Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 277 – Febbraio 2022 – Anno Ventiquattresimo

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM273 ha diffuso 3'336 copie e il 01/03/2022 per Google eravamo in 7'250 pagine.

"...Rudy, ma non li hai già messi qui?", Sì, ma questo è un altro punto di vista.

1. Prima Repubblica

"Nel bel soggiorno delle antiche genti
D'ogni Virtude i primi padri adorni
In seno del piacer traean contenti
Dell'aurea etade i fortunati giorni.
Ma poiché il furto del Celeste Fuoco
L'infame Vaso di Pandora aprìo
E Giove sparse irato in ogni loco
La Famiglia dei Mal, che quindi uscìo;
L'ardente Febbre, e l'Etico pallore,
La rea Discordia, e il Tradimento vile,
La turpe povertate, e il vano onore,
E il pigro gelo dell'età senile,
Il geloso furor de' ciechi amanti,
La nera infedeltà, gli atri sospetti,
E quel morbo crudel, che volge in pianti
Dell'amoroso gioco i bei diletti
Piovver confusi ad inondare il mondo
Per far vendetta contro i rei mortali;
E il viver c'era pria tutto giocondo
Divenne un ondeggiar fra beni, e mali.
Ma benché cinto da crudele assedio
D'atroci pene, deplorabili tanto
L'Uomo non sarebbe, se funesto TEDIO
Non gli crescesse il doloroso pianto:
Tu Figlio del piacer, come del duolo
Con lento morso ci trafiggi il cuore;
Per te sen fugge ogni diletto a volo,
Per te sempre ogni mal fassi maggiore."
(…)
Imbecille Ragion! Stolta Sofia!
Inutili a fugar dall'Alma il Tedio;
Ceder conviene a una gentile Follia,
Che sola a tanto mal porge il rimedio.

*("*Ode alla Noia*")*

Chi è stato il primo presidente della Repubblica Italiana?

È una domanda stranamente ambivalente: una buona parte degli interrogati la trova banale, ovvia, insomma della stessa categoria dell'interrogativo "qual è la capitale della Francia?"; un'altra fetta della popolazione, per contro, la trova invece abbastanza imbarazzante, difficile, insomma una vera e propria domanda di storia alla quale si riesce a rispondere solo si è specialisti o quasi. Del resto, la recente conferma al Quirinale di Sergio Mattarella ha funzionato un po' da cartina al tornasole per un bel numero di sotterranei interrogativi e per qualche deciso abbaglio anche da parte di giornali e media specializzati nell'informazione politica: era tanta l'attesa di conoscere il "tredicesimo presidente" della Repubblica Italiana che alla fine qualche testata si è lasciata scappare il titolo "*È Mattarella il tredicesimo presidente*", frase che è ineluttabilmente sbagliata. O forse non proprio ineluttabilmente… ma per farla assurgere a una parvenza di correttezza bisogna fare tanti di quei salti mortali che non passerebbero l'esame di validità neppure di fronte a una giuria composta da bambini dell'asilo.

Analizziamo i fatti: quella che si è tenuta il 29 Gennaio 2022 e che ha confermato al Quirinale Sergio Mattarella è stata la quattordicesima elezione del presidente della repubblica. Due delle quattrodici elezioni, però, hanno portato al Quirinale dei presidenti già eletti precedentemente: il 20 Aprile 2013 fu confermato nella carica presidenziale Giorgio Napolitano, già eletto sette anni prima, il 10 Maggio 2006; e anche la più recente tra le votazioni ha confermato per un secondo mandato il presidente che era ancora in carica, essendo stato Mattarella già eletto il 31 Gennaio 2015. In buona sostanza:

quattordici mandati presidenziali, due dei quali di conferma; totale, dodici presidenti. Non si vede proprio come si possa attribuire l'aggettivo "tredicesimo" a Sergio Mattarella.

La domanda iniziale resta comunque ancora valida, anche perché né l'aspetto né il nome e cognome del primo presidente italiano sono particolarmente conosciuti. Gli americani hanno un culto quasi religioso nei confronti del loro primo presidente: i bimbetti delle elementari sentono raccontare aneddoti che riguardano George Washington prima ancora di imparare a leggere, per non parlare del fatto che il suo nome è perpetuato in quello della città capitale federale e in quello di uno dei 50 stati, mentre le sue sembianze sono ripetute all'infinito nelle banconote da un dollaro. In Italia le cose stanno in maniera assai diversa; e anche se non saranno pochi coloro che ricordano il nome "Enrico De Nicola", siamo pronti a scommettere che non sarebbero tanti quelli in grado di riconoscerlo guardando solo la sua fotografia[1].


1 *Enrico De Nicola, primo presidente della Repubblica Italiana.*

Le ragioni di una così ampia differenza nella memoria dei due "primi presidenti" sono molte e tutte facilmente comprensibili: per gli Stati Uniti d'America, George Washington è stato soprattutto l'eroe della guerra rivoluzionaria che ha portato all'indipendenza; ha avuto un ruolo essenziale nel processo di nascita della nuova (e virtualmente prima nel suo genere) repubblica federale; senza contare che, fin dal 1776, i presidenti americani hanno nelle loro mani anche il potere esecutivo, e non solo quello di rappresentanza dell'unità nazionale; tutte cose assenti nella figura del primo presidente della Repubblica Italiana. Nel caso specifico di De Nicola, poi, probabilmente gioca contro anche il fatto che viene spesso ricordato solo come "capo provvisorio" dello stato italiano appena uscito dalla Seconda Guerra Mondiale, al punto che qualcuno tende a non inserirlo nel novero dei "veri presidenti della Repubblica Italiana": ma questo è errato, perché – pur se è vero che fu eletto dall'Assemblea Costituente il 28 Giugno del 1946 proprio come "capo provvisorio dello Stato", in attesa che la nuova Italia si desse una Costituzione – è proprio ai sensi di quest'ultima che fu confermato a tutti gli effetti come presidente effettivo il 1° Gennaio del 1948, e mantenne la carica fino al 12 maggio dello stesso anno.

Così, è indubitabile che la Repubblica Italiana formalizzata nella Carta Costituzionale del 1948 abbia avuto finora solo dodici presidenti[2], e l'unica maniera per giustificare l'appellativo di "tredicesimo presidente" a Sergio Mattarella è quella di barare spudoratamente richiamandosi ad una piccola coincidenza (peraltro giustificabile solo giocando sulle denominazioni, e non sulla natura politica) nascosta in una piegolina della storia: ovvero, appellandosi al fatto che la "Repubblica Italiana" esisteva già un secolo e mezzo prima del fatidico 1948.

[1] Va comunque ricordato che, anche se certo non pareggia il ritratto di Washington sulle banconote da un dollaro, De Nicola compare in una rara moneta da 2 euro che lo raffigura (peraltro stilizzato e fisiognomicamente irriconoscibile) tra De Gasperi e Terracini nell'atto di firmare la promulgazione della Costituzione Italiana.

[2] Dodici presidenti che, per comprensibili ragioni anagrafiche, sono tutti nati come sudditi del precedente "Regno d'Italia", e non come figli della Repubblica che rappresentano. La probabilità che sarà proprio il "tredicesimo presidente" il primo a diventare tale essendo nato nella Repubblica – già abbastanza alta nell'elezione appena trascorsa – è ormai davvero prossima a 1.

La duplice tempesta della Rivoluzione Francese e dei successivi trionfi napoleonici sconvolge l'Europa tra il XVIII e il XIX secolo, e il territorio italiano è uno dei più stravolti, dal punto di vista geopolitico[3]. Già dal 1797 la temperie rivoluzionaria transalpina aveva generato nella penisola una serie di "repubbliche sorelle" di quella nata sulle ceneri della Bastiglia: dopo la Seconda Campagna d'Italia (quella di Marengo) e la successiva Pace di Amiens, la cartina dell'Italia diventa ancora più esplicitamente una sorta di protettorato francese: tutto il Piemonte (che pure, da lì a qualche decennio, sarà il motore dell'anelata unità nazionale italiana) diventa in tutto e per tutto territorio francese[4], con le Alpi Occidentali che non demarcano più frontiere nazionali; mentre virtualmente tutta la Lombardia e buona parte dell'Emilia, insomma quelle terre che fino a poco prima costituivano la "sorella" Repubblica Cisalpina, assumono il nome formale di "Repubblica Italiana". Come primo – e unico, vista la breve durata che la Storia riserverà alla repubblica – presidente di questa Repubblica Italiana viene acclamato lo stesso Napoleone Bonaparte. Così il cerchio si chiude: accettando una sorta di ideale, seppur totalmente inesistente[5], continuità tra la Repubblica Italiana del 1802 e la Repubblica Italiana costituitasi nel 1948, il numero dei presidenti si incrementa di una unità, e di conseguenza si può legittimamente definire Sergio Mattarella come "tredicesimo presidente". Anche in questo caso, però, sarebbe opportuno ricordare che era "tredicesimo" fin dal suo primo mandato, quello iniziato nel 2015.

2 *La Repubblica Italiana del 1802.*

La Repubblica Italiana del 1802 ha un destino abbastanza diverso dalla Repubblica Italiana in cui viviamo: quest'ultima nasce dalle ceneri del precedente Regno d'Italia, mentre per contrappasso la sua sorellina più vecchia terminò la sua breve esistenza proprio trasformandosi in un "Regno d'Italia" nel 1805. Anche questo regno italico non durò molto di più della repubblica originaria, e – inutile a dirsi – ebbe di fatto come unico monarca effettivo sempre il solito Napoleone.

Quel che è curioso, nel seguire le rapidissime evoluzioni geopolitiche italiane (ma anche europee) di quei tempi assai movimentati è notare come nei nomi si cerchi di perseguire a un tempo la proclamazione della novità rispetto al passato, senza però voler perdere il tesoro della continuità nella tradizione: cambiare denominazione tra Regno e Repubblica è naturalmente solo l'indice di uno stravolgimento in senso istituzionale, ma il nome "Italia" è religiosamente conservato, anche se è palesemente riservato ad una frazione neppure troppo vasta della penisola che avrebbe il diritto di rivendicarlo per intero; ma ancora più buffa, a ben vedere, è la denominazione riservata alla regione di Firenze: per

[3] "*Ei si nomò: due secoli, l'un contro l'altro armato, sommessi a lui si volsero, come aspettando il fato; ei fe' silenzio, ed arbitro s'assise in mezzo a lor*", dice saggiamente Alessandro Manzoni.

[4] Va notato, comunque, che la dinastia Savoia mantiene il suo regno – appunto "di Sardegna" – nell'isola omonima.

[5] Bisogna comunque andare assai cauti con i giudizi assoluti: è evidente che la Repubblica Italiana del 1803 è cosa ben diversa dalla repubblica attuale, ma i simboli spesso servono proprio a gettare ponti tra epoche diverse: non per niente la Francia fa ancora tesoro del motto della sua Prima Repubblica ("*Liberté, Egalité, Fraternité*") e la stessa Italia ha come bandiera nazionale proprio il vessillo di una delle "repubbliche sorelle" del 1797, la Repubblica Cispadana.

tre secoli denominata "Granducato di Toscana", assume nel breve periodo napoleonico il nome di "Regno d'Etruria". In questo caso si trattò di un vero e proprio scambio territoriale: sul trono del neonato regno toscano vengono posti i Borbone-Parma, ai quali Napoleone toglie l'originale Ducato di Parma e Piacenza; quest'ultimo, al pari del Piemonte con il quale confina, diventa territorio dell'Impero francese. Da geometra militare qual era, probabilmente Napoleone teneva molto alla continuità territoriale dei suoi possedimenti[6], conoscendo il valore strategico delle aree semplicemente connesse.

Il Regno di Etruria ebbe vita breve, come tutti gli stati italiani ed europei comparsi sulla scena per mano napoleonica: appena un settennato – dal 1801 al 1807 – come la durata di un singolo mandato presidenziale della nostra repubblica. Il suo primo re, Ludovico I di Borbone, non fece in tempo neppure a sopravvivere al suo giovanissimo regno, morendo nel 1803; formalmente gli successe il quattrenne figlio Ludovico II, ma ovviamente il governo toccò alla coniuge reggente, Maria Luisa di Borbone-Spagna. Ad aiutare questi piccoli sovrani nel governo di un così volatile regno si ritrovò un personaggio abbastanza insolito: un politico nobile e benestante, certo ben istruito e con velleità poetiche e artistiche, e che – in maniera inaspettata forse anche per lui medesimo – è riuscito, tra una quartina e una missiva diplomatica, a trovare un posticino nella storia della matematica.

Giulio Giuseppe Mozzi dei Garbo nasce a Firenze il 23 Febbraio 1730 in una famiglia di antica nobiltà toscana, al punto che lo stesso Giulio, sulla copertina delle sue opere, accompagnava il suo nome e cognome con la dicitura "patrizio fiorentino".

3 *L'unica immagine di Giulio Giuseppe Mozzi dei Garbo che siamo riusciti a trovare è questa foto sgranata di un busto marmoreo.*

È in tutta evidenza un fortunato membro dell'aristocrazia toscana, di quelli interessati allo sviluppo delle attività culturali più che alle azioni militari: prima che gli sconvolgimenti francesi rovesciassero gli equilibri d'Europa era già Presidente dell'Accademia Fiorentina. Da aristocratico, non era comprensibilmente un fanatico estimatore del Bonaparte, ma l'arrivo del Borbone-Parma sul trono di Firenze gioca verosimilmente a suo favore: il nuovo sovrano lo chiama a corte e gli conferisce l'incarico di Ministro degli Esteri[7] del piccolo e neonato Regno d'Etruria.

Sembra che le sue doti da diplomatico non fossero poi eccelse; ma c'è anche da chiedersi – pur senza volerlo giustificare sulla fiducia – che anche lo stesso conterraneo Machiavelli avrebbe probabilmente avuto delle difficoltà a brillare in quella posizione in quel periodo storico. Riuscì comunque a restare personaggio significativo della cultura toscana: caduto il Regno d'Etruria, assume di nuovo – e con maggiore autorità – il ruolo di presidente generale dell'Accademia Fiorentina[8]. Passa insomma una vecchiaia densa di onori e gratificazioni,

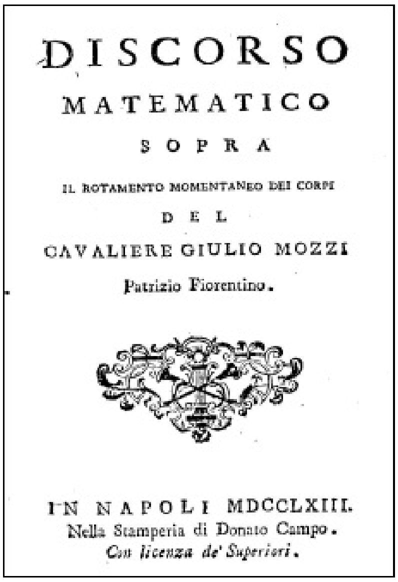
[6] Cosa che comunque non impedì allo stesso Napoleone, appena pochi anni dopo la sua istituzione nel 1801, di porre fine al Regno d'Etruria inglobando anch'esso direttamente nel territorio francese.

[7] Alcune fonti parlano direttamente di "Primo Ministro", oltre che di Ministro degli Esteri; in realtà, più che di vero e proprio errore potrebbe semplicemente trattarsi di confusione dovuta al fatto che, in una monarchia assoluta di limitato potere e dimensioni (e soprattutto con l'ingombrante presenza di un sovrano), il concetto di "ministro" era quantomeno abbastanza indefinito.

[8] Nel contempo, è anche membro dell'Accademia della Crusca, che sempre a Firenze ha sede e che nasce proprio, nel 1585, da alcuni fuoriusciti dell'Accademia Fiorentina che giudicavano un po' troppo pedante. Abbastanza curiosamente, l'elezione di Mozzi alla Crusca è voluta proprio da Napoleone Bonaparte, nel 1812.

e possiamo immaginare che lasci questa valle di lacrime in modo sereno, nel 1813, ormai più che ottantenne: la sua città natale, tra l'altro, gli riserva uno dei massimi onori fiorentini, la sepoltura in Santa Croce, dove riposano i grandi della città.

Se ancora oggi viene ricordato, però, non è per le sue origini nobiliari o per la sua carriera diplomatica e politica. Con sua probabile disperazione, non è granché ricordato neppure le sue opere poetiche: sono arrivate fino a noi il suo "*Inno al Sole*" e la sua "*Ode alla Noia*"[9], e su entrambe le composizioni i critici sono concordi nel giudicarle non più che mediocri. Si tratta di poesie scritte in gioventù, visto che vengono pubblicate quando Mozzi ha solo ventisei anni, ma la giovane età non è da prendere come attenuante, visto che anche l'opera per cui oggi lo ricordiamo è di pochi anni successiva, del 1763.



DISCORSO
MATEMATICO
SOPRA
IL ROTAMENTO MOMENTANEO DEI CORPI
DEL
CAVALIERE GIULIO MOZZI
Patrizio Fiorentino.

IN NAPOLI MDCCLXIII.
Nella Stamperia di Donato Campo.
Con licenza de' Superiori.

4 *Il "Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi", del 1763.*

Le sue ambizioni giovanili erano certo orientate, come si è visto, verso la letteratura: subiva comunque anche il fascino della matematica, al punto che cominciò a frequentare e stabilire corrispondenza con Paolo Frisi, docente di Meccanica negli atenei di Pisa e Milano. La leggenda vuole che fu a causa di una breve malattia che lo costrinse per qualche giorno a letto che Giulio Mozzi cominciasse a scrivere una breve memoria di natura matematica, quel "*Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi*" che poi fece pubblicare in una stamperia di Napoli. La memoria passò quasi del tutto inosservata, innanzitutto perché l'autore non era accademico né tantomeno un matematico professionista: ma soprattutto perché a considerarla poco degna di attenzione era, prima di chiunque, lo stesso autore. La teneva in conto proprio come una "operetta" di poco conto, composta per passare il tempo, un po' come fanno oggi i malati annoiati che affrontano un cruciverba.

La memoria, però, è degna di nota, eccome: contiene la prima dimostrazione che il moto istantaneo di un sistema rigido avviene per traslazione e rotazione attorno a un medesimo asse (quello che Mozzi chiama "asse spontaneo di rotazione"), e quindi è necessariamente di tipo elicoidale. Oltre al "Teorema di Mozzi", come viene oggi chiamato[10], nella memoria si introduce per la prima volta il concetto meccanico di "coppia", eleganti artifici per ridurre un sistema di forze a solo due forze ortogonali, e anche perché anticipa di due anni un buon numero di risultati pubblicati da Eulero nel suo "*Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*" del 1765.

Battere sul tempo Leonhard Euler sembra davvero una prestazione niente male, soprattutto se compiuta da qualcuno che nel farlo aveva più o meno lo stesso interesse e dedizione che mettiamo noi quando affrontiamo gli "Incroci Obbligati" della Settimana Enigmistica.

[9] I primi versi e la quartina finale sono quelli riportati in testa a quest'articolo.

[10] A dimostrazione della scarsa diffusione della memoria di Mozzi, in molti paesi il "Teorema di Mozzi" viene denominato "Teorema di Mozzi-Chasles", perché il risultato raggiunse la notorietà soprattutto grazie al lavoro del francese Michel Chasles (che però è del 1830, ergo di quasi settant'anni successivo).

2. Problemi

2.1 Uest Said Stori (quasi)

...nel senso che ci sarebbe piaciuto mettere in piedi un'ambientazione nello stile di West Side Story o di "The Warriors", con una serie di gang più o meno giovanili, qualche tocco sentimentale e un'impresa epica tipo l'attraversamento di un megalopoli a caso. Ma ci pare le complicazioni siano già sufficienti nel racconto così come lo abbiamo trovato. Se vi vengono delle idee meno sanguinarie (tipo dei gruppi di matematici in competizione per la Medaglia Fields...), suggerite pure.

Secondo gli storici meno affidabili (quelli affidabili si rifiutano di fare statistiche del genere), nella Chicago degli anni Trenta erano presenti ***36*** "gang", alcune delle quali in guerra tra loro; la parte meno nota di questa struttura era il fatto che un singolo gangster poteva appartenere a più gang, purché nessuna delle gang di appartenenza fosse in guerra con un'altra gang di appartenenza; inolte, dati due gangster qualsiasi, si aveva la certezza che non appartenessero allo stesso gruppo di bande. Infine, ogni banda cui un qualche gangster non appartiene è in guerra con qualche banda cui lui appartiene.

Esposte le condizioni, dovreste capire perché ci era venuta l'idea di ambientare il tutto in una facoltà di matematica; ma quello che ci chiediamo noi (e gli storici di cui sopra) è: quanti gangster ci sono, al massimo, a Chicago?

Oh, a noi sembra già abbastanza complicato così, ma se "trentasei" vi sta antipatico, va bene qualsiasi altro numero, eh...

2.2 Forse dovevamo fare prima questo

Nel senso che ci ricorda un problema di tanto tempo fa (no, non vi diciamo quale), ma questo ci pare più semplice; forse, come "hors d'oeuvre" a quell'altro ci sarebbe stato bene. E non vi sareste neanche spaventati troppo di quello vecchio.

Voi e un vostro amico avete deciso di giocare ad un nuovo, emozionante gioco: uno di voi pensa un numero (intero, estremi inclusi) tra 1 e 100 (si veda la solita nota al fondo: ma se è sempre la stessa, cosa stiamo a ripeterla? Comunque, la mettiamo lo stesso), e voi dovete indovinarlo nel minor numero di passaggi possibili, noto che chi ha pensato il numero (che è inguaribilmente onesto) quando voi fate un tentativo, vi dice "più alto" (se il numero che ha pensato è più alto di quello che avete detto) o "più basso" (viceversa, ci pare evidente) sin quando non azzeccate il numero (nel qual caso, il vostro amico sta zitto); perde il primo di voi che dice "ricerca binaria".

Questo in quanto potete ricevere la segnalazione "più basso" *solo una volta*: la seconda volta che la ricevete nel round avete automaticamente perso.

Esiste una strategia vincente?

È implicito che per un gioco così insulso vorreste metterci il minor tempo possibile, e vincere alla svelta; quindi, oltre a vincere, vorreste anche dire meno numeri possibili...

E se a voi e al vostro amico stesse antipatico il cento? Questa che avete appena letto era la solita nota al fondo.

3. Bungee Jumpers

Sia ABC un triangolo, con l'angolo in C pari a 60°. Siano inoltre H li suo ortocentro, G il centroide, N il centro del cerchio dei nove punti1 e O il suo circocentro[11].

[11] Ricordiamo che per qualsiasi triangolo il *cerchio dei nove punti* (noto anche come *cerchio di Feuerbach*) è la circonferenza sulla quale si trovano il punto medio di ogni lato del triangolo, i piedi di ogni altezza e il punto medio del segmento tra ogni vertice e l'ortocentro. Inoltre, per un triangolo *non equilatero*, il centro del cerchio

Provate che la parabola con vertice in Q e fuoco in G è tangente alle rette passanti per i punti medi di AC e BC e a loro perpendicolari (bisettori perpendicolari dei lati).

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Febbraio!

Come promesso festeggiamo con questo numero il ventitreesimo compleanno di RM, uscendo così in ritardo da mancare il mese. Mai successo prima, ma non è detto che non succeda di nuovo.

4.1 [276]

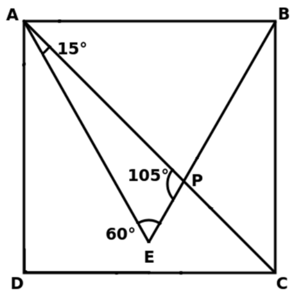
4.1.1 Calcolate l'APE!

Problema geometrico, che è bello, descrizione del Capo, che non sempre aiuta:

> *Avete un quadrato ABCD, sul lato AB si costruisce il triangolo equilatero ABE interno al triangolo; si tracci la diagonale AC del quadrato che interseca il lato BE in un punto P. Quanto vale l'area di APE in funzione di quella di ABCD?*

Primo ad arrivare questa volta è stato il nostro carissimo ***GaS***:

Cominciamo con il *disegnino*:



Avendo AB=AE=1 possiamo applicare il teorema dei seni per trovare il lato PE:

$$\frac{AE}{sin(105°)} = \frac{PE}{sin(15°)} \Rightarrow PE = \frac{sin(15°)}{sin(105°)}$$

A questo punto abbiamo 2 lati (AE e PE) e l'angolo compreso (AEP= 60°) e per trovare l'area possiamo usare la formula standard per area dei triangoli:

$$A_{AEP} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EP \cdot sin(AEP) = \frac{1}{2} \cdot \frac{sin(15°)}{sin(105°)} \cdot sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{sin(15°)}{sin(105°)}$$

Potremo prendere subito la calcolatrice ma preferisco, prima, notare che sin(105°) è uguale al cos(15°) e possiamo quindi sostituirlo nella formula:

$$A_{AEP} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{sin(15°)}{sin(105°)} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{sin(15°)}{cos(15°)} = \frac{\sqrt{3}}{4} tan(15°)$$

Potremo prendere adesso la calcolatrice e trovare il risultato ma possiamo divertirci ancora un po' ricordando le formule trigonometriche di scolastica memoria, ed in particolare la seguente:

$$tan(\alpha - \beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha \cdot tan\beta}$$

che ci permette di ottenere:

dei nove punti, l'ortocentro e il circocentro (più altri punti notevoli, come *il punto di Exeter*) sono tutti sulla stessa linea, detta *linea di Eulero*.

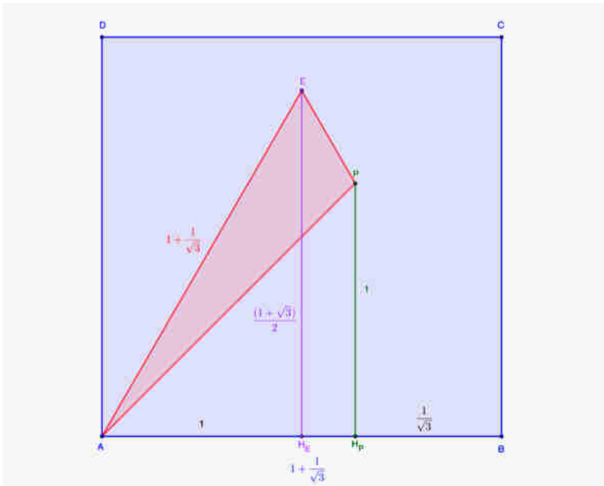
$$tan(15°) \;= tan(60° - 45°) \;= \frac{tan(60°) - tan(45°)}{1 + tan(60°) \cdot tan(45°)} \;= \;\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$
$$= \frac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1} = \;2 - \sqrt{3}$$

Possiamo quindi inserire il valore di tan(15°) nella formula dell'area del triangolo ottenendo:

$$A\quad_{AEP} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2 - \sqrt{3}) = 0{,}1160\ldots$$

E quindi l'area del triangolo è l'11,60…% dell'area totale del quadrato, poco più di 1/9.

Incredibile, ***GaS*** si è divertito con la trigonometria! Vediamo ora la soluzione di ***Valter***:



Chiamo rispettivamente HE HP le proiezioni di E e P su AB essendo altezze dei triangoli AEB/APB.

Assegnando, senza perdere di generalità, lunghezza unitaria a PHP, ho, come restanti dimensioni (per ottenerle uso le consuete formule relative ai triangoli equilateri e rettangolo/isosceli):

- PHP = 1
- AHP = 1
- HPB = 1/√3
- AB = AHP + HPB = (1 + 1/√3)
- EHE = (√3/2)AB = (√3/2)(1 + 1/√3)
- □ABCD = AB^2
- △AEB = (AB)(EHE)/2
- □APHP = (AHP)(PHP)/2
- □HPPB = (HPB)(PHP)/2.
- △APE = △AEB – (□APHP + □HPPB).

Indicando con "*l*" = AB = (1 + 1/√3) il lato del quadrato ABCD e del triangolo isoscele APE, ho:

△APE = △AEB – (□APHP + □HPPB) = ((AB)(EHE)/2) – (((AHP)(PHP)/2) + ((HPB)(PHP)/2)))

che con *l* dà

$((\sqrt{3}/4)l^2) - (((l-1)/2) + 1/2) = (\sqrt{3}l^2 - 2l)/4$

e, il rapporto fra □ABCD/△APE, = $4l^2/(\sqrt{3}l^2 - 2l)$. Semplificando in $4l/(\sqrt{3}l - 2)$ e sostituendo ad *l* il valore (1 + 1/√3) ottengo infine: 4 + 8/√3.

Il nostro ***Valter*** è una garanzia, ma questo mese abbiamo anche delle *new entry*, come ***Piero***, che ci scrive per la prima volta:

Sono matematicamente molto arrugginito, ma spero che almeno la mia soluzione del problema del “Calcolo dell’APE” sia giusta:

Fisso un sistema di riferimento cartesiano in modo che A ≡ (0, 0), B ≡ (1, 0), C ≡ (1, 1), D ≡ (0, 1); il vertice E del triangolo equilatero AEB ha coordinate E ≡ (1/2, √2/2).

Dalle equazioni delle rette passanti per B, E e per A, C

$y = \tan(2\pi/3)(x - 1) = \sqrt{3} - x\sqrt{3}$
$y = x$

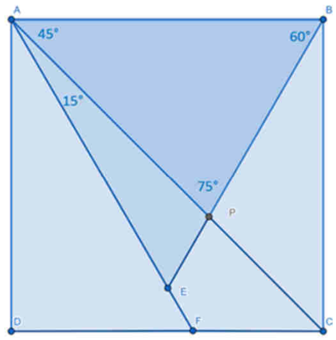
ottengo le coordinate del punto d’intersezione P ≡ (√3 / (1 + √3), √3 / (1 + √3)).

Calcolo l’area del triangolo APE con la formula di Gauss: Area(APE) = | det(M) | / 2 = (2√3 – 3) / 4 ≈ 0,116

dove M è la matrice quadrata avente righe [x_A y_A 1], [x_P y_P 1], [x_E y_E 1].

S.E.&O. (come scriviamo noi ragionieri).

Siamo curiosi di scoprire quanti conoscono l’abbreviazione, scriveteci, ma non vi fermate qui, che arriva la soluzione di ***Galluto***:



Usando la formula di Erone:

$\text{Area}_{\text{APE}} = \sqrt{S * (S - AE) * (S - AP) * (S - EP)}$ dove S è il semiperimetro del triangolo, posso calcolare l’area del nostro triangolo conoscendo la misura dei tre lati.

Poiché il triangolo ABE è equilatero, AE = AB = 1. AP lo ricavo dal triangolo ABP, di cui conosco gli angoli, applicando il teorema del seno:

$AP = AE * \sin 60°/\sin 75° = 0{,}896575$

Noti AE e AP, e l’angolo compreso, ricavo EP col teorema del coseno:

$EP = \sqrt{AE^2 + AP^2 - 2 * AE * AP * \cos(15°)} = 0{,}267949$

e quindi:

S = (1 + 0,896575 + 0,267949)/2 = 1,0822623

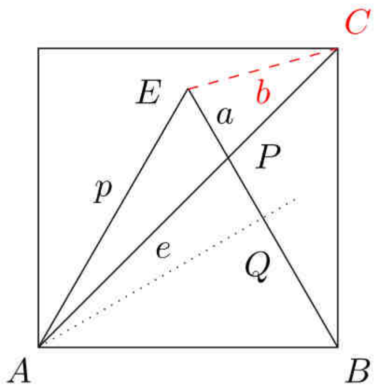
Area_{APE} = 0,116025 o, se volete, l’ 11,6025% dell’area dell’intero quadrato.

Ci piace considerare i paralleli tra le diverse soluzioni, questa di ***Galluto*** ricorda l’approccio di ***GaS*** ma con meno formule trigonometriche, per la gioia del Capo che le sta ancora scoprendo. Ma non ci fermiamo troppo a lungo, la prossima soluzione è di ***A.B.***, che avevamo incontrato già il mese scorso, e che hanno apprezzato i vari suggerimenti per un nome:

Nel numero scorso avete suggerito le ottime firme ***(A.B.)²*** e ***A.²B.²***. Naturalmente nel caso in cui A e B non commutino tra loro allora ***(A.B.)²*** e ***A.²B.²*** sarebbero due persone diverse, ma dal momento che in ogni caso ci sono le iniziali giuste siete liberi di indicarci come volete!

Anche se ci siamo divertiti a proporre le varie soluzioni, restiamo con l’originale e ci auguriamo che i nostri ***A.B.*** continuino a *commutare* e a mandare soluzioni:

La figura in questione è la seguente



Il segmento AQ è un'altezza del triangolo APE. Dal momento che alla fine del problema dovremo dividere l'area di APE per l'area del quadrato, possiamo senza perdita di generalità considerare il quadrato come avente lato unitario.

Com'è consueto fare, chiamiamo (la lunghezza di) ogni lato opposto a un vertice con la stessa lettera del vertice in minuscolo, e quindi chiamiamo (come indicato in figura sopra)

$$AE = p,\ EP = a,\ PA = e,\ EC = b.$$

Calcoliamo ora quanto vale a usando i triangoli EBC e PCE. Conteggiando gli angoli, si può far vedere che questi due triangoli sono simili. Infatti

$$E\hat{P}C = A\hat{P}B = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$$

e dal momento che per definizione EB=BC, abbiamo anche

$$B\hat{E}C = B\hat{C}E = \frac{\pi - \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{5\pi}{12}$$

Quindi arriviamo subito alla conclusione che

$$1 : b = b : a \Longrightarrow a = b^2$$

Rimane solo da calcolare quanto vale b^2, e lo facciamo con il teorema dei coseni applicato al triangolo EBC che ci dice che

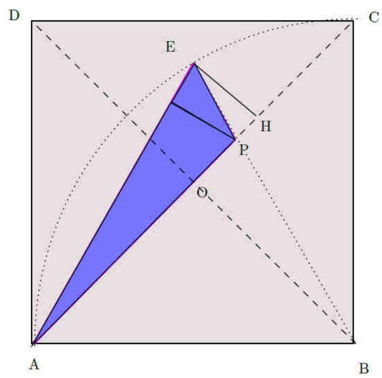
$$b^2 = 1 + 1 - 2(1)(1)\cos\frac{\pi}{6} = 2 - \sqrt{3}$$

A questo punto, visto che il triangolo equilatero ha lato 1 e quindi la sua altezza è $\sqrt{3}/2$, l'area del triangolo APE sarà

$$Area_{APE} = \frac{1}{2}a \cdot AQ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}$$

Bene, ora passiamo a ***Makaronik***, che ha ancora un altro approccio:

Consideriamo la figura



Si tratta di calcolare l'area dell'APE, vale a dire

$$A = ½\ AH \cdot HE$$

Sia l la lunghezza del lato del quadrato: allora si ha

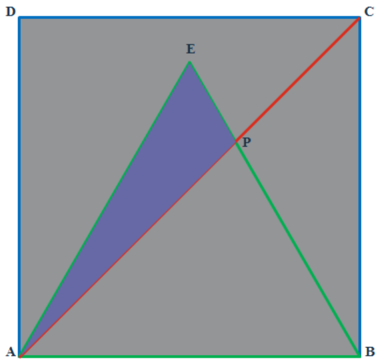
- AE = l
- EAH = EAB – PAB = $\pi/3 - \pi/4 = \pi/12$ dal momento che AEB è equilatero e AC è la diagonale del quadrato
- EH = AE sin(EAP)
- BOP è un triangolo rettangolo, in particolare
    - PBO = EAP = $\pi/12$
    - OP = BO tan PBO
- AH = AO + OP con AO la metà della diagonale del quadrato

mettendo tutto assieme:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}l}{2} + \frac{\sqrt{2}l}{2}\tan\frac{\pi}{12}\right)\cdot\left(l\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\sin\frac{\pi}{2}\cdot\left(1+\tan\frac{\pi}{12}\right)\cdot l^2.$$

Che può sembrare un risultato diverso dagli altri ma non lo è. Adesso concludiamo in bellezza con la soluzione di ***Br1***:

Beh, la figura che illustra la faccenda **APE** dovrebbe essere questa:



Qui la faccenda divertente è stata la ricerca Google dei due colori *trendy*; ne è venuto fuori:

Ultimate Gray: RGB(147, 149, 151)
Very Peri: RGB(103,105,166)

e la figura in alto ne rispetta le connotazioni[12].

Divagando, si è anche trovato che:

Il colore che la farà da padrone, dunque, è stato battezzato come Pantone 17-3938 Very Peri, che mira a "dare nuovo vigore a un mondo che cerca stabilità, resilienza e speranza", come sostiene il Pantone Color Istituto.

Tralasciando la personale ostilità verso il termine *resilienza*, passiamo al quesito; posto L = AB ed immaginando un sistema di riferimento cartesiano con origine in A, e tenendo conto che il triangolo ABE è equilatero, le equazioni delle rette r_{AC} ed r_{BE} che passano per i punti indicati dai pedici si ricavano essere:

$$\begin{cases} r_{AC} \rightarrow y = x \\ r_{BE} \rightarrow y = -\sqrt{3}x + L\sqrt{3} \end{cases}$$

Il punto **P**, come incrocio fra le due rette suddette, risulta essere caratterizzato come segue:

$$P_x = P_y = L\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

Si ricava poi facilmente:

[12] Inserisco una nota personale relativa ad una faccenda di cui a voi tutti ovviamente non importa giustamente nulla. Proprio oggi nel mio personale "*luogo da cui*" si stanno decidendo i colori con cui ridipingere la facciata del palazzo: battaglie condominiali inenarrabili fra RAL 1013 e RAL 1015… Sono esausto…

$$Area(AEB) = \frac{L^2}{4}\sqrt{3}$$

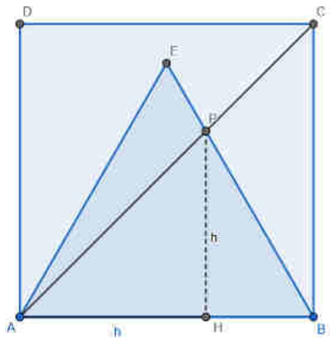
$$Area(APB) = L^2\frac{3-\sqrt{3}}{4}$$

Ed infine:

$$Area(APE) = Area(AEB) - Area(APB) = \frac{L^2}{4}\sqrt{3} - L^2\frac{3-\sqrt{3}}{4} = \frac{L^2}{4}\left(2\sqrt{3}-3\right)$$

I migliori (o più critici) di voi ci daranno un resoconto su quanti modi effettivi di soluzione abbiamo presentato. ***Franco57*** ha pensato che il problema fosse troppo facile e ne ha risolto un altro:

Il calcolo dell'area dell'APE non è difficile.



Poniamo AB=1. Chiamo H il piede di P su AB e HB=$h/\sqrt{3}$.

Allora AB=AH+HB diventa $1 = h + h/\sqrt{3}$ da cui

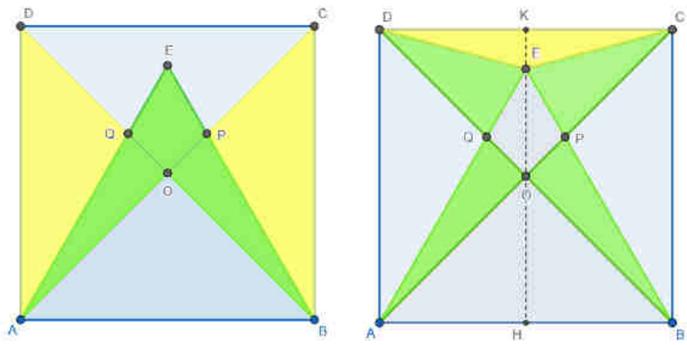
$$h=\frac{\sqrt{(3)}}{\sqrt{(3)}+1}=\frac{\sqrt{(3)}\cdot(\sqrt{(3)}-1)}{(\sqrt{(3)}+1)\cdot(\sqrt{(3)}-1)}=\frac{3-\sqrt{(3)}}{2}.$$

Indicando l'area di un poligono con le parentesi abbiamo dunque:

(ABP) = ½ AB · PH = $(3 - \sqrt{3})/4$ e (ABE) = $\sqrt{3}/4$ e quindi

(APE) = (ABE) – (ABP) = $\sqrt{3}/4 - (3 - \sqrt{3})/4 = \sqrt{3}/2 - 3/4$

Il risultato non è particolarmente simpatico, come invece l'equivalenza di alcuni poligoni che si vengono a formare, quelli colorati di giallo o di verde qui sotto nelle due figure rispettivamente:



Infatti per prima figura:

$$(BPC)=(ABC)-(ABP)=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{(3)}}{4}=\frac{\sqrt{(3)}}{4}-\frac{1}{4}$$

$$(AOBE)=(ABE)-(AOB)=\frac{\sqrt{(3)}}{4}-\frac{1}{4}=(BPC)$$

e per la seconda:

$$(OPB)=(OBC)-(BPC)=\frac{1}{4}-\left(\frac{\sqrt{(3)}}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{(3)}}{4}$$
$$(PEC)=(BCE)-(BPC)=(BCO)-(BPC)=(OPB)$$
$$(DCE)=\frac{1}{2}\cdot\overline{DC}\cdot\overline{EK}=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{(3)}}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{(3)}}{4}=(OBP)$$

Non so se è un caso, dopotutto si gioca sempre su polinomi di primo grado sulla radice di 3 con semplici frazioni come coefficienti, oppure se c'è sotto qualche proprietà più profonda.

Basta adesso, continuiamo con il secondo problema.

4.1.2 Gli Impredicibili

In questa sezione si incontrano sequenze di soli e lune, che generalmente sono romantiche, ma se proposte da Rudy fanno pensare a calcoli semi-probabilistici:

> *Definiamo una sequenza di m Lune e n Soli (con m>n) come non predicibile se c'è un qualche punto nella sequenza dove il numero dei Soli sia maggiore o uguale al numero delle Lune.*
>
> *Se* $m=7$ *e* $n=2$*, quante sono le sequenze non predicibili che iniziano per L?*
>
> *Se* $n=2$*, per qualsiasi valore di m maggiore di* 2*, sono più le sequenze non predicibili che iniziano per L o quelle che iniziano per S?*
>
> *Quante sono le sequenze non predicibili con* $m=10$ *e* $n=3$*?*

Per primo ci ha scritto ***Alberto R.***:

> Le possibili sequenze di m Lune ed n Soli sono $K=(m+n)!/m!\cdot n!$ come ci insegna il calcolo combinatorio.
>
> Tra di esse, se $m>n$, il numero di quelle non predicibili [perché questo strano nome?] dovrebbe essere $K\cdot 2n/(m+n)$.
>
> Che questa formula sia corretta è molto probabile visto che funziona, almeno con m ed n ragionevolmente piccoli. Ma non è certo perché l'ho ottenuta non per deduzione matematica ma (bestemmia!) per induzione sperimentale.

Visto che ***Alberto*** non si butta in dimostrazioni, vediamo la versione di ***Valter***, che ci ha inviato numerose revisioni:

> Il numero complessivo di sequenze possibili è $m+n$ su m oppure, indifferentemente, n binomiale. Per convincersene basta associare alle Lune gli interi da 1 a m e ai Soli quelli da $m+1$ a $m+n$. Tutte le possibili combinazioni di m di $m+n$ interi ammonta, come è noto, a $m+n$ su m binomiale.
>
> Associando ad ognuna le posizioni da sinistra delle m Lune e degli n Soli, le considero tutte. Conteggio i non predicibili, per tentare di individuare un algoritmo di calcolo riproducibile. Analizzo le sequenze che hanno una Luna in più dei Soli; per le mie possibilità è più che mai. Lascio a solutori più preparati di me altre casistiche e considerazioni proposteci dai Nostri.
>
> Abbrevio sequenze predicibili e non predicibili, con P e NP; … mi ricordano un altro problema.
>
> Con 4 Lune e 5 Soli:
>
> - il numero totale di sequenze, come mostrato più sopra, vale 9 su 4 binomiale, cioè 126
> - tutte quelle che iniziano da sinistra con S, SL, LS o terminano a destra con L, sono P
> - restano, quindi, solo le sequenze LL......S, con 3 Soli e Lune in mezzo, da analizzare
> - sono in tutto 6 su 3 binomiale = 20; per quanto detto so che almeno 126-20=106 sono NP

- tra le sequenze da analizzare, se iniziano con SS...., o terminano con ....LL, sono NP
- di entrambe ce ne sono 4 su 1, o stessa cosa 4 su 3, binomiale; in totale quindi 4*2=8
- sono conteggiate due volte le SS..LL in tutto 2 su 1 binomiale; le NP scendono a 8-2=6
- sono state analizzate tutte le possibili combinazioni; in totale le NP sono 106+6=112.

Nota: da qui in poi uso, per brevità, la notazione C(n,k), ad indicare n su k binomiale.

Con 5 Lune e 6 Soli; vado veloce in quanto, penso, sia evidente come "gira" l'algoritmo:

- numero complessivo sequenze C(11,5) = 462
- le LL........S possono essere P oppure NP
- le restanti: 462-C(8,4) = 462–70 = 392 NP
- le LLSS......S e pure LL......LLS sono NP
- sono 2*C(6,2) = 30, ma.ne conto due volte
- quella contate due volte sono LLSS....LLS
- bisogna quindi sottrarre da 30 C(6,2) = 6
- le LL(LL....LL)S sono P, restano le altre
- sono: LS....LS/LS....SL/SL....LS/SL....SL
- sono i 2^2=4 casi di LS/SL in testa e coda
- solo quelli con ..SSLL.. centrale sono NP
- in tutto le NP sono quindi 392+30–6+4=420.

Ho conteggiato le sequenze partendo da quelle con un solo Sole sino a sette; Soli=totale/NP-P: 1=3/2-1, 2=10/8-2, 3=35/30-5, 4=126/112-14, 5=462/420-42, 6=1716/1584-132, 7=6435/6006-429, ….

Il rapporto fra NP/P aumenta di 2 unità, ad ogni Sole che si aggiunge: 2, 4, 8, 10, 12, 14, …. Motivo la ragione più avanti, permette di calcolare le NP, partendo dal totale delle sequenze. Indicando con S il numero dei Soli si risolvere il sistema di equazioni: C(2S,S)=NP+P, NP/P=2S.

Dato un certo numero di Soli S, NP vale 2S*C(2S+1,S)/(2S+1) e P, ovviamente, C(2S+1,S)/(2S+1).

Se mostro come ottenere C(2S+1,S)/(2S+1) sequenze, ognuna con un P, giustifico la sua formula. La formula, infatti ci dice che sul totale delle sequenze, vi sono proprio un tal numero di P. Lo faccio dimostrando che:

- preso un P le 2S ottenute spostando, uno alla volta, l'ultimo a destra in testa risultano NP
- in un gruppo di sequenze ottenuto come prima ma partendo da una a caso è presente un unico P
- ogni sequenze è presente in un solo gruppo; questa affermazione è ovvia non merita motivarla
- in un gruppo le sequenze sono tutte diverse; si riesce facilmente derivarla dalle precedenti.

Per esempio con 3 Soli ho (da qui in poi evidenzio, per comodità, in **grassetto** le sequenze P):

- **LLLLSSS** SLLLLSS SSLLLLS SSSLLLL LSSSLLL LLSSSLL LLLSSSL
- **LLLSLSS** SLLLSLS SSLLLSL LSSLLLS SLSSLLL LSLSSLL LLSLSSL
- **LLLSSLS** SLLLSSL LSLLLSS SLSLLLS SSLSLLL LSSLSLL LLSSLSL

- **LLSLLSS** SLLSLLS SSLLSLL LSSLLSL LLSSLLS SLLSSLL LSLLSSL
- **LLSLSLS** SLLSLSL LSLLSLS SLSLLSL LSLSLLS SLSLSLL LSLSLSL.

Preso un P le 2S ottenute spostando, uno alla volta, l'ultimo a destra in testa risultano NP:

- ammettiamo, per assurdo, che vi siano almeno due P, in un gruppo
- sappiamo, per quanto detto, che iniziano per L e terminano per S
- chiamo L_1 e S_1 l'inizio e fine della prima e, L_2 S_2, della seconda
- la sequenza sarà $L_1 \ldots S_2 L_2 \ldots S_1$; quando L_2 passa in testa, S_2 è in coda
- uno dei due "…" deve avere, almeno, lo stesso numero di S e di L
- questo perché l'insieme dei due "…", ha un solo L in più degli S
- se è il primo "…", $L_1 \ldots S_2$ farebbe, della sequenza $L_1 \ldots S_2 L_2 \ldots S_1$, una NP
- discorso analogo con il secondo "…", per la sequenza $L_2 \ldots S_1 L_1 \ldots S_2$ NP.

In un gruppo di sequenze ottenuto come prima ma partendo da una a caso, è presente un unico P:

- che non ve siano di più è mostrato sopra; resta che sia presente
- ammettiamo che non ve ne siano; parto da una NP del gruppo di 2S
- per spiegarmi, mi servo di un caso concreto; ad esempio: LSSLLSL
- considero partendo da destra quando a sinistra S e L sono uguali
- ci deve essere per forza in quanto gli L sono uno in più degli S
- nel nostro caso è prima dell'ultimo L; per farmi capire LSSLLS|L
- quella che resta, a destra, è una sequenza P con numero S minore
- nel nostro caso, essendoci un unico L, il suo numero di S è zero
- eseguo tanti spostamenti sino a portare, tale sequenza, in testa
- nel nostro caso ottengo L|LSSLLS; se non è una P, posso ripetere
- nel nostro caso si deve spostare di nuovo da LLSS|LLS a **LLS|LLSS**
- per quanto detto, l'operazione è sempre possibile, in caso di NP
- ad un certo punto, quindi, non potendolo più, si è arrivati al P
- non si può, infatti, tornare a quella di partenza, che sarebbe P
- lo si intuisce facilmente, in quanto "composta" poi da "pezzi" P.
- lo mostro con altri esempi concreti:
  -- SLLSLS|L → LS|LLSLS → **LLSLSLS**
  -- LSLSLS|L → **LLSLSLS**
  -- SLLS|LLS → LLSS|LLS → **LLSLLSS**
  -- **LLLSLSS**.

Ho scritto un programmino che conta NP e P per vari valori di S/L (lo allego con una tabella di valori ottenuti; …potesse servire):

Soli	Lune	Totale NP+P	NP	P	NP / P
1	2	3	2	1	2
1	3	4	2	2	2/2
1	4	5	2	3	2/3
1	5	6	2	4	2/4
2	3	10	8	2	4
2	4	15	10	5	4/2
2	5	21	12	9	4/3
2	6	28	14	14	4/4
3	4	35	30	5	6
3	5	56	42	14	6/2
3	6	84	56	28	6/3
3	7	120	72	48	6/4
4	5	126	112	14	8
4	6	210	168	42	8/2
4	7	330	240	90	8/3
4	8	495	330	165	8/4
5	6	462	420	42	10
6	7	1'716	1'584	132	12

È facile ricavare le formule per ottenere i valori delle colonne (è sufficiente notare che il rapporto NP/P vale sempre 2S/(L-S)):

- Totale NP+P=C(S+L,S)
- P e NP incognite di:
    - NP+P=C(S+L,S)
    - P/NP= (L-S)/2S.

Al solito speriamo di aver scelto la revisione corretta ed il programmino ce lo teniamo noi, mentre passiamo la parola a ***GaS***:

Definiamo:

NP(m;n) il numero di disposizioni *Non Predicibile* per m Lune ed n Soli

NPS(m;n) il numero di disposizioni *Non Predicibili* che iniziano per "S"

NPL(m;n) il numero di disposizioni *Non Predicibili* che iniziano per "L"

Ovviamente si ha: NP(m;n)=NPS(m;n)+NPL(m;n)

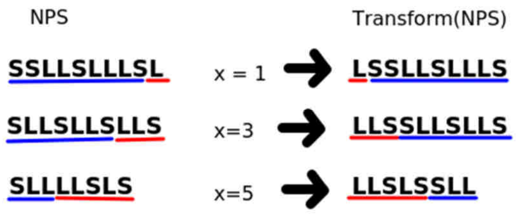
[Teorema 1] $\forall\ (m;n)$ NPS(m;n) = NPL(m;n)

[Dim]

Dimostriamo che le NPL sono pari alle NPS mostrando che esiste una corrispondenza biunivoca che trasforma una sequenza NPS in una sequenza NPL, e viceversa.

Data una generica sequenza NPS l'operazione di "trasformazione" è effettuata prendendo le ultime "x" lettere e portandole in cima alla sequenza; x è il minor numero possibile per il quale le ultime x lettere contengono più L di quante siano le S.

Qualche esempio servirà (spero) a chiarire il concetto:



Nei 3 esempi ho sottolineato in rosso le ultime x lettere da riportare in cima alla sequenza per trasformare una NPS.

Vediamo qualche immediata proprietà di questa trasformazione:

1. la sequenza in rosso comincia sempre con una L, in caso contrario x non sarebbe il "minor numero possibile"
2. il numero x di lettere "trasferite" è un numero dispari e la sequenza in rosso contiene sempre *esattamente* una L in più del numero di S ("1L e 0S", o "2L e 1S", o "3L e 2S", ecc…). Ne segue che, dopo aver posizionato la sequenza in rosso davanti a quella blu, che comincia per S (di partenza abbiamo una NPS), le prima (x+1) lettere della nuova sequenza saranno un numero uguale di L e di S
3. sequenza NPS diverse sono trasformate in sequenze diverse
4. la trasformazione è invertibile: partendo dalla sequenza di destra basta selezionare le prime x lettere e spostarle alla fine della sequenza; con il valore di x minore possibile tale che il numero di L sia esattamente uno in più del numero di S e per cui, contemporaneamente, la serie rimanente cominci con una S

Dalle proprietà 1 e 2 segue che la sequenza NPS, dopo la trasformazione, sarà una NPL.

Dalle proprietà 3 e 4 segue che la trasformazione è una corrispondenza biunivoca

Tale trasformazione ci permette di dimostrare che NPS(m;n) = NPL(m;n)

[CVD]

Dimostrato il teorema 1 calcoliamo adesso, per ogni m e per ogni n, quante sono le configurazioni totali possibili, predicibili o meno: avendo da posizionare (m+n) simboli di due classi differenti le sequenze possibili sono un totale di:

$$T(m;n)=\frac{(m+n)!}{m!\cdot n!}$$

Per ogni (m,n) le sequenze che cominciano con una S sono tutte ovviamente NP, ma quante sono? Dovendo posizionare, dopo la prima S, ancora m Lune e (n-1) Soli, in qualsiasi ordine, le sequenze di questo tipo sono:

$$NPS(m;n)=T(m;n-1)=\frac{(m+n-1)!}{m!\cdot(n-1)!}$$

Applicando il [teorema 1] abbiamo NP(m;n) = NPS(m;n) + NPL(m;n) = 2 NPS(m;n)

da cui:

$$NP(m;n)=2\cdot\frac{(m+n-1)!}{m!\cdot(n-1)!}$$

che è la formula generale per il numero di sequenze Non Predicibili.

Possiamo adesso rispondere alle domande, puntuali, presenti nel problema:

Se m=7 e n=2, quante sono le sequenze non predicibili che iniziano per L?

$$NPL(7;2)=\frac{(7+2-1)!}{7!\cdot(2-1)!}=8$$

Se n=2, per qualsiasi valore di m maggiore di 2, sono più le sequenze non predicibili che iniziano per L o quelle che iniziano per S?

Come già visto vale sempre la NPS(m;n) = NPL(m;n)

Quante sono le sequenze non predicibili con m=10 e n=3?

$$NP(10;3)=2\cdot\frac{(10+3-1)!}{10!\cdot(3-1)!}=132$$

Dalla formula generale possiamo calcolarci i primi valori della matrice (m;n):

n \ m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2		8	10	12	14	16	18	20	22
3			30	42	56	72	90	110	132
4				112	168	240	330	440	572
5					420	660	990	1430	2002
6						1584	2574	4004	6006
7							6006	10010	16016
8								22880	38896
9									87516

è interessante infine calcolare il valore percentuale F(m;n) del numero di sequenze NP rispetto alle sequenze totali:

$$F(m;n)=\frac{NP(m;n)}{T(m;n)}=2\cdot\frac{(m+n-1)!}{m!\cdot(n-1)!}\cdot\frac{m!\cdot n!}{(m+n)!}=2\cdot\frac{n}{m+n}$$

Il Capo è felicissimo, ovviamente, perché le sue generalizzazioni sono state prese al volo da quasi tutti i solutori, come ***Galluto***:

Generalizzo subito, e poi rispondo ai tre quesiti in base alla generalizzazione.

- Dati m ed n, il numero di sequenze diverse che posso ottenere è (m+n)! / (m! * n!) e cioè il valore che trovo sulla riga (m+n) del triangolo di

Tartaglia, nella posizione n. Nel seguito, uso come esempio il caso $m = 12$ e $n = 5$ (e quindi $m+n = 17$)

- Poiché $m > n$, mi basta la parte sinistra del triangolo di Tartaglia e per comodità (di excel ☺) la costruisco così:

↓m+n / n→	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7
8	1	8	28	56	70	56	28
9	1	9	36	84	126	126	84
10	1	10	45	120	210	252	210
11	1	11	55	165	330	462	462
12	1	12	66	220	495	792	924
13	1	13	78	286	715	1287	1716
14	1	14	91	364	1001	2002	3003
15	1	15	105	455	1365	3003	5005
16	1	16	120	560	1820	4368	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376
18	1	18	153	816	3060	8568	18564

- Dal mio punto di partenza, man mano che formo la sequenza risalgo lungo il triangolo; se uso una Luna e quindi ho ridotto di uno gli m disponibili salgo in verticale, se uso un Sole (e quindi riduco gli n) salgo in diagonale verso sinistra; nell'esempio, delle 6188 sequenze totali 1820 cominciano con una S e 4368 con una L.
- È chiaro che questo non vale per le righe superiori, perché il valore di una cella va moltiplicato per il numero di percorsi differenti con cui la posso raggiungere, ma questo lo vediamo più avanti; per il momento mi interessa di individuare le caselle in cui le sequenze indicate sono tutte Predicibili (Pre) o tutte non Predicibili (NoPre)
- Le caselle NoPre sono quella delle sequenze che cominciano con una S (le 1820 dell'esempio) e poi quelle dove il numero di L ed N usate è uguale (1 e 1, 2 e 2, …, 5 e 5) e sono evidenziate in rosso nella tabella più sotto
- Le caselle Pre sono quelle in cui sono state usate abbastanza L da rendere inutile una sfilza ininterrotta di tutte le S rimanenti e quindi ne sono state usate n+1 L (nell'esempio, 6); sono evidenziate in blu nella tabella

↓m+n / n→	0	1	2	3	4	5
7	1	7	21	35	35	21
8	1	8	28	56	70	56
9	1	9	36	84	126	126
10	1	10	45	120	210	252
11	1	11	55	165	330	462
12	1	12	66	220	495	792
13	1	13	78	286	715	1287
14	1	14	91	364	1001	2002
15	1	15	105	455	1365	3003
16	1	16	120	560	1820	4368
17	1	17	136	680	2380	6188

- A questo punto mi devo creare "l'albero dei moltiplicatori" per tenere conto, come detto prima, dei differenti percorsi per arrivare alla stessa casella; il numero di percorsi differenti, e quindi il valore da inserire in una casella è pari alla somma dei due valori che stanno nelle 2 caselle **sotto** (in verticale e a destra), ma non contando quelli corrispondenti ad una casella rossa o blu.

- Incidentalmente, l'albero, dato n, è sempre lo stesso; solo, trasla più in alto o più in basso in base ad m

↓m+n / n→	0	1	2	3	4	5
7	14	14	0	0	0	0
8	0	14	14	0	0	0
9		5	14	9	0	0
10		0	5	9	4	0
11			2	5	4	1
12			0	2	3	1
13				1	2	1
14				0	1	1
15					1	1
16					1	1
17						1

- Adesso moltiplico, casella per casella, i valori della prima tabella per quelli della seconda e ottengo:

↓m+n / n→	0	1	2	3	4	5
7	14	98	0	0	0	0
8	0	112	392	0	0	0
9	0	45	504	756	0	0
10		0	225	1080	840	0
11			110	825	1320	462
12				440	1485	792
13				286	1430	1287
14					1001	2002
15					1365	3003
16					1820	4368
17						6188

- Sommando le celle rosse e blu ho il totale delle sequenze NoPre (3640) e di quelle Pre (2548); la singola casella mi dice quante sono quelle con determinate caratteristiche; ad esempio, ci sono 756 sequenze che hanno 6 L e due S nelle prime 8 posizioni (ma non una S nella prima o nella seconda, o 2 S nelle prime quattro!), …

E veniamo ai tre quesiti specifici:

1. Per m=7 e n=2, quante sono le sequenze non predicibili che iniziano per L?

↓m+n / n→	0	1	2	0	1	2	0	1	2
5	1	5	10	1	1		1	5	0
6	1	6	15	0	1	1	0	6	15
7	1	7	21		1	1	0	7	21
8	1	8	28		1	1	0	8	28
9	1	9	36			1	0	0	36

sono 8: 7 che cominciano con LS (e poi la seconda S sta nelle sette posizioni restanti) e una che comincia con LLSS (e poi ci sono le altre 5 L)

2. Con n=2, per qualsiasi valore di m maggiore di 2, sono più le sequenze non predicibili che iniziano per L o quelle che iniziano per S?

Sono sempre in numero uguale, qualunque sia m. Basta guardare lo schema del quesito precedente: il moltiplicatore è sempre 1 e ce ne sono $m + 1$ che cominciano con S, contro m che cominciano con LS e 1 che comincia con LLSS

3. Quante sono le sequenze non predicibili con m=10 e n=3?

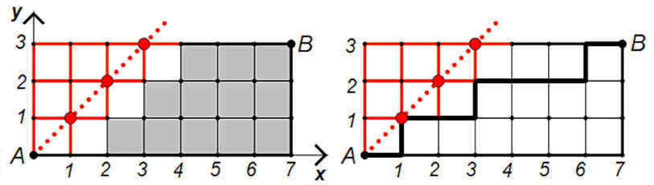
↓m+n / n→	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
7	1	7	21	35	2	2			2	14	0	0
8	1	8	28	56	0	2	2		0	16	56	0
9	1	9	36	84		1	2	1	0	9	72	84
10	1	10	45	120		0	1	1	0	0	45	120
11	1	11	55	165			1	1	0	0	55	165
12	1	12	66	220			1	1	0	0	66	220
13	1	13	78	286				1	0	0	0	286

Sommando le celle rosse… 132

Aggiungo io un quesito: come varia il rapporto tra Pre e NoPre al variare del rapporto tra *m* ed *n*? (risposta: cresce linearmente da 0 (per *m*=*n*) a 1 (per *m*=3*n*), a 2 (per *m*=5*n*), ecc., indipendentemente da *n*)

Anche un quesito in più! Dobbiamo trovare un modo di ancorare il Capo al pavimento o vola via. Ecco la soluzione di ***trentatre***:

Le sequenze sono *permutazioni* e il problema è di tipo combinatorio, ma preferisco impostarlo in forma geometrica, esteso ad ogni valore di *m* e *n*.

1 

Nell'esempio di fig. 1 un rettangolo di base $m = 7$ e altezza $n = 3$ diviso in quadrati unitari; indico con

- *x*, *y* : coordinate di centro *A*

- ***P*** : percorso di <u>lunghezza minima</u> da *A* al vertice opposto *B*, composto da $m + n$ tratti unitari orientati nel verso delle coordinate *x* e *y* crescenti; associando ai tratti orizzontali una *L* e a quelli verticali una *S*, ogni ***P*** corrisponde a una permutazione e viceversa

- ***Pn*** : i ***P*** *non predicibili*; ogni ***Pn*** deve passare per uno dei punti rossi sulla diagonale per *A*, dove le somme di *L* e *S* sono uguali; gli altri percorsi (*predicibili*) restano all'interno dell'area grigia - p.es. il percorso *LSLLSLLLSL* a destra è ***Pn*** perché nel punto $(1,1)$ tocca la diagonale.

Fissati *m* e *n*, il numero totale di ***P*** nel rettangolo è

[1] $\boxed{N = f(m,n) = \binom{n+m}{n}}$

- il numero totale di ***Pn***, per $m > n$, è

[2] $\boxed{Np = g(m,n) = 2 \cdot f(m,n-1) = 2 \cdot \binom{m+n-1}{n-1}}$

- ci sono tanti ***Pn*** che iniziano con *L* quanti quelli che iniziano per *S*; il loro numero *Nq* è pertanto la metà di [2]

[3] $\boxed{Nq = f(m,n-1) = \binom{m+n-1}{n-1}}$.

Per i tre problemi si ha

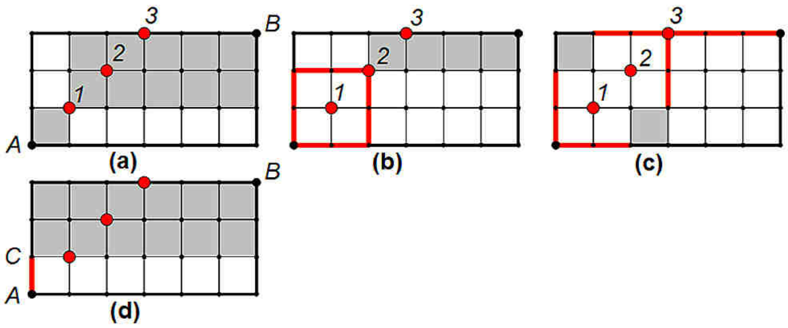
1° - $m = 7, n = 2$, da [3] $Nq = f(7,1) = \binom{8}{1} = 8$

2° - $n = 2, m > 2$, da [3] $Nq = f(m,1) = m + 1$, uguale nei due casi.

3° - $m,n = 10,3$, da [2] $Np = g(10,3) = 2 \cdot \binom{12}{2} = 132$.

<u>dimostrazioni</u>

La[1] è la nota formula per permutazioni di oggetti di due tipi diversi.



2

Sia in fig. 2 il caso con $n=3$ e m indeterminato (in figura limitato a 6 ma che si intende esteso a m)

- ogni ***Pn*** da *A* a *B* deve passare per uno dei punti rossi
- in (a), (b), (c) sono separati i ***Pn*** che incontrano per primo il punto 1,2,3
- i tratti rossi sono percorsi obbligati, che obbligano il passaggio al punto scelto - nei rettangoli grigi i valor *Np* parziali si calcolano con la formula [1]
- i contributi al valore *Np* totale sono

(a) punto 1 : $f(1,1)\cdot f(m-1,2)$

(b) punto 2 : $2\cdot f(m-2,1)$

(c) punto 3 : $2\cdot f(1,1)$

- applicando [1] il totale è $Np=2\cdot\binom{m+1}{2}+2\cdot\binom{m-1}{1}+4$
- la cui somma è $Np=2\cdot\binom{m+2}{2}=2\cdot f(m,2)$
- ripetendo il calcolo con altri valori di *n* vale sempre $Np=2\cdot f(m,n-1)$ cioè la [2].

Se i ***Pn*** iniziano con *S* dallo schema (d) si ha $Np=f(m,n-1)$ cioè la metà di [2] e quindi vale la [3].

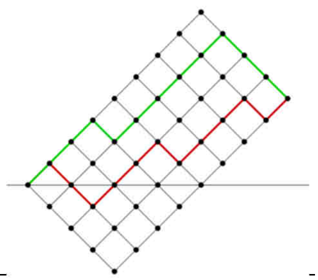
Beh, potete cominciare a decidere se le formule sono tutte diverse o tutte equivalenti fino a qui, ma suggeriamo di continuare a leggere fino alla fine, il problema è stato affrontato dai nostri più affilati risolutori, come avete visto. Il prossimo è il ***Panurgo***:

È interessante notare, nella formulazione del problema, il passaggio immediato alla rappresentazione: le sequenze di m Lune e n Soli diventano le sequenze *LLSSLLL* e *SLLLSL*.

Più formalmente, mettiamo in relazione biunivoca, per una sequenza, ogni statuetta della Luna con un esemplare della *lettera L* e ogni statuetta del Sole con un esemplare della *lettera S* e otteniamo una relazione biunivoca tra la sequenza e una *parola* ottenuta dall'alfabeto di due lettere $\{L,S\}$.

Da queste parole è necessario, per non banalizzare il problema, escludere la parola vuota ε (che ha $m=n$): ogni parola può essere pensata come preceduta dalla parola vuota quindi avremmo $\binom{m+n}{n}$ parole non predicibili, $\binom{m+n-1}{n}$ che cominciano con L e $\binom{m+n-1}{n-1}$ che cominciano con S.

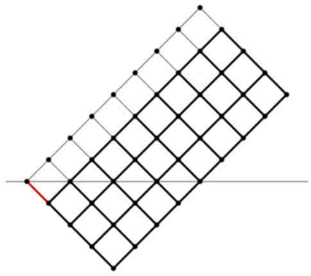
Dalle parole ai... grafi: se mettiamo in relazione, per le nostre parole, ogni lettera L con un passo $(1,1)$ e ogni lettera S con un passo $(1,-1)$ otteniamo una relazione biunivoca tra le parole stesse e i cammini sul reticolo degli interi: nella figura sono segnati, in verde, un cammino corrispondente ad una parola predicibile e, in rosso, un cammino corrispondente ad una parola non predicibile. Una parola contenente i esemplari di L e j



esemplari di *S* corrisponde ad un cammino che termina nel punto $(i+j, i-j)$: la retta orizzontale è l'asse orizzontale (corrispondente ai punti per cui $i = j$).

Ogni parola non predicibile che comincia con *L* deve tornare almeno una volta sull'asse. Prendiamo per esempio la parola *LSSLLLSLLLSL* (il cammino rosso in figura): se cominciamo da destra, le parole per cui $m \leq n$ sono *LS*, *LSS* e *LSSL*. La seconda di esse comincia con la prima, la terza con la prima e la seconda: poniamo quindi la seguente

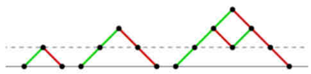
Definizione. P**arola non predicibile primitiva:** una parola non predicibile che non comincia con una parola non predicibile più corta.



Tutte le parole che cominciano con *S* (vedi figura) sono evidentemente non predicibili perché, per *S*, $m < n$; *S* non comincia con una parola più corta per cui è una parola non predicibile primitiva.

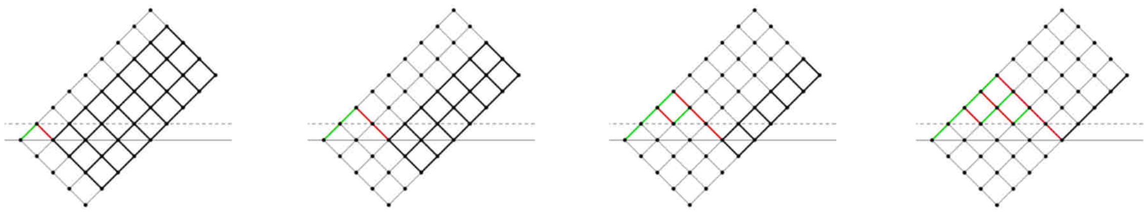
Le parole predicibili che cominciano con *S* sono presto contate: i cammini su un reticolo $m \times n - 1$ sono $N_S = \binom{m+n-1}{n-1}$.

A parte *S*, tutte le parole non predicibili primitive contengono un ugual numero di esemplari di *L* e di *S*: infatti, se iniziamo con *L* e aggiungiamo via via le lettere, per poter avere $m < n$ deve prima essere $m = n$ ovvero il cammino, prima di poter passare sotto l'asse, deve raggiungerlo e la parola successiva comincia con una parola non predicibile più corta.



I cammini che terminano sulla linea di partenza senza scendere sotto di essa sono i cammini di Dyck e sono contati dai numeri di Catalan, $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$: le parole non predicibili primitive di lunghezza $2k$ tornano sull'asse solo all'ultimo passo e il loro numero corrisponde a quello dei cammini di Dyck di lunghezza $2k - 2$, $C_{k-1} = \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}$.

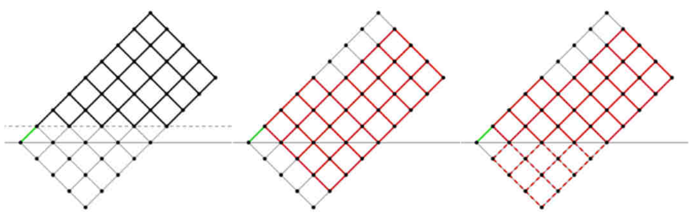
Per contare le parole non predicibili che cominciano per *L* consideriamo (vedi figura seguente) tutte quelle che cominciano con *LS*, poi quelle che cominciano con *LLSS*,



poi con *LLLSSS* e *LLSLSS* e così via fino alle parole non predicibili formate da n esemplari di *L* e *S*: avremo dunque

$$N_L = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}\binom{m+n-2k}{n-k}$$

Non ci resta ora che contare le parole predicibili, quelle che, dopo la prima *L*, non tornano mai sull'asse.



Invece di contare loro contiamo quelle (non predicibili) che, dopo la prima L, *tornano sull'asse almeno una volta*. E stavolta le contiamo con il metodo della riflessione: mirabilia, il loro numero è uguale a quello delle parole non predicibili che cominciano con S.

Sottraiamo N_L dal numero totale di parole che cominciano per L e avremo trovato il numero delle parole predicibili

$$P = \binom{m+n-1}{n} - \binom{m+n-1}{n-1} = \frac{m-n}{m+n}\binom{m+n}{n}$$

oltre a questa rimarchevole identità

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}\binom{m+n-2k}{n-k} = \binom{m+n-1}{n-1}$$

ovvero $N_L = N_S$.

Le risposte alle domande specifiche sono: 8; né le une né le altre; 66.

Come sta andando la lista delle risposte? Tutte uguali? La versione di ***Makaronik*** è la prossima, comincia con un disclaimer "*non penso che il calcolo combinatorio sia il mio forte...* ", decidete un po' voi:

Per prima cosa si può sostituire L ed S con +1 e –1 e definire tutte le possibili sequenze $\bar{\sigma}$

$$C^{m,n} := \left\{\bar{\sigma} := (\sigma_i)_{i=1\dots m+n} : \sigma_j = 1 \text{ per m indici}, \sigma_j = -1 \text{ per n indici}\right\}$$

E consideriamo il sottoinsieme *non predicibile*

$$\Pi^{m,n} := \left\{\bar{\sigma} \in C^{m,n} : \exists j \text{ tale che } \sum_{i=1}^{j} \sigma_i = 0\right\}$$

Per prima si può limitare la lunghezza massima di una sottosequenza per stabilire se sia o meno un elemento di $\Pi^{m,n}$.

Se $\bar{\sigma} \in \Pi^{m,n}$ allora j nella definizione è minore di $2n$.

Nel seguito $|A|$ sarà la cardinalità di un insieme A.

Tutte le sequenze composte da n+1 e n–1 nelle prime $2n$ posizioni e seguite da m–n+1 sono chiaramente *non predicibili*: infatti sia $\bar{\sigma}$ una di tale sequenze, allora $\sum_{i=1}^{2n} \sigma_i = 0$. Dal momento che queste sono un sottoinsieme delle sequenze *non predicibili*, dal calcolo combinatorio si ha

$$|\Pi^{m,n}| \geq \binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)\dots(n+1)n!}{n!} = 2n(2n-1)\dots(n+1).$$

Per cercare di capire quale possa essere la cardinalità di $\Pi^{m,n}$, a testa bassa, si potrebbe provare a iniziare ad enumerare le sequenze…

***n* = 2**: In questo *caso* abbiamo 3 *casi*:

(a) Le sequenze che partono per –1, tutte *non predicibile*: (–1; *)

(b) Le sequenze che partono con 2 +1, o meglio l'unica sequenza che parte con due +1: infatti affinché sia non predicibile devono seguire prima i 2 –1 e poi m–2. (1, 1, –1, –1, 1, …, 1)

(c) Le sequenze che partono con (1; –1): anche queste sono tutte *non predicibile*

Non rimane che contarle: le sequenze in (a) sono tutte le sequenze di m+n–1 = m+1 simboli con un solo –1 e tutti gli altri +1, vale a dire $\binom{m+1}{1} = (m+1)$. Le sequenze in (b) sono tutte le sequenze di m+n–2 = m simboli con un solo –1 e tutti gli altri +1, vale a dire $\binom{m}{1} = m$. Per cui, mettendo tutto assieme si trova

$$|\Pi^{m,2}| = (m+1) + 1 + m = 2(m+1).$$

In particolare le sequenze *non predicibili* che iniziano con +1 sono in numero eguale a quelle che iniziano con –1. A questo punto si può provare a *generalizzare come delle marmotte a Candelora*: dato che tutte le sequenze possibili sono $|C^{m,n}|\binom{m+n}{m!\,n!}$ si può trovare per quale valore di m le sequenze *non predicibili* sono in numero maggiore di quelle *predicibili*: si deve risolvere per quale m vale la relazione:

$$\frac{1}{2}|C^{m,n}| \leq |\Pi^{m,n}|,$$

mettendo le formule ottenute

$$\frac{1}{2}|C^{m,n}| = \frac{(m+2)(m+1)}{4} \leq 2(m+1) \Leftrightarrow m \leq 6.$$

***n* = 3**:[13] in questo caso abbiamo 5 casi e come prima possiamo usare il calcolo combinatorio per contarle:

(i) Le sequenze che partono per '–1', tutte *non predicibili*: (–1; *)

$$\Rightarrow |(i)| = \binom{m+n-1}{n-1} = \binom{m+2}{2}$$

(ii) Le sequenze che partono con 3 '+1', o meglio l'unica sequenza che parte con 3 +1: infatti affinché sia *non predicibile* devono seguire prima i 3 '–1' e poi m + 3 – 3 '+1'. (1, 1, 1, –1, –1, –1, 1, …, 1)

$$\Rightarrow |(ii)| = 1$$

(iii) Le sequenze che partono con (1; –1): anche queste sono tutte *non predicibili*

$$\Rightarrow |(iii)| = \binom{m+n-2}{n-1} = \binom{m+1}{2}$$

(iv) Le sequenze (1, 1, –1, –1, *): anche queste sono tutte *non predicibili*

$$\Rightarrow |(iv)| = \binom{m+n-4}{n-2} = \binom{m-1}{1}$$

(v) La sequenza (1, 1, –1, 1, –1, –1, –1, 1, …, 1)

$$\Rightarrow |(v)| = 1$$

$$|\Pi^{m,3}| = \binom{m+2}{2} + \binom{m+1}{2} + \binom{m-1}{1} + 2$$

$$= \binom{m+2}{2} + \binom{m+1}{2} + m + 1$$

$$= \binom{m+2}{2} + \binom{m+1}{1+1} + \binom{m+1}{1} = \left[\binom{m}{n+1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n+1}\right]$$

$$\binom{m+2}{2} + \binom{m+2}{2} = 2\cdot\binom{m+2}{2} = 2\frac{(m+2)!}{2!m!} = (m+2)(m+1)$$

In particolare le sequenze *non predicibili* che iniziano con +1 sono in numero eguale a quelle che iniziano con –1. Anche in questo caso si può trovare per quale valore di m le sequenze *non predicibili* sono in numero maggiore di quelle *predicibili*: si deve risolvere per quale m vale la relazione:

$$\frac{1}{2}|C^{m,n}| \leq |\Pi^{m,n}|,$$

$$\frac{1}{2}\frac{(m+3)!}{3!m!} = \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{12} \leq (m+2)(m+1)$$

Il che porta ad avere $m \leq 9$.

Per il caso $n \geq 4$: sia $A_{m,n,k}$ l'insieme delle sequenze di lunghezza $m+n$ con k '+1' e altrettanti '–1' nelle prime $2k$ posizioni. Per prima cosa si deve calcolare il numero di sequenze comuni per A e il suo successivo, vale a dire:

[13] Giuro che è l'ultimo!

$$A_{m,n,k} \cap A_{m,n,k+1}$$

così che si possano sommare le cardinalità dei vari insiemi e sottrarre le sequenze parti comuni ...*Hanc marginis exiguitas non caperet*...

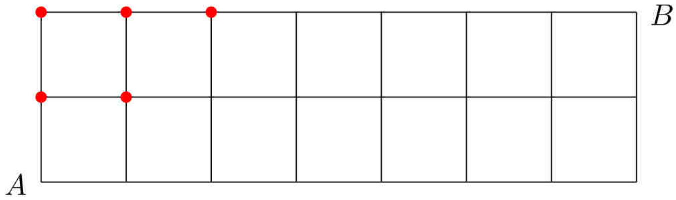
... che ci sembra il modo giusto per concludere questa soluzione piena di citazioni *rudi* che ci ha stremati per convertirla nel formato di RM, ma speriamo ne sia valsa la pena e di non aver introdotto troppi errori. Ed ora un'altra soluzione del nostro commutante duo ***A.B.***:

Una sequenza è non-predicibile quando il numero di S è maggiore o uguale al numero di L (entrambi contati partendo da sinistra). Quindi qualunque sequenza che cominci con S è non-predicibile. Se la sequenza inizia per L allora, chiamati m ed n il numero di L ed S nella sequenza (con $m>n$), se nelle prime $2n$ posizioni sono presenti tutte le S la sequenza è sicuramente non-predicibile. L'implicazione inversa non vale, basti considerare ad esempio la sequenza non-predicibile LSLLL...L SS...S. Andiamo con ordine.

- Caso m=7, n=2: Avendo due sole S, c'è una sola sequenza non-predicibile del tipo LLSSLLLLL, e tante sequenze del tipo LS... quanti sono i modi di posizionare la S rimanente nei rimanenti 7 posti, cioè in totale ci sono 8 sequenze non-predicibili che cominciano con L;
- Caso m=?, n=2: A prescindere da m, siccome n=2, allora abbiamo di nuovo una combinazione LLSSL... e tante combinazioni LS... quanti sono i modi di posizionare la seconda S nei rimanenti m posti, quindi ci sono m+1 sequenze non-predicibili che cominciano con la L. Notiamo che la sequenza LSLSL... è inclusa nel secondo tipo di sequenze considerate.

Se la sequenza comincia con S, ci sono tante sequenze non-predicibili quanti sono i modi di posizionare la seconda S nei rimanenti m+1 posti, quindi il numero di sequenze nei due casi è uguale.

Prima di andare al caso generale, è utile riformulare il problema. Un modo per analizzare la situazione è quello di supporre che ogni L corrisponda a muoversi di Lato verso destra di un'unità, mentre S corrisponda a muoversi in Su di un'unità. Chiaramente, nessuna mossa corrisponde al muoversi in basso o a sinistra. Il caso m=7, n=2 corrisponde quindi alla figura seguente



Completare la sequenza vuol dire muoversi dall'angolo in basso a sinistra (vertice A) all'angolo in alto a destra (vertice B), potendosi muovere solo verso l'alto e verso destra. Come convenzione, assegniamo ad A le coordinate (0, 0). Ogni volta che, dopo esserci mossi, ci troviamo in uno dei pallini rossi, la sequenza che descrive i nostri spostamenti è non-predicibile. Il numero di sequenze non predicibili corrisponde quindi al prodotto, per ogni puntino rosso, del numero dei percorsi che partendo da A lo raggiungono, per il numero di percorsi dal punto rosso in questione a B. A questo punto è necessaria una piccola parentesi su come contare il numero di questi percorsi.

Dal momento che un vertice (i, j) può essere raggiunto solo da sotto o da sinistra, il numero di modi in cui lo si può raggiungere è uguale alla somma del numero di modi per raggiungere il vertice (i, j–1) subito sotto e il vertice (i–1, j) subito a sinistra. Se uniamo questo al fatto che c'è un solo modo per partire, otteniamo che il numero di modi per raggiungere uno qualunque dei vertici è sicuramente un numero del triangolo di Tartaglia. Più in generale, dato un rettangolo p×q (con

$p<q$), il numero di percorsi per andare da A a B (definiti come in figura sopra) sarà dato da (daremo la dimostrazione di questo fatto alla fine)

$$\#\text{percorsi} = \binom{p+q}{p}$$

Per esempio, nel caso di m=7, n=2, il numero di percorsi generici per andare da A a B sarà

$$\#\text{percorsi} = \binom{7+2}{2} = \frac{9!}{2!7!} = 36$$

mentre se volessimo calcolare quanti sono i percorsi non-predicibili che cominciano per S, dovremmo contare il numero di percorsi dal punto rosso di coordinate (0, 1) a B, che sono $\binom{7+1}{1} = 8$, e infatti ci sono 8 sequenze che cominciano per S.

Possiamo subito ottenere il numero di percorsi non-predicibili che iniziano con S (PNPS). Questi saranno infatti semplicemente il numero di percorsi per andare da (0, 1) a (m, n) in un rettangolo $n\times m$ (con $n<m$). Quindi

$$\#\text{PNPS} = \binom{m+n-1}{n-1}$$

Possiamo ora ottenere il numero di percorsi non-predicibili che cominciano per L. Il ragionamento è lunghetto ma non troppo complicato. Affinché una sequenza cominci con L e sia non predicibile, dobbiamo a un certo punto incontrare un vertice "della diagonale", cioè un vertice con coordinate (k, k). Il numero di modi con cui possiamo raggiungere il vertice (1, 1) è

$$P_1 = \frac{1}{2}\binom{1+1}{1} = 1$$

dove il fattore ½ serve ad eliminare la sequenza che comincia con S. Per il punto (2, 2) avremo $\frac{1}{2}\binom{2+2}{2}$ percorsi totali (il fattore ½ elimina sempre i percorsi che cominciano con S), ma dobbiamo togliere tutti quelli che iniziano con L e che hanno attraversato (1, 1). Quest'ultimo numero è dato da P_1 moltiplicato per il numero di percorsi da (1, 1) a (2, 2). Quindi

$$P_2 = \frac{1}{2}\binom{2+2}{2} - P_1 \times \binom{1+1}{1} = \frac{6}{2} - 2 = 1$$

Analogamente, per calcolare P_3 avremo $\frac{1}{2}\binom{3+3}{3}$ percorsi totali che cominciano per L. Dobbiamo togliere i percorsi che iniziano per L e passano per (1, 1) (nota: questo set contiene anche i percorsi che attraversano sia (1, 1) che (2, 2)), e quelli che passano per (2, 2).

$$P_3 = \frac{1}{2}\binom{3+3}{3} - P_2 \times \binom{1+1}{1} - P_1 \times \binom{2+2}{2} = \frac{20}{2} - 1\times 2 - 1 \times 6 = 2$$

In generale, quindi, si ha

$$P_k = \frac{1}{2}\binom{k+k}{k} - P_{k-1}\binom{1+1}{1} - P_{k-2}\binom{2+2}{2} - \cdots - P_1\binom{k-1+k-1}{k-1}$$

In conclusione, dato un rettangolo $n\times m$ (con $n<m$), quindi, il numero di percorsi non-predicibili che cominciano con L (PNPL) sarà dato dalla seguente espressione

$$\#\text{PNPL} = P_1 \times \binom{m-1+n-1}{n-1} + P_2 \times \binom{m-2+n-2}{n-2} + \cdots + P_n \times \binom{m-n}{0}$$

Nel caso specifico di m=10, n=3 avremo quindi

$$\#\text{PNPL} = P_1\binom{9+2}{2} + P_2\binom{8+1}{1} + P_3\binom{7}{0} = \frac{11!}{2!9!} + \frac{9!}{1!8!} + 2\frac{7!}{0!7!} = 11\times 5 + 9 + 2 = 66$$

Prima di passare alla dimostrazione della formula descritta sopra relativo al conteggio dei percorsi da A a B, facciamo alcuni commenti sulla definizione induttiva di P_k data sopra. In particolare, vogliamo cercare di capire se sia possibile ottenere una formula chiusa per P_k. Ci limitiamo qui a P_2, P_3, P_4 perchè li abbiamo calcolati, ma gli stessi calcoli possono essere ripetuti per P_k con k generico. Scriviamo i risultati precedenti in modo leggermente diverso

$$P_2 = -\frac{1}{2}\left[-\binom{2+2}{2}+\binom{1+1}{1}\binom{1+1}{1}\right]$$

$$P_3 = -\frac{1}{2}\left[-\binom{3+3}{3}+2\binom{1+1}{1}\binom{2+2}{2}-\binom{1+1}{1}\binom{1+1}{1}\binom{1+1}{1}\right]$$

$$P_4 = -\frac{1}{2}\Big[-\binom{4+4}{4}+\binom{2+2}{2}\binom{2+2}{2}+2\binom{1+1}{1}\binom{3+3}{3}-3\binom{1+1}{1}\binom{1+1}{1}\binom{2+2}{2}$$
$$+\binom{1+1}{1}\binom{1+1}{1}\binom{1+1}{1}\binom{1+1}{1}$$

Calcoliamo ora le partizioni dei numeri 2, 3, 4, vale a dire i modi in cui possono essere riscritti come somme di numeri interi. Chiamiamo (non a caso) $P(n)$ l'insieme dei modi in cui un numero intero può essere scritto come somma di interi. Avremo

$$P(2) = \{\{2\},\{1,1\}\}$$

$$P(3) = \{\{3\},\{1,2\},\{1,1,1\}\}$$

$$P(4) = \{\{4\},\{2,2\},\{1,3\},\{1,1,2\},\{1,1,1,1\}\}$$

Come vediamo immediatamente, c'è una relazione biunivoca tra ciascun elemento di $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ e ciascuno degli addendi di P_2, P_3, P_4 (il fattore globale $-½$ presente in P_2, P_3, P_4 non modifica la relazione in questione). Ad esempio

$$\{1,1,2\} \leftrightarrow 3 \times \left[-\binom{1+1}{1}\right]\left[-\binom{1+1}{1}\right]\left[-\binom{2+2}{2}\right]$$

dove il 3 rappresenta il numero di modi in cui è possibile la suddivisione, vale a dire i seguenti 3 modi

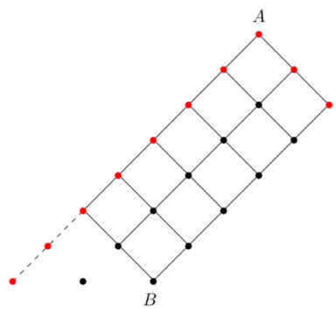
$$4 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1.$$

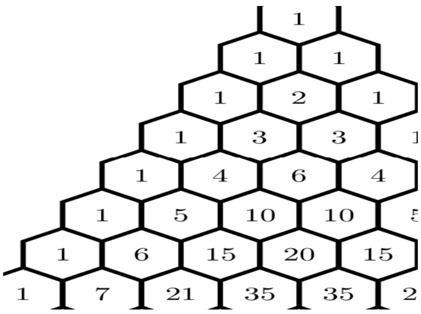
Tuttavia, non esiste nessuna formula chiusa che dica quali e quanti elementi sono presenti in $P(n)$, e data la relazione tra $P(n)$ e P_n ci sentiamo di congetturare che non esista nemmeno una formula chiusa per P_n. Come piccola curiosità storica, il primo matematico a trovare una formula approssimata per il numero di partizioni di un intero è stato Ramanujan, e la sua famosa formula contiene (molto sorprendentemente) e, π, i, $\sqrt{2}$ e anche derivate.

Tornando a noi, l'ultimo ingrediente rimasto è la dimostrazione del fatto che il numero di percorsi da A a B di un rettangolo $p\times q$ (con $p<q$) è data da

$$\#\text{percorsi} = \binom{p+q}{p}$$

Dimostrazione: Per rappresentare l'idea della dimostrazione, usiamo un rettangolo $(p=2)\times(q=5)$, e per comodità lo orientiamo come in figura sotto (i vertici rossi hanno valore 1)





Dalla figura è chiaro che il numero di Tartaglia corrispondente al vertice B è uno dei coefficienti dell'espansione di $(a+b)^7$, e in particolare il terzo coefficiente. Dato che

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

il terzo coefficiente dell'espansione di $(a+b)^7$ sarà

$$\binom{7}{2} = \binom{p+q}{p}$$

Per p e q generici, è sufficiente notare che la rispettiva riga del triangolo di tartaglia è uguale alla somma dei lati del rettangolo (perché la linea tratteggiata in figura sopra avrà sempre lunghezza p), e noi cerchiamo il $p+1$-esimo coefficiente (perché stiamo contando i punti sulla diagonale di un piccolo quadrato di lato p, che quindi ha $p+1$ punti). Quindi abbiamo dimostrato che la relazione

$$\#\text{percorsi} = \binom{p+q}{p}$$

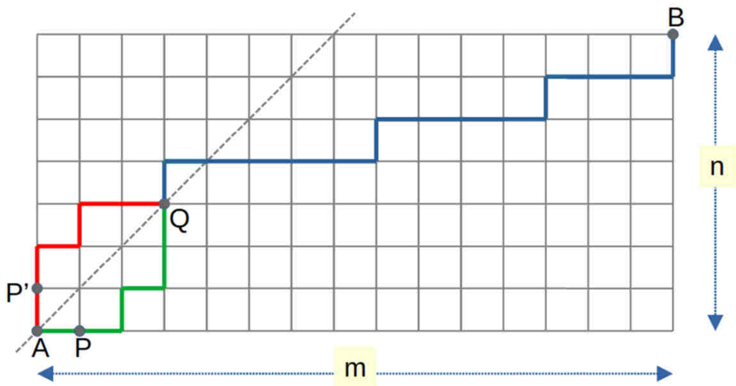
è valida.

Proprio mentre chiudevamo questo capitolo è arrivata ancora la soluzione di ***Franco57***, anche lei imperdibile:

Ho avuto un'idea che rende la soluzione lampante ed evita i calcoli.

Nel disegno rappresento tutte le possibili sequenze di m Lune e n Soli come percorsi nella griglia $m \times n$ da A in basso a sinistra ad B in alto a destra, dove una statuina del Sole corrisponde ad un tratto orizzontale verso destra e una statuina della Luna ad un tratto verticale verso l'alto. La diagonale tratteggiata rappresenta le sotto-sequenze con tanti Soli quante Lune. Il numero di possibili sequenze predicibili o non predicibili, è ovviamente pari al numero di combinazioni di m Lune (oppure di n Soli) nella sequenza di $m+n$ statuine, quindi vale $\binom{m+n}{n}$.

Se la prima statuina è del Sole finisco in P' e la sequenza è non predicibile. Se invece è della Luna finisco in P e può essere predicibile o meno. Sarà non predicibile se e solo se incrocia la linea tratteggiata, cioè se a un certo punto i Soli pareggiano le Lune. Nel disegno ho colorato in verde la prima parte di una tale sequenza, fino all'incrocio (al primo incrocio per la precisione) con la linea tratteggiata in Q, e in blu la seconda parte.



Qui viene l'idea: se faccio una riflessione rispetto alla linea tratteggiata del sotto-percorso in verde ottengo un sotto-percorso, qui rappresentato in rosso, che parte da P' e arriva in Q. Se poi lo raccordo col sotto-percorso in blu ho come risultato un percorso generico da P' a B! È facile verificare che viceversa ogni percorso da P' a B corrisponde in questo modo a un percorso da P a B che incrocia la linea tratteggiata. (Nell'esempio la sequenza non predicibile iniziante per L LLSLSSSLLLLLSLLLLSLLLS diventa SSLSLLSLLLLLSLLLLSLLLS, ovviamente anch'essa non predicibile, invertendo L con S nelle prime 6 posizioni, esattamente quando il numero di Soli raggiunge il numero delle Lune.)

Insomma ho trovato una corrispondenza biunivoca che mi dice che le sequenze non predicibili che passano da P sono tante quelle che passano da P'.

Allora le sequenze non predicibili sono in totale

$$NP_{m,n}=2\cdot\binom{m+n-1}{m}.$$

Per trovare quelle predicibili tolgo a tutti i percorsi da P a B quelli che toccano la diagonale tratteggiata, quindi ottengo

$$P_{m,n}=\binom{m+n-1}{n}-\binom{m+n-1}{m}.$$

Si chiede poi, mi pare, per quali valori di m e n le sequenze predicibili sono più di quelle non predicibili: $P_{m,n}\geq NP_{m,n}$ diventa

$$\binom{m+n-1}{n}-\binom{m+n-1}{m}\geq 2\cdot\binom{m+n-1}{m},$$

cioè

$$\frac{(m+n-1)!}{n!\cdot(m-1)!}\geq 3\cdot\frac{(m+n-1)!}{(n-1)!\cdot m!}$$

che si semplifica in $m\geq 3n$.

Dunque se le Lune sono 3 volte i Soli allora ci sono tante sequenze predicibili quanto non predicibili.

Adesso prendiamo il fiato e ci fermiamo a riposare per un paio di mesi. Alla prossima!

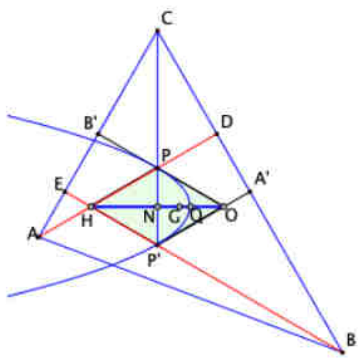
5. Quick & Dirty

Dati tre cerchi di raggio r mutuamente tangenti, le parti delle circonferenze comprese tra i punti di tangenza sono cancellate, lasciando una figura a trifoglio.

Qual è il perimetro del trifoglio?

6. Pagina 46

Siano A' e B' i punti medi rispettivamente dei lati BC e CA, le cui lunghezze siano rispettivamente a e b e supponiamo sia $a>b$, come nel disegno a fianco (dovendo i punti H, N, G, Q e O essere distinti, non è possibile che sia $a=b$). Siano inoltre D e E i piedi delle altezze da A e B e siano P e P' i punti di intersezione delle altezze AD e BE con i bisettori perpendicolari dei lati AC e BC. Quindi, il quadrilatero OPHP' è un parallelogramma.



Essendo l'angolo in C di 60°, dai triangoli rettangoli ACD e BCE si ricava CD=CA/2=b/2 e CE=CB/2=a/2, quindi:

DA' = CA' – CD = ½(a – b) e B'F = CE – CB = ½(a – b)

ossia il parallelogramma OPHP' è un rombo, in quanto le distanze tra le coppie di lati paralleli sono uguali.

Essendo i lati dell'angolo POP' perpendicolari ai lati dell'angolo ACB, si ha che l'angolo POP' vale anch'esso 60°; dato che la diagonale di un rombo biseca gli angoli che connette, si ha anche che POH=HOP=30°.

Noto che nella linea di Eulero di un qualsiasi triangolo i punti sono posizionati in modo tale che il centroide G divide il segmento che unisce il centro dei nove punti al circocentro

O in un rapporto 1:2, possiamo introdurre un sistema di coordinate centrato al punto medio Q di NO e quindi avere N=(0,3), G=(0,1) e O=(0,–3).

Segue quindi che la retta OP, formando un angolo di 30° con l'asse y, ha un coefficiente angolare pari a tan 60° = $\sqrt{3}$ e equazione $y = \sqrt{3}x - 3$, mentre la parabola con fuoco in G e vertice in Q ha equazione $y = \frac{1}{4} x^2$.

Si verifica facilmente che OP è tangente alla parabola nel punto P($2\sqrt{3}$, 3), come richiesto; per simmetria, l'altro bisettore perpendicolare (OP') è tangente alla medesima parabola in P'($-2\sqrt{3}$, 3).

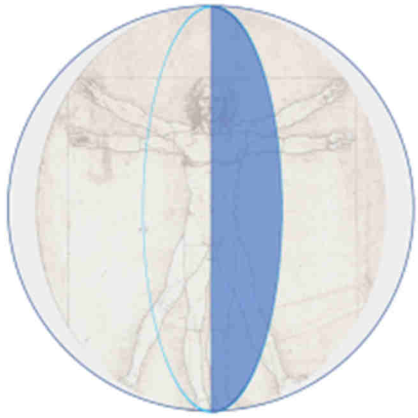
7. Paraphernalia Mathematica

Continuiamo la nostra marcia a tappe forzate attraverso i meandri della simmetria secondo Conway; tranquilli, dovrebbe essere l'ultimo passaggio (il condizionale è d'obbligo, quando si parla di Conway). E cominciamo con una buona notizia, per finire con una (neanche poi tanto) vecchia amica.

7.1 Sulla Terra, costa meno

Sinora, abbiamo esaminato le strutture di simmetria sul piano; essendo però il mondo nel quale viviamo tridimensionale, diventa quasi immediato generalizzare il tutto ad uno spazio almeno[14] tridimensionale, visto che gli umani e gli oggetti con i quali siamo quotidianamente in contatto hanno delle simmetrie.

Un problema simile si incontra quando cercate una struttura nell'universo visibile (che per ora supporremo meramente tridimensionale): per semplificarci la vita, si suppongono tutte le stelle attaccate ad una "sfera celeste" e si comincia a definire strutture, aterismi e costellazioni su questa sfera. Cercando poi di portarla a pezzi nel piano, ma per ora questo problema non ci interessa.



5 *"A roughly bilateral symmetry…".*

Per il nostro Uomo Vitruviano, vediamo che è sufficiente un piano di simmetria che divida in due parti la nostra "sfera celeste" secondo la verticale; più praticamente, il nostro soggetto è dotato di *simmetria blilaterale*. Essendo uno, ed essendo a tutti gli effetti uno "specchio", abbiamo già pronto il simbolo per descriverne la simmetria: "*****".

Se andate a rivedervi la "tabella dei costi" nella puntata precedente, vedete che questa simmetria costa un dollaro, quindi è più economica rispetto a tutte quelle del piano, che (via Teorema Magico) avevamo stabilito dovessero costare due dollari.

Se proviamo con altri oggetti, possiamo scoprire simmetrie anche più complesse: ad esempio, un tavolo ha *due* piani di simmetria, che hanno, sulla sfera, *due* punti di intersezione nei quali formano angoli a 90°: questo significa che il nostro tavolo ha, dal punto di vista delle simmetrie, una signature ***22**, e quindi ha un costo:

$$1 + ¼ + ¼ = 3/2,$$

che è anch'esso *minore* del costo sul piano.

6 *Qui lasciamo la matita a Conway…*

Sembra sia necessario introdurre qualche nuovo parametro: qui, le cose costano molto meno che sul piano, e quindi consideriamo il concetto di ***resto*** (inteso nel senso più monetario del termine): se noi paghiamo i soliti due dollari ma siamo su una sfera, quanto ci viene dato di resto?

Indichiamo questa funzione[15] con R: sul piano euclideo

[14] Tranquilli, ci fermiamo a tre. Per ora.

[15] Conway deriva il suo simbolo dall'espressione inglese *change*, utilizzando *ch*. Sappiamo già che ci perderemo alcuni sottili giochi di parole, ma abbiamo speranza di smettere prima.

vale sempre zero, ma questo non è vero sulla sfera: qui, ricevete un resto sempre pari a 2 diviso il numero delle simmetrie.

Da cui, abbiamo il ***Teorema magico per le strutture sferiche***: la signature di una struttura sferica costa $2 - 2/g$, dove g è il numero totale delle simmetrie.

In particolare, ma non stiamo a dimostrarlo, il resto è sempre positivo: non solo, ma questa versione del teorema magico è una generalizzazione di quella vista prima: infatti, sul piano abbiamo $g=\infty$, il che implica che il secondo termine della nostra espressione valga zero.

Quindi, le nostre simmetrie sferiche vengono ad essere:

*532	*432	*332	*22N	*MN
				N*
		3*2	2*N	N×
532	432	332	22N	MN

Dove M e N rappresentano interi positivi arbitrari di valore maggiore o uguale a 1: in realtà, come vedremo a breve, esiste una clausola supplementare: infatti ***deve essere*** $M=N$. Ma iniziamo ad esaminare i diversi tipi, come la volta precedente.

Per quanto riguarda i ***veri blu***, dovendo il prezzo essere strettamente inferiore a due dollari, non possiamo permetterci le meraviglie o di avere più di tre cifre (ricordando che i valori "1" non si indicano e quindi non si pagano); il simbolo più generale possibile con meno di tre cifre è **MN**, e oggetti di questo tipo costano sempre meno di due dollari e sono possibili: ricordiamoci però che abbiamo la limitazione $M=N$. Se poi abbiamo tre cifre, allora almeno una deve essere pari a 2: quindi abbiamo **22N** (se abbiamo due o più 2) e, nel caso di un solo 2, **532**, **432** e **332**.

Se passiamo ai ***rossi riflessivi***, notiamo che devono tutti avere la forma ***AB...N**, in quanto non possiamo permetterci di pagare due asterischi. Dovendo essere il resto positivo, siccome sappiamo che *il resto dei rossi riflessivi è la metà del resto dei veri blu*, possiamo stabilire una corrispondenza tra i due insiemi, sempre ricordando che deve essere $M=N$, e quindi anche qui ne vengono generati cinque.

Per gli ***ibridi***, possiamo utilizzare le stesse regole di "promozione" che abbiamo utilizzato sul piano, e si verifica che sono possibili le promozioni secondo le "colonne" della tabella indicata sopra; nell'ultima colonna, **N*** può essere promosso a **N**×.

Dopo aver utilizzato la clausola $M=N$ per calcolare quanti sono i diversi tipi di simmetria sulla sfera, è il caso di provare quantomeno a giustificarla.

Nel piano, quando abbiamo generato il caso ***442**, abbiamo utilizzato un caleidoscopio triangolare con angoli ($\pi/4$, $\pi/4$, $\pi/2$); nello stesso modo, sulla sfera possiamo costruire un caleidoscopio ***532**, con angoli ($\pi/5$, $\pi/3$, $\pi/2$), in quanto esiste un triangolo *sferico* con questi angoli. In genere, su una sfera è possibile costruire dei *poligoni* nei quali la somma degli angoli interni eccede quella che è la somma degli angoli interni dell'equivalente poligono sul piano. E (spoiler) anche qualcuno in più.

Torniamo alla nostra clausola supplementare: quando esiste una simmetria ***MN**, questa deve essere generata da un *duagono* (insomma, un poligono con due lati) avente angoli π/M e π/N, *ma questo è possibile solo se* $M=N$.

"Rudy, come è fatto un *duagono*?" Niente di più semplice: avete presente uno spicchio d'arancia? Ecco, tenete solo la buccia.

Adesso, un breve ripasso sui gruppi. Quelli facili.

Possiamo definire i gruppi in base alla loro *equazione caratteristica*, ossia il modo che utilizziamo per esprimere l'unità in funzione dell'operazione (e degli elementi) e del gruppo; in particolare, per $n>2$, possiamo definire:

Tipo	Equazione Caratteristica
Ciclico	$a \cdot a^n = 1$
Diedrico	$(a, b) \cdot c^n = b^2 = (ab)^2 = 1$
Poliedrico	$(a, b, c)\, a^n = b^3 = c^2 = abc = 1$
$2 \times G$	Prodotto diretto di G con un gruppo di ordine 2

E possiamo passare alla catalogazione dei nostri gruppi (sorvolando sui colori: lo fa Conway, possiamo permettercelo anche noi).

- Tutti i gruppi di tipo **NN** o **N×** sono ***ciclici***, ed esistono per qualsiasi ordine.
- I gruppi di tipo **22N** e ***NN** esistono solo per gli ordini *pari*, e sono ***diedrici***.
- I gruppi di tipo **N*** esistono anche loro solo per gli ordini *pari*, ma gli ordini multipli di 4 sono di tipo $2 \times C$ mentre gli altri sono *ciclici*; attenzione che comunque qui "*N*" è la metà dell'ordine del gruppo.
- I gruppi di tipo **2*N** esistono solo per gli ordini multipli di 4 (e $2N$ è la metà dell'ordine del gruppo) e sono ***diedrici***.
- I gruppi di tipo ***22N** esistono solo per ordini multipli di 4; se l'ordine è un multiplo di 8 sono $2 \times D$, altrimenti sono ***diedrici***.

7 *Questa è qui solo per fare contento Doc.*

Più "un po' di roba strana": i gruppi **332** (ordine 12), ***332**, **432** (ordine 24), ***432** (ordine 48) e **532** (ordine 120) sono *poliedrici* (...indovinate un po' perché si chiamano così...), mentre i gruppi **3*2** (ordine 24) e **532** (ordine 60) sono di tipo $2 \times P$.

...e state attenti che alcuni ordini "non esistono" (qui, almeno).

Quindi, nel nostro mondo sferico[16], abbiamo sette famiglie infinite di simmetria e sette tipologie individuali.

Per quanto riguarda i caleidoscopi poliedrici, non è difficile (secondo Conway: noi non ci pensiamo neanche) tagliare opportunamente delle superfici riflettenti e ottenere dei "veri caleidoscopi", se mettete qualcosa nel cono (o meglio, nella piramide) che ottenete (attenti che nell'*icosascopio* salta fuori la sezione aurea) potete vedere che simmetria salta fuori. E, sempre nell'icosascopio, se tagliate il fondo e ci guardate attraverso, salta fuori un inatteso dodecaedro stellato.

"Rudy, ma c'è qualcuno che usa questa roba?" Sì, e la conoscete. Si chiama ***Bathsheba Grossman***. E, a nostra memoria, è l'unica persona che abbia avuto *due volte* la copertina.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[16] Sì, è rotonda. Citofonare Doc&Rudy per ulteriori dettagli.