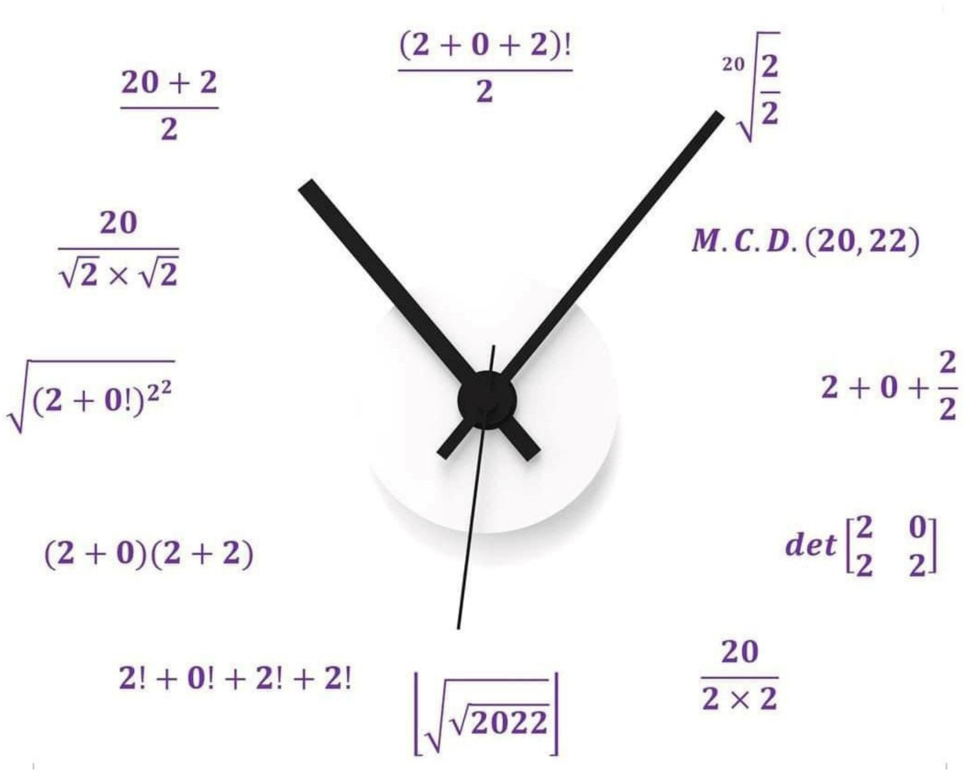
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 276 – Gennaio 2022 – Anno Ventiquattresimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell’altro millennio da
Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com

RM273 ha diffuso 3’336 copie e il 11/01/2022 per Google eravamo in 6’510 pagine.

Buon anno a tutti!

1. "Vicisti, Galilaee"

"La matematica moderna
ha reso il concetto di
'curva semplice'
estremamente complesso."

Scorrendo l'elenco alfabetico dei 7904 comuni italiani è impossibile non notare che tra i graziosi villaggi a nome Samone (uno in Piemonte, un altro in Trentino) e l'alfabeticamente non troppo distante località di Saonara (vicino Padova) trovano spazio la bellezza di 520 località. In termini percentuali sono il 6,58% del totale, come a dire che un comune italiano ogni quindici, più o meno, ha il suo nome elencato in questa, alfabeticamente ristrettissima, zona dell'elenco.

La ragione di un simile addensamento di toponimi è tutt'altro che sorprendente e misteriosa: si tratta di luoghi il cui nome discende da quello di santi, da San Bartolomeo a San Zeno. Nella lista di più di quel mezzo migliaio di comuni[1] i luoghi che non fanno riferimenti a personaggi religiosi notevoli sono davvero sparuti: immaginiamo che Sanarica (LE), Sanguinetto (VR), Sandigliano (BI), Sanluri in Sardegna e pochi altri possano trovarsi in quella zona della lista pur senza avere specifici riferimenti a persone santificate ma, altrettanto probabilmente, questi pochi estranei sono ben compensati dagli otto comuni valdostani il cui nome inizia per "Saint", che precedono alfabeticamente l'intervallo preso in considerazione.

1. A Portorico e in altre zone dell'America Latina, la festa statunitense del Thanksgiving è diventata quella del santo Givin (o Guivin, talvolta).

Bisogna riconoscere che, almeno dal punto di vista dei nomi delle località, Benedetto Croce non aveva torto nel sostenere che è difficile, per gli italiani, rifiutare l'etichetta di cristiani[2]: certo, l'intenzione del filosofo trascendeva la mera toponomastica e mirava a sostenere tesi di ben diversa statura etica e morale, ma anche se si fosse laicamente in disaccordo con le conclusioni filosofiche crociane, non si può non riconoscere che la tradizione cristiana e cattolica è leggibile ovunque in Italia (e in quasi tutto il resto d'Europa): dai segnali stradali alle tradizioni popolari, dai nomi registrati alle anagrafi e al vastissimo repertorio di miti e leggende; oltre che, naturalmente, al rilevantissimo impatto di autentici fatti storici, debitamente riportati nei manuali di storia.

Storia che è sempre abbastanza complicato insegnare nella scuola primaria: i primi anni scolastici sono quelli in cui è inevitabile – e forse tutto sommato anche giusto – insegnare ai fanciulli non solo i fatti storici accertati e sicuri, ma anche come questi vengano narrati dal punto di vista della tradizione. Per fortuna, le cose sono un po' cambiate dagli Anni Sessanta, quando la storia patria alle elementari era solo una collezione di eroici

[1] …e si badi bene che stiamo parlando proprio di comuni, quindi agglomerati urbani di una dimensione non troppo trascurabile, dotati di una specifica amministrazione e precisi compiti istituzionali. Un computo analogo esteso anche alle frazioni potrebbe facilmente alzare la citata percentuale, perché le piccole località fanno riferimento alla religione ancora più frequentemente di quelle grandi, non fosse altro perché spesso prendono il nome dalla chiesa più vicina.

[2] Benedetto Croce, «*Perché non possiamo non dirci "cristiani"*», edito in "*La critica*", 1942.

aneddoti; ma non è neppure sbagliato dedicare parte dell'insegnamento a quelle tradizioni che di storico hanno ben poco. È immaginabile che un ragazzo arrivi all'esame di maturità senza conoscere Romolo e Remo, con tanto di lupa allattatrice? Gran parte dei personaggi della storia antica sono almeno in parte mitici, ma anche la conoscenza dei miti è, se il mito ha successo, parte della conoscenza storica. È improbabile che due gemelli abbiano fondato Roma dopo essere stati allattati da una lupa; che uno di essi sia stato ucciso dal fratello per aver saltato il solco che segnava i confini quadrati della città appena fondata, ma questo non consente il lusso di ignorare quella narrazione.

Anche perché, assai spesso, la narrazione ha l'obiettivo di giustificare, tramite il racconto del passato, l'essenza della realtà presente. In fondo, senza la narrazione mitica del fratricidio commesso da Romolo è difficile ricordare la prima "Roma quadrata", che una consistenza storica ce l'ha; e – se la narrazione mitica non dimenticasse troppo spesso di sottolineare il cruciale dettaglio che Remo varca il fatidico solco armato di tutto punto – la morte del gemello meno famoso aiuta ricordare la cruciale importanza del *pomoerium*[3], senza la conoscenza del quale diventa difficile anche capire l'importanza (storica) del fatidico attraversamento del Rubicone da parte di Giulio Cesare.

2. Remo armato di lancia e Giulio Cesare armato di una legione. Comunque la si metta, nella tradizione dell'antica Roma superare i confini è una azione gravida di pericoli.

Resta però un problema o, per meglio dire, una conseguenza tanto inevitabile quanto, a ben vedere, poco razionale: e sono proprio i nomi. La potenza evocativa del Mito è sempre molto maggiore di quella della Storia, ed è inevitabile che si tramandino, di generazione in generazione, più quei nomi che sono legati a imprese spettacolari (anche se magari solo leggendarie) rispetto a quelli di personaggi più significativi, ma a cui la narrazione eroica ha riservato un ruolo di secondo piano.

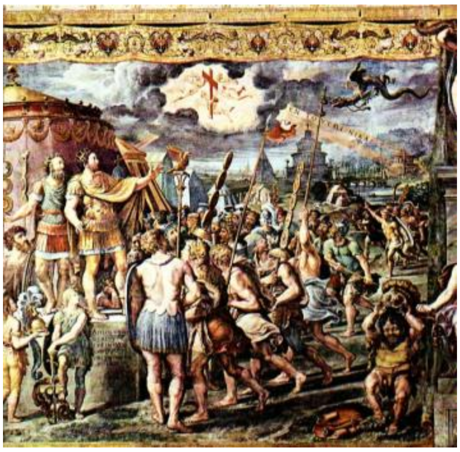
Sul finire del secondo secolo, l'impero romano stava passando dei brutti momenti: scarsi raccolti, epidemie di peste, nuovi popoli alle frontiere che cominciavano a sospettare che il grande impero mediterraneo non fosse più così imbattibile come un tempo. Fu soprattutto grazie a due imperatori che il crollo – almeno per la parte occidentale – fu ritardato di quasi due secoli. Il primo è Diocleziano, che regnò dal 284 al 305; il secondo è Costantino, che ebbe il potere dal 306 al 337. Furono entrambi grandi riformatori: Diocleziano si preoccupò di riorganizzare profondamente tutte le istituzioni dell'impero, prima fra tutte la "tetrarchia" che organizzava razionalmente la successione al trono, anche se buona parte di queste non riuscirono a sopravvivergli; Costantino, dopo aver passato una ventina d'anni a combattere e vincere tutti i suoi nemici (che erano, quasi senza eccezione, al pari di lui tra i maggiori generali dell'impero), una volta raggiunto il potere

[3] In estrema sintesi: per i Romani il pomerio è il luogo sacro in cui è totalmente identificata la città. In esso non è possibile compiere nessun tipo di atto impuro, neppure la coltivazione della terra, ed è destinato esclusivamente al culto degli dei. Il divieto più forte, ovviamente, è quello di commettere atti di violenza, quindi all'interno del pomerio è vietatissimo portare armi. L'estensione del pomerio, inizialmente assai limitata, varia e cresce nel tempo; inoltre, anche se il pomerio non arriva certo fino a coprire tutta l'Italia cisalpina, il divieto di portare armi all'interno del pomerio è in parte collegato al divieto, per i comandanti di eserciti, di condurre legioni nel territorio urbano: quest'ultimo, ai tempi di Giulio Cesare comprendeva tutta l'Italia peninsulare, e il Rubicone ne segnava un confine. Averlo superato accompagnato dalla sua XIII legione era al tempo stesso proibito e sacrilego, ed equivaleva, in molti sensi, al saltino entro il pomerio compiuto da Remo.

fondò Costantinopoli, formalizzò la separazione dell'impero in due metà, ne spostò il baricentro del potere a Oriente ed emise un importante editto di tolleranza nei confronti dei cristiani.

Negli uffici comunali di anagrafe sono registrati ancora oggi molti cittadini a nome "Costantino", mentre immaginiamo che siano quasi assenti i "Diocleziano"; più in generale, Costantino passa alla storia con l'appellativo "il Grande", mentre il nome di Diocleziano fa abbastanza fatica ad essere semplicemente ricordato. La differenza cruciale che corre tra i due è essenzialmente dovuta alla narrazione che ne è stata fatta; dal punto di vista strettamente storico, l'impatto dei loro governi sull'impero romano è per entrambi assai significativo, ma non troppo diverso in termini quantitativi; erano entrambi figli del loro tempo, dotati di un buon grado di crudeltà pur di mantenere il potere. Anzi, sotto questo aspetto, Costantino è probabilmente il campione indiscusso di tutta la storia imperiale: uccide tre colleghi imperatori per diventare il padrone unico (ed erano tutti parenti stretti, suocero e cognati), e non esita a mettere a morte anche moglie e figlio quando comincia a ritenerli pericolosi per il suo trono[4]; Diocleziano è invece molto più moderato da questo punto di vista, anche se non esita a continuare la tradizione romana di persecuzione dei cristiani, alla quale invece Costantino mette fine con l'Editto di Milano del 313.

Dal punto di vista della narrazione, questo è l'elemento cruciale: la tradizione riporta spesso (e finisce altrettanto spesso nei primi testi di storia destinati ai primi anni scolastici) la figura di Costantino come nobile e prossima alla santità, e quasi immancabilmente legata al cristianesimo: la croce sfolgorante nel cielo con la scritta "*In hoc signo vinces*" durante la battaglia di Ponte Milvio, la cui realtà fisica è abbastanza complicata da provare; la definizione di "primo imperatore cristiano", anche se il suo battesimo – sempre che ci sia davvero stato – è probabilmente avvenuto solo in punto di morte; la fantomatica "Donazione di Costantino"[5], che per lungo tempo ha giustificato il potere temporale della Chiesa e per qualcuno continua a farlo, anche se fin dal 1440 Lorenzo Valla ne ha dimostrato l'incontrovertibile falsità e il diritto di candidarsi al titolo di maggior "*fake news*" della storia.



3. "Apparizione della croce", di Raffaello Sanzio, Stanze Vaticane. La croce e la scritta "ἐν τούτῳ νίκα" ("in questo segno vincerai") appaiono a Costantino.

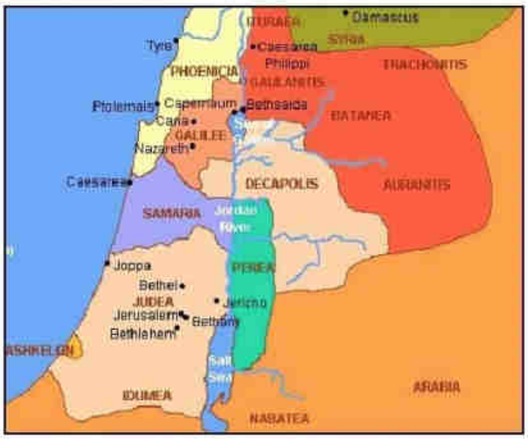
C'è insomma una distanza notevole tra quella che viene comunemente chiamata "vulgata" e la storia scientificamente accertata, ed è quasi sempre la vulgata a vincere in termini di diffusione e (supposta) conoscenza, e di conseguenza tramandata e rafforzata dalla ripetuta narrazione. Nel 360, ultimo erede di quella che viene chiamata "dinastia costantiniana", sale al trono di Costantinopoli Flavio Claudio Giuliano; il suo regno fu breve – poco più di tre anni – ma comunque significativo e denso di accadimenti. Acclamato imperatore dall'esercito, come gran parte dei suoi predecessori, è nondimeno un personaggio insolito se comparato agli altri elementi della sua dinastia: di carattere socievole e apprezzato, si interessa di filosofia al punto da essere soprannominato anche "imperatore filosofo". Si caratterizzò dal punto di vista amministrativo riducendo le tasse e combattendo la diffusa corruzione, oltre che nell'ennesimo tentativo di riorganizzazione generale, ma tradizionalmente è ricordato quasi esclusivamente per aver tentato di disfare quel che aveva fatto Costantino, ovvero reintrodurre un culto religioso diverso da

[4] Cosa che comunque non impedisce alla chiesa cristiana di rito greco di annoverarlo tra i santi.

[5] Documento che sostiene che Costantino, lasciando Roma per trasferirsi nella nuova capitale di Costantinopoli, avesse lasciato Roma e l'Occidente alla Chiesa; la storiografia moderna ritiene che il documento sia in realtà stato creato attorno al IX secolo.

quello cristiano. La sua filosofia neoplatonica si sposava meglio al culto di Mitra, che era molto diffuso tra i militari del tempo e, anche se non ritornò mai alle persecuzioni di cristiani spesso attuate dai suoi predecessori, fu indubbiamente critico verso quella che era ormai la religione di stato; siccome era un raro esempio, per quei tempi, di imperatore colto, scrisse una grande quantità di opere teologiche e filosofiche, in alcune delle quali sosteneva le proprie convinzioni anticristiane.

Inevitabilmente, questo lo rendeva malvisto alle comunità cristiane; e, come al solito, quel che la narrazione tradizionale ricorda di Flavio Claudio Giuliano è quasi esclusivamente il suo fallito tentativo di ripristinare il paganesimo, al punto che i più lo ricordano non con il suo primo soprannome, "l'imperatore filosofo", ma con l'appellativo di "Giuliano l'Apostata", dove il termine "apostata" ("colui che torna indietro") ha ovviamente una funzione denigratoria. Dal punto di vista degli aneddoti, l'unico che la tradizione ricorda è quello, inverosimile, che lo vede pronunciare in punto di morte l'ammissione di sconfitta: quel "*Hai vinto, Galileo!*", che resta l'unica frase che si ricorda associata al suo nome, con buona pace dei molti libri che ha realmente scritto.



4. La Galilea, regione di Nazareth, è a nord della Samaria, che è a sua volta a nord rispetto alla Giudea, regione di Gerusalemme. Il giovane Giordano la bagna nel Lago di Tiberiade, o "mare di Galilea"

Nella frase citata, il termine "Galileo" è ovviamente aggettivo d'origine geografica, e sta indicare Cristo al quale, secondo la tradizione, Giuliano riconosce la vittoria, seppur solo poco prima di morire. È anche il termine che Giuliano usa nella sua opera di critica al cristianesimo, che si intitola infatti "*Contro i Galilei*"[6], usando insomma la parola che indica gli abitanti della Galilea come sinonimo di "cristiani".

Il più grande degli scienziati italiani porta proprio il nome di Galileo, ed è quasi inevitabile tornare ad occuparsi di nomi derivati dalla tradizione cristiana: il nome di battesimo di Galilei (che, peraltro, ribadisce anche nel cognome il medesimo concetto) è verosimilmente da considerare del tutto equivalente al più diffuso – soprattutto nei paesi di lingua anglosassone – "Cristiano"; o addirittura, se si vuole credere alla frase attribuita a Giuliano, direttamente come appellativo di Cristo. Ed è inevitabile anche interrogarsi se esista una sorta di vera e propria proibizione, nell'ambito del diritto canonico, di battezzare un neonato con il nome proprio "Gesù"; sembra verosimile, altrimenti ci si potrebbe aspettare una frequenza del nome non troppo dissimile da quella che si ha per "Maria" tra le femmine e "Giuseppe" tra i maschi. È abbastanza complicato anche cercare di comprendere le regole che si sono formate tra diverse religioni: il fatto che "Muhammad" sembra essere un nome lecito e comune (forse il *più* comune) tra gli islamici mentre "Gesù" è assente tra i cristiani può forse dipendere dal fatto che l'Islam riconosce Maometto dotato di sola natura umana e non divina, a differenza di quanto fanno i cristiani nei confronti di Gesù; e probabilmente la possibilità di usare i nomi "Maria" e "Giuseppe" può dipendere dal fatto che i personaggi a cui afferiscono sono, per quanto sacri, persone diverse e distinte da quelle che compongono la Trinità. In qualche modo, però, i fedeli riescono a trovare nomi che, pur mantenendo l'ossequiosa distanza dal Cristo, ne fanno evidente riferimento: oltre all'ormai poco usato Galileo è abbastanza frequente conoscere dei Nazareno, e soprattutto è quasi impossibile non aver avuto occasione di incontrare almeno un paio di Salvatore.

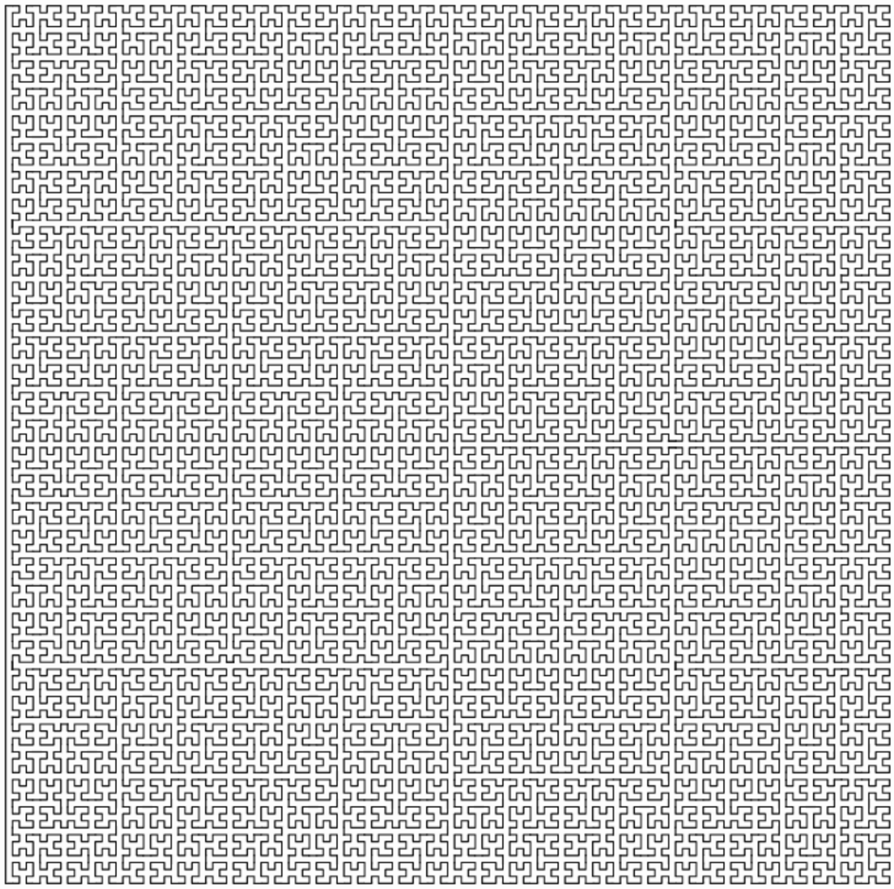
[6] Opera a cui rispose Cirillo di Alessandria (quello che contribuì a fare di Ipazia una martire della scienza) con il suo scritto "*Contro Giuliano*".

Nel campo dei cognomi, i riferimenti alla tradizione religiosa sono, se possibile, ancora più frequenti, al punto che diventa quasi impossibile tracciarne l'origine: un cognome che ricorda esplicitamente un santo, ad esempio, può avere la sua origine da qualche relazione con il luogo ove è nato (si è visto che non mancano certi toponimi di questo tipo), alla chiesa in cui il capostipite è stato battezzato, o a cento altri motivi. Altri cognomi, sempre con evidenti origini di natura religiosa, sono invece più misteriosi, e stupiscono per la loro diffusione. Tra i primi venti cognomi più diffusi in Italia ne spicca solo uno con chiare radici giudaico-cristiane, ed è talmente noto da aver quasi perso la sua connotazione biblica: in compenso, è uno dei cognomi che, tradotto in altre lingue, mantiene sia il significato che la sua ampia diffusione onomastica. Si tratta del nome del fiume più famoso di Terrasanta, quel corso d'acqua abbastanza breve – circa la metà del nostro Po – che ha sorgenti sui monti ma non un vero sbocco al mare, perché finisce nel Mar Morto che non ha emissari; uno dei pochi fiumi al mondo che scorre più in basso del mare per buona parte del suo corso, (non per niente l'etimologia del suo nome pare provenire dalla semplice espressione "va giù" in semitico) e certo il fiume più importante per la tradizione cristiana: il Giordano. E cognomi che suonano Jordan abbondano ovunque. Anche in matematica.


5. Camille Jordan

Camille Jordan nasce a La Croix-Rousse, vicino a Lione, il 5 Gennaio 1838. Di famiglia benestante, è un vero e proprio "figlio del Politecnico": già suo padre, Espit-Alexandre, era ingegnere; e, quasi inevitabilmente, il giovane Camille, appena licenziato dal liceo di Lione, entra all'École Polytechnique con il preciso intento di studiare matematica. Sono tempi, quelli, in cui la gente comune fa ancora un po' di fatica a distinguere la differenza tra un ingegnere e un matematico, e in fondo anche lo stesso Camille comprende a stento la differenza. Del resto, non fa che seguire le orme di Cauchy, che resta un po' ingegnere anche quando assurge con pieno merito nel gotha della matematica francese. A ulteriore dimostrazione del concetto, entrambi i soggetti della tesi di laurea in ingegneria che Jordan ottiene nel 1861 suonano assai più come tesi di dottorato in algebra che come applicazioni ingegneristiche: "*Sul numero dei valori delle funzioni*" e "*Su alcuni periodi delle funzioni inverse degli integrali dei differenziali algebrici*".

La sua intera vita sembra destinata a realizzarsi pienamente tra Politecnico e famiglia: si sposa subito dopo la laurea, nel 1862, appena ventiquattrenne, e insieme alla moglie Marie-Isabelle metteranno al mondo otto figli. Entra come esaminatore al Politecnico nel 1873, e ne diventa a tutti gli effetti parte del corpo docente tre anni dopo; è una carriera naturalmente riservata agli ingegneri, ma Camille Jordan è teorico e bravo quanto basta per finire con il diventare professore anche al Collège de France, dove invece proliferano gli accademici; paradossalmente, sembra persino che i suoi lavori di ricerca fossero più frequenti e fecondi durante il periodo in cui lavorava come ingegnere che dopo l'ingresso al Collège.



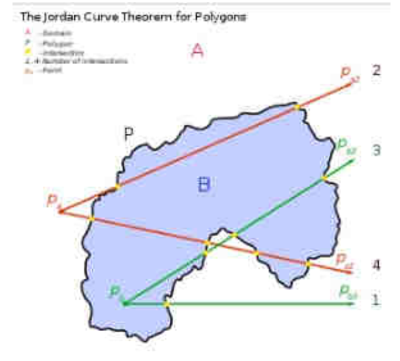
6.(Robert C. Haraway, III - https://bobbycyiii.github.io/2020/07/03/generating-jordan-1.html)

La carriera di Camille Jordan è quanto mai prolifica, dal punto di vista della teoria matematica; specialmente se si considera che la sua formazione iniziale è sostanzialmente ingegneristica. È tenuto in altissima considerazione da tutti i colleghi – forse ben di più di quanto sia ricordato oggigiorno – anche perché riesce ad esplorare una quantità di argomenti. È uno dei fondatori della topologia, disciplina ancora agli inizi: introduce concetti fondamentali quali l'omotopia, utilizzando anche elementi della Teoria dei Gruppi. E, a proposito di Teoria dei Gruppi, Jordan è virtualmente il primo a portare avanti la materia dopo la sua "fondazione" risalente ai lavori di Evariste Galois. Si dedica ai gruppi per almeno un decennio, dal 1860 al 1870, e soprattutto si dedica a cercare connessioni con le altre sezioni della matematica: non esita a introdurla in geometria, nella ricerca delle trasformazioni euclidee nello spazio tridimensionale.

Teoria dei Gruppi e Algebra sono parenti strettissime, e non è pertanto il caso di perdersi in definizioni e qualifiche: certo è che anche l'Algebra ha molti debiti nei confronti di Camille Jordan.

Ciò nonostante, il suo nome è in genere ricordato quasi soltanto per il "Lemma di Jordan", che si incontra fin dall'inizio dell'Analisi Complessa, e soprattutto per la sua definizione di curva chiusa, che deriva dal suo "Teorema della Curva", nella sua forma più elementare, appare così ovvio da sfiorare la banalità: "*una curva chiusa piana semplice divide il piano in due regioni, una interna e una esterna*".

La banalità scompare subito quando si considera quanto possano essere complesse delle generiche "curve chiuse", e che il Teorema di Jordan rimane valido per qualsivoglia di esse. In casi particolarmente complessi – come quello riportato nella pagina precedente – la suddivisione tra le regioni esterna e interna è tutt'altro che evidente, al punto che c'è chi ne ha ricavato una sorta di gioco o un sistema di sorteggio, segnando a caso un punto sul foglio e poi verificare se il punto così sorteggiato è esterno o interno alla curva stessa.



7. Le regioni di Jordan

Il passaggio dal concetto di "semplice" a quello di "complesso" è spesso assai più fragile di quanto appaia: al pari delle curve di Jordan, che saltano in un amen dalla banalità alla situazione più ingrovigliata, anche la serena vita di Camille finì con l'essere tristemente complicata dall'arrivo della Grande Guerra. Dei suoi otto figli, sei erano maschi, e ne perse la metà sui campi di battaglia. La serenità e la tranquillità sono beni preziosi, destinati ad essere apprezzati soprattutto quando vengono a mancare: ma è bene rammentare la continuità che è quasi sempre presente tanto nei concetti matematici che nelle emozioni umane; quasi fosse una legge universale quella che, attraverso piccoli graduali cambiamenti, conduce inevitabilmente elementi semplici a interagire continuamente fino a generare complessità inimmaginabili.

2. Problemi

2.1 Calcolate l'APE!

Nel senso che Rudy l'ha calcolata per il Luogo del Divano Quantistico: a quanto pare, come inefficienza energetica siamo superati solo da un ombrellone al Polo Nord.

No, in realtà non c'entra niente, ma prima della fine un APE dovremmo riuscire a trovarlo. E ci pare che questo problema risolva contemporaneamente un paio di cose, del tipo di una nuova struttura del giardino e il logo della vostra prossima startup unicornica.

Comunque, nell'attesa di unicorni in giardino (...ma non nascevano nei garage? Boh...), potemmo tenere il problema sul teorico; talmente teorico che, come al solito, cercheremo di non fare il disegno.

Avete un quadrato, di lato non necessariamente unitario (o anche sì, vedete voi: inventarvi una misura tale che diventi unitario non dovrebbe essere un problema, da quel che ci ricordiamo del concetto di "misura") che, in un eccesso di originalità, indicheremo con *ABCD* ("In che senso?" "Nel senso delle prime quattro lettere dell'alfabeto" "No, intendevo..." "Ragazzino, scostati e lasciamo lavorare").

Sul lato *AB* costruiamo il triangolo equilatero *ABE* interno al triangolo (se sporge, avete dei problemi di cui non parliamo qui); adesso, tracciamo la diagonale *AC* del quadrato; se siamo stati chiari, dovrebbe intersecare il lato *BE* del triangolo in un punto *P*.

"...e noi dovremmo tatuare sull'unicorno un obbrobrio di disegno come questo?" Beh, no. Una volta trovato il punto *P* potete anche cancellare *BP* e *PC*: quello che vi interessa è il triangolo *APE* (visto, che è arrivato?) dentro il quadrato. A noi pare una forma piuttosto simpatica, da usare anche come decorazione per un giardino quadrato.

Torniamo al logo: siccome lancerete l'unicorno il prossimo anno e volete fare i *trendy*, decidete di fare il triangolo color Very-Peri[7], con il resto del quadrato in Ultimate Gray[8].

Una veloce conversazione con l'imbianchino vi convince che avere barattoli e barattoli di colori del genere in giro per casa non è assolutamente il caso (e convince *lui* ad accompagnarvi gentilmente all'astanteria dell'ospedale psichiatrico più vicino. Voi e l'unicorno tatuato), quindi decidete di calcolare *esattamente* quanto colore vi serva per colorare il triangolo rispetto a quello necessario per colorare l'intero quadrato (nel senso che prima, armati di pennellessa e buona volontà, date il grigio dappertutto, poi sopra date il VP).

Ecco, quanto vale l'area di *APE*?

"Rudy, e se non abbiamo l'unicorno, cosa ci facciamo con il giardino?" Risolvete lo stesso problema: in questo caso, però, vorremmo raccomandarvi di piantare il triangolo a lavanda, in fondo, anche lì combinate "*the faithfulness and constancy of the blue*" con "*the energy and excitement of the red*".

Certo che poi uno si chiede dove la trovino, quella roba buona che si fumano...

2.2 Gli Impredicibili

Qui, andiamo nel mistico, come ambientazione. Ma siccome stiamo scrivendo questo pezzo mentre il NORAD ci dice che Babbo Natale è dalle parti di Vienna, la cosa ci pare anche vagamente in tema.

Più anni fa di quanti si voglia ricordare, avevamo pubblicato un problemino che ci era stato proposto da ***.mau.*** E che riguardava strane alternanze di statuine della Luna (in argento) e del Sole (d'oro). La cosa ci era piaciuta (anche se Rudy aveva abbattuto un paracarro durante la soluzione... Danni irrilevanti, come diceva Pippo), ma non aveva avuto un grosso seguito dal punto di vista della problematica. Siamo quindi felici di

[7] Se non sapete cos'è, vi esortiamo a continuare a non saperlo.

[8] Vedi nota precedente.

proporvi un problema (che ci pare tosto, soprattutto se giocherellate con eventuali espansioni) che ci permette di riportare in auge questa ambientazione. Poi, se non vi piacciono Sole & Luna, liberissimi di chiamarli Cicirro & Sarmento, Starsky & Hutch o Black & Decker. Ma andiamo con il problema, nella forma più o meno originale.

Come avrete intuito, parliamo di sequenze di statuette di due tipi: il Sole (S) e la Luna (L), che si alternano in sequenze; contrariamente al problema originale, qui però parliamo di sequenze *finite*.

Definiamo una sequenza di m Lune e n Soli (con $m>n$) come ***non predicibile*** se c'è un qualche punto nella sequenza dove il numero dei Soli (contati partendo dalla sinistra) sia maggiore o uguale al numero delle Lune (contate partendo dalla sinistra).

Giusto per fare un paio di esempi, se m=5, n=2, allora le sequenze *LLSSLLL* e *SLLLSL* sono non predicibili. Tutto chiaro, si spera, anche perché non è che noi si sia capito molto di più.

Adesso, abbiamo qualche problemino in merito. Ma ve li forniamo solo per stimolare la ricerca, vi vorremmo veder generalizzare come delle marmotte a Candelora (tanto, febbraio uscirà in ritardo, quindi avete tempo...).

Se m=7 e n=2, quante sono le sequenze non predicibili che iniziano per *L*?

Se n=2, per qualsiasi valore di m maggiore di 2, sono più le sequenze non predicibili che iniziano per *L* o quelle che iniziano per *S*?

Quante sono le sequenze non predicibili con m=10 e n=3?

Come dicevamo, con calma.

3. Bungee Jumpers

Provate che, se n è un numero perfetto dispari, allora questo è nella forma:

$$n = p^s m^2$$

Dove p è un primo della forma $4k+1$, s è un intero positivo della forma $4h+1$ e $m \in \mathbb{Z}^+$ *non* è divisibile per p. Inoltre, trovate tutti gli $n \in \mathbb{Z}^+$ per cui $n-1$ e $n(n+1)/2$ siano numeri perfetti.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Gennaio!

Se c'è una cosa di cui andiamo fieri (si nota anche dal riferimento all'altro millennio in copertina) sono le nostre tradizioni. Secondo le regole, RM riparte a gennaio con una piccola pausa per farsi forza e partire con la stagione dei compleanni, e sapete bene quanto noi siamo legati ai festeggiamenti dei genetliaci: il calendario ed il primo articolo del mese continuano indefessi a celebrare matematici in rivista, mentre la ripubblicazione sul blog li ricorda nel giorno di nascita, quando lo conosciamo; da febbraio in avanti la redazione tutta (compresa la rivista) festeggia in ogni possibile combinazione, con problemi tematici e torte a profusione. Siamo quindi qui a ripartire anche quest'anno, preparatevi, che a febbraio la rivista compie ben ventitré anni, e non si sa ancora che cosa potremmo combinare per l'evento.

Un'altra tradizione che resiste ormai da sempre, è la poesia per il nuovo anno, che il fantastico ***Alan Viezzoli*** ci invia ad ogni capodanno con gli auguri:

2022 – Serie di limerick con acrostico

Dovendo augurar buone Feste
Un certo enigmista a Trieste
Estroso si esprime
Ma tramite rime,
Il buffo enigmista a Trieste.

Lo stesso enigmista triestino
A voi che gli state vicino
Vuol porger del bene

E tutti vi tiene
Nel cuor, l'enigmista triestino.

Talvolta la gente del mondo
Ignora quel piglio giocondo.
Donate l'amore:
Un posto migliore
È qui per voi, gente del mondo.

Per il resto, continuiamo a perseverare nella tradizione ormai consolidata di essere in ritardo, quindi adesso tagliamo corto, ché abbiamo saltato un numero e dobbiamo recuperare.

4.1 [274]

4.1.1 Gang matematiche

Questo problema in più parti è un po' difficile da riassumere, perdonateci se facciamo un pasticcio:

Tra di loro, i membri della stessa banda condividono un codice segreto numerico con un numero definito di cifre, ed un giubbotto non necessariamente distinguibile.

Test d'ingresso: dati tutti i numeri da uno a cento, generati in ordine sparso al ritmo di uno ogni due secondi, trovare quello mancante. Qual è il metodo più semplice?

Spareggio: i due partecipanti devono dire dei numeri, maggiori di zero ma minori di dieci, uno per volta: il primo che raggiunge o supera somma cento, perde. Qual è la strategia in questo caso?

Verifica del giubbotto: c'è una terza persona di fiducia che promette "Potete dirmi qualsiasi cosa o chiedermi qualsiasi cosa, e io risponderò con la verità, ma talmente piano che l'altro di voi non sentirà; inoltre, siccome sono una persona discreta, non starò a sentire le vostre conversazioni". Qual è la strategia per verificare l'identità del giubbotto senza rivelare il codice segreto?

Per cominciare, la soluzione di ***Valter*** che vi abbiamo promesso il mese scorso:

<u>La prova di ammissione.</u>
… non so se è il modo più semplice ma io farei così (espongo il metodo; più semplice usarlo che dirlo):
- memorizzo, mentalmente, il primo numero in un totalizzatore
- sommo mod10 le singole cifre del secondo numero, e così via
- un esempio. di come varia man mano, il totalizzatore "*tot*":
-- primo numero = 23 → *tot*=23
-- secondo numero = 08 → *tot*=21 (8+3=1 mod10, 2+0=2 mod10)
-- terzo numero = 15 → *tot*=36 (1+5=5 mod10, 2+1=3 mod10)
-- … e così via
- se si sommassero i cento numeri *tot* finirebbe col valere 00 (in prima, e seconda cifra, 1 2 … 9 sono ripetuti 10 volte)
- dato che manca un numero, sottraendo *tot* da 100, lo ottengo (ovviamente va fatto come prima, mod10 senza fare riporti):
-- *tot* = 00, numero mancante = 100-00=100
-- *tot* = 19, numero mancante = 100-19=91
-- *tot* = 83, numero mancante = 100-83=27
-- ….
<u>…adesso diventa un punto d'onore….</u>
Procederei in questo modo:
- fornisco il numero che porta la somma ad un multiplo di 10
- essendo secondo a sceglie il numero, riesco sempre a farlo
- il mio compagno invece non può mai raggiungere tale somma.
<u>Qualcuno l'ha fatta grossa.</u>
Userei una crittografia con chiave privata il codice segreto.

> Mi accorderei con giubbotto, su quale algoritmo utilizzeremo.
> Comunico, poi, il nome della mia gang crittografato, al prof.
> Prof lo passa a giubbotto che, lo decritta con il suo codice.
> Se ottiene il nome della sua gang, capisce che è pure la mia.
> Discorso a parti invertite, per avere anch'io l'informazione.

Veloce ed efficace, direi. Sulla stessa falsariga arriva la soluzione di ***Alberto R.***:

> 2.1.1) Sommare 99 numeri compresi tra 1 e 100 al ritmo di uno ogni due secondi senza sbagliare mai mi sembra molto difficile. Però siamo in due e, lavorando alternativamente, ognuno di noi deve fare una somma ogni 4 secondi e già va molto meglio. Inoltre è sufficiente memorizzare solo le ultime due cifre dei risultati parziali, cioè lavorare modulo 100. Poi sommiamo, sempre modulo 100, i due parziali. Se il risultato è S < 50 il numero mancante è 50-S, altrimenti è 150-S
>
> 2.1.2) Chi gioca per primo vince, come si verifica facilmente, con la seguente strategia: alla prima mossa dichiara 9, in tutte le mosse successive dichiara il complemento a 10 dell'ultimo numero dichiarato dell'avversario.
>
> 2.1.3) Non serve l'aiuto del professore con il suo cervellotico comportamento, basta la calcolatrice di un telefonino. Si copre il display; il primo studente digita, senza farsi vedere, il suo codice segreto; l'altro studente, sempre senza farsi vedere vi sottrae il proprio codice e ripassa il telefono al primo che moltiplica per un numero a caso; idem il secondo. Si scopre il display e si controlla se il risultato è o non è zero. Anche se il risultato non è zero (perché i due codici erano diversi) nessuno dei due può scoprire il codice segreto del compagno non conoscendo il moltiplicatore random da lui utilizzato.

Non ci sembra di aver visto altro su questa affascinante storia, andiamo avanti.

4.1.2 Slow & Dirty

Chissà perché il Capo non ha voluto intitolare il problema proprio "Rudyrinto", visto il grosso successo? Vediamo anche qui di riassumere quanto possibile:

> *Qui di fianco un esempio di "Rudyrinto": voi siete nella casella in alto a sinistra, dovete seguire l'indicazione del punto cardinale indicato e muovervi di una casella in quella direzione; scopo del gioco è finire nell'ultima casella in basso a destra, seguire la sua indicazione "E" e uscire vesto Est. Ogni casella, quando ne uscite, indica il punto cardinale successivo in senso orario. Le caselle sul bordo, se puntano verso un muro quando ci entrate effettuano il cambio di direzione che dovrebbero effettuare alla vostra uscita, e potrete seguire la nuova direzione indicata; anche queste caselle, quando ne uscite, cambiano direzione, sempre secondo la stessa regola.*

N	N	N	N	N	S	S	N
N	S	E	O	O	O	S	N
E	S	O	N	O	O	S	E
S	O	N	O	E	S	O	E
S	E	N	O	O	S	E	O
S	E	O	E	O	S	S	O
E	E	O	E	O	O	O	E
E	E	O	S	O	O	O	S

8. Il Rudyrinto.

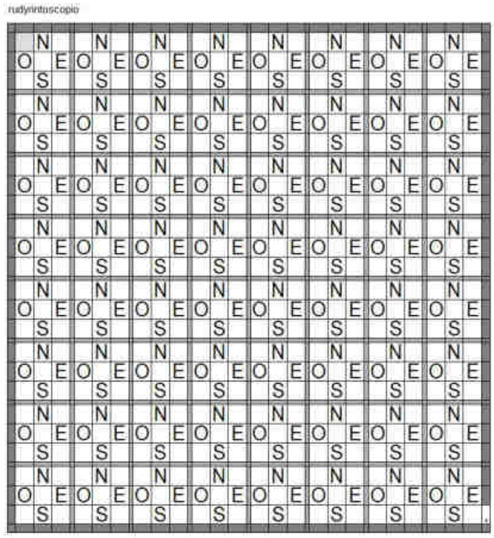
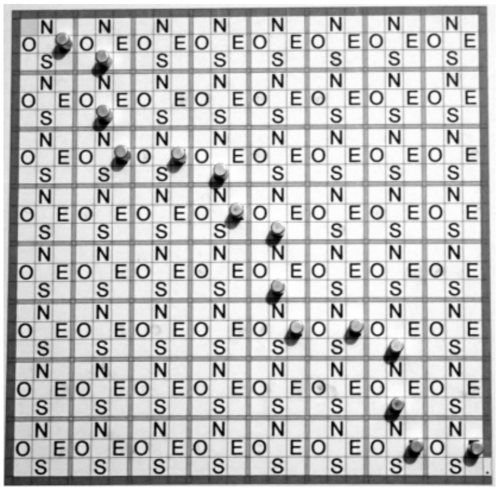
> *Esiste un modo per stabilire se un dato rudyrinto è risolubile, o per costruirne uno di dimensione data? Ci sono delle dimensioni proibite? ...e se fossero esagoni? O quadrati e ottagoni?*

Anche qui, come promesso, partiamo da ***Valter***:

> A mio avviso i "rudyrinto" rettangolari, compresi quelli quadrati, sono sempre risolubili. Ovviamente, causa caselle d'angolo, sono esclusi quelli che hanno un'unica riga o colonna. Provo a motivare la mia affermazione:
> - date le regole il giochino non si può bloccare su una casella d'angolo
> - se il rettangolo ha più righe e colonne, si riesce ad uscire dai bordi
> - l'unico motivo che lo renderebbe non risolubile è che si crei un ciclo
> - in tale percorso ciclico non deve esserci la casella in basso a destra
> - se fosse presente ad un certo punto diventa "E" e il giro dopo si esce
> - a ritroso però, non dovrebbe passare per le sue confinanti e così via.

> Ho realizzato un programmino un po' "rozzo", che vi allego, per verificare la mia ipotesi.

Beh, il programmino ce lo teniamo noi. Il Capo si diverte un mucchio. Un programma è stato sviluppato anche da ***Camillo***, che ci ha scritto:

> A proposito del rudyrinto, per fare esperimenti ne ho fatto una griglia. Ma tanto per cominciare dico a Rudy che non conosco alcun libro che spieghi come disegnare i Sudoku. Da qualche parte comunque ho letto che per avere un Sudoku con soluzione univoca vi devono essere almeno 17 indizi, così sono chiamati i numeri già presenti.
>
> Per cercare di capire qualcosa ho fatto il rudyrintoscopio così lo piazzo su una lamiera e con dei cilindretti magnetici mi ci diverto.
>
> 
>
>
> Gran casino i cilindretti sono alti quando sono vicini si baciano nella parte superiore. Allora impiego quelli più bassi possibile e va un po' meglio. Comincio i movimenti ma a forza di andare avanti e indietro tra le caselle mi stufo. Decido di farmi una disposizione iniziale, le istruzioni non dicono che occorre passare su tutte le caselle per cui una bella diagonale di disposizioni opportune ed il gioco è risolto.
>
> La stessa brevità di percorso si ottiene anche bordeggiando su due lati.
>
> 
>
> Al Gran Capo interessa generare i rudyrinti ed un programma che faccia questo e abbastanza banale (permutazioni casuali di 4 simboli), un altro conto è la risolvibilità di quello generato.

> A proposito mettere giù un rudyrinto di qualunque dimensione che passi tutte le caselle è facile e poi se il numero di caselle di almeno uno dei due lati è dispari si può fare passando una volta sola per ogni casella.

Si vede che le figure sono vere foto? E il Rudyrintoscopio ha mandato il Capo in brodo di giuggiole. ***Camillo*** non scherza mai, le sue fotografie sono comparse spesso sulle nostre pagine. Ci ha scritto poi nel nuovo anno per confermare la funzionalità del programma:

> Sono a buon punto con un programma per generare e risolvere dei rudyrinti.
>
> Spero di aver interpretato bene cosa avviene quando si va a sbattere in un bordo, anche ad angolo.
>
> Dopo una cinquantina di prove con rudyrinti di varie dimensioni (soprattutto 8x8) ritengo che tutti i rudyrinti siano risolvibili. Quasi tutti effettuano il passaggio su tutte le caselle prima di terminare.
>
> Il programma è scritto in Turbo C sotto DOS ed è in grado di visualizzare griglie fino a 32×32 caselle (anche rettangolari). L'ho usato anche in Windows7 con il programma DosBox e funziona benissimo e con gli opportuni settaggi (di DosBox) è anche veloce.
>
> Vi allego 4 foto (situazione iniziale, intermedie, finale) del rudyrinto 8×8 presentato su RM. Foto scattate usando la tecnica del passo passo.
>
> 
>
> In modo automatico è risolto in poco più un secondo.
>
> Nell'ultima foto c'è un baco perché la casella d'uscita dovrebbe indicare sud (baco corretto). Nel frattempo la stesura del programma è proseguita.

Concludiamo in bellezza con la soluzione di ***trentatre***:

> Riscrivo le regole del gioco, supponendo che chi si muove in una scacchiera 8×8 fra caselle adiacenti sia il re.
>
> a) il re parte da una data casella A e prosegue ad ogni passo secondo la direzione – uno dei punti cardinali – indicata dalla casella in cui si trova
>
> b) le indicazioni delle caselle impediscono l'uscita dalla scacchiera, salvo in una casella B, situata sul bordo, che ammette la direzione verso l'esterno della scacchiera; se il re arriva in B e la direzione è corretta il percorso termina (e il re può uscire)
>
> c) la direzione di una casella, quando viene lasciata dal re, viene ruotata in senso orario di uno o più quarti di giro, fino a rispettare b)
>
> d) all'inizio le direzioni arbitrarie delle caselle poste sul perimetro sono ruotate per rispettare b).
>
> Si chiede se il re riesce ad uscire nello schema proposto e per quali schemi questo è possibile. Vale la proprietà
>
> <u>(I) in un scacchiera rettangolare con un numero di caselle superiore a 3, con la casella iniziale A in qualsiasi posizione, e le caselle all'inizio comunque orientate, esiste sempre uno e un solo percorso che consente di uscire da B, posta dovunque sul perimetro, in un numero finito di passi</u>
>
> - infatti partendo da A non può esistere un ciclo infinito (percorso chiuso che si ripete senza fine); supponendo che esista e M sia l'insieme delle sue caselle, una casella sul bordo di M sarà visitata abbastanza volte da puntare a una casella esterna ad M; quindi M si estende e proseguendo deve arrivare a comprendere anche B, che anch'essa finirà prima o poi orientata verso l'esterno; e il re scappa.

Anche con scacchiere piccole seguire il percorso *A-B* con carta e matita è difficile, e impossibile con tutte le possibili condizioni iniziali. Per verificare (I) ho scritto un programma per rettangoli generici, con *A* e *B* nei soliti posti.

Applicando il programma a rettangoli di varie dimensioni con le caselle inizializzate con valori vari, anche scelti a caso, il percorso *A-B* esiste sempre, come prevede (I).

In particolare dalla scacchiera del problema si esce in 698 passi; il percorso tocca ogni casella almeno una volta – in realtà almeno 3 e fino a 16 volte.

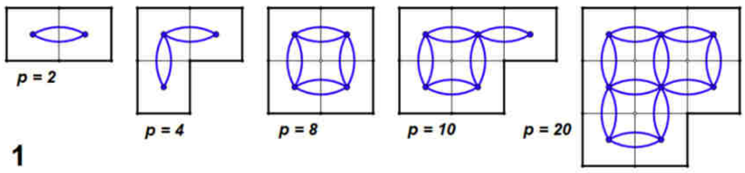
Per un rettangolo di base e altezza $L \times H$ generici, si può trovare quale disposizione iniziale determina il numero minimo e massimo di passi del percorso *A-B*.

Il minimo è un problema semplice: basta tracciare un percorso più corto possibile fra *A* e *B* e assegnare alle sue caselle la direzione corretta; questo si ottiene anche riempendo la scacchiera di E; il percorso corre sul lato Nord e poi su quello Est della scacchiera, cioè unisce $L+H-1$ caselle, quindi i passi sono

$$[1] \quad \boxed{p(L,H)_{\min} = L+H-2}\,.$$

Il massimo è un problema più complesso.

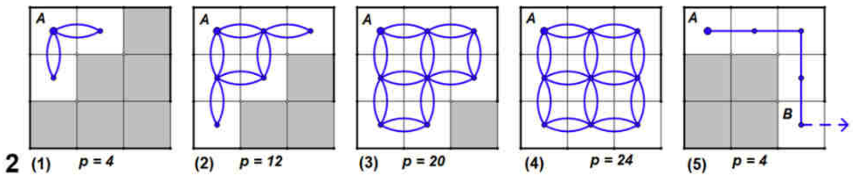
Da (I) si deduce che per avere il percorso *A-B* massimo il re deve abbandonare un insieme *M*, cioè passare ad altre caselle e a un insieme allargato, solo dopo aver compiuto il massimo percorso all'interno di esso.



La fig. 1 mostra, per alcuni gruppi *M* di caselle, il percorso massimo interno

- i passi possono unire solo due caselle adiacenti (un trattino) con due versi opposti (due trattini)
- il numero di passi, indicato in figura, che si ottiene sommando i trattini, è sempre pari e dipende dal numero di caselle e dalla forma dell'insieme M.

Si può mostrare che riempiendo la scacchiera di O il calcolo rispetta queste proprietà e dal programma si ha il percorso *A-B* massimo.



In fig. 2 il quadrato 3×3; i passi totali dati dal programma sono $p(3,3)=64$, che disegnati uno dopo l'altro, si possono dividere come in figura in 5 fasi, con $64=4+12+20+24+4$; ogni fase salvo l'ultima

- presenta un percorso massimo all'interno delle caselle che occupa (in bianco)
- inizia e termina in A.

L'ultima fase chiude il percorso raggiungendo *B* con l'unico percorso possibile.

Si possono così derivare le formule per il percorso massimo

- quadrati $L \times L$

$$[2] \quad \boxed{p(L,L)_{\max} = 4L^3 - 6L^2 + 4L - 2}$$

- che si può anche scrivere $= L^4 - (L-1)^4 - 1$
- i valori per $L = 2,3 \dots 8$ sono $14, 64, 174, 368, 670, 1104, 1694$.

- rettangoli $L \times H$

$$[3] \quad \boxed{p(L,H)_{\max} = (H-1)^2(2L-1)+(2H-1)L^2-1}$$

- che per $H = L$ diventa la [2].

La [2] si ricava dai primi valori calcolando le differenze

L	$p(L,L)$	Δ	Δ^2	Δ^3
1	0	14	36	24
2	14	50	60	24
3	64	110	84	24
4	174	194	108	
5	368			

- poiché $\Delta^4 = 0$ la [2] è un polinomio del 3° ordine che si ricava da un sistema lineare.

In modo analogo si ha, variando successivamente *H*, la [3] per i rettangoli.

Aggiungo qualche nota.

(1) la rotazione ciclica delle caselle nel senso N-E-S-O non è obbligata; basta che ogni casella cambi ad ogni passaggio, in modo da passare per tutte le direzioni consentite, p.es. l'ordine può essere S-E-O-N

(2) le porte possono essere più di una; il re esce dalla prima che trova

(3) il problema si può estendere a tassellature diverse; i triangoli si connettono secondo tre direzioni, ma va tenuto presente che sono di due tipi con diverso orientamento; gli esagoni, tutti uguali ma con sei direzioni possibili (salvo sul perimetro) si possono trattare nello stesso modo. Il comportamento è lo stesso, se vale la condizione (1)

(4) restando fra gli scacchi, al re si può sostituire un cavallo, che può muoversi da una casella a otto altre "adiacenti" e può occupare con un unico percorso tutte le caselle della scacchiera; se vale la condizione (1) anche il cavallo scappa (e forse più veloce del re).

Come al solito molto preciso e corretto, in nostro ***trentatre***. E con questo abbiamo esaurito le soluzioni ricevute per il numero di novembre. Vediamo ora che cosa ci hanno scritto i nostri lettori per i problemi di dicembre.

4.2 [275]

4.2.1 Sembra, ma non è

Un bel problema geometrico che non dovrebbe avere niente a che fare con la logica, ma che fa l'occhiolino ad un certo modo di porre problemi:

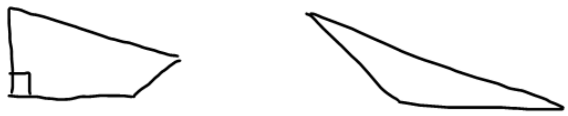
Due poligoni convessi M e N hanno le seguenti proprietà:

1. *M ha il doppio di angoli acuti rispetto a quanti angoli ottusi abbia N.*
2. *N ha il doppio di angoli acuti rispetto a quanti angoli ottusi abbia M.*
3. *Ogni poligono ha almeno un angolo acuto.*
4. *Almeno un poligono ha un angolo retto.*

Esistono oggetti del genere? Quanti angoli retti può avere ognuno di questi poligoni?

Già solo leggere il problema ha fatto venir mal di testa ai più, ma al solito i nostri affezionati lettori non ci lasciamo mai a bocca asciutta. La prima che vi passiamo è quella di ***Alecsphys***:

Siano M ed N i due poligoni convessi che si stanno cercando. Se N è un triangolo acutangolo allora avrà due angoli acuti ed uno ottuso e quindi M per soddisfare i criteri dati basta che sia un quadrilatero convesso con un angolo retto, due angoli acuti e uno ottuso (vedere figura):

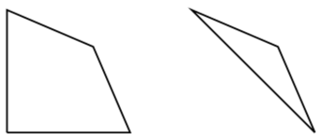


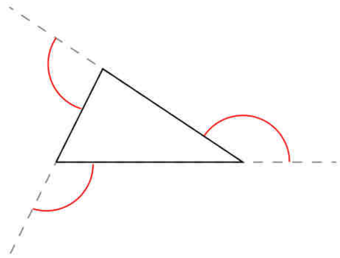
M N

Niente male, come vedete la risposta alla prima domanda è presente, la moltiplicazione degli angoli retti non ancora, ma basta arrivare alla versione di ***Valter***:

> Nel seguito indico per semplificare con: "A" l'angolo acuto, "R" il retto e "O" l'ottuso.
> La somma degli angoli interni di un poligono vale $(n-2)\cdot 180°$, dove n è il numero di lati. In un poligono convesso, per sua stessa definizione, ogni suo angolo misura meno di 180°. Da questo si deduce, con un semplice calcolo, che i poligoni convessi possono solo avere:
> - i triangoli, gli angoli ai vertici AAA, AAR o AAO
> - i quadrilateri AAAO, AARO, AAOO, AROO, AOOO, RRRR
> - i restanti poligoni convessi con numero lati > 4:
> -- da tutti gli angoli sino a numero lati meno 3, O
> -- gli altri angoli sono, indifferentemente, A o R.
> Due poligoni M/N con le proprietà richieste quindi, sono solamente: AAO/AARO o AARO/AARO.

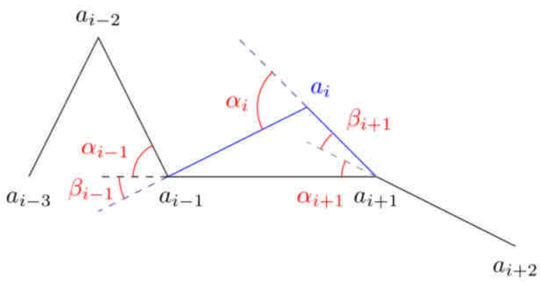
E qui la risposta è chiara ed univoca, così come è chiara e ben presentata la soluzione, scritta a quattro mani, di ***A.B.*** (forse dovrebbe essere ***A².B².*** o ***(A.B.)²***):

> Dal testo sappiamo che il numero di angoli acuti dei poligoni convessi M, N deve essere pari (regole (1) e (2)), e che ognuno dei due poligoni ha almeno un angolo ottuso (segue dalla regola (3)). Inoltre, dal momento che almeno uno dei due poligoni ha un angolo retto, una possibile coppia di poligoni è la seguente.
>
> 
>
> *M* *N*
>
> Chiaramente il quadrilatero non deve essere necessariamente simmetrico come quello disegnato (e l'angolo retto non deve necessariamente essere opposto a quello ottuso), e allo stesso modo il triangolo non deve essere per forza isoscele come quello disegnato (la loro simmetria è dovuta al fatto che sono più facili da disegnare!). Un'altra possibile coppia sarebbe data da due quadrilateri del tipo di M.
>
> Lo scopo di quanto segue è dimostrare che queste due combinazioni sono le uniche possibili, e per fare questo è sufficiente dimostrare che nessun poligono convesso può avere quattro o più angoli acuti, e che nessun poligono convesso con due o più angoli retti può avere due (o più) angoli acuti. Infatti, in questo caso sia M che N devono avere esattamente due angoli acuti, il che vuol dire che devono avere esattamente un angolo ottuso. Gli unici altri angoli che possiamo aggiungere sono angoli retti. Aggiungendone zero otteniamo la classe di triangoli come N sopra, e aggiungendone uno abbiamo i quadrilateri come M.
>
> Per dimostrare quanto detto usiamo un piccolo lemma (come curiosità storica, questo lemma è un caso particolare di un lemma che John Milnor ha usato nella sua celebre dimostrazione del 1950 del teorema di Fàry-Milnor).
>
> **Lemma:** *La somma degli angoli esterni di un qualsiasi polinomio (presi con segno) è* 2π.
>
> **Dimostrazione:** In un triangolo, ogni angolo esterno è uguale alla somme degli angoli interni ad esso non adiacenti, e sommando tutti e tre gli angoli esterni dà quindi il doppio della somma degli angoli interni di un triangolo, e quindi 2π.



Il fatto che gli angoli siano presi con segno significa che stiamo scegliendo un verso di percorrenza del poligono (diciamo per esempio senso antiorario) e sommiamo gli angoli come positivi in senso antiorario. Prendendo ad esempio il triangolo sopra, ogni lato viene prolungato nella direzione del verso di percorrenza, e l'angolo esterno è quello tra questo prolungamento e il lato successivo.

Mostriamo ora che aggiungere un vertice a un polinomio non ne cambia la somma degli angoli esterni. Facciamo riferimento alla figura di seguito che rappresenta una porzione di poligono contenente i vertici …a_{i-2}, a_{i-1}, a_{i+1}, a_{i+2}, … a cui viene aggiunto il vertice a_i.



Prima dell'aggiunta del vertice a_i la somma degli angoli esterni ai vertici a_{i-1} e a_{i+1} (gli unici influenzati dall'aggiunta di a_i) era $S = \alpha_{i+1} - \alpha_{i-1}$. Dopo l'aggiunta di a_i, la somma degli angoli esterni ad a_{i-1}, a_i, a_{i+1} è $S' = -\beta_{i+1} + \alpha_i - \alpha_{i-1} - \beta_{i-1}$. La somma degli angoli esterni è quindi variata di una quantità $S' - S = -\beta_{i+1} + \alpha_i - \alpha_{i+1} - \beta_{i+1} = 0$ (l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che questa è la differenza tra un angolo esterno e i due angoli interni ad esso non adiacenti in un triangolo).

Un poligono è convesso quando tutti gli angoli esterni hanno lo stesso segno (positivo nella convenzione usata qui). A questo punto possiamo dimostrare il teorema principale, che conclude il problema.

Teorema: *Nessun poligono convesso può avere quattro (o più) angoli acuti. Nessun poligono convesso con due o più angoli retti può avere due (o più) angoli acuti.*

Dimostrazione: Un angolo esterno θ relativo ad un angolo acuto é necessariamente maggiore di $\pi/2$, e quindi un poligono con quattro (o più) angoli acuti avrà una somma degli angoli esterni relativi a questi vertici di $2\pi + \Delta$ con $\Delta>0$, e quindi deve esistere almeno un vertice con un angolo esterno negativo, e il poligono non è quindi convesso. Allo stesso modo un qualunque poligono con due angoli retti ha una somma degli angoli esterni relativi a questi due angoli di π. La somma dei rimanenti angoli esterni deve essere quindi π, ma se ci sono due (o più) angoli acuti allora la somma dei loro angoli esterni è $\pi + \Delta'$ con $\Delta'>0$, e di nuovo il poligono non può essere convesso.

Bella, vero? Ultimamente abbiamo qualche problemino con l'importazione di diversi formati, speriamo di non aver aggiunto errori nel riformattare. Lo stesso vale per la prossima soluzione, ad opera di ***Makaronik***, dalla Germania con furore:

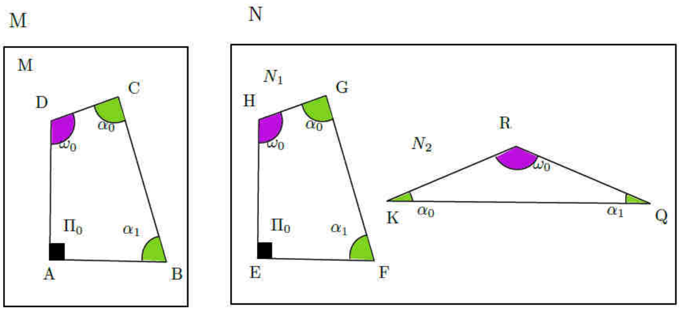
Partiamo dal dato di fatto che un poligono convesso non può avere più di 3 angoli acuti[9]. Un po' di notazione per complicare. Per una Figura F siano

- $\{\alpha_i^F\}$ i suoi angoli acuti;
- $\{\omega_i^F\}$ i suoi angoli ottusi;
- $\{\Pi_i^F\}$ i suoi angoli retti.

Le proprietà sono quindi:

- $\#\{\alpha_i^N\} = 2 \cdot \#\{\omega_i^M\}$
- $\#\{\alpha_i^M\} = 2 \cdot \#\{\omega_i^N\}$
- $1 \leq \#\{\alpha_i^M\}, 1 \leq \#\{\alpha_i^N\}$
- $\exists F \in \{M, N\} : 1 \leq \#\{\Pi_i^F\}$

Dalle prime due si deduce che il numero degli angoli acuti di una figura è un numero pari minore di 3 e maggiore di 2, che è anche un numero primo pari, vale a dire 2.



Questo implica che il numero di angoli ottusi è pari a 1. In definitiva possiamo dividere le possibili figure in 3 classi:

- triangoli
- quadrilateri
- gli altri poligoni convessi.

In particolare:

- la figura contenente l'angolo retto non può essere un triangolo;
- Se M o N non sono quadrilateri convessi, allora gli altri angoli possono essere solo retti. Sia $\epsilon_F^{\beta_i}$ l'angolo esterno a β_i. Allora si ha

$$2 \cdot \pi = \sum_{i=0}^{N} \epsilon_F^{\Pi_i^F} + \omega_0^F + \sum_{j=0}^{1} \epsilon_F^{\alpha_i^F} > N \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 \leq N < 2.$$

Da questo si deduce che questi poligoni vanno esclusi[10].

In conclusione le due classi sono (sempre con un pizzico di zucchero notazionale) con

$Q_{2\alpha,\omega}^{\Pi}$ = {quadrilateri con due angoli acuti, un angolo ottuso e un angolo retto}

$T_{2\alpha,\omega}$= {triangoli con due angoli acuti e un angolo ottuso}

[9] Vedi più avanti per la prova ...

[10] Ecco più avanti: con un procedimento analogo si può dimostrare che non possono esserci più di 3 angoli acuti in un poligono convesso:

$$2 \cdot \pi = \sum_{i=0}^{N_\Pi} \epsilon_F^{\Pi_i^F} + \sum_{i=0}^{N_\omega} \epsilon_F^{\omega_i^F} + \sum_{i=0}^{N_\alpha} \epsilon_F^{\alpha_i^F} > N_\alpha \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow N_\alpha \leq 3.$$

- $M = Q^{\Pi}_{2\alpha,\omega}$
- $N = Q^{\Pi}_{2\alpha,\omega} \cup T_{2\alpha,\omega}$

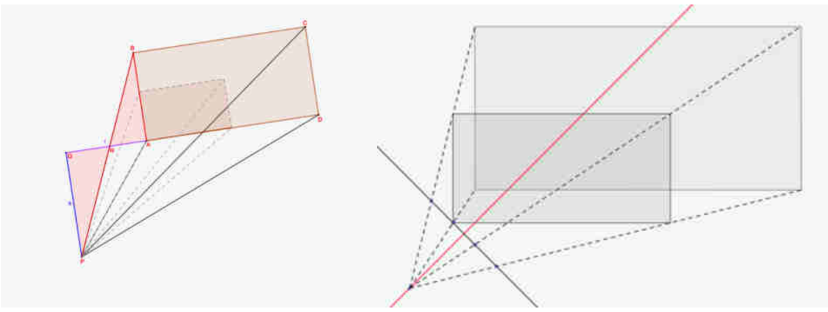
A noi sembra che lo zucchero notazionale sia un po' esagerato (soprattutto perché lo abbiamo dovuto estrarre con pazienza da un pdf), ma è solo un'opinione, e comunque stiamo arrivando all'ultimo problema e dobbiamo accelerare un pochino. Andiamo avanti.

4.2.2 Fine pena: MAI

Sarete contenti di sapere che il protagonista segreto del problema ha finalmente ottenuto la data di fine pena, anche se per RM non ha possibilità di rescindere il contratto, riuscirà finalmente ad andare in pensione per quanto riguarda l'altra sua occupazione. Certo è che la Redazione di RM continua ad essere protagonista di problemi, anche geometrici, ed il nostro quasi-pensionato è posizionato con la lettera P:

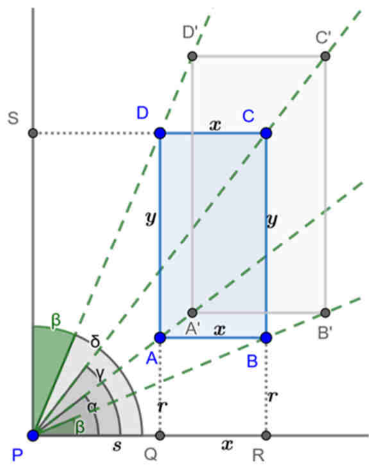
> *Indichiamo la posizione del protagonista con P, e dei quattro alberi con i vertici di un rettangolo ABCD (in senso orario, il vertice A è il più vicino a P). P vede i quattro alberi nell'ordine B, A, C e D come equispaziati tra di loro. Prolungando AD dalla parte di A, ad una distanza r da A, troviamo Q, alla distanza minima (sia essa s) da P. Trovare le dimensioni del rettangolo in funzione di r e s.*

Sta ormai diventando tradizione consolidata anche il cominciare con le soluzioni di ***Valter***, quindi ecco qui:

> Premetto che di geometria proiettiva ne so poco; forse c'entrano le proprietà del birapporto. Provo ugualmente a farneticarci, se mai servisse; già "…equispaziati" mi mette in difficoltà. Per tentare di spiegare le mie perplessità propongo due figure, mi serviranno poi in seguito:
>
> 
>
> Nella prima intendo l'angolo fra gli alberi, nella seconda, la distanza sul piano ortogonale. Mi pare che se non conosco l'angolo o la distanza, non si ha un unico rettangolo costruibile. Assumo, quindi, di sapere l'ampiezza dei tre angoli "equispaziati", nella prima delle figure.
>
> Il metodo che propongo per trovare le sue dimensioni penso si possa sfruttare per la seconda:
>
> - ∠QPA=artan(r/s)
> - QD=tan(∠QPA+∠APD)
> - **AD**=QD-r
> - ∠QPR=∠QPA-∠RPA →·uno dei tre angoli "equispaziati"
> - QR=tan(∠QPR)s
> - RA=r-QR
> - **AB**=(s/QR)RA →PQR e BAR sono simili.

I dubbi del nostro ***Valter*** sono anche loro parte della tradizione, quindi li lasciamo, come sempre, senza risposta, e proseguiamo con la versione di ***Franco57***:

> Prendendo P come origine, traccio gli assi cartesiani paralleli ai lati del rettangolo. Chiamo α, β, γ, δ gli angoli tra l'asse delle ascisse e rispettivamente i vertici A, B, C, D del rettangolo e x, y le dimensioni orizzontale e verticale del rettangolo da trovare.



Vedere i quattro alberi equispaziati tra loro significa che gli angoli BPA, APC, CPD sono uguali a uno stesso valore ϕ.

Si nota subito che qualsiasi omotetia positiva di centro P trasforma una soluzione del problema in un'altra soluzione perché mantiene gli angoli con vertice in P e il rettangolo (ABCD) parallelo a sé stesso, come (A'B'C'D') nella figura.

Poiché BPA = $\alpha - \beta$, APC = $\gamma - \alpha$, CPD = $\delta - \gamma$, e

$$\tan(\alpha)=\frac{r}{s},\quad \tan(\beta)=\frac{r}{s+x},\quad \tan(\gamma)=\frac{r+y}{s+x},\quad \tan(\delta)=\frac{r+y}{s}$$

posso dedurre qualcosa di interessante applicando la formula trigonometrica per calcolare la tangente della differenza di due angoli, considerando che si lavora nell'intervallo (0, π/2) dove la tangente è una funzione biunivoca.

La condizione BPA = CPD = ϕ ad esempio diventa

$$\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}=\frac{\tan(\delta)-\tan(\gamma)}{1+\tan(\delta)\cdot\tan(\gamma)},$$

quindi

$$\frac{\frac{r}{s}-\frac{r}{s+x}}{1+\frac{r}{s}\cdot\frac{r}{s+x}}=\frac{\frac{r+y}{s}-\frac{r+y}{s+x}}{1+\frac{r+y}{s}\cdot\frac{r+y}{s+x}}$$

che posso riscrivere come

$$\frac{r\cdot x}{s\cdot(s+x)+r^2}=\frac{(r+y)\cdot x}{s\cdot(s+x)+(r+y)^2}$$

e che dopo pochi passaggi si riduce a

$$\boxed{\frac{r+y}{s+x}=\frac{s}{r}}$$

che è molto interessante. Ci dice infatti che tan(γ)=1/tan(α) cioè che γ e α sono complementari, vale a dire $\alpha+\gamma=\pi/2$ e quindi anche δ e β lo sono: $\alpha+\gamma=\pi/2$; $\delta+\beta=\gamma+\phi+\beta=\gamma+\alpha=\pi/2$. Insomma le rette da P per i vertici B (più a destra) e D (più a sinistra) lasciano uno stesso angolo β rispettivamente con l'asse delle ascisse e quello delle ordinate.

Per calcolare x e y adesso dobbiamo aggiungere un'altra condizione di uguaglianza, ad esempio BPA=APDe possiamo sfruttare la semplificazione

$$\tan(\gamma)=\frac{r+y}{s+x}=\frac{s}{r}.$$

Abbiamo con la stessa tecnica:

$$\frac{\frac{r}{s}-\frac{r}{s+x}}{1+\frac{r}{s}\cdot\frac{r}{s+x}}=\frac{\frac{s}{r}-\frac{r}{s}}{1+\frac{s}{r}\cdot\frac{r}{s}}.$$

La y è sparita e possiamo calcolare

$$\boxed{x=\frac{s^2+r^2}{s}\cdot\frac{s^2-r^2}{3\cdot r^2-s^2}}$$

e poi usando ancora $r + y = s\cdot s/r + x$ ricaviamo anche l'altra incognita per sostituzione:

$$\boxed{y=4\cdot r\cdot\frac{s^2-r^2}{3\cdot r^2-s^2}}.$$

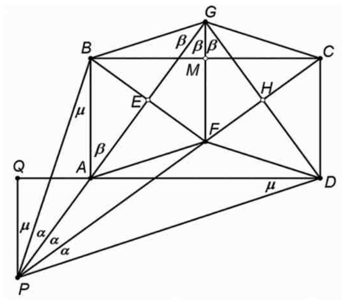
Come aspettato, per il discorso della omotetia, il rapporto tra r e s, che si ottiene semplificando i due precedenti risultati, fornisce anche il rapporto tra x e y:

$$\boxed{\frac{y}{x}=\frac{4\cdot\left(\frac{s}{r}\right)}{1+\left(\frac{s}{r}\right)^2}}.$$

In effetti le formule per x e y sono un poco ostiche. In realtà, e non a caso, sono parenti della formula di triplicazione della tangente visto che ad esempio $r/(s+x) = \tan(\beta) = \tan(3\alpha - \pi/2)$ e che $\tan(\alpha) = r/s$.

Tuttavia l'approccio di costruzione geometrica sembra più gradevole: fissati gli assi cartesiani scelgo il castagno B nel I quadrante tiro la semiretta dal patio P al castagno B e ritaglio un angolo β con l'asse orizzontale. Quindi ritaglio dall'asse verticale sempre nel I quadrante uno stesso angolo β e triseco l'angolo restante. Adesso che ho le 4 semirette che danno il punto di vista dei 4 alberi dal patio P, ricavo per incrocio con rette verticali e orizzontali alternate il platano C, la quercia D e l'olmo A, che posso ottenere sia scendendo da D che andando a sinistra da B e mi pare che ciò sia giustificato dalla parte algebrica già esposta.

Vedete che le formule sono sempre "ostiche" e siamo passati ai nostri lettori di lunga data, tra cui splende anche ***trentatre***:



In figura sono disegnati due rombi affiancati $ABGF$ e $DCGF$ con le diagonali che si incrociano in E, H. Il rettangolo è $ABCD$ di lati $a = AD, b = AB$; i segmenti per Q sono $r = AQ, s = PQ$.

Il punto P è l'incrocio delle rette GA e CF (due diagonali dei rombi).

I triangoli rettangoli PEB, PEF sono uguali e così PHG, PHD; quindi sono uguali i tre angoli α fra le rette condotte da P a B, A, C, D in quest'ordine.

Si chiede di trovare a e b in funzione di r e s; la soluzione è

[2] $$\boxed{a=4r\cdot\frac{1-k^2}{3k^2-1},\ b=s\cdot\frac{1-k^4}{3k^2-1},\ k=r/s}.$$

I valori a, b, r, s sono tutti positivi solo se

[3] $\boxed{\sqrt{3} < a/b < 2}$ che equivale a $\boxed{1/\sqrt{3} < r/s < 1}$.

Ogni rombo è diviso in quattro triangoli rettangoli, con ipotenusa uguale a b e un angolo acuto indicato con β; per gli altri angoli α e μ si ha dai seguenti triangoli rettangoli

$PGH \to \boxed{\alpha = 90° - 2\beta}$

$PBE \to \mu + (90° - \beta) + \alpha = 90° \to \boxed{\mu = \beta - \alpha}$

- da queste si ricavano le identità

[4] $\tan\beta = (\cos\alpha - \sin 2\alpha)/(\cos 2\alpha - \sin\alpha)$

$\tan\beta \cdot \tan\mu = (1 - 2\sin\alpha)/(1 + 2\sin\alpha)$

- ancora dai triangoli rettangoli si ha

$PQD \to 90° - (\mu + 3\alpha) = \mu$

$BGM \to a/2 = b\sin(2\beta) \to \boxed{a = 2b \cdot \cos\alpha}$

$PQA \to PQ = QD \cdot \tan\mu \to s = (r + a) \cdot \tan\mu$

$\to QA = QP \cdot \tan(\mu + \alpha) \to k = r/s = \tan\beta$

- eliminando r e s fra le ultime due

$$a/r = \frac{1}{\tan\beta \cdot \tan\mu} - 1,\ b/s = \frac{\tan\beta}{2\cos\alpha} \cdot \left(\frac{1}{\tan\beta \cdot \tan\mu} - 1\right)$$

- che per le [4] diventano

[5] $$a/r = \frac{4\sin\alpha}{1 - 2\sin\alpha},\ b/s = \frac{2\sin\alpha}{\cos 2\alpha - \sin\alpha}$$

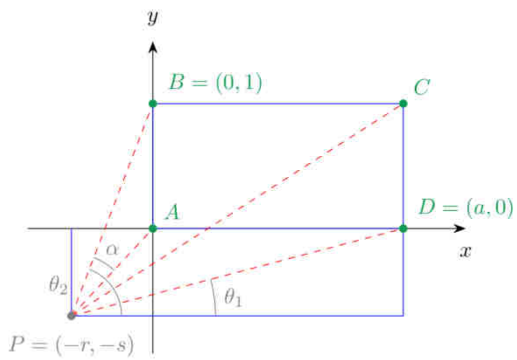
- per avere le soluzioni [2] basta sostituire

$$\sin\alpha = \cos 2\beta = \frac{1 - \tan^2\beta}{1 + \tan^2\beta} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

$$\cos\alpha = \sin 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1 + \tan^2\beta} = \frac{2k}{1 + k^2}$$

Complimenti anche a ***trentatre***! Le formule continuano ad essere serie, vediamo la soluzione a due mani di ***A.B.*** (sì, gli stessi di sopra):

Il rettangolo in questione può essere riscalato a piacere, quindi senza perdita di generalità possiamo considerare il caso rappresentato in figura, in cui AB=1 e AD=a.



A questo punto sappiamo che P vede gli alberi tutti alla stessa distanza tra loro, il che assumo significhi che BPA=APC=CPD=α. Infatti, ignorando ogni spessore fisico degli oggetti in questione, guardando un oggetto non possiamo sapere quanto distante sia. Quindi, dati due oggetti, possiamo solo valutare la parte angolare del nostro campo visivo che occupano, e dire che svariati oggetti sono visti alla stessa distanza significa che sottendono lo stesso angolo.

A questo punto, facendo riferimento alla figura, il piano del calcolo sarà ottenere tan3α in due modi diversi, e dall'uguaglianza dei due risultati si ricaverà a in funzione di r, s.

Facendo riferimento alla figura sappiamo le seguenti cose

$$\tan\theta_2 = \frac{1+s}{r} \qquad \tan\theta_1 = \frac{s}{a+r} \qquad \alpha = \frac{\theta_2 - \theta_1}{3}$$

Dalle regole di sottrazione della tangente sappiamo che

$$\tan 3\alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{(1+s)(r+a) - sr}{r(r+a) + s(1+s)}$$

Inoltre sappiamo che

$$\tan(\theta_2 - \alpha) = \frac{s}{r}$$

e quindi usando di nuovo la sottrazione della tangente si ottiene

$$\tan\alpha = \tan(\theta_2 - (\theta_2 - \alpha)) = \frac{\tan\theta_2 - \frac{s}{r}}{1 + \frac{s}{r}\tan\theta_2} = \frac{r}{r^2 + s(s+1)}$$

Usando per l'n-esima volta le regole di somma della tangente possiamo calcolare

$$\tan 3\alpha = \tan(\alpha + 2\alpha) = \frac{\tan\alpha + \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha}}{1 - \tan\alpha\frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha}} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

Esplicitando quest'ultima espressione si ottiene

$$\tan 3\alpha = \frac{3r[r^2 + s(s+1)]^2 - r^3}{[r^2 + s(s+1)]^3 - 3r^2[r^2 + s(s+1)]}$$

Piccola nota, l'espressione per tanα è dimensionalmente corretta perché, anche se non è esplicitamente presente nelle formule quando moltiplicata per altri fattori, la distanza AB=1 ha comunque unità di lunghezza.

Dal momento che tan3α = tan3α allora dobbiamo avere

$$\frac{(1+s)(r+a) - sr}{r(r+a) + s(1+s)} = \frac{3r[r^2 + s(s+1)]^2 - r^3}{[r^2 + s(s+1)]^3 - 3r^2[r^2 + s(s+1)]}$$

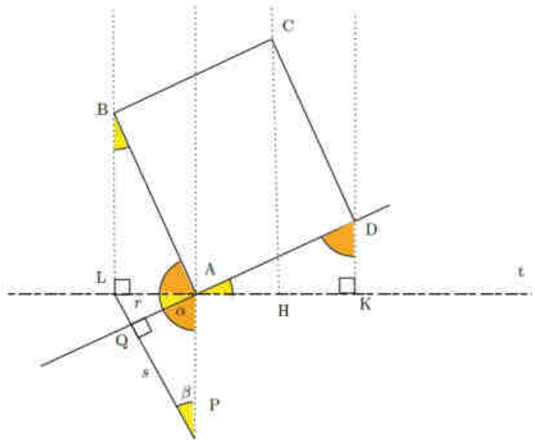
che si può risolvere per a ottenendo la temibile espressione

$$a = \frac{2r[r^2 + s(s+1)]^3 + 2r^3[r^2 + s(s+1)]}{(1-s)\{[r^2 + s(s+1)]^3 - 3r^2[r^2 + s(s+1)]\} - 3r^2[r^2 + s(s+1)]^2 + r^4}$$

che risolve il problema.

Espressione sì temibile, ma non l'unica che incute terrore (soprattutto negli *amanti* della trigonometria) in questa bella soluzione di ***A.B.***. Prima di concludere proviamo ancora ad aggiungere la soluzione di ***Makaronik***:

Consideriamo l'eremo stilizzato in figura:



disboscato e un po' meno idilliaco senza alberi, arbusti ed arboscelli[11]. Forse ci sono soluzioni alternative più immediate e (soprattutto) corrette: questa va così. Dal momento che si legge che si trova alla distanza minima (sia essa s) da P sembra suggerire che il triangolo QPA è retto: dal teorema di Pitagora AP = $r^2 + s^2$.

Tracciamo per prima cosa la perpendicolare (*abusiva?*) ad AP passante per A. Il triangolo QAL e PQA sono simili, in particolare

$$r : s = LQ : QA$$

o in altri termini LQ = r^2/s.

Il triangolo QAL è quindi risolto, in particolare, invocando nuovamente il Teorema di Pitagora:

$$AL^2 = QA^2 + LQ^2 = r^2 + \left(\frac{r^2}{s}\right) = r^2 \cdot \left(1 + \frac{r^2}{s^2}\right)$$

Possiamo ricavare quanto valgano gli angoli del triangolo QPA:

$$\beta = atan\frac{r}{s}; \quad \alpha = atan\frac{s}{r}.$$

Ora, PB e LP sono parallele essendo perpendicolari alla stessa retta QD. Considerando il triangolo ABL si ha

$$AB = \frac{AL}{\cos\alpha} = r\frac{\sqrt{1+\frac{r^2}{s^2}}}{\cos \operatorname{atan}\frac{s}{r}}$$

Ora il segmento AK deve essere lungo due volte il segmento LA, e considerando il triangolo AKD si ha

$$AD \cdot \cos\beta = 2 \cdot AL \Rightarrow AD = \frac{2r\sqrt{1+\frac{r^2}{s^2}}}{\cos \operatorname{atan}\frac{r}{s}}$$

Nel triangolo APQ si ha che

$$AP\cos\alpha = r = \sqrt{r^2+s^2}\cos \operatorname{atan}\frac{s}{r}$$

$$AP\cos\beta = s = \sqrt{r^2+s^2}\cos \operatorname{atan}\frac{r}{s}$$

Si può provare a semplificare sopra:

[11] Sperando di aver interpretato il testo correttamente: altrimenti proporrei di cambiare il testo, dal momento che ci ho messo un sacco di tempo a farlo.

$$AB = \frac{\frac{r}{s}\sqrt{r^2+s^2}}{\cos \operatorname{atan} \frac{s}{r}} = \frac{\frac{r}{s}\left(r^2+s^2\right)}{\sqrt{r^2+s^2}\cos \operatorname{atan} \frac{s}{r}} = \frac{r^2+s^2}{s}$$

$$AD = \frac{2\cdot\frac{r}{s}\sqrt{r^2+s^2}}{\cos \operatorname{atan} \frac{r}{s}} = \frac{2\cdot\frac{r}{s}\left(r^2+s^2\right)}{\sqrt{r^2+s^2}\cos \operatorname{atan} \frac{r}{s}} = \frac{2\cdot r}{s^2}\left(r^2+s^2\right)$$

E adesso ci fermiamo, con un ultimo piccolo appello a tutti i solutori: le soluzioni in pdf (o altre forme non editabili) sono molto difficili da copiare nel testo di RM, per cui mandateci anche gli originali! Buon 2022 e alla prossima!

5. Quick & Dirty

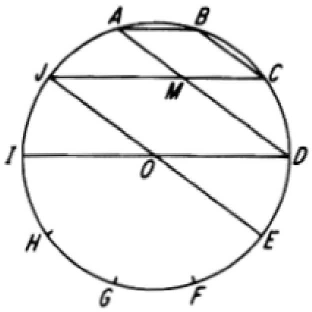
Se dividete una circonferenza in dieci parti regolari, unendo ogni punto di divisione con il successivo ottenete un decagono regolare; se invece unite ogni punto con il terzo successivo ottenete una stella a dieci punte (sempre regolare).

Qual è la differenza tra i lati delle due figure[12]?

Nell'immagine qui a fianco, sono indicati i dieci punti: il decagono regolare è dato dal percorso ABCDEFGHIJA, la stella da quello ADGJCFIBEHA. Consideriamo i lati AB e BC del decagono e i lati JC e AD della stella.

I diametri ID e JE sono paralleli, rispettivamente, ai lati AB e BC del decagono regolare e ai lati JC e AD della stella.

Quindi ABCM e JMDO sono dei rombi, e quindi AD–BC=AD–AM=MD=JO, che è un raggio del cerchio.

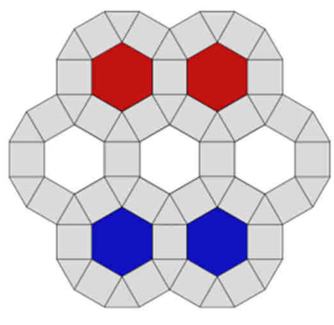


6. Zugzwang!

6.1 Kensington

Per prima cosa, abbiamo un lavoro per voi. Poi, come si diceva una volta, "Seguirà dibattito".

Brian Taylor e ***Peter Forbes*** sostengono di essersi ispirati, per la scacchiera, ad un disegno visto a Kensington Park; noi siamo praticamente certi di aver visto quel disegno in un qualche pavimento di chiesa, ma non ricordiamo assolutamente dove: se riuscite a trovarne uno nella vostra città, vincete la possibilità di dare il nome alla versione che vi proporremo verso la fine (in fondo, "ispirato" vuol dire un mucchio di cose, quindi ci stiamo).



1 *...inutile...*

E, giusto per restare in tema, cominciamo dalla ***scacchiera***: o, giustappunto, trovate un pavimento fatto in questo modo, o ve la costruite. Si tratta, infatti, semplicemente di una ***tassellatura rombitriesagonale***, con Simbolo di Schläfli *rr*{3, 6}. Ora tutto è più chiaro, quindi è inutile che vi si metta il disegno, che trovate qui di fianco (da Wikipedia).

Oltre a questo, vi servono 15+15 pedine (nel senso di quindici blu e altrettante rosse).

Il gioco procede in due fasi:

Nella ***prima fase***, i giocatori si alternano depositando, sulle intersezioni, una propria pedina per volta: sono settantadue (nel senso che valgono anche quelle sui bordi esterni), quindi c'è spazio per tutti.

[12] Idea nostra: *e se non fossero dieci*? Ma in questa forma non ci pare né Quick, né Dirty.

Nella ***seconda fase***, ogni giocatore muove una delle proprie pedine su un vertice adiacente *libero* (no, non si prende... quasi. Vedi dopo). Non abbiamo notizie precise in merito, ma molto probabilmente se per un qualche motivo non riuscite a muovere, avete perso.

Attenzione che se riuscite a mettere tre pedine sui bordi di uno stesso triangolo (o quattro pedine sui bordi dello stesso quadrato) avete generato un ***mill*** e potete spostare, mettendola dove vi pare, una (se avete fatto un triangolo) o due (se avete fatto un quadrato) pedine avversarie. Oh, se una pedina "milla[13]" sia un triangolo che un quadrato, conta solo il quadrato (o il triangolo, se preferite, oscure ragioni strategiche potrebbero spingervi ad una scelta del genere) e conta per un "giro solo", anche se non è difficile immaginare una situazione nella quale si può avere il vantaggio ad ogni giro: ad esempio, un triangolo completamente occupato e il triangolo vicino (separato dal primo da un quadrato) con uno dei vertici in comune con il quadrato suddetto libero (e gli altri due occupati da vostre pedine, si veda, in merito a questa frase, la prima domanda al fondo); qui, muovendovi da un vertice ad un altro, continuate a fare dei mill e potete tranquillamente distruggere sia la strategia che la sanità mentale dell'avversario.

"Rudy, e se metto sei pedine attorno ad un esagono?" Avete, con probabilità 5/7, vinto la partita. Nel senso che lo ***scopo del gioco*** è di mettere sei vostre pedine attorno a uno degli esagoni neutri (quelli bianchi) o a uno degli esagoni del vostro colore; gli esagoni in tutti sono sette, potete vincere coprendo gli angoli di uno di cinque, da cui...

Per quanto le regole siano semplici, esistono aspre discussioni (come per ogni gioco che non contempli prese, si direbbe) se sia più vantaggioso giocare per primo o per secondo. C'è chi sostiene che il vantaggio sia del secondo giocatore in quanto, giocando per ultimo nella prima fase, può fare una mossa che non può essere contrastata immediatamente; di converso, c'è chi sostiene che il vantaggio sia del primo, visto che gioca per primo anche nella seconda fase (...e se lasciate fare all'avversario un *mill* già nella prima fase, scusate ma siete proprio dei polli).

A questo punto, a noi sorgono un paio di domande.

Tanto per cominciare, esiste un sistema simpatico per *annotare le mosse*? Semplicemente numerare i vertici non ci piace molto, si vorrebbe un qualchecosa che (come sulla scacchiera da scacchi) "dia un'idea" di dove siete. Idee?

Ma secondo voi, giocarlo su un rombicosidodecaedro, è più veloce? Lì, in fondo, dovete "chiudere" dei pentagoni, anziché degli esagoni. E il fatto di giocare su una sfera, forse aiuta.

7. Pagina 46

Sia $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_r^{s_r}$ la fattorizzazione in fattori primi dell'intero dispari n e si assuma che n sia perfetto. Allora, $2n = \sigma(n) = \sigma(p_1^{s_1})\sigma(p_2^{s_2}) \dots \sigma(p_r^{s_r})$. Si noti che $2n \equiv 2 (\mathrm{mod} 4)$ in quanto il fatto che n sia dispari implica che $n \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$ o che $n \equiv 3 (\mathrm{mod} 4)$, e quindi $\sigma(n)=2n$ è divisibile per 2, ma non per 4. Quindi, solo uno dei $\sigma(p_i^{s_i})$ è un intero pari non divisibile per 4 (sia esso il primo, con l'indice 1), mentre tutti gli altri sono interi dispari.

Dato un primo p_i, si ha che o $p_i \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$ o $p_i \equiv 3 (\mathrm{mod} 4)$. Se $p_i \equiv 3 \equiv -1 (\mathrm{mod} 4)$, allora:

$$\sigma(p_i^{s_i}) = 1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{s_i} \equiv 1 + (-1) + (-1)^2 + \dots + (-1)^{s_i} (\mathrm{mod}\, 4)$$

e quindi:

$$\sigma(p_i^{s_i}) \equiv \begin{cases} 0 (\mathrm{mod}\, 4) & \text{se } s_i \text{ è dispari} \\ 1 (\mathrm{mod}\, 4) & \text{se } s_i \text{ è pari} \end{cases}$$

Quindi p_i *non* è equivalente a $3 (\mathrm{mod} 4)$ in quanto $\sigma(p_i^{s_i}) \equiv 2 (\mathrm{mod} 4)$. Da cui, $p_i = p \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$. Inoltre (per $i>1$) $\sigma(p_i^{s_i}) \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$ implica che 4 divida $\sigma(p_i^{s_i})$; il che è una contraddizione, in quanto $\sigma(n)$ è divisibile per 2 ma non per 4. Quindi, se per un qualche $i>1$ $p_i \equiv 3 (\mathrm{mod} 4)$,

[13] Sì, parola appena inventata, e ne siamo fieri. Sta per "contribuisce alla costruzione di".

allora il suo esponente s_i è un intero pari. D'altro canto, se il primo $p_i \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$, deve essere:

$$\begin{aligned} \sigma\left(p_i^{s_i}\right) &= 1+p_i+p_i^2+\ldots+p_i^{s_i} \\ &\equiv 1+1^1+1^2+\ldots+1^{s_i}(\mathrm{mod}\, 4) \\ &\equiv s_i+1(\mathrm{mod}\, 4) \end{aligned}$$

L'affermazione $\sigma\left(p_1^{s_1}\right) \equiv 2(\mathrm{mod} 4)$ implica $s_1 \equiv 1(\mathrm{mod} 4)$. Per i valori restanti di i, si ha che $\sigma\left(p_i^{s_i}\right) \equiv 1$ o $3(\mathrm{mod} 4)$, e quindi $s_i \equiv 0$ o $2(\mathrm{mod} 4)$: in entrambi i casi, s_i è un intero pari e quindi, indipendentemente dal fatto che sia $p_i \equiv 1$ o $3(\mathrm{mod} 4)$, l'esponente s_i è sempre pari per $i \neq 1$.

Quindi, un numero perfetto dispari n può sempre essere espresso come:

$$n=p_s p_2^{2h_2}\ldots p_r^{2h_r}=p_s\left(p_2^{h_2}\ldots p_r^{h_r}\right)^2=p^s m^2$$

dove $m = p_2^{h_2}\ldots p_r^{h_r}$, $p \equiv 1(\mathrm{mod} 4)$ è un primo della forma $4k+1$, $s \equiv 1(\mathrm{mod} 4)$ è un intero della forma $4h+1$, p non è un divisore di m per l'unicità della fattorizzazione in primi di n e il fatto che $n \equiv 1(\mathrm{mod} 4)$ implica (essendo m un intero dispari) $m^2 \equiv 1(\mathrm{mod} 4)$. Il che dimostra la prima parte del problema.

Per quanto riguarda la seconda parte, consideriamo i quattro casi corrispondenti alle diverse parità di $n-1$ e $n(n+1)/2$:

Caso 1: $n \equiv 0(\mathrm{mod} 4)$.

In questo caso, $n-1 \equiv -1 \equiv 3(\mathrm{mod} 4)$. Quindi, $n-1$ non è perfetto per quanto visto sopra.

Caso 2: $n \equiv 1(\mathrm{mod} 4)$.

In questo caso, $n-1$ è pari e $n(n+1)/2$ è dispari. Se entrambi i numeri fossero numeri perfetti, dal Teorema di Eulero si avrebbe $n-1 = 2^{p-1}(2^p-1)$, con p e 2^p-1 primi dispari. Quindi:

$$\frac{n(n+1)}{2}=\left(2^{2p-1}-2^{p-1}+1\right)\left(2^{2p-2}-2^{p-2}+1\right)$$

Entrambi i fattori a secondo membro sono primi tra loro e quindi, per quanto visto sopra, uno dei due deve essere un quadrato perfetto. Essendo p dispari,

$$2^{2p-1}-2^{p-1}+1 \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$$

che quindi non è un quadrato. Per quanto riguarda il secondo fattore, è compreso tra due quadrati consecutivi:

$$\left(2^{p-1}-1\right)^2 < 2^{2p-2}-2^{p-2}+1 < \left(2^{p-1}\right)^2$$

Non essendo nessun fattore un quadrato, $n(n+1)/2$ non è un numero perfetto.

Caso 3: $n \equiv 2(\mathrm{mod} 4)$.

In questo caso, $n+1 \equiv 3(\mathrm{mod} 4)$ e quindi ha un fattore primo $q \equiv 3(\mathrm{mod} 4)$ con un esponente dispari nella fattorizzazione in primi di $n+1$. Essendo n e $n+1$ primi tra loro, q ha lo stesso esponente dispari nella fattorizzazione di $n(n+1)/2$ e, per quanto visto nella prima parte, quest'ultimo non può essere un numero perfetto.

Caso 4: $n \equiv 3(\mathrm{mod} 4)$.

In questo caso, $n-1$ è divisibile per 2 ma non per 4. L'unico numero perfetto non divisibile per 4 è 6, quindi $n-1$ è perfetto solo per $n=7$. Inoltre, anche $7(7+1)/2 = 28$ è un numero perfetto.

8. Paraphernalia Mathematica

Continuiamo lo sproloquio precedente sulle simmetrie ("Ritornano e non 'a volte'; 'sempre'."), visto che potremmo arrivare ad interessanti conclusioni (tranquilli, cominciamo con un veloce ripasso, anche perché avevamo saltato una cosa…).

Nel preparare questo pezzo, abbiamo avuto più volte una sgradevole sensazione: ci sorgeva alla mente la domanda "...ma *perché*?", e l'impressione (quella sgradevole) era che era così perché lo diceva Conway. A noi il principio di autorità non è mai stato particolarmente simpatico, ma francamente qui sembrava spesso l'unica via di fuga; ancora adesso, la nostra impressione è che Conway abbia fatto il lavoro un paio di volte, "aggiustando" poi alcuni valori numerici e notazioni in modo tale che venisse il risultato corretto. E, a quanto pare, questa era una sua abitudine, visto quello che ha combinato con le notazioni in Teoria dei Giochi. A noi piacciono le "strade diverse" per arrivare alla stessa conclusione, ma un po' più di parallelismo tra la notazione classica e quella appena inventata ci pare farebbe solo bene. Se qualcuno vuole provarci, garantiamo la pubblicazione e l'offerta di una birra.

8.1 "Perché sì!"

Se ricordate, nella puntata precedente abbiamo parlato di simmetrie "secondo Conway"; come sempre quando c'è di mezzo il Nostro, alcune cose che sembrano totalmente inutili (e messe lì solo per chiarire il concetto ai *minus habens*) si rivelano in seguito estremamente importanti, e bisogna andare a riprendere tutto quanto per capire a cosa servivano; questa volta, per (re)introdurre qualche concetto, sfruttiamo la potente arma del riassunto della puntata precedente.

Per prima cosa, non vi abbiamo parlato dei colori.

La prima simmetria che abbiamo visto era di riflessione, e veniva indicata con un asterisco rosso (*); nel caso gli specchi fossero più di uno, si introduceva un numero e un punto per indicare che si incrociavano in un punto; ad esempio, potevamo avere una simmetria (*2●): l'esempio classico sono due specchi messi ad un angolo di 90°.

Poi, abbiamo visto le "gyrations" o, se preferite, le "rotosimmetrie": il triskelion dell'Isola di Man, per capirci. Questa, in particolare, essendo data dallo stesso oggetto che "gira intorno" al centro (senza riflettersi), viene indicata in blu come (3●).

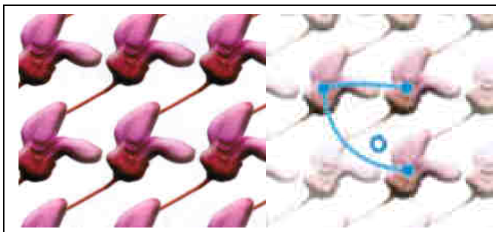
E, a questo punto, abbiamo visto che gli oggetti con segnatura (*N●) o (N●) erano tutto quanto ci serviva per descrivere le rosette.

Le cose si sono complicate quando abbiamo cominciato a mettere insieme le cose: nessun problema per simmetrie puramente caleidoscopiche, anche se accorgersi che una simmetria è (*623) non è facilissimo; ancora più complesso, capire che un oggetto ha simmetria (3*3).

Poi, sono successi i miracoli: singoli (×, o meglio *×; uno specchio vi serve sempre, qui) e doppi (××). E qui ci siamo fermati.

Si capisce che questa roba l'ha fatta Conway quando trovate un capitolo che si intitola "Wanderings and Wonder-Rings".

Nella figura di fianco, vedete uno di questi aggeggi (...va bene, "meraviglia"?). Questo disegno non è ottenibile per specchi, rotosimmetrie o miracoli, e quindi ci inventiamo un nuovo simbolo: come si vede dalla figura, Conway propone un cerchio blu (○).


2 La "meraviglia", secondo Conway.

No, i colori non ve li avevamo raccontati. Ma sono importanti, perché ci dicono qualcosa su come è costruita la figura (...ci dicono anche qualcosa su cosa fumava Conway, ma *transeat*): infatti, abbiamo usato il blu per indicare che le meraviglie e le rotoriflessioni mantengono la vera (true) orientazione dell'oggetto originale, mentre il rosso, che contraddistingue caleidoscopi e miracoli, implica una riflessione (reflection).

Riassumiamo, nel disegno originale di Conway: abbiamo quattro possibilità:

wonders	gyrations	kaleidoscopes	miracles
○...○	AB...C	*ab...c*de...f...	×...×

e, quando descriviamo una signature, le esprimiamo in quest'ordine.

Tutto ha un costo, anche la simmetria.

Infatti, Conway stabilisce che, quando introducete una simmetria in un disegno, dobbiate pagare una certa cifra[14] in funzione della sua signature, ossia che dipende dal tipo di simmetria che state utilizzando. E qui, il "...ma perché?" sgorga spontaneo, e non lo abbiamo capito. Se non per il fatto che esiste il Teorema Magico. Infatti, abbiamo che ***ogni signature di tassellatura periodica sul piano ha un costo* 2**.

Simbolo	Costo	Simbolo	Costo
○	2	*, ×	1
N	(N-1)/N	N	(N-1)/2N
∞	1	∞	1/2

3 *"Chi siete? Dove andate? Un Fiorino".*

Adesso, raccogliete la mascella che vi è caduta, che dobbiamo riesaminare gli esempi visti sin qui e a vedere quanto costano.

Signature	Costo	Signature	Costo
*	1	*632	$1+\frac{5}{12}+\frac{2}{6}+\frac{1}{4}=2$
*2•	$1+\frac{1}{4}$	*442	$1+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=2$
*3•	$1+\frac{2}{6}=1+\frac{1}{3}$	3*3	$\frac{2}{3}+1+\frac{2}{6}=2$
3•	$\frac{2}{3}$	**	1+1=2
*N•	$1+\frac{N-1}{2N}$	*×	1+1=2
N•	$\frac{N-1}{N}$	××	1 + 1=2
○	2		

...carino, vero?

"Rudy, guarda che qualcuna non dà due...". "Cosa non vi è chiaro nel concetto di 'tassellatura *periodica*'?". Infatti, tutti quelli che non danno due come costo non sono periodici.

Ora, non pretendiamo che prendiate questa esemplificazione per una dimostrazione (che, comunque, esiste), ma il sospetto che il teorema magico sia vero sorge potente.

Già, ma partendo da un disegno "ovviamente simmetrico", come faccio a trovare la signature? Conway si pregia di fornirci alcune linee guida: poco chiare, come sempre, ma almeno possiamo provarci. E lo citiamo testualmente.

1. Segnate tutti i caleidoscopi in rosso. Se ci sono delle linee di specchio, limitate la vostra attenzione ad una delle regioni nelle quali suddividono il piano; segnate un asterisco rosso vicino ad ogni caleidoscopio. Indi, tenete un solo angolo per tipo e scrivete il numero di specchi che passano per ognuno di questi angoli, sempre in rosso.

[14] Il Nostro indica i costi con un piccolo segno di dollaro ad apice prefisso: per ora non ci sembra il caso, salvo accorgersi che ci servono alla prossima puntata. Quindi, lasciamo perdere.

2. Guardate se ci sono dei punti di rotazione: segnate uno di questi punti con un punto blu.
3. Cercate i miracoli: riuscite ad andare da un punto ad una sua copia senza toccare uno specchio? Se sì, c'è stato un miracolo. Segnate il percorso con una linea tratteggiata e mettete una croce rossa lì vicino.
4. Ci sono delle meraviglie? Se non avete trovato niente di quanto sopra, da qualche parte c'è una meraviglia. Segnate con un cerchio blu.

Come regola aggiuntiva, se vi trovate in una struttura particolarmente "tricky" (cit.), esistono dei metodi che potrebbero (il condizionale è d'obbligo) semplificarvi il lavoro: spesso può essere utile cercare i punti di rotazione prima di marcare i caleidoscopi. Inoltre, assicuratevi che non ci siano linee di specchio all'interno di un caleidoscopio, e ricordatevi che i punti di rotazione non sono *mai* su una linea di specchio.

Inoltre, potete sempre usare il Teorema Magico: se trovate una meraviglia, potete fermarvi lì, perché avete già speso tutta la paghetta di due dollari; se, con la formula che avete trovato, siete sotto il due, allora vi siete dimenticati qualcosa.

Il che, fa pensare... Limitiamoci per un attimo ai veri blu[15], e facciamo qualche conto.

Se una stringa **AB...C** deve costare due dollari, visto che ognuna di loro costa meno di un dollaro (lo abbiamo visto nella tabella sopra), devono essercene più di 2. Se sono *esattamente* 3, allora possono essere solo **632**, **442** o **333**. Se sono più di 3, allora deve essere **2222**. Infine, se c'è una meraviglia, visto che costa due dollari deve essere da sola. Il che, ci ricorda quei problemini del tipo "Quante combinazioni esattamente da un dollaro posso fare usando solo monete da mezzo dollaro o da un quarto?". Uh, *potrebbe* essere un motivo per cui usare i costi...

Adesso, passiamo ai rossi riflessivi.

Tanto per cominciare, dobbiamo pagare l'asterisco, che c'è sempre e fa un dollaro. Il che, ci porta ad una considerazione: visto che l'espressione di un qualunque membro di una stringa rossa ha a denominatore $2N$, significa che quell'elemento varrà la *metà* dello stesso elemento in una stringa blu, che a denominatore ha solo N. Ma siccome la stringa blu per definizione non ha asterischi (niente specchi!), significa che una stringa rossa costerà due dollari solo se costerà due dollari l'equivalente stringa blu senza asterisco!

Freniamo (ma non troppo) gli entusiasmi solo per dire che dovete tener conto del doppio asterisco, che fa storia a sé (e costa due dollari solo lui), ma è equivalente al **2222**, quindi lo mettiamo nel mucchio. Insomma, i "rossi" sono cinque anche loro.

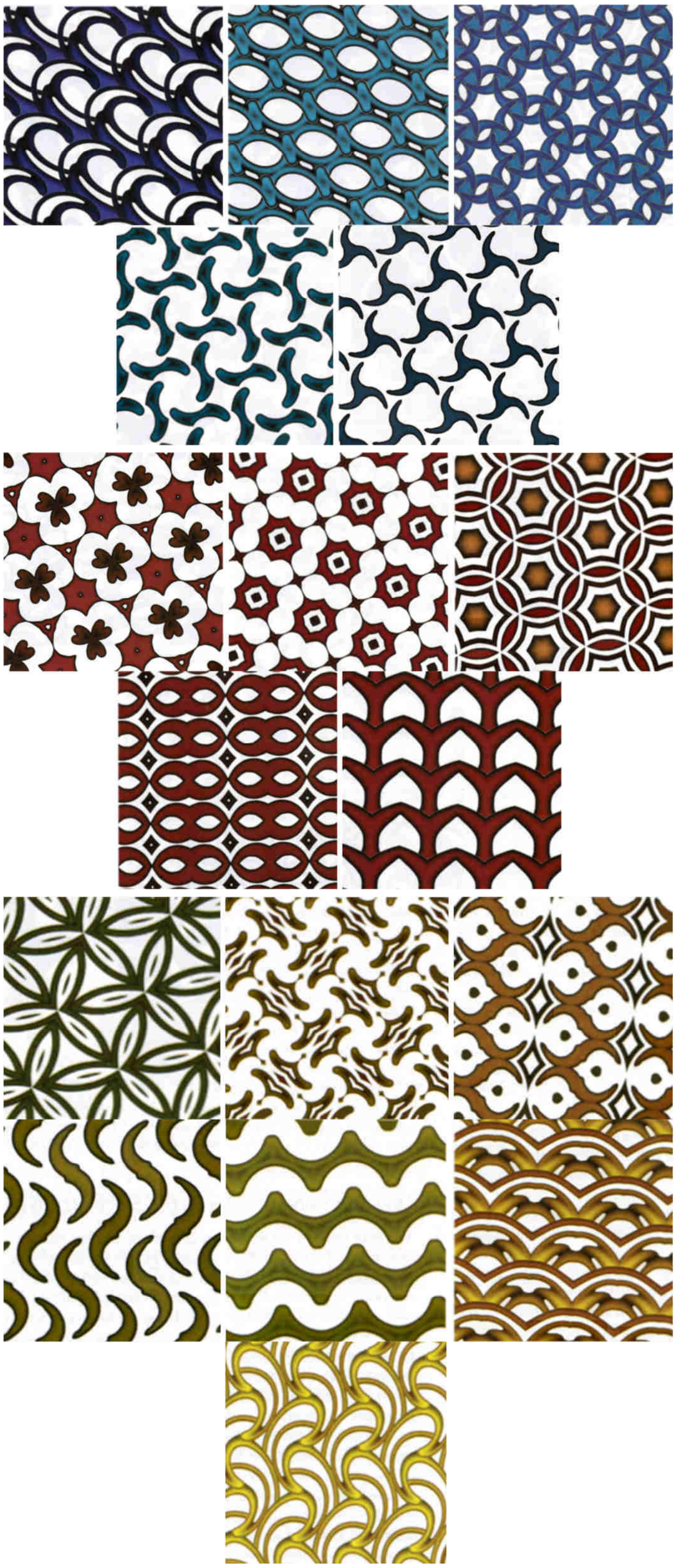
Mancano gli ibridi. E i miracoli.

Qui, Conway suggerisce di procedere per sostituzioni, in modo da trasformare i veri blu o rossi riflessivi in ibridi: in pratica, si vede che gli elementi della coppia [(**n***),(***nn**)] hanno *lo stesso prezzo*, esattamente come gli elementi della coppia [(╳),(*****)]; questo ci permette di "trasformare" in blu o in rosso di pari prezzo un ibrido e, tenendo il conto di quelli che "trovate per strada", dovreste ricavarne sette.

Cinque più cinque dieci, più sette diciassette... Toh, guarda chi si rivede.

"Rudy, ma come sono fatti?" Li trovate qui di seguito. I cinque ***veri blu***, i cinque ***rossi riflessivi*** e i sette ***verdi ibridi***.

[15] Che secondo Conway è un gioco di parole: le signature *true blue* sono composte unicamente di *true translation* e vengono indicate in blu.



Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms