ora il più grande per moduli di p/q metri, che ho trovato
- p/q vale 1/4=0.25, i moduli necessari sono 50+41+40=131
- la sua area è, circa, un po’ più di 49.77 metri quadrati
- con i moduli però, non si può costruire il cavalloporto

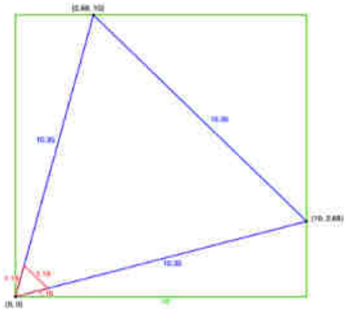


Tratto ora di costruzioni con triangoli isosceli:
- centrati su di una diagonale del campo quadrato
- con stesso vertice del campo, nei 2 lati uguali
- per moduli di lunghezza p/q metri; {p, q}∈ℕ, q≠0
- parto con un disegno che mi serve per spiegare:

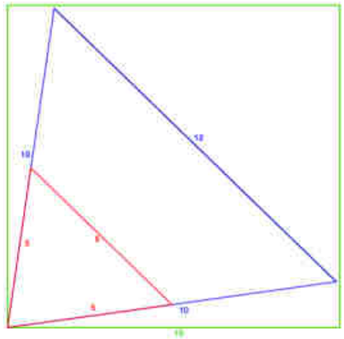


- il rapporto fra i due lati uguali e il restante è di 3/2
- il viola si costruisce con 8 moduli di lunghezza 2 metri
- il blu sempre con 8 moduli ma questa volta lunghi 3.5 mt
- infine il fucsia con 8 moduli di 143/40 = 3+23/40 metri
- così, riesco avvicinarmi sempre più al massimo possibile
- non lo ottengo perché, i due lati, sarebbero irrazionali
- si possono però sempre avere dei moduli lunghi *p/q* metri
- il recinto 7-10.5 e cavalloporto, si fa con 9 moduli 3.5

Ho riscontrato in rete che un triangolo isoscele deve avere "*almeno*" due lati uguali. Ho, perciò, dedotto che, i triangoli equilateri, sono considerati triangoli isosceli. Ho cercato di costruire il triangolo equilatero più grande possibile, per tale campo. Dall'equazione $2x^2 = (10-x)^2 + 10^2$, si ricava che x vale $10(\sqrt{3} - 1)$ cioè circa 7.320. $\sqrt{(2x^2)} = 10.35276$ è il lato di tale triangolo; risulta, però, purtroppo, irrazionale. Con lato 10.35, invece, riesco a farcelo stare; se p/q è 23/20 ci vogliono 28 moduli.



Infine, il più grande triangolo isoscele che, con queste condizioni, ho costruito. La sua area è di 48 metri quadrati e i moduli necessari da un metro, risultano 38.



Che ne dite? Tantissimi disegni, che fanno sempre bene per la comprensione e per la nostra linotype. ***Bruno***, dicevamo, non ha solo mandato una versione rivista e ampliata del problema, ma anche la soluzione che leggerete qui di seguito:

Il terreno quadrato ha area $100\,\text{ettari} = 100 \cdot 10^4\,\text{m}^2 = 10^6\,\text{m}^2$ e quindi il lato è **L=1000 m**.

Il recinto è da costruire in un angolo del campo quadrato, dunque **il triangolo è rettangolo**; se a e b sono i cateti e c è l'ipotenusa, la relazione fra essi è quella di Pitagora $a^2 + b^2 = c^2$.

Dato che i moduli, non modificabili, sono di 1m e si congiungono perfettamente, il triangolo deve avere i **lati di misura intera** espressa in metri; possiamo escludere i lati di misura nulla che darebbero un recinto di area nulla, assolutamente inutile; allora $a, b, c \in \mathbb{N} - \{0\}$ e la terna (a, b, c) è una **terna pitagorica** non banale.

Cominciamo con le risposte facili:

a) se il triangolo è isoscele, allora $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow 2a^2 = c^2 \Leftrightarrow 2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{c}{a}$

; ma la radice quadrata di 2 è irrazionale e dunque nessuna coppia (a, c) di interi risolve l'equazione, perciò nessun recinto isoscele e rettangolo può essere costruito … razionalmente!

d1) Non cambia nulla se i moduli hanno lunghezza p/q metri perché i lati devono essere comunque costituiti da un **numero intero di moduli**; anche così il triangolo isoscele non si può costruire. La prima parte della domanda d è solo fumo negli occhi.

Vediamo la parte interessante (e difficile, senza le giuste conoscenze).

b,e) la condizione che il triangolo sia il più vicino possibile a quello isoscele impone che i cateti differiscano il meno possibile, dunque b=a+1; così la terna pitagorica deve soddisfare l'equazione $a^2+(a+1)^2=c^2$ con a massimo che soddisfa il vincolo $a+1\le L$ perché il triangolo deve essere il più grande contenuto nel quadrato di lato L; i moduli necessari sono a+b+c, perimetro del triangolo.

Per tentativi (magari aiutandosi con un foglio di calcolo o qualche linea di codice di un qualsiasi linguaggio di programmazione) si trova che a=696, c=985 e b=697; i moduli da ordinare sono quindi 2p=a+b+c=**2378**.

Questo risponde alla domanda b, ma non alla e perché lì si chiede di esprimere il perimetro in funzione di L e di p/q.

Facciamo qualche calcolo:

$$a^2+(a+1)^2=c^2 \Leftrightarrow 2a^2+2a+1=c^2 \Leftrightarrow 4a^2+4a+2=2c^2 \Leftrightarrow (2a+1)^2+1=2c^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2a+1)^2-2c^2=-1$$

L'equazione da risolvere è dunque l'**equazione di Pell** $x^2-Ny^2=-1$ con x=2a+1, y=c e N=2.

Qui sta tutta la difficoltà: le equazioni di Pell sono quelle del tipo $x^2-Ny^2=1$ o $x^2-Ny^2=-1$ con N numero naturale non quadrato perfetto, da risolvere negli interi. La storia è lunga più di un millennio e ci hanno lavorato in tanti, anche il più grande di tutti: Eulero.

Per farla breve, la difficoltà principale consiste nello stabilire se esistono soluzioni e nel trovare la soluzione (x_0,y_0) più piccola (nel senso che minimizza $x+\sqrt{N}y$) perché, una volta nota questa, esistono formule ricorsive e formule esplicite per trovare tutte le altre soluzioni. Per risolvere il problema bisogna conoscerle queste formule … o ricavarle dall'*identità di Brahmagupta*…

Se (x_0,y_0) è la soluzione minima, le formule esplicite per l'n-esima soluzione (x_n,y_n) dell'equazione $x^2-Ny^2=-1$ sono

$$\begin{cases} x_n=\frac{1}{2}\left[\left(x_0+\sqrt{N}y_0\right)^{2n+1}+\left(x_0-\sqrt{N}y_0\right)^{2n+1}\right] \\ y_n=\frac{1}{2\sqrt{N}}\left[\left(x_0+\sqrt{N}y_0\right)^{2n+1}-\left(x_0-\sqrt{N}y_0\right)^{2n+1}\right] \end{cases} \quad \forall n\in N$$

Nel nostro caso N=2 la più piccola soluzione è, ovviamente, $x_0=y_0=1$, così

$$\begin{cases} x_n=\frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right] \\ y_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right] \end{cases} \quad \forall n\in N$$

Con x=2a+1, b=a+1, c=y si trova

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right] - \frac{1}{2} \\ b_n = \frac{1}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right] + \frac{1}{2} \\ c_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right] \end{cases}$$

e, facendo un po' di calcoli,

$$2p_n = a_n + b_n + c_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(3-2\sqrt{2}\right)^{n+1}\right]$$

con $n \in N - \{0\}$ perché non può essere a=0.

Le prime quaterne $(a_n, b_n, c_n, 2p_n)$ sono (3, 4, 5, 12), (20, 21, 29, 70), (119, 120, 169, 408), …

<u>Osservazione</u>: $\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}$ e $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1}$ divergono esponenzialmente mentre $\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}$ e $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{n+1}$ convergono esponenzialmente e zero, perciò per n grande (in realtà già per n=1) si può semplificare il calcolo trascurando i termini convergenti e arrotondando all'intero il risultato.

Resta da determinare la soluzione che massimizza b_n con la condizione $b_n \le L$, dove $L \ge 4$ perché $b_n \ge b_1 + 1 \ge 3 + 1 = 4$; per determinare n bisogna risolvere una disequazione esponenziale e prendere la maggiore soluzione intera:

$$b_n \le L \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right] + \frac{1}{2} \le L \Leftrightarrow \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1} + \left(-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^{2n+1} \le 2(2L-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1} - \frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}} \le 2(2L-1) \Leftrightarrow \left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right]^2 - 2(2L-1)\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1} - 1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2(2L-1)z - 1 \le 0 \Leftrightarrow 2L-1-\sqrt{(2L-1)^2+1} \le z \le 2L-1+\sqrt{(2L-1)^2+1}$$

ma $z = \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}$ è positivo e $2L-1-\sqrt{(2L-1)^2+1}$ è negativo, allora

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1} \le 2L-1+\sqrt{(2L-1)^2+1} \Leftrightarrow 2n+1 \le \log_{1+\sqrt{2}}\left(2L-1+\sqrt{(2L-1)^2+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n+1 \le \frac{\ln\left(2L-1+\sqrt{(2L-1)^2+1}\right)}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \Leftrightarrow n \le \frac{\ln\left(2L-1+\sqrt{(2L-1)^2+1}\right)}{2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

Il massimo intero che soddisfa la condizione è

$$n = \mathrm{int}\left[\frac{\ln\left(2L-1+\sqrt{(2L-1)^2+1}\right)}{2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} - \frac{1}{2}\right]$$ dove int[…] è la parte intera di […]

Quando L=1000 metri viene n=4 e, sostituendo nelle formule precedenti, $a_4=696$, $b_4=697$, $c_4=985$ e $\mathbf{2p_4=2378}$. Questo risponde alla domanda b.

Per $L \ge 4$ generico il numero di moduli da ordinare è

$$2p_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(3-2\sqrt{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$\text{con } n+1=\text{int}\left[\frac{\ln\left(2L-1+\sqrt{(2L-1)^2+1}\right)}{2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{2}\right]$$

Quando $L \geq 5$ ci sono termini trascurabili e valgono le formule

$$2p_n=\text{int}\left[\frac{\left(4+3\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n}{4}\right] \quad \text{con } n=\text{int}\left[\frac{\ln\sqrt{(4L-2)\left(\sqrt{2}-1\right)}}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\right]$$

La risposta alla domanda e è data dalle stesse formule con $L'=\frac{q}{p}L$ metri al posto di L, esprimendo quindi le lunghezze in unità *p/q* metri; in questo caso a_n , b_n , c_n e $2p_n$ rappresentano solo il numero di pezzi e non più di metri.

<u>Osservazione</u>: si potrebbe pensare che le note formule per generare tutte le terne pitagoriche evitino le difficoltà dell'equazione di Pell, ma non è cosi, anzi complicano le cose:

le formule $a=k\left(h^2-m^2\right), b=2khm \text{ e } c=k\left(h^2+m^2\right)$ con $k,h,m\in N$ e $0\leq m\leq h$ generano tutte le terne pitagoriche, banali quando khm=0, primitive quando k=1, MCD(h,m)=1 e h+m dispari (attenzione: le formule non ci dicono a priori quale fra a e b è maggiore);

allora la condizione $a,b\geq 1\wedge |a-b|=1$ si traduce in

$$h>m\geq 1\wedge k\geq 1\wedge k\left|h^2-m^2-2hm\right|=1\Leftrightarrow h>m\geq 1\wedge k=1\wedge\left|(h-m)^2-2m^2\right|=1$$

si tratta quindi di risolvere ben 2 equazioni di Pell:

$$x^2-2y^2=1\vee x^2-2y^2=-1 \text{ con x=h–m e y=m;}$$

è vero che esistono formule esplicite per le soluzioni (h_n, m_n) di entrambe e che si riducono a un unico set di due formule (una per h_n e l'altra per m_n), ma poi bisogna scrivere quelle di

$$a_n=h_n^2-m_n^2=\left(x_n+2y_n\right)x_n,\ b_n=2h_nm_n=2\left(x_n+y_n\right)y_n,$$
$$c_n=h_n^2+m_n^2=\left(x_n+y_n\right)^2+y_n^2 \text{ e } 2p_n=a_n+b_n+c_n=2x_n^2+4y_n^2+6x_ny_n$$

Insomma, un lavoraccio … che però porta alle stesse formule ricavate prima (provare per credere!).

c) Correttamente il Prof. Wolf dice che è impossibile costruire un *cavalloporto* simile al recinto perché i lati corrispondenti dei due triangoli a_n, $b_n=a_n+1$, c_n (recinto) e A, B, C (*cavalloporto*) dovrebbero essere direttamente proporzionali, dunque

$$\frac{B}{b_n}=\frac{A}{a_n}\Leftrightarrow B=\frac{b_n}{a_n}A\Leftrightarrow B=\frac{a_n+1}{a_n}A$$

ma così le lunghezze dei lati del secondo triangolo non sarebbero tutte intere perché $\frac{a_n+1}{a_n}$ non è intero.

E la conclusione è la stessa se il *cavalloporto* potesse essere più grande del recinto; solo un *cavalloporto* congruente al recinto sarebbe possibile. E questo è vero indipendentemente dal lato L del terreno.

Detto in termini più tecnici, tutte le terne pitagoriche (a, a+1, c) sono *primitive*.

d2) Quanto stabilito risponde anche alla seconda parte della domanda d: la lunghezza p/q metri serve solo a confondere le idee, perché quello che conta è il numero (intero) di pezzi che servono per recintare le aree; dunque, di nuovo, il problema del *cavalloporto* è impossibile. Persino per il Prof. Wolf!

f) Considerando l'impenetrabilità dei corpi e sapendo che l'insieme dei cavalli del Sig. Sgurtz è numerabile $(\aleph_0)$, se i cavalli avessero volume medio non nullo, ce ne sarebbe una quantità numerabile con volume positivo e, a causa del postulato di Archimede, questa quantità avrebbe bisogno di un recinto illimitato per essere contenuta tutta; quindi quelli della razza *Epsilon* devono essere tutti **cavalli puntiformi**. Come ci ha insegnato Cantor, i punti del recinto hanno la potenza del continuo (c) e $c - \aleph_0 = c$, così i cavalli sono liberi di muoversi in un'infinità c di punti. In termini più tecnici, i cavalli occupano un insieme di punti che ha misura di Lebesgue nulla e lasciano libera tutta l'area del recinto.

Insomma, i cavalli del Sig. Sgurtz sono infiniti, ma sono puntiformi e possono muoversi con estrema libertà nel recinto. Ma la stessa libertà l'avrebbero in un qualsiasi recinto di misura di Lebesgue ε>0 piccola a piacere. Allora perché disturbare il suscettibile Prof. Wolf?

Comunque speriamo che i cavalli *Epsilon* non abbiano bisogno di nutrirsi, altrimenti sarebbe un disastro ecologico! In ogni caso i cavalli non sarebbe un gran bel vedere …

Con cotanti regali ed il Capo in brodo di giuggiole a malapena mascherato dal fumo (certo, pipate di St. Bruno), non possiamo far altro che smettere di immaginare di che cosa potrebbero nutrirsi cavalli puntiformi, e passare oltre.

4.1.2 Esame di Maturità

Il secondo problema del mese scorso era in qualche modo combinatorio, Alice non ha voluto nemmeno leggerlo:

> *All'esame di Maturità, la prova di Matematica era composta da tre problemi, e ogni partecipante ha ricevuto per ognuno dei problemi una valutazione da zero a sette (estremi inclusi). Durate la fase di correzione dei compiti, ci si è accorti che, dati due qualsiasi maturandi, questi hanno ricevuto la stessa valutazione in al più un problema; quanti sono, al massimo, i partecipanti?*

Cominciamo come sempre con la risposta di ***Valter***, che comincia nel solito modo:

A mio parere, al massimo, i partecipanti sono 48, … ma, questa volta, non ne sono sicuro.
Fornisco due tabelle che dovrebbero motivare, meglio che a parole, come me ne sono convinto:

0	1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	0	1
3	4	5	6	7	0	1	2

0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	0		0	0	0
1		1	1	1		1	1
2	2		2	2	2		2
3	3	3		3	3	3	
	4	4	4		4	4	4
5		5	5	5		5	5
6	6		6	6	6		6
7	7	7		7	7	7	

Una breve descrizione:
- la prima mostra il massimo di maturandi, se la restrizione fosse indipendente dal problema
- due maturandi non hanno stessa valutazione in più di un problema, prescindendo

dall'ordine
- considerando i voti ordinati per problema invece, nessuno di loro ha la stessa valutazione
- i maturandi in questo caso sono otto e li ho battezzati con i valori da 0 a 7, come i voti
- ogni colonna contiene la terna, non ordinata, di voti ottenuti da uno degli otto maturandi
- si vede che ognuna differisce, in circolo, da quella che le segue per un'unica valutazione
- ho posto come prima in grassetto, la valutazione che associo, pure, al nome dello studente
- nell'altra tabella in verticale, per ogni voto le corrispondenti tre coppie di valutazioni
- cioè le altre due valutazioni di stesso colore, che uno studente ha ottenuto con quel voto
- le celle gialle ovviamente vuote, sono quelle corrispondenti al voto che tratta la colonna
- le azzurre sono l'unico voto che non vi si associa, in alcuna valutazione dei tre studenti
- da ciò si capisce che non si possono aggiungere maturandi, senza contravvenire alla regola
- il problema, però, dice che la valutazione non può essere la stessa ma con i voti ordinati
- considero, quindi, i tre voti in una colonna nella prima delle due tabelle; ad esempio 023
- ottengo le sei permutazioni 023 032 203 230 302 320; tra loro hanno un solo voto in comune
- da ogni colonna posso, in questo modo, abbinarci sei maturandi differenti e da ciò 6*8=48.

I dubbi sulla correttezza delle mie considerazioni derivano, anche, da una frase dei Nostri: *'Si notino i "possono", che sono diversi dai "devono" …'*. Ho il dubbio che questa frase nasconda un suggerimento, per qualcosa che non ho considerato.

Non ci preoccupiamo perché poi è arrivato ***trentatre***, che di solito considera tutto:

Indico con P il numero di problemi che un maturando deve risolvere; V il numero di voti diversi assegnabili a ogni problema; S la sequenza di P voti di un maturando.

Dati P e V, sia $\boldsymbol{M}$ l'insieme delle sequenze S dei maturandi che risolve il problema, e $\#M$ la sua dimensione.

I voti possibili sono scelti in

$$[1]\ \{0,1,2,\dots(V-1)\}$$

- queste sono le cifre del sistema numerico di base V, e una sequenza S è un numero di P cifre.

L'insieme $\boldsymbol{S}$ di tutte le diverse votazioni possibili corrisponde a tutti i valori decimali fra 0 e (V^P-1) espressi in base V; la dimensione di $\boldsymbol{S}$ è

$$[2]\ \#S = V^P\,.$$

Data una coppia di sequenze S e S' diverse indico con $(S,S')=k$ il numero di cifre uguali, prese nell'ordine

- le coppie in $\boldsymbol{S}$ sono per definizione tutte diverse, e il valore di k è compreso fra 0 e $(P-1)$

- per tutte le coppie in $\boldsymbol{M}$, deve essere $k<2$

- per P maggiore di 1 le sequenze S in $\boldsymbol{M}$ sono tutte diverse (due S uguali implicano $k>1$); quindi $\boldsymbol{M}$ è un sottoinsieme di $\boldsymbol{S}$.

Per $P=1,2$ il problema è banale con $M=S=V^P$.

Per ogni $P=3, V\geq 3$ la soluzione del problema è

$$[3]\quad \boxed{\#M=V+\frac{V!}{(V-3)!}}$$

- nel nostro caso con $P=3, V=8, \#S=V^P=8^3=512$ si ha

$$[4]\quad \boxed{\#M=8+8!/5!=344}.$$

<u>dimostrazione</u>

Dati P e V, dividiamo le sequenze di $\boldsymbol{S}$ in tre gruppi definiti da

$\boldsymbol{A}$ le S con le cifre tutte uguali

$\boldsymbol{B}$ le S con le cifre tutte diverse

$\boldsymbol{C}$ le altre S, che presentano due o più cifre uguali

- le dimensioni dei gruppi sono

$$[5]\quad \begin{aligned}&\#A=V\\&\#B=V!/(V-P)!\\&\#C=V^P-\#A-\#B\end{aligned}$$

- ogni S in $\boldsymbol{A}$ è composta di cifre uguali a una delle cifre [1]
- ogni S in $\boldsymbol{B}$ è una <u>permutazione di P cifre scelte fra le V</u>
- il loro numero è $V!/(V-P)!$
- $\#C$ si ottiene per differenza.

Indicando con Sa le S prese da $\boldsymbol{A}$ ecc., i massimi valori k delle coppie possibili sono, <u>solo per il caso</u> $P=3$

$$[6]\quad \begin{array}{lll}(Sa,Sa')=0 & (Sa,Sb)=1 & (Sa,Sc)\geq 2\\ (Sb,Sb')=1 & (Sb,Sc)\geq 2 & \\ (Sc,Sc')\geq 2 & & \end{array}$$

- ne segue che per tutte le coppie prese dall'insieme composto $\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$ si ha $k<2$; $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$ è quindi una soluzione con $\#M=\#A+\#B$ da cui la [3]
- la soluzione è massima perché se aggiungo a $\boldsymbol{M}$ una S di $\boldsymbol{C}$, per mantenere $k<2$ occorre togliere almeno una S da $\boldsymbol{A}$ e altre da $\boldsymbol{B}$; quindi $\boldsymbol{M}$ non aumenta.

Come esempio numerico riporto il caso

$P=3, V=4,\ \#S=V^P=4^3=64$, con le cifre $(0,1,2,3)$

- i gruppi sono

A	***B***				***C***					
000	012	102	201	301	001	002	003	112	113	223
111	013	103	203	302	010	020	030	121	131	232
222	021	120	210	310	100	200	300	211	311	322
333	023	123	213	312	011	022	033	122	133	233
	031	130	230	320	101	202	303	212	313	323
	032	132	231	321	110	220	330	221	331	332

- di dimensioni

$$\begin{aligned}&\#A=V=4\\&\#B=V!/(V-3)!=24\\&\#C=64-4-24=36\end{aligned}$$

- il rispetto delle [6] si verifica facilmente
- la [3] fornisce la soluzione $\#M=4+24=28$

- se p.es. aggiungo a ***M*** la (001) di ***C***, devo togliere le $(000, 021, 031, 201, 301)$ e $\#M$ diminuisce di 4
- questo vale per ogni altra S in ***C***.

Lo stesso calcolo non funziona per $P > 3$ perché nelle [6] non vale $(Sb, Sb') = 1$

p.es. con $P = 4$ in ***B*** compaiono (0123) e (0321) con $k = 2$ che non possono stare tutte e due in ***M*** ; si può provare a ridurre ***B*** ma mi fermo qui.

Siamo in ritardo, e non è arrivato altro, o almeno crediamo… la posta elettronica recentemente non è nostra amica. Riscriveteci se non vi vedete pubblicati! Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Volete vedere come stanno le scarpe nuove con il vestito: davanti allo specchio, a un metro di distanza, riuscite però a vedere al massimo le ginocchia. Per vedere le scarpe, vi spostate verso lo specchio o indietro?

6. Pagina 46

Il numero delle distinte sequenze di questo tipo di lunghezza n è pari a $\binom{2n}{n}$.

Il numero delle più lunghe sequenze formate ognuna dalle stesse cifre può spaziare da 2 a $2n$: le due sequenze che portano al valore 2 sono, in prticolare, quelle nelle quali gli zeri e gli uno sono in due blocchi distinti:

(000...0011...111) e (111...1100...000)

Mentre quelle con valore $2n$ sono quelle nelle quali c'è una perfetta alternanza di zeri e uno:

(01010101...) e (10101010...)

Per un numero naturale j compreso tra 2 e $2n$, sia N_j il numero delle sequenze che hanno esattamente j sequenze del tipo considerato.

Caso 1: sia j pari, ossia j=$2k$ per un qualche valore intero di k.

Avendo la sequenza j blocchi formati dalle stesse cifre, devono essere k formati da zeri e k formati da uno. La sequenza è univocamente determinata dai punti nei quali tagliamo la lista originale di n zeri e la lista originale di n uno. Per ottenere k blocchi devono essere effettuati k–1 tagli, e questi tagli vanno individuati tra gli n zeri, e quindi la sequenza originale di n zeri può essere divisa in:

$$\binom{n-1}{k-1}$$

modi. Possiamo fare lo stesso ragionamento per gli uno e, tenendo conto che la nostra lista può cominciare con 0 o con 1, abbiamo che il numero totale vale:

$$N_j = 2\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k-1}$$

Essendo j pari, segue che $2n+2-j = 2(n+1-k)$ è pari, e che:

$$N_{2n+2-j} = 2\binom{n-1}{n-k}\binom{n-1}{n-k}$$

Applicando le proprietà dei coefficienti binomiali si ha che:

$$N_{2n+2-j} = 2\binom{n-1}{(n-1)-(n-k)}\binom{n-1}{(n-1)-(n-k)} = N_j$$

Caso 2:: sia j dispari, ossia j=$2k$+1 per un qualche valore intero di k.

Avendo la sequenza *j* blocchi formati dalle stesse cifre, devono essere *k*+1 formati da zeri e *k* formati da uno, o viceversa. Con le medesime argomentazioni del caso precedente, si ha:

$$N_j = 2\binom{n-1}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Essendo *j* dispari, si ha che $2n+2-j = 2(n-k)+1$ è dispari, e quindi:

$$N_{2n+2-j} + 2\binom{n-1}{n-k-1}\binom{n-1}{n-k}$$

Utilizzando le proprietà dei coefficienti binomiali:

$$N_{2n+2-j} = 2\binom{n-1}{(n-1)-(n-k-1)}\binom{n-1}{(n-1)-(n-k)} = N_j$$

Possiamo allora calcolare la somma richiesta:

$$S = 2N_2 + 3N_3 + \ldots + (2n-1)N_{2n-1} + (2n)N_{2n}$$

Essendo $N_j = N_{2n+2-j}$, si ha:

$$\begin{aligned} 2S &= (2N_2 + (2n)N_{2n}) + (3N_3 + (2n-1)N_{2n-1}) + \ldots + ((2n)N_{2n} + 2N_2) \\ &= (2+2n)N_2 + (3+2n-1)N_3 + \ldots + (2n-1+2)N_{2n-1} + (2n+2)N_{2n} \\ &= 2(n-1)(N_2 + N_3 + \ldots + N_{2n-1} + N_{2n}) \end{aligned}$$

Ma l'espressione nell'ultima parentesi non è altro che il numero totale delle sequenze di zeri e di uno, e quindi:

$$S = (n+1)\binom{2n}{n}$$

7. Paraphernalia Mathematica

Proseguiamo imperterriti nel tentativo di trasformare dei matematici in criceti.

7.1 Acromatica [2]

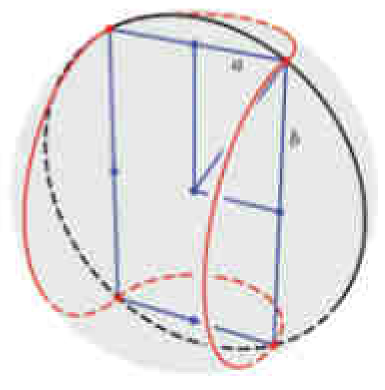
Un brevissimo riassunto della puntata precedente: eravamo partiti da uno *sphericon*, e avevamo visto che, anche se con un'andatura piuttosto da ubriaco, riesce a rotolare senza saltellare; per capirci qualcosa, lo avevamo chiuso in una sfera (detta "di rotolamento" e avevamo visto che potevamo descrivere il suo movimento tracciando sulla sfera una curva σ che seguiva un binario ρ; nel caso specifico dello sphericon, σ era un disegno simile a quello delle palle da tennis (o da baseball, se preferite) mentre ρ era una serie di semicerchi raccordati tra loro, e quindi (in un senso molto ampio del termine) il nostro sphericon sa solo andare dritto. Il problema di Harry (sì, sempre Segerman) era costruire un aggeggio in grado di prendere le curve: in pratica, di fargli seguire un percorso chiuso che "stesse sul palco" durante uno spettacolo.

Pare piuttosto chiaro che per capire se ρ è chiusa, sia importante capire "come è messo" il nostro aggeggio dopo aver fatto un giro completo, quindi dovremmo capire quale sia la relazione (se preferite "isometria", avete perfettamente ragione) tra le due curve; questa relazione è detta ***olonomia***[9], e viene indicata con $I(\sigma)$. In merito, esiste un interessante teorema (che, come sempre dopo un po' è "ovvio"): *Il cammino ρ non è limitato se e solo se l'olonomia $I(\sigma)$ è una traslazione di una distanza diversa da zero.*

Non sembra ovvio? Beh, l'idea è che se facendo un giro si sposta, facendo un altro giro si sposta della stessa distanza, quindi uscireste dal palco; i più scafati tra voi potrebbero pensare una rotazione, ma in questo caso ripassereste, prima o poi, sul vostro "binario" (sarebbe la curva ρ: ma forse è più corretto "rotaia"). Quindi, traslazione e diversa da zero.

Molto, molto meno ovvio è un altro teorema, la prima impressione è che si stiano sommando mele con pere (anzi, sottraendo): *l'angolo di rotazione* (sul piano) *dell'apparato dopo una rotazione sulla curva semplice chiusa σ è pari alla differenza tra 2π e l'area di una componente della sfera meno σ.*

Non dà anche a voi la stessa impressione? Partiamo dal fondo: se sottraete dalla sfera la curva σ, ottenete due pezzi (almeno, nel caso della "palla da tennis": sarebbero i due "pavesini" del prof di matematica di Rudy): se la nostra sfera ha raggio unitario, potete considerare un'area su quella sfera come un angolo solido, il che giustifica (se misurate il tutto in radianti) il sottrarre qualche pigreco. E siccome l'area della nostra sfera è 4π, qualsiasi parte della sfera prendiate per sottrarla va bene; al massimo, cambia il segno.


5 *Variazione sul tema del pavesino.*

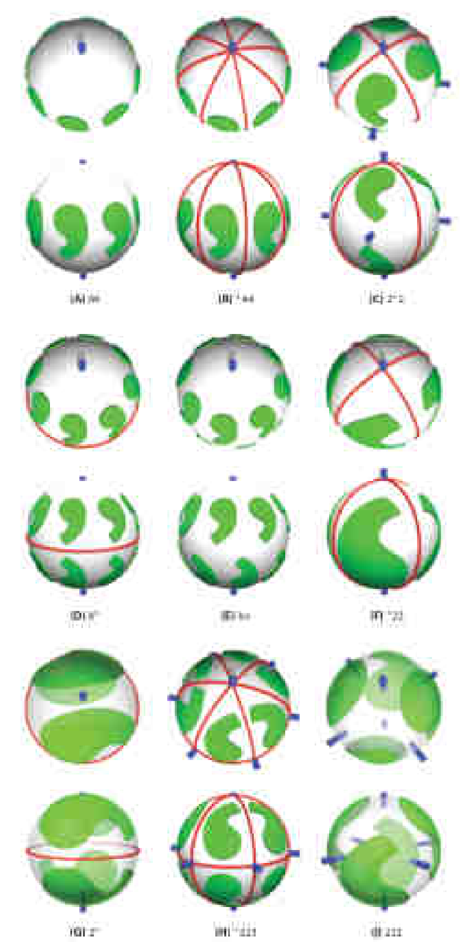
Non ci sogniamo neanche di dimostrarlo: nelle parole di Harry, si tratta semplicemente di usare la formula di Gauss-Bonnet per mostrare che la differenza areale è uguale alla curvatura geodesica totale di σ, che è pari alla curvatura geodesica totale di un *periodo* di ρ, che è zero se e solo se l'olonomia è una traslazione.

Cerchiamo di capire quanto sia potente questo teorema: in pratica, se una delle (due) componenti ha area 2π, siete fregati. Il che, tagliando *molto* per i campi, significa che se il vostro aggeggio ha una piacevole simmetria che divide in due parti uguali la vostra sfera, potete solo andare dritto. Deludente, ma importantissimo.

[9] Ricordiamo vagamente, dal corso di Meccanica Razionale, l'esistenza dei *vincoli olonomi*. Sì, sono parenti molto, molto stretti.

Un corollario "quasi immediato", messo in termini molto terra-terra, è che ***il nostro apparato ruoterà*** (in un percorso pari a una rotazione su σ) ***di un angolo*** (rispetto al centro di rotazione "sul palco", detto in soldoni, il "centro" della curva ρ) ***pari alla differenza tra le due superfici nelle quali la sfera è divisa da*** $\boldsymbol{\sigma}$. Il che, potrebbe darvi un'idea... (spoiler: non funziona, ma serve ad avere ulteriori idee).

Supponiamo di deformare la nostra σ sulla sfera in modo da ottenere un "pavesino" molto smilzo e uno decisamente obeso, come nella figura qui a fianco; in pratica, abbiamo messo sulla sfera due semicerchi (uno sopra e uno sotto) di raggio a uniti da altri due semicerchi (su un fianco) di raggio b.



6 *Un veloce ripasso (da Segerman).*

Sorvolando sui calcoli (che non sono molto complicati, una volta tanto: solo un integrale doppio), si ricava che l'area del "pavesino smilzo" (quello con i due raggi cuspidali pari a a) vale $2\pi(1+a-b)$, e quindi a ogni "giro di σ" gireremo (rispetto ad un qualche centro del palco) di $2\pi(a-b)$. A questo punto, possiamo calcolare i valori di a e b: se, ad esempio, vogliamo che l'angolo di rotazione sia $2\pi/3$ (il che porta a girare in "tondo" sul palco con sei giri completi sulla curva σ, ottenendo un oggetto che sembra una stella esagonale con i lati molto arrotondati), allora dovremmo costruire un aggeggio tale per cui siano soddisfatti i valori:

$$a=\frac{\sqrt{17}-1}{6} \quad b=\frac{\sqrt{17}+1}{6}$$

che sono, tra le altre cose, le proporzioni del disegno in figura.

"Bene, parti, costruiscilo e trovati un futuro nell'acromatica!" Beh, no. Come detto, un aggeggio del genere, anche se matematicamente è una meraviglia, ha qualche problema: spero non vi siate dimenticati che *bisogna tenere il centro di massa sempre alla stessa altezza*, e con questo coso è quasi impossibile. L'aggeggio, se costruito con materiali densità costante, non avrà mai il centro di massa al centro della sfera. Potreste cavarvela aggiungendo dei pesi da qualche parte, ma poi dovreste aggiungere altri pezzi per garantire solidità strutturale, e tutto il disegno va rifatto da capo. Nelle parole di Harry, "*It's hard to imagine how to do this elegantly*". E qui, salta fuori un vecchio amico.

Infatti, c'è un teorema (anche qui ingannevolmente semplice) che ci porta in un campo recentemente esplorato: ***Se il gruppo di simmetria di un apparato definice univocamente l'origine*** O ***della sfera di rotolamento, allora il centro di massa dell'apparato è in*** O.

In una notazione che dovremmo ben conoscere, la nostra palla da tennis ha una simmetria di tipo `2*2`, e quindi il suo centro di massa è nell'origine: la modifica che abbiamo applicato, invece, ha centro di massa `*22`: noto che le simmetrie che fissano più di un punto sono `1`, `nn` e `*nn` (per n maggiore o uguale a uno), vediamo che a meno di una costruzione di precisione infinita avremo dei problemi.

Proviamo a riesaminare la cosa alla luce dei nostri oggetti, fermo restando che la curva σ deve essere sempre un qualcosa di "realizzabile": in matematica, procedendo per generalizzazioni, è sempre piuttosto facile ritrovarsi con degli oggetti teoricamente funzionanti ma praticamente irrealizzabili[10].

A quanto risulta, quindi, sembra sostanzialmente impossibile progettare un apparato che stia sul palco e che possa girare in tondo; ma, una volta tanto, nella nostra ricerca di generalità abbiamo posto una limitazione che non dovrebbe esserci...

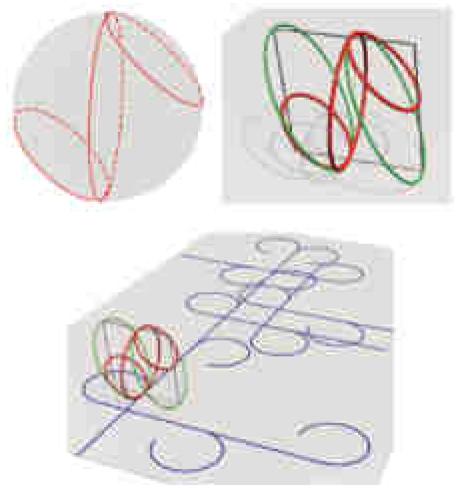
Chi l'ha detto, che debba esserci *una sola* curva σ?

L'idea luminosa venuta a Harry è stata quindi quella di sostituire la curva σ con un ***grafo*** (ossia, con un insieme di più curve) Σ, tutte sulla superficie della sfera di rotolamento; Σ può essere composta da diverse curve semplici che permettano di dividere la superficie della sfera in parti non equivalenti ma, al contempo, soddisfino le relazioni di simmetria richieste: molto in pratica, quando durante il rotolamento il nostro aggeggio arriva ad un punto dove due curve semplici sono saldate insieme, "sceglie quale usare" e modifica quindi i proprio percorso.

Questo porta alla necessità di alcune condizioni aggiuntive. Per prima cosa, definiamo "vertice" il punto nel quale due curve semplici si incontrano nel grafico; allora,

1. I cammini nei vertici devono avere le tangenti parallele (altrimenti nel passare da un vertice all'altro faremmo un "salto" e dovremmo fermare l'apparato, cosa che non vogliamo fare).
2. I vertici devono trovarsi su un cammino percorribile in entrambe le direzioni (altrimenti anche qui dovremmo fermare l'apparato e ricominciare in un'altra direzione).

Vedete qui di fianco la prima idea dei nostri. In prima figura l'idea "teorica", composta di tre curve; in seconda figura l'apparato vero e proprio "quasi costruibile": i vertici del quadrato rappresentano i "centri delle curve", mentre i due cerchi storti verdi (che in realtà sono delle *ellissi*) sono l'equivalente dei due "bordi" dello sphericon sui quali si rotola. Infine la terza figura mostra le strade che il nostro aggeggio "può percorrere" e che chiarisce il suo funzionamento: quando il punto di contatto tra un cerchio piccolo e il cerchio grande (rossi) tocca terra, potete decidere se continuare a ruotare sul cerchio grande (continuando ad andare dritto) o ruotare sul cerchio piccolo, *eseguendo la curva indicata.*



7 *Il trenino dalle ruote sghembe.*

Il "quadrato" (...non ne siamo poi così sicuri... dettagli), tra le altre cose, tiene assieme tutto l'oggetto e, come si vede nel terzo disegno, fa da perno (ideale) per prendere le curve.

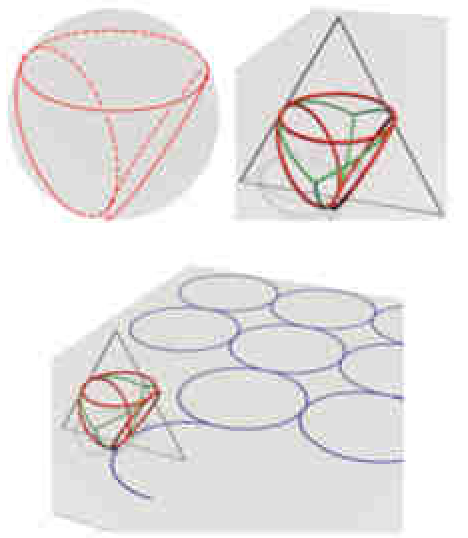
Sorvolando sul quadrato e sulle ruote verdi, per prima cosa decidete di quanto volete girare: una buona idea potrebbe essere quella di fare delle curve di 270° che, oltretutto, garantiscono durante la performance anche una simpatica "complicazione". Il fatto che per girare a sinistra di 90° voi dobbiate girare a destra di 270°, il tutto con un paio di criceti umani che saltellano in modo apparentemente disordinato dentro l'apparato rende, secondo noi, lo spettacolo degno di un grande applauso.

Da quanto visto precedentemente, l'area all'interno di ognuno dei nostri cerchi più piccoli deve essere pari a $\pi/2$; quindi, essendo sempre la sfera di rotolamento unitaria, i nostri cerchi devono avere un raggio pari a:

$$r=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

[10] ...se qualcuno ha detto "Banach-Tarski", ha appena vinto una bambolina virtuale.

E la simmetria del nostro aggeggio è di tipo `*2`. Funziona!



8 *"Random Walk" è un eufemismo...*

Si può fare altro, o siamo di fronte ad uno di quegli antipatici "Teoremi di unicità"? Beh, in fondo, andare dritto può essere considerato come una rotazione di 180°, quindi anche il "cerchio principale" può essere equiparato ad uno dei secondari... E se li facessimo tutti e tre uguali? Detto, fatto. Lo vedete qui di fianco, i cerchi in rosso e le "ruote" in verde. E i punti di appoggio sul triangolo grigio.

"Rudy, ma non ti sembra un po' ingombrante?" Beh, sì: effettivamente quel triangolone occupa un mucchio di spazio, sul palco, anche se a noi dà la rassicurante sensazione che ci davano le rotelline quando abbiamo imparato ad andare in bici. Comunque, con qualche guizzo di genio ingegneristico diventa possibile farne a meno: non staremo ad insultare la vostra intelligenza calcolando il raggio dei tre cerchi rossi (oh, va bene... radice tre su due). Ci pare comunque importante notare che questo aggeggio viene ad avere una simmetria di tipo `*223`.

...adesso, se qualcuno trova il modo di costruire aggeggi di questo genere in scala ridotta, potremmo fare una raccolta di divertenti giochini per le domeniche di pioggia...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms