Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 273 – Ottobre 2021 – Anno Ventitreesimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM272 ha diffuso 3'336 copie e il 11/10/2021 per Google eravamo in 26'500 pagine.

Ne manca solo uno, e poi potremo scatenarci con titoli hollywoodiani tipo "*I Magnifici Sette*", o magari direttamente "*I Sette Samurai*", tanto per restituire ad Akira Kurosawa quel che è di Akira Kurosawa. Per ora invece sono ancora solo sei, quindi nell'attesa inventiamo un gioco: ritagliate su pezzetti di carta i nomi ***Carlo***, ***Emilio***, ***Enrico***, ***Giorgio***, ***Guglielmo*** e ***Riccardo***; su altrettanti bigliettini gli anni **1909**, **1938**, **1959**, **1984**, **2002** e **2021**. Infine, su un'ulteriore sestina di bigliettini scrivete… vediamo un po'… scrivete "***Antiprotone***", "***Astro-X***", "***Debole***", "***Disordine***", "***Lenti***" e "***Telegrafia***". Poi usate questa copertina come tavoliere e vedete quante persone riusciranno a sistemare correttamente un bigliettino per tipo sulle sei fotografie.

1. Il Cerchio delle Dodici Miglia

"I am Jeremiah Dixon
I am a Geordie boy
A glass of wine with you, sir
And the ladies I'll enjoy
All Durham and Northumberland
Is measured up by my own hand
It was my fate from birth
To make my mark upon the earth

He calls me Charlie Mason
A stargazer am I
It seems that I was born
To chart the evening sky
They'd cut me out for baking bread
But I had other dreams instead
This baker's boy from the west country
Would join the Royal Society

We are sailing to Philadelphia
A world away from the coaly Tyne
Sailing to Philadelphia
To draw the line
A Mason-Dixon Line

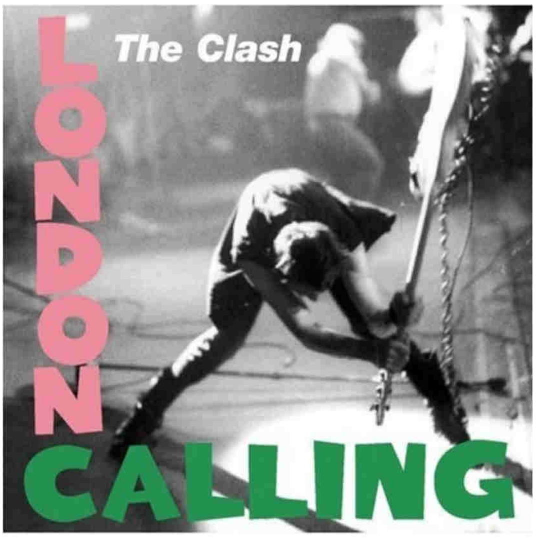
Now you're a good surveyor, Dixon
But I swear you'll make me mad
The West will kill us both
You gullible Geordie lad
You talk of liberty
How can America be free
A Geordie and a baker's boy
In the forests of the Iroquois

Now hold your head up, Mason
See America lies there
The morning tide has raised
The capes of Delaware
Come up and feel the sun
A new morning has begun
Another day will make it clear
Why your stars should guide us here

We are sailing to Philadelphia
A world away from the coaly Tyne
Sailing to Philadelphia
To draw the line
A Mason-Dixon Line"

("Sailing to Philadelphia", Mark Knopfler, 2001)

Ogni città ha la sua canzone. Si scrivono e si cantano canzoni su ogni aspetto della vita, specialmente su quelli condivisi, perché è importante che per ogni cantante ci siano ascoltatori in grado di identificarsi con il contenuto della canzone stessa, e poche cose sono più condivisibili della città in cui si vive. Così, anche i borghi più piccoli e remoti finiscono per essere cantati da qualche nostalgico abitante. Ma è noto, le dimensioni contano, ed è inevitabile che città grandi e famose siano cantate in centinaia, forse in migliaia di brani diversi, ed è altrettanto inevitabile che alcuni di questi finiscano con assurgere a notorietà vasta, globale, anche molto al difuori della città stessa: "*London calling*" dei Clash è ormai l'inevitabile sigla di qualsiasi evento ambientato nella capitale inglese, così come "*New York, New York*" (sia nella versione di Liza Minnelli che in quella



1 *Quarantadue anni, e non sentirli.*

di Frank Sinatra) è l'irrinunciabile colonna sonora di qualsiasi servizio giornalistico "di colore" referente alla Grande Mela. Ma vale, seppure in gradi diversi, un po' per tutte le grandi città: Parigi e Roma hanno brani celebri sufficienti a riempire una giornata intera di ascolto ininterrotto, per non parlare di città che hanno sviluppato una cultura musicale autoctona, come Napoli, Rio de Janeiro o l'intera Giamaica.

Se si pensa a Philadelphia, quella città americana dallo strano nome che sembra quasi un esercizio di greco antico, è impossibile non ricordare "*Streets of Philadelphia*" di Bruce Springsteen, canzone scritta appositamente per il film "*Philadelphia*" di Jonathan Demme, del 1993. Il film, oltre a sacramentare definitivamente Denzel Washington come uno degli attori migliori di Hollywood, si portò a casa due premi Oscar: uno all'interprete principale, Tom Hanks, come Miglior Attore Protagonista; e l'altro proprio a Springsteen per la Miglior Canzone. È abbastanza curioso – e tutto sommato anche abbastanza raro – che per conquistare il premio Springsteen abbia dovuto battere un pericoloso avversario che era in *nomination* per una canzone che faceva parte della colonna sonora del medesimo film: il titolo coincideva con quello del film e con il nome della città, "*Philadelphia*", ed era scritta ed eseguita da un altro mostro sacro della musica pop americana, Neil Young.

Come se non bastasse, meno di un decennio dopo la città di Philadelphia è di nuovo protagonista di una canzone scritta da un terzo celebre musicista e cantata in duetto con un altro (e quarto) cantante assai famoso: a differenza dei brani di Springsteen e Young, però, la canzone in questione è tutt'altro che centrata su problemi attuali ed emozioni contemporanee, anzi: parla di eventi reali accaduti nella seconda metà del Settecento. Stiamo parlando di "*Sailing to Philadelphia*", di Mark Knopfler – frontman, voce e leggendario chitarrista dei Dire Straits – che la interpreta insieme a James Taylor. Il testo della canzone è quello riportato in testa a questo articolo[1], e si basa sul romanzo storico "*Mason & Dixon*" di Thomas Pynchon[2]. È verosimile che per comprendere al meglio il testo della canzone sia necessario leggere il romanzo di Pynchon, ma per seguire anche solo un po' il racconto che fa da sfondo al duetto tra Knopfler e Taylor è necessario ripassare un po' di storia di quei tempi, soprattutto se non si è cittadini americani.

Tanto per cominciare, quelli che stanno "navigando verso Philadelphia" sono cittadini inglesi, sudditi di sua maestà Giorgio III d'Inghilterra, e non americani come si potrebbe ingenuamente pensare. Questo dipende anche dal non trascurabile fatto che l'episodio narrato avviene quando gli Stati Uniti d'America non esistono ancora come nazione, ma solo come colonie della Corona Britannica. E, per quanto sia insolito pensarlo, specie per un pubblico contemporaneo ed europeo, i rapporti fra le Tredici Colonie originarie degli USA (quelle, insomma, che sono ancora ricordate nelle tredici strisce della bandiera americana) non erano sempre basate sull'amore fraterno[3].

[1] Se il testo non vi basta, il pezzo è facilmente reperibile (e quindi ascoltabile e visibile) in rete, per esempio qui: https://www.youtube.com/watch?v=GtxuWycNgfo.

[2] Scrittore statunitense famoso per essere particolarmente restio ad apparire in pubblico (quasi quanto la nostra Alice).

[3] "Amore fraterno" che, come buona parte dei lettori sapranno o avranno intuito, è proprio il significato delle parole greche che generano il nome "filadelfia".

2 *"Four Corners"*, *quando non c'era ancora il "Monument" attorno.*

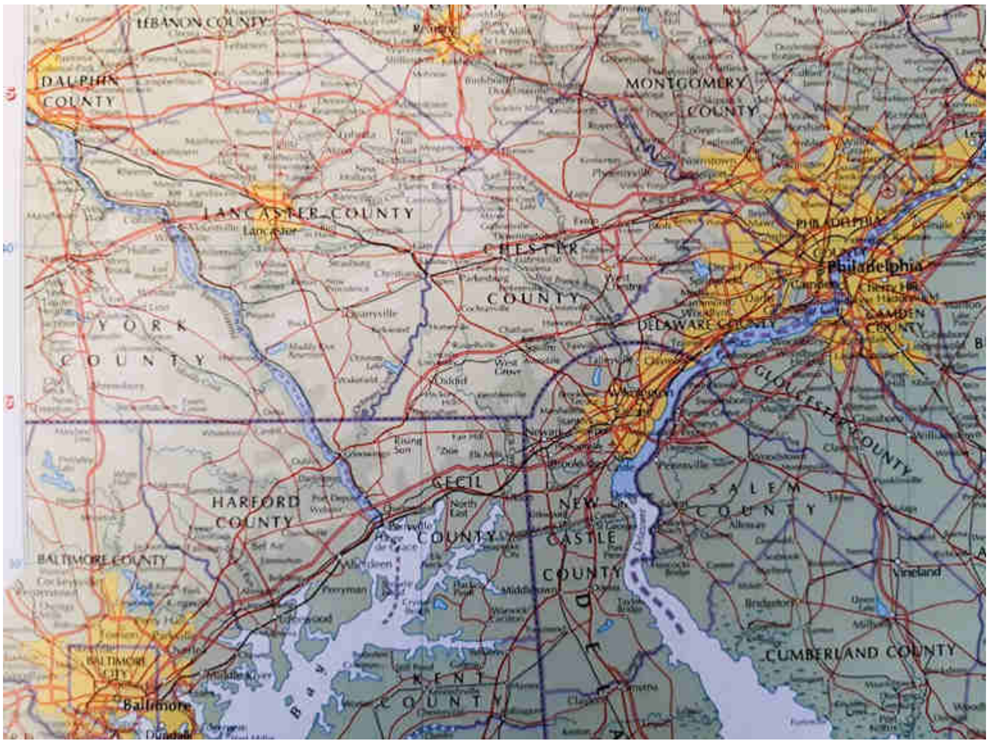
È abbastanza sorprendente trovare, tra i confini che dividono i vari stati degli USA, una frontiera determinata da un preciso arco di cerchio. Le suddivisioni degli stati americani hanno molte piccole stranezze, ma in linea di massima i confini sono disegnati in maniera abbastanza tradizionale, ovvero seguendo i grandi separatori geografici: fiumi, laghi, catene montuose. Quando i territori sono vasti e perlopiù disabitati si è ricorso, come al solito, alle coordinate geografiche: si sceglie un meridiano per separare uno stato orientale da uno occidentale, o un parallelo per fare la stessa cosa tra uno stato settentrionale e uno meridionale. Proprio negli Stati Uniti d'America brilla il caso particolare in cui si incrociano un meridiano e un parallelo entrambi chiamati a questa funzione divisoria, generando così un raro (se non unico) punto in cui convergono quattro stati, anziché i soliti tre. L'incrocio è quello tra il 37° parallelo nord e il 109° meridiano ovest e, volendo considerare "cartesianamente" questo punto come l'origine degli assi, troveremo il Colorado nel primo quadrante, lo Utah nel secondo, l'Arizona nel terzo e il New Mexico nel quarto. L'origine di questo insolito piano cartesiano è sempre stata un'attrazione turistica per persone desiderose di trovarsi in un colpo solo in quattro stati diversi, al punto che il luogo ha da qualche tempo ha visto l'erezione di un vero e proprio monumento, il "*Four Corners Monument*", che comunque non impedisce ai turisti di posizionarsi in prossimità del "punto zero" per farsi fotografare con i quattro arti in quattro stati diversi.

In questo regno delle linee rette (sorvolando sul fatto che, in realtà, meridiani e paralleli non sono affatto linee rette, a meno di rivendicarsi fautori della geometria riemanniana), è quindi abbastanza insolito trovare un confine interstatale tracciato con tutta evidenza con un compasso, anziché con il tradizionale righello, su una mappa del New England. Per ricostruirne, anche solo sommariamente, la storia, occorre conoscere alcuni personaggi del passato americano, primo fra tutti sir William Penn. Si tratta di quel signore la cui statua è immancabilmente inquadrata da ogni film ambientato a Philadelphia[4], perché troneggia sulla torre del Municipio ed è, di fatto, il simbolo della città. Figlio di un ammiraglio potente e famoso per aver combattuto con Oliver Cromwell contro il re e successivamente con il re contro gli olandesi, il giovane William è presto attratto, più che dalle paterne battaglie navali, dai misteri filosofici e soprattutto religiosi. Alla verde età di venticinque anni aderisce al movimento religioso dei Quaccheri, e per buona parte del resto della sua vita si farà carico del tentativo di fondare una comunità rispettosa dei principi della sua congregazione. È forse opportuno ricordare che i tempi di Penn, che nasce nel 1644, sono tempi di grandi fermenti religiosi, soprattutto nell'Europa del nord; anche se l'obbrobrioso massacro della Guerra dei Trent'anni era appena finito, basti pensare che in Inghilterra lo stesso Cromwell era stato il portabandiera dei Puritani, che pertanto si erano schierati contro la monarchica religione ufficiale (ancorché parimenti di scuola protestante) dell'Anglicanesimo del re d'Inghilterra. In questo allegro scenario, Quaccheri erano equamente bistrattati sia dai Puritani che dagli Anglicani.

Nonostante ciò, il giovane Penn resta pur sempre un potente aristocratico con una certa ascendenza sul novello re Carlo II, che probabilmente vedeva nei Quaccheri, pur se ammantati da strane idee come l'egalitarismo e il pacifismo, solo un gruppo di fanatici

[4] Il celeberrimo "*Rocky*" con Sylvester Stallone, ad esempio. La scalinata dove il pugile si allena come un matto su e giù per gli scalini è quella del Museum of Arts, che si trova giusto un paio di chilometri in direzione nordovest, perfettamente visibile dagli occhi di bronzo della statua di Penn.

poco pericolosi, nonostante il loro assurdo rifiuto di inchinarsi alla Corona. Così, Penn ha buon gioco nell'ottenere una vasta concessione nelle colonie americane nella quale potranno emigrare un buon numero di quaccheri. Re Carlo gliela concede sostanzialmente a titolo personale, come capitava spesso con i territori oltre Atlantico: così William Penn diventa il padrone assoluto (re a parte, naturalmente), di una vasta regione nella costa orientale dell'America del Nord. Ha insomma l'occasione di costruire un vero e proprio stato dal nulla e ne approfitta per mettere in campo le sue idee politiche, abbastanza originali per quei tempi. Innanzitutto, apertura totale a tutti i credi religiosi, cosa che crea subito un gran flusso di minoranze perseguitate da tutta Europa; più in generale, una tolleranza e uno spirito di apertura insolito per quei tempi e luoghi, al punto che per lungo tempo la regione è stata ritenuta l'unica degli USA in cui non ci furono grandi scontri con i nativi. La storiografia moderna è un po' meno ottimista, ma sembra che il "regno di Penn" fosse comunque la colonia migliore da questo punto di vista. Arrivò ad introdurre concetti quasi inauditi, come la separazione dei poteri; del resto, che William Penn fosse un sognatore è evidente anche dal fatto che il suo più celebre progetto politico da realizzare nel vecchio continente fosse quello di instaurare, in pieno Seicento, una sorta di Parlamento Europeo.



3 *"Il Cerchio delle Dodici Miglia" è ancora ben leggibile nei confini tra Pennsylvania, Delaware, Maryland e New Jersey.*

In fondo, anche il nome scelto per quella colonia americana era denso di significati: il progetto religioso più coraggioso, di qualche decennio precedente, era stato forse quello dell'Unitarianismo, così chiamato perché rifiutava il concetto di Trinità. Per quanto contrastato e combattuto da tutte le correnti religiose più potenti, l'Unitarianismo predicava strenuamente la tolleranza religiosa verso tutte le fedi. In Europa, il suo sviluppo maggiore si ebbe in Polonia e soprattutto in Transilvania; e c'è chi vede, nel prescelto nome di "Pennsylvania", non solo un letterale "i boschi di Penn", ma anche un malcelato "la Transilvania di Penn".

La Pennsylvania, così come l'ebbe in affidamento William Penn da re Carlo II, comprendeva anche quello che poi è diventato lo stato del Delaware[5]. Giaceva tutta a

[5] Quasi il più piccolo degli USA, con i suoi 5'130 chilometri quadrati; solo il Rhode Island (3'144 km^2) riesce a batterlo nella corsa alla minore estensione. L'equipartizione per superficie non è mai stata una condizione per

nord del Maryland che, come il nome della sua città principale ci ricorda tuttora, era al tempo di proprietà di Lord Baltimore. Questo lord Baltimore aveva probabilmente un carattere assai diverso da quello di William Penn ma, a prescindere da questo, l'insorgere della confusione (per non dire del conflitto) che si creò nel 1681 dipese essenzialmente da cattive misurazioni e complicazioni burocratiche. Al momento della creazione della Pennsylvania, il Maryland esiste già; è definito da un statuto reale che sancisce i suoi confini settentrionali in corrispondenza del 40° parallelo Nord[6]. La donazione di Carlo II a William Penn definisce il confine meridionale della neonata Pennsylvania, abbastanza saggiamente, come coincidente con il confine settentrionale del Maryland. Tutto questo sembra essere ragionevole e incontestabile, se non fosse che il citato 40° parallelo non si trova dove tutti, re compreso, credevano che si trovasse. Ovviamente, questo basta già a seminare tempesta, ma per avere un quadro completo bisogna accennare ad almeno un altro paio di elementi: innanzitutto, il ruolo giocato dalla ridente cittadina di Newcastle.

La cittadina nasce in realtà come forte, per scopi essenzialmente militari: i primi europei che arrivano nella regione sono gli olandesi, seguiti poi da un bel numero di svedesi e finlandesi, tanto che la battezzano "Nuova Svezia". Gli olandesi la riprendono con le armi, erigono Newcastle, ma alla fine è l'inglese Robert Carr che la conquista in nome del Duca di York. Questi, come al solito, la considera a tutti gli effetti come sua proprietà personale; sberleffa il connazionale proprietario del Maryland che la rivendica, e nel 1682 imita il suo sovrano e la regala a William Penn, che ci immaginiamo essere più simpatico di Baltimore, visto i regali che riceve. Le regole della donazione sono stabilite in maniera geometrica: "*tutta la città di Newcastle, altrimenti detta Delaware, e tutta la terra che giace nel cerchio di 12 miglia che si trovi anche sul fiume Delaware d'America e tutte le isole nel medesimo fiume Delaware, e il fiume medesimo e il suolo che giace a nord della parte meridionale del suddetto cerchio di 12 miglia attorno alla detta città*". Il dettato della donazione non risplende di chiarezza; a complicare ulteriormente le cose, successivamente, arriverà anche il fatto che quello che diventerà in seguito il vero e proprio stato del Delaware non è pienamente concorde con le regole e norme della Pennsylvania. In rozza sintesi: da una parte abbiamo il Maryland che si sente defraudato, dall'altra William Penn che deve decidere come organizzare questo nuovo pezzo di terra popolato da gente che ha una propria storia non pienamente coincidente con quella dei quaccheri inglesi, visto che i coloni originari sono scandinavi o olandesi. In più, bisognerebbe capire bene come funziona questo "cerchio delle dodici miglia", cosa che sulle mappe può sembrare anche di facile gestione, ma sul terreno (e sull'acqua, visto che taglia pure di traverso il fiume Delaware) è tutta un'altra storia.

4 *Mappa e grafica del Cerchio delle Dodici Miglia.*

Il guaio vero, però, è a monte, e lo abbiamo già accennato: consiste nel fatto che il confine principale, quello che divide il nord del Maryland dal sud della Pennsylvania, è *in teoria* il 40° parallelo, ma *in realtà* quel fatidico parallelo corre molto più a nord di quello che tutti credevano. William Penn (che, sia detto per inciso, segue tutte queste vicende americane principalmente da Londra: non ha seguito i suoi quaccheri, e andrà a visitare la terra che prende il suo nome solo un paio di volte in tutta la sua vita) ha da tempo deciso che la capitale della sua colonia sarà proprio quella "Città dell'Amore Fraterno"

diventare uno dei 50 stati: dentro il Texas entrano 221 Rhode Island, per limitarci agli Stati Uniti continentali; se si chiama in gioco anche l'Alaska, di Rhode Island ne servono ben 546, per riempirla. (Nota alla nota: trovare i dati di estensione degli stati USA è meno facile di quanto si possa credere, perché fonti diverse danno valori sensibilmente diversi; noi abbiamo preso quelli di Wikipedia inglese, cercando le voci dei singoli stati).

[6] "*…per l'intera lunghezza del fiume Potomac fino al 40° parallelo Nord*", recita l'*Editto del Maryland* del 1632.

che si appresta a fondare nel luogo prescelto; ma anche lui deve avere accolto assai male l'informazione che, secondo alcuni, perfino lo stesso luogo destinato a ospitare la nascitura Philadelphia potrebbe trovarsi a sud del cruciale 40° parallelo. Così è infatti: gli atlanti moderni[7] mostrano impietosamente che perfino il centro storico di Philadelphia, che si trova sull'ansa del Delaware di fronte a Camden City, giace, seppure di poco, al di sotto del quarantesimo parallelo; figuriamoci dove si trovava tutta quella zona che, ormai, era considerata da molti (ma non da lord Baltimore) essere la Pennsylvania meridionale.

La diatriba dei confini sorge aspra e abbastanza violenta; del resto, ci sono anche parecchie altre cose da sistemare. Anche se quanto raccontato fin qui sembra essere già abbastanza contorto e complicato, in realtà non è altro che la proverbiale punta dell'iceberg: oltre alla posizione esatta del 40° parallelo e alla definizione ragionevolmente accurata del maledetto confine curvilineo definito dal Cerchio delle Dodici Miglia, diverse altre grandezze geografiche andavano chiarite per poter convergere verso un accomodamento della disputa. Entravano in ballo non solo l'entroterra meridionale di Philadelphia e della Pennsylvania tutta, ma anche la necessità di individuare la linea che dividesse equamente e verticalmente (Nord-Sud) la penisola Delmarva, quella che separa la Chesapeake Bay dall'Atlantico e che ospita buona parte dell'attuale Delaware. Oltre a questa, serviva la determinazione di un'altra linea che separasse la stessa penisola in senso orizzontale (Est-Ovest) e, una volta trovata questa, anche una fantomatica linea tangente che unisse il "punto centrale" della penisola con l'estremità meridionale del Cerchio delle Dodici Miglia. E così via, con altre cose da chiarire, in un parossismo geografico-trigonometrico da far impallidire anche gli assatanati "dimostratori" del Quinto Postulato di Euclide.

La situazione era così complicata, dal punto di vista geografico (e anche un po' geometrico) che, pur essendo nata nel Settecento, la disputa connessa a quel groviglio di confini ha avuto residui perfino nel ventunesimo secolo, con liti legali tra Delaware e New Jersey in merito allo strano confine "trasversale" che separa i due stati sul fiume Delaware. La Corte Suprema, nel 1935, stanca di essere sollecitata una mezza dozzina di volte per secolo su cotante questioni, ha emesso una sentenza che contiene, oltre alle definizioni meramente geografiche, anche l'augusto monito agli stati coinvolti di piantarla una volta per tutte con queste rivendicazioni territoriali. Non che sia servito a molto, peraltro; nel 2007, i nove togati che rappresentano il massimo organo giudiziario americano si sono trovati di nuovo sulle scrivanie delle richieste di arbitrato in merito.

Certo è che, in pieno Settecento, le cose da chiarire sono tante, e che per chiarirle non basta la carta bollata; servono degli esperti che, armati di molta tecnica, di infinita pazienza e anche di una certa dose di coraggio, si avventurino in terre ancora in gran parte inesplorate e non troppo accoglienti, abitate prevalentemente da nativi Irochesi che non necessariamente erano ben disposti verso i nuovi arrivati dalla pelle chiara. Gli "esperti" prescelti sono "nuovi arrivati" nel pieno senso della parola: non sono coloni americani, ma arrivano direttamente dall'Inghilterra. Si chiamano Charles Mason, astronomo originario del Gloucestershire, e Jeremiah Dixon, agrimensore e astronomo della Contea di Durham. Proprio il luogo d'origine di Dixon è alla base di una strana coincidenza: come si vede dai primissimi versi della canzone di Mark Knopfler, è proprio Dixon la "voce" della prima strofa, e si presenta definendosi "Geordie boy". Il termine "Geordie", almeno in Italia, è stato fatto conoscere da una ballata omonima cantata da Fabrizio De André, elaborata da una canzone tradizionale di Scozia e Inghilterra e poi resa famosa da Joan Baez. Nel brano, il termine "Geordie" ha funzione di nome proprio di persona (nello specifico, quello di un ladro di cervi condannato all'impiccagione), ma in senso più generico, "Geordie" in lingua inglese è un appellativo geografico che sta indicare gli abitanti della regione dell'Inghilterra nordorientale ai confini della Scozia; in particolare, di coloro che vivono nella zona di Newcastle upon Tyne. Jeremiah Dixon ha tutto il diritto di definirsi "Geordie boy", visto che la Contea di Durham è situata proprio in quella regione. Il "carbonoso" fiume Tyne torna anche nel ritornello della canzone

[7] …e anche la figura numero 3 di quest'articolo, che proprio da un atlante moderno proviene.

(anche perché consente la facile rima con "line"), ma resta abbastanza curioso notare come uno dei protagonisti delle misure destinate a risolvere un'annosa questione centrata sulla città di Newcastle nel Delaware provenga dalla Newcastle inglese.

Hollywood ha celebrato spessissimo il mito della Frontiera, del Far West avventuroso e pieno di nativi più o meno selvaggi e pericolosi, ma è stata assai più avara nel raccontare l'iniziale esplorazione dell'Est. Eppure, quella che devono affrontare Mason e Dixon è davvero un'esplorazione lunga e difficoltosa. Durerà cinque anni, dal 1763 al 1767, e otterrà risultati significativi sotto molti punti di vista: innanzitutto, quelli puramente geografici, come richiesto da mandato. Alla fine del quinquennio, sulle mappe della regione sarà possibile disegnare la "Linea Mason-Dixon"[8]. La sua parte principale è un lungo tratto orizzontale che percorre (e definisce) tutto il confine tra Maryland e Pennsylvania: ad ogni singolo miglio veniva diligentemente marcata con grosse pietre miliari che portavano scolpite una grande "M" sul lato sud e una altrettanto grande "P" sul lato nord, per segnare con le iniziali gli stati che condividevano il confine, seguendo abbastanza fedelmente il parallelo fissato a 39°43'20" N[9]. Ma la Mason-Dixon prosegue: continua anche oltre la frontiera dei due stati, arriva alla base della penisola Delmarva per cominciare disegnare il tratto verticale che deve dividere al meglio possibile, in due parti la uguali, la penisola stessa. Qui le cose risulteranno più complicate del previsto, un po' perché per mantenere il principio della "divisione della penisola" occorre abbandonare l'idea di seguire un meridiano, visto che la Delmarva non è perfettamente orientata in direzione Nord-Sud; e un po' perché (come si può vedere meglio nella parte "grafica" di figura 3), è assai complicato tirare verticalmente una linea "tangente" al Cerchio delle Dodici Miglia. Si rinuncia a un po' di precisione, e quel che ne risulta finisce con il contenere addirittura un pezzo di terra di forma triangolare ("*The Wedge*", "il Cuneo") che lì per lì non si sa neppure bene a quale stato debba essere assegnato[10].

5 *La linea Mason-Dixon.*

Se è la geografia a far nascere la Linea Mason-Dixon, sarà però poi la storia a darle una fama e un significato del tutto particolare. La Pennsylvania è il primo stato degli USA ad emanare una legge contro la schiavitù: all'inizio, la colonia fondata da William Penn tollera a malapena l'istituto della schiavitù, ma con il passare degli anni e con la proclamazione della Dichiarazione d'Indipendenza del 1776, i quaccheri decidono che, per quel che li riguarda, è tempo di abolirla. Con il *Gradual Abolition Act* del 1780, il governo di Philadelphia emana il primo decreto abolizionista americano: era ancora una legge con molte restrizioni e lontana dal pieno riconoscimento dei diritti tra bianchi e neri, ma era comunque rivoluzionaria. Così, per molte persone di colore la linea Mason-Dixon divenne non solo il confine geografico tra Pennsylvania e Maryland, ma anche l'assai più simbolica frontiera tra terre schiaviste e terre di libertà. Nonostante nella Guerra di Secessione il Maryland si fosse schierato con gli Unionisti e non con i Confederati, restava uno stato schiavista[11]: e ciò contribuì a fissare nell'immaginario collettivo americano la

[8] Anche se il termine "Mason-Dixon line" è ormai consolidatissimo e universalmente noto negli USA, i due eroi eponimi non ebbero mai la soddisfazione di sentirla chiamare con i loro nomi. Il termine entrò nel linguaggio ufficiale e comune solo dopo la loro dipartita.

[9] Il che implica che alla Pennsylvania sono stati graziati circa 17 primi di latitudine, rispetto al trattato originale.

[10] Alla fine di altre liti confinarie, il Wedge viene ufficialmente assegnato al Delaware.

[11] Nonostante l'abolizione della schiavitù fosse tra le cause principali della guerra, diversi stati dell'Unione (quelli che in Italia sono ancora chiamati, un po' imprecisamente, "nordisti") consentivano la schiavitù ed erano

Linea Mason-Dixon come la frontiera che conduceva alla libertà per i neri del Sud che andavano ad arruolarsi al Nord. Poi, siccome le parole sono spesso più potenti di quel che si crede al momento della loro creazione, il nome della Linea generò anche il termine "Dixie" e il corrispondente "Dixieland" per indicare collettivamente il Sud contrapposto al Nord[12].

È già ben più che abbastanza, per una missione di natura geografica. Eppure, il successo della spedizione Mason-Dixon è ancora maggiore dal punto di vista scientifico, anche se, come spesso succede, questa arriva in modo del tutto accidentale. I due astronomi-esploratori, durante le loro misurazioni, si tenevano in contatto con Nevil Maskelyne, che a quel tempo rivestiva la carica di Reale Astronomo d'Inghilterra. Facendo (e, seguendo il metodo scientifico, ripetendo) le misurazioni, Mason e Dixon si accorsero della presenza di errori sistematici, insomma tali da non poter essere ricondotti a semplici fluttuazioni statistiche. Segnalarono la cosa a Maskelyne che, a sua volta ne dette comunicazione alla Royal Society. Ciò fecondò la mente di uno dei membri più brillanti – in senso puramente intellettuale: dal punto di vista della socievolezza, era invece tra i più timidi e misteriosi – della Society, che cominciò allora ad ipotizzare che quegli errori potevano essere causati dalle perturbazioni gravitazionali generate dalla presenza dei vicini Monti Allegani, che forse erano in grado di deflettere i fili a piombo dei teodoliti e i liquidi delle livelle dei due misuratori. L'ipotesi era indubbiamente ardita, ma aveva un effetto collaterale importante: se le perturbazioni gravitazionali dei monti erano tali da poter influenzare le misurazioni degli strumenti di Mason e Dixon, forse degli strumenti ancora più precisi potevano essere utilizzati per misurare direttamente l'attrazione gravitazionale tra oggetti pesanti. L'idea era pazzesca essenzialmente perché una misurazione del genere richiedeva una precisione inimmaginabile per quei tempi, ma il timido membro della Royal Society che aveva notato la cosa era un tipo assai metodico e preciso, e non riteneva la sfida impossibile.


6 *Henry Cavendish*

Henry Cavendish[13] nasce il 10 Ottobre 1731, e potremmo quasi spacciarlo per italiano. In realtà, è un figlio della più pura aristocrazia inglese[14], e se nasce al di fuori delle isole britanniche è perché suo padre poteva permettersi di avere residenze un po' dove meglio credeva; sta di fatto che Henry vede la luce a Nizza, che a quel tempo faceva parte del Regno di Sardegna; così, barando un po', lo si può spacciare per piemontese e quindi, per estensione, per italiano. Stiamo ovviamente scherzando, visto che la famiglia Cavendish rivendica augusta discendenza inglese fin dai tempi dei Normanni, ed è legata quasi ad ogni famiglia dell'aristocrazia britannica. Ricchezza e nobiltà non garantiscono però sempre la felicità: la madre di Henry muore giovane,

di conseguenza un po' freddi verso le istanze abolizionistiche. Oltre al Maryland, facevano parte di questo gruppo anche il Delaware, il Kentucky, il Missouri e la West Virginia.

[12] Quantomeno, questa è l'ipotesi etimologica più solida per il termine: esistono comunque altre teorie sull'origine del termine "Dixie". Dixieland, in seguito, entrerà anche nella terminologia musicale, indicando il primo jazz suonato da musicisti bianchi.

[13] Da non confondersi con una altro Henry Cavendish, uomo politico del Seicento, Master of Robes, Gentleman of the Bedchamber, decorato con l'Ordine della Giarrettiera e soprattutto secondo Duca di (indovinate un po'?) Newcastle upon Tyne.

[14] Il padre è Lord Charles Cavendish, figlio del Duca di Devonshire; la madre è Lady Anna Gray, figlia del Duca di Kent.

lasciando al coniuge due figli piccolissimi: Henry, di soli due anni, e Frederick, di appena tre mesi.

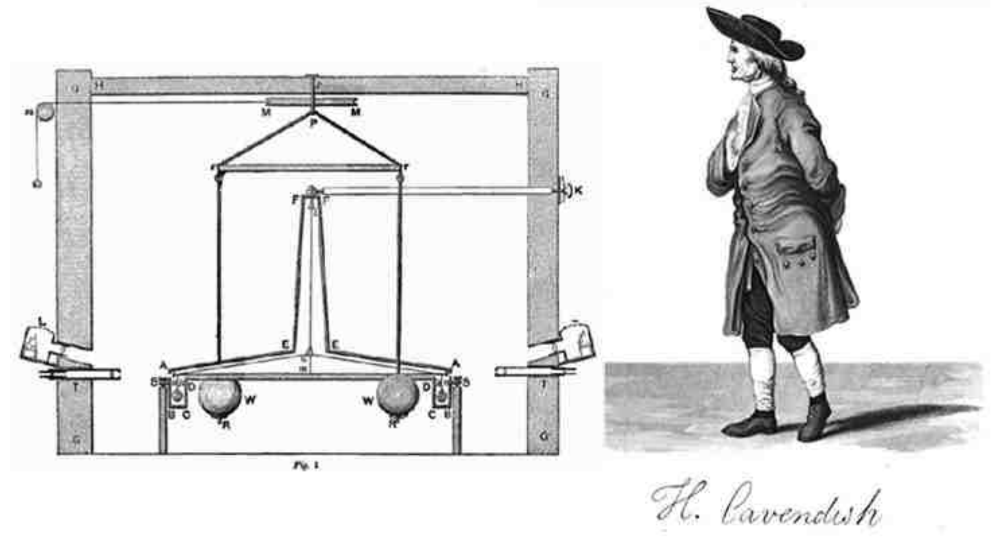
Il padre, Charles, è un uomo indaffarato su due fronti: innanzitutto la politica, e poi lo sviluppo delle scienze: è membro della Royal Society e introduce Henry nel tempio della scienza britannica quando il primogenito ha appena diciassette anni. È una buona idea, Henry non mostra particolare interesse verso nessun aspetto della vita se non in quello della ricerca scientifica: frequenta l'Università di Cambridge, ma l'abbandona prima di ottenere alcun titolo accademico; e in breve le cene e gli incontri nella Royal Society diventano gli unici momenti sociali del giovane Cavendish.

A dirla tutta, i problemi nelle relazioni sociali mostrati da Henry Cavendish sono oggettivamente particolari, al punto che Oliver Sacks, il famoso neurologo americano, giunse a diagnosticargli (un paio di secoli dopo la dipartita) una forma abbastanza evidente della sindrome di Asperger sulla base delle sue opere e delle notizie note dalla sua biografia. Cavendish si veste solo con abiti che erano di moda un secolo prima di quello in cui vive, parla pochissimo e quel pochissimo lo riserva solo a persone che già conosceva, e soltanto se queste erano di sesso maschile: perfino con cameriere e governanti si limita a dare ordini di servizio tramite bigliettini. Arriva al punto di farsi costruire una scala apposita sul retro della sua residenza di Clapham Commons per poter entrare nella sua stanza senza dover incontrare nessuno, neppure il personale di servizio. Anche per questo, le sue partecipazioni agli incontri e alle cene sociali della Royal Society assumono un valore del tutto particolare, soprattutto perché vi sarà sempre presente. Pur essendo schivo in maniera ossessiva, i colleghi della Royal Society gli riconoscono una buona fama e una suprema capacità nella costruzione di strumenti scientifici, al punto di affidargli l'apposita commissione della Society.

Il fatto di essere così riservato, per uno scienziato, ha però anche qualche controindicazione, ad esempio, la scarsità di pubblicazioni: comunque, nel 1766 pubblica la memoria "*On factitius air*" in cui descrive, ben prima di Lavoisier, una sorta di "aria infiammabile" in grado di generare acqua se combinata con l'ossigeno, e che è ovviamente l'idrogeno. Ma troverà anche la giusta proporzione dei gas che compongono l'aria, senza darne notizia. La sua casa è in realtà un grande laboratorio di chimica e di fisica in cui le scoperte si susseguono, anche se non vengono quasi mai rivelate. La maggior parte delle sue scoperte non arrivano sulle memorie dirette alle accademie, nemmeno alla sua amata Royal Society: saranno riconosciute, e quasi per caso, da James Clerk Maxwell, che quasi un secolo dopo ebbe occasione di accedere ai suoi appunti. Così, si scoprì che l'asociale Henry Cavendish aveva scoperto, prima di coloro che ne portavano il nome, la Legge di Richter delle proporzioni reciproche, la Legge di Ohm, la Legge di Dalton sulle pressioni parziali, la Legge di Coulomb e la Legge di Charles dei gas. Un suo manoscritto dal modesto titolo "*Calore*" sembra contenere buona parte dei principi fondamentali della termodinamica. La generosa definizione che di lui darà Jean-Baptiste Biot ("*il più ricco dei sapienti, il più sapiente dei ricchi*") sembra davvero meritata, anche per la parte meramente finanziaria: era considerato l'uomo più ricco del regno, e c'è chi si è divertito a calcolare quanto fosse esteso il suo patrimonio immobiliare, trovando che i suoi eredi potrebbero rivendicare la proprietà di una gran bella parte di Londra.

Ma l'abbiamo già detto: a Henry interessano soprattutto esperimenti e misure. Così, quando sente le relazioni di Mason e Dixon e la strana storia dei loro errori sistematici, lo schivo Cavendish comincia a pensare che forse si potrebbe addirittura arrivare a misurare la densità del pianeta, se in qualche modo si riuscisse a misurare l'attrazione gravitazionale tra due corpi massivi, ma comunque maneggevoli.

In fondo, tutto quello che serviva non era altro che una bilancia di torsione sufficientemente precisa. Certo, per renderla tale occorrevano una serie di precise cautele, per proteggerla dalla sensibilità al calore e dalle correnti d'aria, ma Henry non è tipo da lasciarsi spaventare. Isola la sua bilancia di torsione in una stanza, costruendo un sistema di telecomandi per interagire con essa pur restandone al di fuori; sistema opportuni telescopi per leggere da lontano le misurazioni, e tutto questo gli consentirà infine di calcolare con stupefacente precisione le oscillazioni di un sistema di sfere, tra cui due che pesavano circa 150 chili ognuna.



7 *Henry Cavendish e la sua bilancia*

Alla fine, Cavendish dichiara (e, una volta tanto, lo fa pubblicando i risultati negli atti della Royal Society, in una memoria intitolata "*Experiments to Determine the Density of the Earth,*") che la densità della Terra è pari a 5,48[15] quella dell'acqua.

Henry Cavendish è felice: si ritiene soddisfatto della misura della densità, e non si avoca nessun altro merito. Ma la narrazione scientifica fa qualche passo in più, in fondo meritato. Conoscendo il valore della densità del pianeta si può raggiungere facilmente il valore della massa della Terra, una volta che le dimensioni fisiche della Terra sono note con ragionevole certezza, e ai tempi di Cavendish la misura del meridiano terrestre era già abbastanza affidabile. Così, i posteri cominceranno a definire il timido nobile inglese come "colui che ha pesato la Terra", puntualizzando anche che, così facendo, Cavendish era anche colui che ha consentito la determinazione della misteriosa e sfuggente costante di gravitazione universale di Newton, G.

Non sappiamo se a Henry Cavendish tutto questo avrebbe fatto o meno piacere; la sua socialità, come si è visto, era davvero molto scarsa. È assai più probabile che lo avrebbe allietato ciò che fece il suo futuro parente William Cavendish, settimo Duca del Devonshire, che chiese a Maxwell, oltre che di curarne la pubblicazione delle opere, di dirigere un nuovo e grande laboratorio di fisica sperimentale a Cambridge che portasse il nome di Henry. Nasce così, nel 1874, il celeberrimo *Cavendish Laboratory* che dopo Maxwell vide come direttori J. J. Thomson e Ernest Rutherford, e che è stato la fucina di una trentina di premi Nobel.

Davvero niente male, per un timido scontroso rimasto incuriosito da alcuni errori sistematici rilevati da un paio di avventurosi misuratori di confine che dovevano guardarsi dalle frecce dei pellerossa.

[15] Quel pignolo di Poynting puntualizzò (del resto, con quel nome…) che il superpreciso Cavendish sbagliò il calcolo delle media: dalle sue 29 misurazioni avrebbe dovuto ottenere non 5,48, ma 5,448.

2. Problemi

2.1 Salutate il giardino!

Nonostante noi si sia dei grandi apprezzatori delle tinte calde dell'autunno, siamo i primi ad ammettere che non si tratta della stagione di massima ubertosità dei giardini; la nostra unica consolazione, in questo momento, resta quindi il pensare a come verrà bello e rigoglioso con le piantumazioni del prossimo anno.

Siccome però la bellezza di un giardino va comunque pianificata, stiamo studiando metodi matematici di distribuzione delle colture: non necessariamente funzionali, ma possibilmente con grande impatto estetico.

Qualche giorno fa, durante una giornata che sembrava decisa a farci coltivare ninfee (nel senso che il giardino era diventato un simpatico laghetto) stavamo lavorando sul concetto di *equivalenza*: avere alcune aree del giardino con la stessa area, possibilmente, di forma (testuali parole) "uguale ma diversa".

Abbiamo appurato che questo apparente ossimoro significava, ad esempio, "tutti triangoli, ma non necessariamente simili tra loro", e ci siamo inventati una decorazione che ci pare decisamente interessante.

Sia il nostro giardino un rettangolo di vertici OABC ("...e perché O e non D?" Perché ci serve O); Siano definiti i punti P (su AB) e Q (su BC); consideriamo il triangolo OPQ.

Anzi, no, non consideriamolo proprio, consideriamo invece i triangoli APO, PBQ e QCO: vorremmo che le aree di questi tre triangoli fossero uguali.

"Rudy, 'rettangolo' ci pare un po' generico... Potresti darci i lati?" Eh, no. Come vi dicevamo, fuori piove che non si vede neanche la punta del naso, e ci siamo dimenticati di misurare il tutto, quando non pioveva. Diciamo che, per ora, ci basta sapere le proporzioni AP/PB e BQ/QC: poi, appena smette di piovere, calziamo il kayak e andiamo a prendere le misure, contenti?

Oh, prendetevela pure calma, che tanto prima di marzo non se ne parla neanche, di dissodare il tutto...

2.2 Ci inventiamo le parole

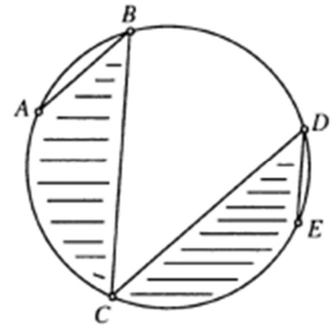
Come forma di divertimento puerile, a Rudy piace inventarsi dei termini matematici. Va detto che si diverte raramente, anche perché oltre ad inventarti i termini dovresti anche fare tutta la matematica che c'è dietro, e qui proprio non è cosa. Ma forse stavolta ce l'ha fatta.

Recuperate la vostra scacchiera (quella con le caselle delle stesse dimensioni di mezza tessera da domino) e le tessere da domino (quelle grandi quanto due caselle della scacchiera). Diciamo che la scacchiera è ***quasi dominata*** se esiste almeno una disposizione dei domino (non sovrapponentesi, chiaro) sulla scacchiera tale che in ogni riga e in ogni colonna si abbia una e una sola casella scoperta (anche sul bordo, o nell'angolo: insomma, dove vi pare, basta che sia una sola scoperta per riga e colonna).

Noterete che non vi abbiamo detto di che dimensioni debba essere la scacchiera: infatti quello che vorremmo sapere è se stiamo perdendo tempo o no: data una scacchiera $N \times N$, a che condizioni deve sottostare N per far sì che la scacchiera possa essere quasi dominata?

Ecco, qui non dico che abbiamo fretta, ma questo gioco ci pare un ottimo metodo per utilizzare gli uggiosi pomeriggi invernali: voi ci dite se con una scacchiera si può o no, poi noi ci proviamo...

3. Bungee Jumpers



ABCDE è un cammino a zig-zag con i punti di svolta sulla circonferenza e tale che gli angoli in B, C e D siano a 45°.

Con riferimento alla figura a fianco, calcolare il rapporto tra l'area ombreggiata e l'area libera all'interno del cerchio.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Anche una rubrica schizofrenica come questa collezione di recensioni, a lungo andare, riesce ad avere qualche punto fisso. O meglio, se l'espressione "punto fisso" risultasse troppo impegnativa (in matematica i punti fissi, con relativi teoremi, sovrabbondano), potremmo limitarci a dire anche in questa rubrica concorrono alcuni vichiani corsi e ricorsi storici. O, ancora più modestamente, che vi fioriscono tormentoni che ogni tanto rispuntano allegramente con preoccupante periodicità. Non si tratta di una cosa da poco, visto che questa è la rubrica meno puntuale della e-zine meno puntuale dell'italica matematica ricreativa.

Ad esempio, a suo tempo ci eravamo riproposti di recensire *tutte* (ma proprio tutte) le uscite degli e-book della collana 40K-Altramatematica. Era un impegno quasi obbligato, visto che le due regole fondamentali di questa rubrica erano entrambe rispettate: tutti le uscite di quella collana erano (brevi) testi che ci piacevano, così non ci saremmo sentiti in colpa nel parlarne bene (Regola 2); e, soprattutto, erano tutti scritti da persone in qualche modo legate o ben conosciute da RM (Regola 1). Come obiettivo a lungo termine non era niente male, anche perché, vista la ridotta dimensione di quei librini, intendevamo recensirli a gruppi di tre alla volta. Se non ci credete, fate un salto a rispolverare RM186, RM187 e RM188: vi troverete la bellezza di nove mini-recensioni. Poi, la natura ha preso il sopravvento (e per "natura" intendiamo qui, ovviamente, la nostra suprema tendenza alla pigrizia), e non abbiamo proseguito oltre, anche se quella collana, invece, è continuata gloriosa e imperterrita per un po'.

Un'altra promessa fatta a noi stessi era quella di recensire tutti i libri di .mau., insomma di Maurizio Codogno: e questo per molte buone ragioni. Un po' perché .mau. non è solo "un amico" di RM, ma un po' di più: è quasi un tutore, un nume tutelare, che ha coccolato e protetto l'e-zine quando questa era ancora un cuccioletto impaurito (sì, lo sappiamo… stiamo parlando di taaanti anni fa). Un po' perché Maurizio è davvero un matematico, anche se lui dice di no ("*Matematico io? Al massimo si può dire che sono laureato in matematica, ma da qui a dire che io sia un matematico…*"), e a noi piace molto poterci vantare di recensire libri scritti da matematici. Però – dannazione, c'è sempre un però – il Codogno sforna un libro ad ogni plenilunio, e non è mica facile stargli dietro. Viviamo coi il costante terrore di saltare qualche sua opera, e figuratevi come ci siamo sentiti quando ci siamo resi conto che, a suo tempo, abbiamo saltato proprio un suo libro apparso in quella collana che abbiamo maramaldescamente smesso di recensire.

Poi, che succede? Succede che anche le collane migliori cessino di esistere, e che addirittura scadano i diritti relativi; questo significa (lo diciamo per coloro che magari non si interessano granché del rutilante mondo dell'editoria) gli autori tornano in possesso pieno delle loro creazioni, e possono farne ciò che vogliono, persino ripubblicarle presso altri editori (o per conto proprio, adesso che il *self-publishing* è più facile di un tempo). Ad esempio, noi potremmo ripubblicare – e farlo persino su carta – il nostro libercolo "*Di 28 ce n'è 1*", se ci prendesse l'uzzolo (e trovassimo un editore[16] o la voglia di pubblicarlo da soli); ma noi siamo pigri, e la pigrizia, come è noto, è il nemico naturale numero uno dei progetti. Il Codogno, invece, col cavolo che è pigro. Lui si è ripreso

[16] E, a dire il vero, l'editore lo avremmo perfino trovato, in *Scienza Express* dell'ottimo Gouthier. Solo che il progetto, che era una specie di progetto collettivo, non è mai decollato, e non sappiamo ancora bene perché…

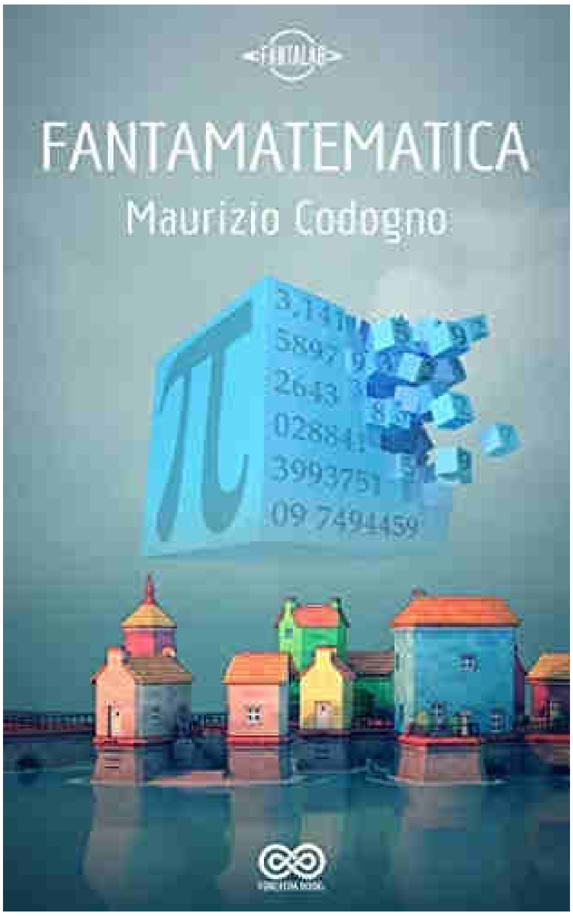
l'orfanello a cui teneva in maniera particolare, lo ha ripulito, arricchito di un vestito nuovo e di una bella appendice, e lo ha rigettato, indomito, nella spietata arena del mercato librario.

Adesso, diteci voi: come diavolo possiamo evitare di recensirlo, stavolta?

4.1 Fantamatematica

«Papà! Siamo stati bravissimi, sai? Tutte le figure della nostra palla sono dei seiagoni!»

Nel numero 827 di Urania "*Microfantascienza: altre 44 storie*"[17] si trova, a pagina 94, un racconto di E. Michael Blake del 1977. Il titolo originale è "*Science Fiction for Telepaths*", pianamente tradotto in italiano con "*Fantascienza per telepati*", il cui testo riportiamo qui integralmente: "Beh, voi sapete quel che voglio dire".



Il racconto è coperto da copyright, il che significa che quasi certamente abbiamo appena commesso un reato nel riprodurlo. Quando finiremo alla sbarra, imploreremo il giudice spiegandogli che la citazione ci serviva per spiegare a Maurizio Codogno che, anche se i suoi racconti sono cortissimi, è ancora ben lontano dal record mondiale di brevità.

Resta inconfutabile il fatto che il nostro eroe è riuscito ad infilare la bellezza di dodici racconti in una quarantina[18] di pagine, e ciò dovrebbe ben chiarire quali siano le opinioni dell'autore in merito alla verbosa eloquenza. Del resto, Codogno dichiara esplicitamente nel testo che il suo autore di fantascienza preferito è Fredric Brown (dimostrando peraltro di avere ottimo gusto), che è famoso soprattutto per un paio di racconti che sono a un tempo davvero brevi e pietre miliari del genere, come ad esempio il celeberrimo "*Sentinella*" o l'altrettanto famoso "*La risposta*". Temiamo però che il nostro non ce la racconti del tutto giusta, in merito alla sua frequentazione con la laconicità: Maurizio Codogno certo sa, conoscendo Brown, che questi era in grado anche di sfornare capolavori di ampio respiro, come "*L'Angelico Lombrico*" o "*Etaoin Shrdlu*", che racconti sono, ma certo non brevi.

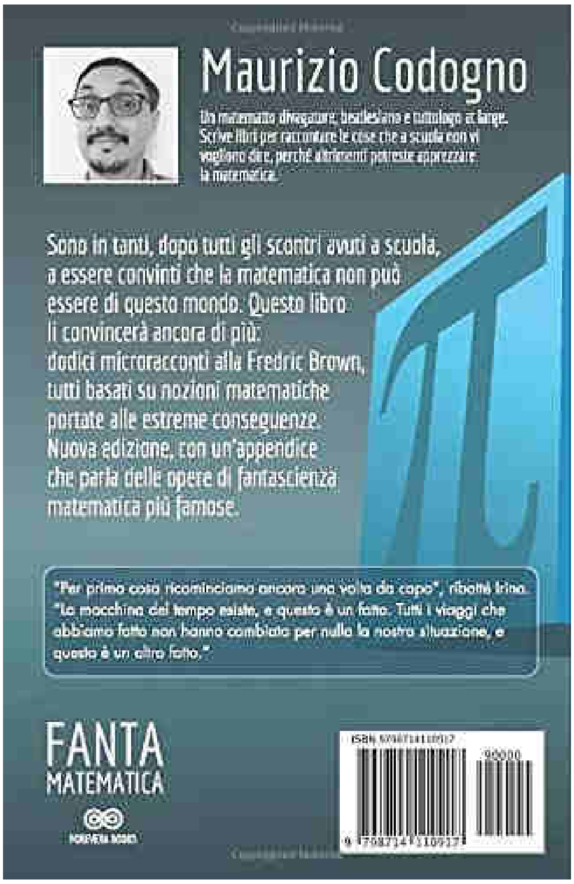
[17] Edito da Mondadori il 16 marzo 1980. I curatori elencati in copertina sono Isaac Asimov, Martin Greenberg e Joseph Olander, traduzione di Michelangelo Spada. Il volume era stato preceduto nella stessa collana (e quindi con medesimi editori, curatori e traduttore) dal numero 815, 23 dicembre 1979, intitolato "*44 microstorie di fantascienza*".

[18] Valore approssimato. Gli è che quel tirchio dell'autore non ci ha mandato la rituale copia omaggio cartacea, e noi siamo stati costretti a sborsare di tasca nostra un capitale per comprarci l'e-book. E gli e-book, si sa, hanno un concetto di "numero di pagine" assai volubile.

Dietro il paravento della stringatezza ci deve pertanto essere anche qualcos’altro, oltre a una naturale idiosincrasia verso i testi lunghi. E, forse, non è impossibile capire quale possa essere.

In realtà, è lo stesso autore a dare un importante indizio: e lo fa nella preziosa seconda Appendice, quella parte di libro che non era presente nella precedente edizione nella collana *40K-Altramatematica*. Qui Codogno scrive, letteralmente: “*La matematica non è una scienza, almeno nell’accezione che si dà alla “scienza” negli ultimi quattro secoli: non si usa il metodo sperimentale, nessuna teoria può sostituire la precedente […] e le verità matematiche sono indipendenti dalla realtà esterna*”.

Ed è tutto vero: anche se giornalisti e divulgatori spesso se lo dimenticano, matematici e fisici lo sanno (o perlomeno dovrebbero saperlo) assai bene. Quel che non salta però subito agli occhi è che questa consolidata verità, di fatto, tarpa le ali allo sviluppo narrativo della “fantamatematica”.



La fantascienza tradizionale si limita a introdurre nuove scoperte, o a cambiare qualche elemento paradigmatico delle nostre conoscenze, in modo da narrare “cosa accadrebbe se…” una certa condizione, non realmente presente in questo spazio e questo tempo, venisse effettivamente a realizzarsi. Detta in altri termini: la modifica che attua la fantascienza tradizionale è quella di modificare solo alcuni elementi del mondo reale, e lo fa proprio per vederne gli effetti sul mondo reale stesso, quello che conosciamo, che resta immutato sotto tutti gli altri aspetti.

Questo è un lusso che la fantamatematica non può permettersi. La matematica è a un livello strutturale più profondo di quello della fisica o di ogni altra scienza. Non si può cambiare “solo una parte” della matematica, perché altrimenti crolla tutta, per intero. Non si può attendere di vedere gli effetti su alcuni aspetti del mondo come lo conosciamo, perché un universo con una matematica diversa è un universo diverso. Abbastanza curiosa, come situazione, soprattutto tenendo conto del fatto che la matematica si disinteressa dell’universo fisico.

Così, finisce quasi sempre che, volenti o nolenti, un racconto di fantamatematica arrivi a disegnare qualcosa di totalmente devastante: una fine del mondo, un’implosione dell’universo, una annichilazione globale e totale. Lo spazio narrativo è estremamente ristretto: non si possono disegnare delle “saghe galattiche” in cui non valga il Teorema di Incompletezza di Gödel, e, se anche fosse possibile, non riusciremmo a identificarci con i protagonisti.

Così, la brevità è necessaria, non solo una scelta; e i racconti devono limitarsi a narrare il momento cruciale, topico, in cui la matematica diventa fantamatematica, senza troppe possibilità di continuare la storia. E bisogna allora congratularsi con Maurizio Codogno per aver avuto la pazienza di inventare questi brevi flash in cui la matematica diventa quasi qualcosa di diverso da sé stessa, e soprattutto per aver aggiunto il cruciale capitolo finale “*Quale matematica c’è nei racconti*?”, in modo di capire quale sia il punto cruciale della piccola narrazione. In un certo senso, può essere perfino visto come una sorta di capitolo "Soluzioni", nel caso il lettore si chieda, quasi a mo' di problema, quale sia lo strano principio o teorema in grado di spiegare la logica del racconto.

L'Appendice finale "*Lo strano rapporto tra fantascienza e matematica*", aggiunta esplicitamente per questa edizione, è in realtà una lunga (per gli standard codogneschi) escussione dei temi che stiamo tentando di raccontare in questa recensione, ma ben corredata da esempi e riferimenti letterari e matematici. E, rendendoci conto che in quell'appendice ciò che stiamo dicendo è spiegato assai meglio di quanto riusciamo a fare qui noi, ci ritiriamo garbatamente, e rinviamo il lettore a procurarsi una copia di "Fantamatematica".

Titolo	Fantamatematica
Autore	Maurizio Codogno
Editore	Forevera Books
Data Pubblicazione	Febbraio 2021
Prezzo	7,00 Euro edizione cartacea; 1,50 euro e-book

5. Soluzioni e Note

Ottobre!

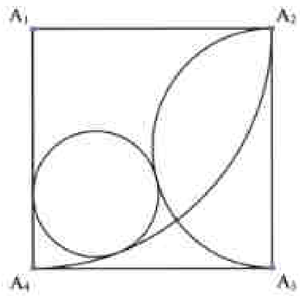
Dopo uno spumeggiante numero doppio, ricco piatto di soluzioni.

5.1 [271]

5.1.1 Saluti dal Giappone

Dal salotto del Capo un bel Sangaku giapponese:

> *Avete un quadrato $A_1A_2A_3A_4$, di lato 25. Con centro in A_1, tracciate il quadrante di cerchio A_2A_4; indi, tracciate il semicerchio A_2A_3 e il cerchio (completo) tangente al quadrante di cerchio, al semicerchio e al lato A_1A_4. Trovate il raggio di questo cerchio.*

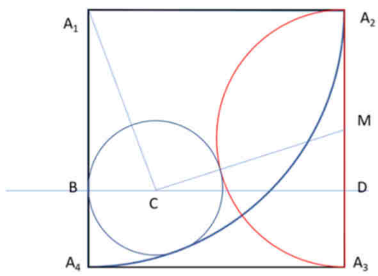


Cominciamo subito dalla soluzione di ***Valter***, la prima arrivata e anche l'ultima:

> Sovrappongo il quadrato a un sistema di assi cartesiani in modo che il vertice in basso a sinistra coincida con l'origine.
>
> Chiamo le coordinate del centro del cerchio completo tangente al quadrante di cerchio, al semicerchio e al lato A_1A_4 (x, y).
>
> Considero i due triangoli rettangoli con vertici di coordinate, rispettivamente:
>
> - $(0, y)$ $(0, 5)$ (x, y)
> - $(5, y)$ $(5, 2.5)$ (x, y);
>
> Con Pitagora ottengo un sistema di equazioni delle ipotenuse rispetto ai cateti:
>
> - $(5 - x)^2 = x^2 + (5 - y)^2$
> - $(2.5 + x)^2 = (5 - x)^2 + (2.5 - y)^2$.
>
> Risolvendolo ho due soluzioni; la prima è ok, l'altro punto è oltre il quadrato:
>
> - $x = 9/5 - \sqrt{6}$, $y = 4 - \sqrt{6}$
> - $x = 9/5 + \sqrt{6}$, $y = 4 + \sqrt{6}$.
>
> Tento di accennare come si potrebbe dare una risposta alla Vostra domanda: "come possiamo, con un paio di ellenici riga e compasso, attraverso i metodi della geometria elementare, disegnare il cerchio?":

- mi pare, sia possibile disegnare un sistema di assi cartesiani ortogonali
- dovrebbe essere anche possibile dividerli in segmenti di uguale lunghezza
- assegnando ai segmenti lunghezza 1/5 ho i valori 9/5 e 4 delle coordinate
- resta solo da sottrarre $\sqrt{6}$, e dovrei riuscire a disegnare l'intera figura
- per farlo ho trovato in rete: https://www.youtube.com/watch?v=NcQ3FjkTG8c.

Se vi state chiedendo come può essere la prima e l'ultima, dovete sapere che i Rudi hanno più di un indirizzo, e che ***Valter***, grazie al cielo, li conosce quasi tutti. Passiamo ora alla soluzione di ***Galluto***:



Traccio la parallela ad (A_1A_2) che passa per il centro C del nostro cerchio e chiamo B e D le intersezioni con i lati verticali; traccio inoltre (A_1C) e (MC) (dove M è il punto di mezzo di (A_2A_3) e quindi il centro del semicerchio in rosso.

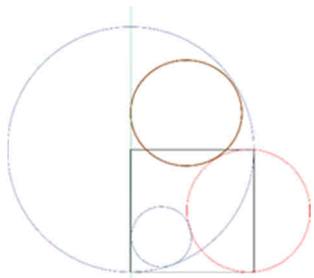
Essendo le varie circonferenze tangenti, (A_1C) è pari a L – R e (MC) è pari a L/2 + R.

Considerando il triangolo rettangolo A_1BC posso esprimere (A_1B) e considerando il triangolo rettangolo CMD posso esprimere (MD) ((CD) è ovviamente = L – R)

Ma (MD) è anche pari ad (A_2D) – (A_2M) dove (A_2C) = (A_1B) e (A_2M) = L/2

Eguagliando le due espressioni dl (MD) posso trovare la relazione tra L ed R; tralascio i vari passaggi e presento direttamente l'equazione finale: $25R^2 - 18\ LR * 3L^2 = 0$ le cui soluzioni sono: $R = L \cdot (9 \pm\sqrt{6}\ ) / 25$ (… il denominatore spiega perché il lato del quadrato è 25!)

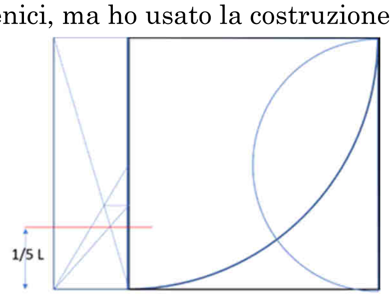
Delle due, quella che ci interessa è la $R = L \cdot (9 - \sqrt{6}\ ) / 25$; l'altra è relativa ad una circonferenza tangente al cerchio di raggio L in un altro quadrante:



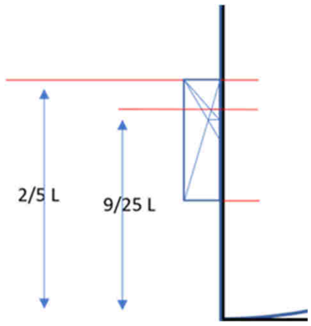
A questo punto per segnare C, avendo una calcolatrice e una squadra millimetrata mooolto precisa, parto da A_1, scendo di (A_1B) e poi "vado a destra" di una misura R, dove (A_1B) era uguale a $\sqrt{L^2 - 2LR}$ e adesso, conoscendo R, so che misura $L/5 \cdot \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$, il che rende decisamente preferibile il metodo ellenico.

Per il quale, però, non ho escogitato niente di più efficiente di quanto segue:

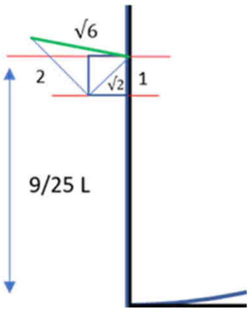
1. Partendo da A_4 e lungo la ($A_1\,A_4$) devo misurare R
    a. Per farlo devo prima "risalire" di 9/25 di L e poi ridiscendere di $\sqrt{6}$
    b. Per misurare i 9/25 di L comincio col trovare 1/5 L (gli strumenti sono quelli ellenici, ma ho usato la costruzione GLaD)



c. Col compasso centrato su 1/5 L e apertura fino ad A_4 trovo 2/5 L e da questo punto riapplico la mia costruzione per trovare 1/5 di 1/5 L (ho ingrandito il particolare della figura):

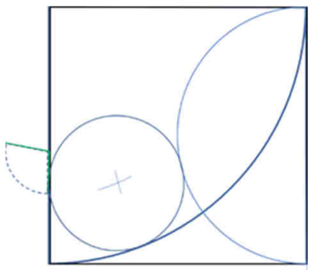


d. E così ho trovato i 9/25; per trovare $\sqrt{6}$ scendo di un altro 25°, sempre usando il compasso, e ci costruisco il quadrato di dimensione 1 (venticinquesimi)



e. Traccio la diagonale di questo quadratino (che misura $\sqrt{2}$) e poi perpendicolarmente alla diagonale traccio un segmento lungo 2 (che è una misura che a questo punto ho); chiudo il mio triangolo disegnando l'ipotenusa che è lunga $\sqrt{6}$ in quanto è = $\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}$

f. Disegno l'arco di cerchio, puntando il compasso sui miei 9/25 e aprendolo della misura di questa ipotenusa, e dove incrocio la (A_1 A_4) ho finalmente trovato il mio R



2. Centro in A1 e raggio fino al punto che ho individuato e traccio un pezzetto della circonferenza del cerchio L–R
3. Prolungo la (A_2 A3) oltre A_3 di R; centro in M e raggio fino alla fine del prolungamento; traccio anche in questo caso un pezzetto della circonferenza del cerchio L/2 + R
4. Nell'intersezione dei due archi di circonferenza ho trovato il mio centro

Sì, questo era solo il primo problema, c'è altro da mostrarvi, così procediamo…

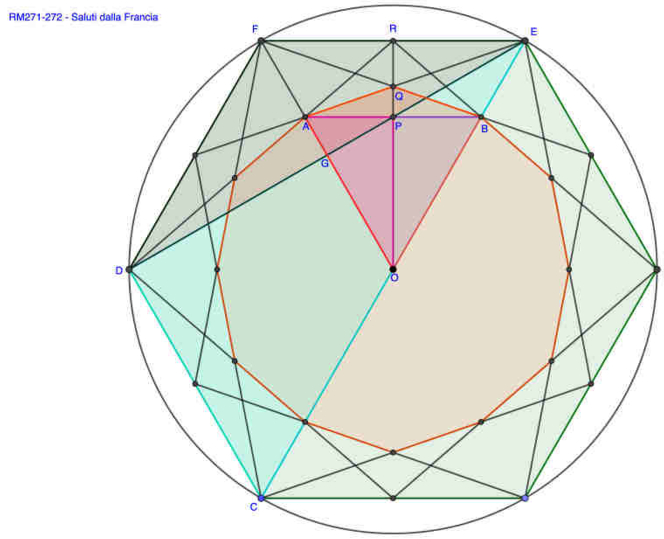
5.1.2 Saluti dalla Francia

Il secondo problema di RM271 era anch'esso geometrico:

> *Partite da un esagono regolare: dato il punto medio di tutti i lati, tracciate i segmenti che uniscono il punto medio ai due vertici immediatamente precedenti o successivi non appartenenti al lato in oggetto, per ottenere un dodecagono. Qual è il rapporto tra l'area del dodecagono e l'area dell'esagono?*

Anche qui partiamo da ***Valter***:

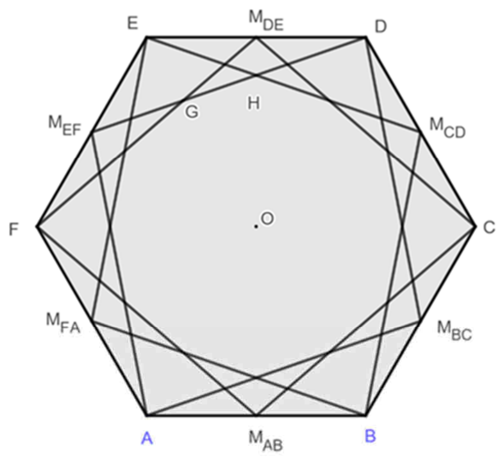
> Mi aiuto con una immagine perché mi è venuta un po' complicata; probabilmente si riesce a fare con qualcosa di più facile:



> Non dimostro alcuni passaggi del ragionamento, che mi paiono abbastanza facili da mostrare, per semplicità di esposizione:
>
> - l'area dell'esagono vale: a $6*\text{sen}(30°)*\cos(30°)=(3\sqrt{3})/2\approx 2.598076211$
> - l'area del dodecaedro è sei volte l'area del deltoide convesso OAQB
> - la posso ottenere servendomi delle diagonali AB e OQ, con: $AB*OQ/2$
> - i lati dell'esagono hanno la lunghezza del raggio, quindi, uguale a 1
> - i triangoli OFE e OAB sono equilateri; sapendo che $EF=1$, calcolo OR
> - i triangoli CDE OGE OGP sono 30-60-90; il triangolo DFE è 120-30-30
> - l'ipotenusa CE vale 2; calcolo DE con Pitagora, ottengo che vale $\sqrt{3}$
> - GE è la metà di DE, da ciò deduco che OG, del triangolo OGE, vale ½
> - con OG posso a calcolare $x=OP$ nel triangolo OAP; $x^2+x^2/4=1/4, x=1/\sqrt{3}$
> - con OP, sempre con Pitagora come prima, ottengono AP; quindi $AB=2/3$
> - ora conosco: $OR=\sqrt{3}/2$, $OP=1/\sqrt{3}$, $PR=OR–OP=1/2\sqrt{3}$, $AB=2/3$ e infine $FE=1$
> - di AB+FE, del trapezio isoscele ABEF, AB ne è i suoi 2/5 e FE i 3/5
> - lo stesso rapporto deve esserci di: $PR=PQ+QR$, con PQ e QR; $PQ=1/5\sqrt{3}$
> - ho tutto per calcolare l'area del dodecaedro:$(1/\sqrt{3}+1/5\sqrt{3})*2=(4\sqrt{3})/5$
> - semplificando il calcolo del rapporto fra le due aree ottengo: 15/8.

Procediamo nello stesso ordine del primo problema e vediamo la versione di ***Galluto***:

> In realtà tanto simpatico questo dodecagono non è in quanto è equilatero ma non equiangolo:



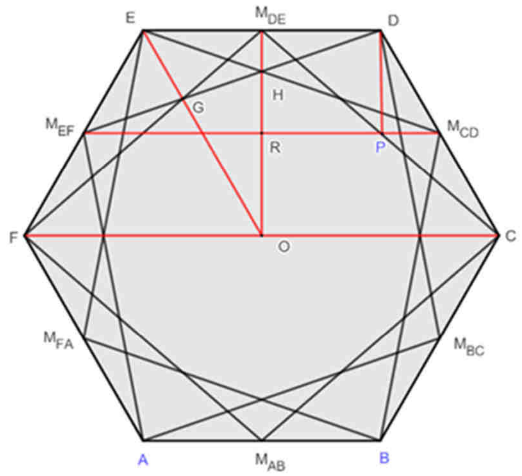
Considero il triangolo $M_{EF}ED$; l'angolo in E è di (N–2)π/N, il che nel caso dell'esagono vuol dire 120°; gli angoli in D e in M_{EF} sommati valgono 60° e i loro seni stanno fra loro nella stessa proporzione dei lati opposti che sono rispettivamente L/2 ed L; sviluppando, ottengo che l'angolo in M_{EF} vale ~41° e quello in D ~19°.

L'angolo G del mio dodecagono è opposto al vertice dell'angolo G del quadrilatero $EM_{EF}GM_{DE}$ ma l'angolo in E vale 120° e i due nei punti medi valgono ~41° ciascuno; l'angolo in G vale dunque ~158°.

L'angolo H lo ricavo invece dal triangolo EDH; i suoi angoli in E e D valgono ~19° ciascuno e quindi l'angolo in H ne vale ~142°.

Il simpatico dodecagono ha quindi 6 angoli, in corrispondenza dei vertici dell'esagono, da ~158° e altri 6, in corrispondenza dei lati dell'esagono, da ~142°. Però ha di buono che è "concentrico" al mio esagono.

Detto questo procediamo…



Il mio scopo è calcolare l'area del triangolo GHO, perché il dodecagono è formato da 12 triangoli uguali a questo.

1. Per prima cosa calcolo la lunghezza **S** dei segmenti che ho disegnato e che delimitano il dodecagono; sempre considerando il triangolo $M_{EF}ED$, per il teorema del coseno

$$S = L * \sqrt{\frac{5}{4} - \cos(\pi * \frac{N-2}{N})}$$

2. Adesso considero il triangolo $M_{EF}DP$ dove DP è perpendicolare a $M_{EF}M_{CD}$; di questo triangolo conosco l'ipotenusa che è S e il cateto DP (perché $M_{DE}O$ è l'apotema dell'esagono e la congiungente i punti medi $M_{EF}M_{CD}$ la divide in R in due parti uguali) e posso quindi calcolare l'altro cateto

$$M_{EF}P = \sqrt{S^2 - (DP)^2}$$

3. Ora calcolo $M_{EF}R$; in un esagono sono facilitato perché è il valore medio tra EM_{DE} (che vale L/2) ed FO che è il raggio dell'esagono e quindi è uguale ad L: quindi $M_{EF}R = ¾\ L$
4. A questo punto posso fare la proporzione tra gli elementi dei triangoli $M_{EF}DP$ e $M_{EF}HR$ e calcolare HR

$$HR = DP * ¾\ L / M_{EF}P$$

5. Sommando OR (che è l'altra metà dell'apotema dell'esagono) e HR ottengo OH, che è un lato del mio triangolo
6. Di questo triangolo conosco i 3 angoli (l'angolo in O misura 30° e gli angoli in G ed H sono la metà di quelli che ho calcolato all'inizio) e posso quindi ricavare un secondo lato e poi l'area:

$$GO = OH * \sin(H)/\sin(G)$$

$$Area_{GHO} = OH * GO * \sin(O) = OH * GO * \sin(30°)$$

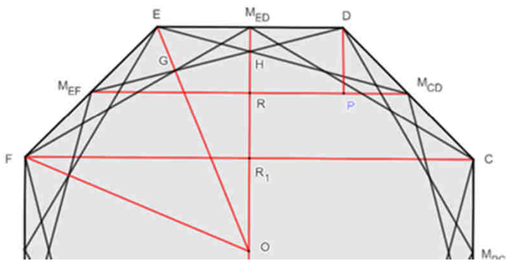
7. E finalmente l'area del dodecagono e il suo rapporto con quella dell'esagono:

$$Area_{dod} = 12 * Area_{GHO} = L^2 * 1{,}386$$

Rapporto Aree = 53,33%

Generalizziamo:

per tutti i casi in cui il poligono di partenza ha N>6 lati (uso l'ottagono per spiegare):



Posso seguire lo stesso procedimento dell'esagono con alcune aggiunte…

1. Il primo passo è uguale
2. la congiungente dei vertici C ed F non passa per il centro O (e non è due volte il raggio del poligono) e quindi la congiungente dei punti medi $M_{EF}M_{CD}$ non divide in R in due parti uguali l'apotema $M_{ED}O$ ma la parte dell'apotema compresa tra M_{ED} ed R_1, che devo trovare. Per farlo considero i due triangoli OFR_1 e $M_{EDF}R_1$; questi due triangoli hanno (a) le ipotenuse pari rispettivamente al raggio del poligono e al segmento S, (b) il cateto FR_1 in comune, e (c) la somma dei due secondi cateti è pari all'apotema del poligono; sviluppando ottengo che

$$M_{ED}R_1 = (S^2 - Rag^2 + Apo^2)/2\ Apo$$

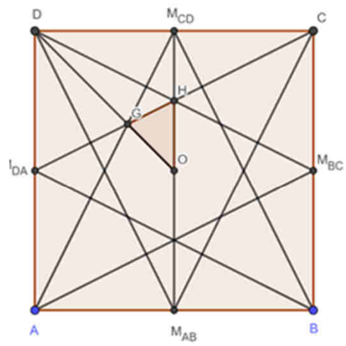
DP è pari alla meta di $M_{ED}R_1$ e posso calcolare $M_{EF}P$ con la stessa formula del punto 2 dell'esagono

3. Analogamente $M_{EF}R$ non è la media tra Il lato L del poligono e la sua metà L/2, ma è la media tra FR_1 e L/2; devo quindi trovare FR_1, che era il cateto comune ai due triangoli del punto precedente e che conoscendo $M_{ED}R_1$ posso calcolare: $FR_1 = \sqrt{S^2 - (M_{ED}R_1)^2}$ e successivamente calcolare $M_{EF}R$
4. La proporzione per calcolare HR è:
$$HR = DP * M_{EF}R / M_{EF}P$$
5. Per ottenere OH devo sommare tre segmenti e non due: $OR_1 + R_1R + HR$, ma a questo punto sono noti tutti e tre
6. Il passo 6 non cambia (salvo ovviamente il valore degli angoli)
7. Il risultato per i primi N nella tabella che segue

N lati	area pol 2N	area pol N	rapporto
6	1,386	2,598	53,33%
7	2,331	3,634	64,15%
8	3,465	4,828	71,77%
9	4,776	6,182	77,26%
10	6,258	7,694	81,33%
11	7,906	9,366	84,42%
12	9,720	11,196	86,81%

Rimangono da analizzare Quadrato e Pentagono…

Quadrato

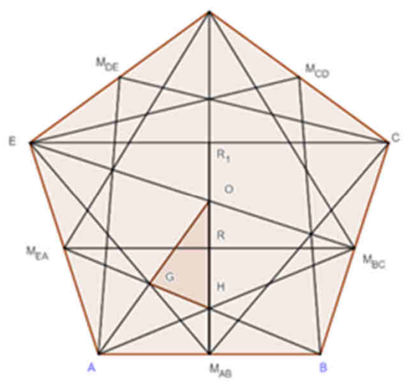


L'idea è sempre di trovare l'area del triangolo GOH e poi moltiplicarla per 8 per trovare l'area dell'ottagono.

Una volta trovati gli angoli in G ed in H e senza tutti i passaggi necessari per l'esagono, OH = ¼ L, l'angolo in O è chiaramente 45° e GO=OH·sen(H)/sen(G).

L'area del triangolo OGH = ½ · OH · GO · sen(O) = 0,0208 L^2 e il rapporto tra l'area dell'ottagono e quella del quadrato è 16,67%

Pentagono



L'idea è sempre la stessa, trovare l'area del triangolo GOH e moltiplicarla, questa volta, per 10. Per gli angoli non ci sono problemi, l'unica differenza è che in questo caso il segmento $M_{AB}R_1$ diviso in due dalla congiungente dei punti medi non è l'apotema (come per l'esagono), né l'apotema **meno** OR_1 (come per tutti i poligoni con N>6), ma è l'apotema **più** OR_1. Comunque, sfruttando il triangolo EDM_{AB} , in modo analogo al caso generale, trovo $M_{AB}R_1$ e poi vado avanti con il solito procedimento.

In breve, l'area del triangolo OGH = 0,065 L2 e il rapporto delle aree è 37,79%.

Col giardiniere ci parlate voi!

Ma non ci pensiamo neppure, con il giardiniere ci parla il Capo, che ha queste belle idee. Noi passiamo ai problemi del numero successivo, RM272.

5.2 [272]

5.2.1 La soluzione è facile...

Continua la serie di problemi geometrici:

Avete un cerchio di raggio unitario e un quadrato con due vertici (contigui) sulla circonferenza; il lato tra gli altri due vertici è su una tangente al cerchio. Quanto vale l'area del quadrato? Questa costruzione è possibile anche per altri poligoni regolari? E, in quel caso, qual è l'area del poligono?

Come avrete ormai capito abbiamo due solutori questo mese, il primo è ***Valter***:

Detto "R" il raggio del cerchio e "L" il lato del quadrato, la soluzione si ha risolvendo: $R + \sqrt{(R^2 - L^2/4)} = L$; …, poi è semplice.

Nello specifico partendo dal cerchio di raggio unitario sostituisco a "R" il valore "1" e ottengo L = 8/5; l'area, quindi è: 64/25.

Per altri poligoni regolari mi pare si possa fare se hanno il numero di lati pari per poter avere un loro lato tangente al cerchio.

La formula dovrebbe essere: $R + \sqrt{(R^2 - L^2/4)} = L/(\tan(\pi/N))$; N sono i suoi lati; viene eguagliata la distanza fra due lati opposti.

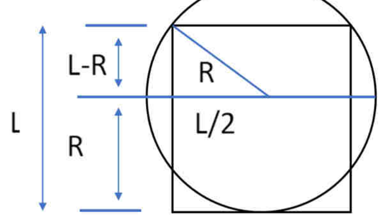
A sinistra la calcolo con Pitagora, il raggio e il lato del poligono, a destra con la formula del raggio del suo cerchio inscritto.

P.S.: $\sqrt{(R^2 - L^2/4)}$ è la radice quadrata dell'espressione fra parentesi.

E sapete già che adesso arriva ***Galluto***:

Ovviamente bisogna trovare una relazione tra il Lato L del quadrato e il raggio R del cerchio.

La distanza tra due lati opposti di un quadrato è pari al lato del quadrato stesso; questa misura (vedi figura) la posso dividere in R, che è la distanza dal centro del cerchio al punto di tangenza, e in L–R che è un cateto del triangolo che ha come ipotenusa il raggio del cerchio e come altro cateto la metà del lato del quadrato.



E quindi: $(L–R)^2 = R^2 – (L/2)^2$

Sviluppando ottengo L = 8/5 R e quindi $L^2 = R^2 \cdot 64/25$ o, se preferite, il rapporto tra le aree di quadrato e cerchio è $64/25\pi$.

Generalizzando…

… a tutti i poligoni regolari con numero N pari di lati (no, il disegno non lo faccio!):

i lati sono opposti a due a due e la distanza tra due lati opposti è pari a due volte l'apotema A (e infatti l'apotema del quadrato è pari a metà del lato); la formula usata per il quadrato diventa in generale la seguente:

$$(2A–R)^2 = R^2 – (L/2)^2$$

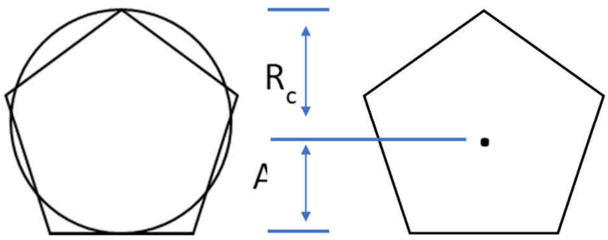
Poiché $A = L / 2 \tan(\pi/N)$ sviluppando si ottiene $L = R \cdot 8 \tan(\pi/N) / (\tan(\pi/N)^2 + 4)$;

l'area del poligono è pari a $N \cdot L \cdot A /2$ e quindi a: $R^2 \cdot 16 \cdot N \cdot \tan(\pi/N) / (4 + \tan(\pi/N)^2)^2$ e il rapporto tra le aree è $16 \cdot N \cdot \tan(\pi/N) / \pi (4 + \tan^2(\pi/N))^2$ e tende asintoticamente ad 1 all'aumentare di N.

Estendendo…

…ai poligoni regolari con numero N dispari di lati:

opposto ad un lato non c'è un altro lato ma un vertice e quindi non si può fare la stessa costruzione; se ne può pensare una simile, in cui uno dei due lati opposti "si riduce" ad un vertice. Se a ridursi è il lato che era tangente al cerchio abbiamo il caso banale di un poligono inscritto in una circonferenza, e quindi mi concentro sul caso in cui si è ridotto il lato con i vertici sulla circonferenza (vabbè, ecco la figura con un pentagono):



La distanza tra un vertice ed il lato opposto è pari all'apotema A più il raggio del cerchio circoscritto R_c (incentro e circocentro del poligono coincidono e ovviamente sono diversi dal centro del nostro cerchio di raggio R) e quindi la formula per i poligoni "dispari" è la seguente:

$$(A + R_c – R)^2 = R^2 – (L/2)^2$$

Dove $A = L / 2 \tan(\pi/N)$ (come prima) e $R_c = L / 2 \sin(\pi/N)$; sviluppando (parecchio) si ottiene

$L = R ((\sin(\pi/N)+\tan(\pi/N))\cdot\sin(\pi/N)\cdot\tan(\pi/N)) / ((\sin(\pi/N)+\tan^2(\pi/N)) + (\sin^2 (\pi/N) \cdot (\tan^2(\pi/N))$

l'area del poligono è (come prima) $N \cdot L \cdot A /2$ e quindi è:

$$R^2 \cdot 4N \cdot (\sin(\pi/N) + \tan^2(\pi/N))\cdot\sin^2(\pi/N)\cdot\tan(\pi/N) / ((\sin(\pi/N)+\tan(\pi/N))^2 + \sin^2(\pi/N)\tan^2(\pi/N)^2)$$

il rapporto con l'area del cerchio è la stessa espressione diviso π (e senza R^2) e tende anche esso ad 1 all'aumentare di N.

L'immancabile tabella…

N	L	area	rapporto aree	N	L	area	rapporto aree
3	1,73	1,30	41,35%	4	1,60	2,56	81,49%
5	1,18	2,38	75,68%	6	1,07	2,95	93,95%
7	0,87	2,74	87,10%	8	0,79	3,05	96,98%
9	0,68	2,89	92,07%	10	0,63	3,08	98,17%
11	0,56	2,97	94,65%	12	0,53	3,10	98,77%
13	0,48	3,02	96,15%	14	0,45	3,11	99,11%
15	0,42	3,05	97,10%	16	0,39	3,12	99,33%
17	0,37	3,07	97,74%	18	0,35	3,13	99,48%
19	0,33	3,08	98,19%	20	0,31	3,13	99,58%
21	0,30	3,09	98,51%	22	0,29	3,13	99,65%
23	0,27	3,10	98,76%	24	0,26	3,13	99,71%
25	0,25	3,11	98,95%	26	0,24	3,13	99,75%
27	0,23	3,11	99,10%	28	0,22	3,13	99,79%
29	0,22	3,12	99,22%	30	0,21	3,14	99,82%
31	0,20	3,12	99,32%	32	0,20	3,14	99,84%
33	0,19	3,12	99,40%	34	0,18	3,14	99,86%
35	0,18	3,12	99,46%	36	0,17	3,14	99,87%
37	0,17	3,13	99,52%	38	0,17	3,14	99,89%
39	0,16	3,13	99,57%	40	0,16	3,14	99,90%

E andiamo avanti, passiamo al secondo problema.

5.2.2 Tanto tempo fa, su un asse immaginario lontano lontano...

Basta geometria? Ebbene sì, un bel problemino con i numeri, che qualcuno ha già visto da un'altra parte:

> *Trovare un numero di sedici cifre, le prime tre e le ultime dieci sono ignote, quelle che restano sono* 584. *Le cifre da* 1 *a* 8 *compaiono due e due sole volte; i due* 8 *sono separati da* 8 *cifre, i due* 7 *da* 7 *cifre, eccetera eccetera sino ai due* 1 *separati da una cifra. Quanti (e quali) sono i numeri sotto queste condizioni?*

Indovinate? Cominciamo con ***Valter***, brevissimo, questa volta:

> 1 6 1 5 8 4 7 3 6 5 4 3 2 8 7 2

Anche se abbiamo di nuovo cominciato con ***Valter*** (ma non lo facciamo quasi sempre?), non pensate che non ci siano altri solutori a parte lui e ***Galluto***, questo mese: guardate che cosa ci scrive ***Lorenzo***:

> In base alla regola, sono univocamente determinati i posti delle altre due cifre 5 e 8:
> ***584***5***8**
> mentre l'altro 4 può occupare il primo posto oppure l'undicesimo.
> 1) Se 4 è al primo posto, il secondo posto può essere occupato soltanto da un 6:
> 46*584**65***8**
> Ora al terzo posto potrebbe esserci un 3 o un 7; ma se ci fosse un 7:
> 467584**657**8**
> al settimo posto non potrebbe starci né 1, né 2, né 3. Se invece al terzo posto scriviamo 3:
> 4635843*65***8**
> rimangono univocamente determinati i posti per le cifre 7, 2 e 1:
> 4635843765121827.
> 2) Anche nel caso in cui l'altro 4 sia all'undicesimo posto, il secondo può essere occupato soltanto da un 6:
> *6*584**654**8**
> Ora al primo posto non può starci che 1:
> 161584**654**8**
> al settimo può esserci soltanto il 7:
> 1615847*654**87*
> all'ottavo solo il 3, e quindi il 2 va al tredicesimo (e al sedicesimo) posto:

1615847365432872.

In conclusione, le combinazioni possibili sono due.

La situazione sembra chiarissima anche per ***Galluto***:

Il primo passaggio è automatico: il secondo **5** deve stare per forza nella posizione 10 e il secondo **8** nella 14:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
_	_	_	5	8	4	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_
_	_	_	5	8	4	_	_	_	5	_	_	_	8	_	_

Anche il passo successivo è facile: nella posizione 2 ci può stare solo il **6** e di conseguenza il secondo **6** sta nella 9:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
_	6	_	5	8	4	_	_	6	5	_	_	_	8	_	_

Però a questo punto qualche alternativa la devo valutare… mi accontento di poter avere due "SE".

Nella posizione 1 ci possono stare solo **1** o **4**; SE ci sta l'1 allora l'altro **1** sta nella 3 e il secondo **4** sta nella 11:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	6	1	5	8	4	_	_	6	5	4	_	_	8	_	_

A questo punto nella posizione 13 può starci solo il **2** e il secondo **2** sta nella 16**:**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	6	1	5	8	4	_	_	6	5	4	_	2	8	_	2

Gli ultimi posti sono obbligati: il **3** in 8 e 12, il **7** in 7 e 15:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	6	1	5	8	4	7	3	6	5	4	3	2	8	7	2

E questa è una prima soluzione; torniamo al SE sulla posizione 1; se è occupata dal **4**, so che la 13 è occupata dall'**1,** ma non so se l'altro **1** sta in 11 o in 15**:**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
4	6	_	5	8	4	_	_	6	5	_	_	1	8	_	_

e qui mi serve il secondo SE; SE l'altro **1** sta nella 11, gli altri vanno a posto automaticamente: il **2** può stare solo in 12 e 15, il **7** in 8 e 17, e nella posizione 3 poteva stare solo il **3** che quindi è anche in 7.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
4	6	3	5	8	4	3	7	6	5	1	2	1	1	2	7

E questa è una seconda soluzione; rimane da vedere cosa succede SE il secondo **1** sta nella posizione 15: il **2** deve stare per forza in 8 e 11, ma a questo punto non ci sono posizioni valide per il **7**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
4	6	_	5	8	4	_	2	6	5	2	_	1	8	1	_

Quindi le soluzioni sono solo 2 … è un caso che alla fine della esposizione del problema gli armadietti erano diventati 2?

Ci ha anche scritto ***Camillo***:

Non capisco quando scrivete che può essere risolto senza tentativi?

Ho fatto delle considerazioni sui posti che vengono impegnati dalle varie cifre per cui la mia conclusione è che vi sono solo 2 combinazioni valide.

|1615847365432872|

|4635843765121827|

Chissà se è possibile trovare tutte le combinazioni possibili senza l'uso "della forza"?

Ad esempio con una semplice rotazione |7463584376512182| che è possibile fare solo col 7 in testa o in coda.

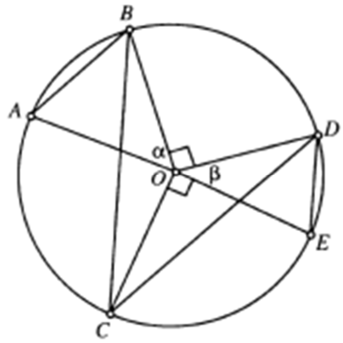
Naturalmente ogni soluzione ha il suo speculare.
Ci fermiamo qui, che è già molto tardi. Alla prossima!

6. Quick & Dirty

Un quadrato di lato 4 è diviso in 4×4+16 quadrati di lato unitario. Quante coppie di vertici dei quadrati unitari hanno tra di loro distanza intera?

7. Pagina 46

Se gli archi AC, BD e CE sottendono angoli alla circonferenza a 45°, l'angolo al centro sottendente il medesimo arco sarà di 90°, e quindi ogni arco avrà l'ampiezza di un quadrante di circonferenza; questo implica anche che AE sia un diametro della circonferenza. I vari raggi verso A, B, C, D ed E partizionano quindi il cerchio come indicato nella figura qui a fianco.



Sia il raggio del cerchio *r*, e siano gli angoli AOB=α e DOE=β.

Gli archi BD e CE sottendono degli angoli al centro retti, quindi deve essere:

$$\alpha + \beta + 90° = 180°$$

il che implica che gli angoli α e β +90° siano supplementari, e questo implica che i triangoli AOB e COD abbiano la stessa area:

$$A_{AOB} = ½\ r^2 \sin AOB = ½\ r^2 \sin COD = A_{AOB}.$$

Nello stesso modo, gli angoli BOC=α+90° e DOE=β sono supplementari, il che implica $A_{BOC} = A_{DOE}$.

L'area non tratteggiata vale quindi:

$$\text{calotta}_{AB} + \text{quadrante}_{BOD} + A_{BOC} + A_{COD} = \text{calotta}_{AB} + \text{quadrante}_{BOD} + A_{DOE} + A_{AOB}$$

che, essendo pari al semicerchio ABE, mostra l'uguaglianza delle due aree.

8. Paraphernalia Mathematica

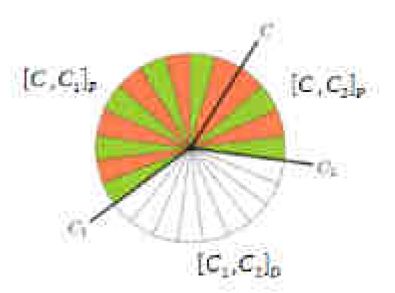
L'estensore di queste note esprime la sua alta protesta per non aver potuto, durante il mese trascorso, effettuare sperimentazioni relative all'argomento in oggetto.

8.1 Più pizza per tutti! - [2] – Come arrivare alla fine

Se, in trepida attesa di una strategia vincente, avete lasciato sul tavolo la pizza del mese scorso, dovrebbe essere diventata tutta verde e quindi aver perso la coloritura canonica: il nostro consiglio è di ricominciare da una fresca.

Ripassiamo un po' di notazione, esaminando una deduzione che *sicuramente* avete fatto tutti.

Quando Alice *segue Bob* dopo che è stato mangiato $[C_1,C_2]_D$, la strategia di Bob può ridursi alla scelta di un taglio C che divida $[C_1,C_2]_P$ in due intervalli pari $[C,C_1]_P$ e $[C,C_2]_P$; a questo punto, se Alice riceve la parte rossa della coloritura canonica e Bob la parte verde, Alice avrà $R([C,C_1]_P) \cup R([C,C_2]_P)$ e Bob $V([C,C_1]_P) \cup V([C,C_2]_P)$. Il disegno a fianco (ripreso dal mese scorso) dovrebbe chiarire il concetto.



8 *SB-Generalizzazione.*

Per ogni intervallo $[C_1,C_2]_D$ *già mangiato*, esiste un taglio C che minimizza il guadagno (futuro) di Alice dato da $R([C,C_1]_P) \cup R([C,C_2]_P)$; questo taglio è definito come la *miglior risposta di Bob*. La complicazione, qui, è che per un dato intervallo possono esistere diversi tagli che sono la risposta migliore, e lo stesso taglio può essere la risposta migliore per diversi tagli.

Supponiamo un intervallo (pari) $[C_1,C_2]_P$: si dice che questo intervallo ha (la proprietà de)i ***verdi pesanti*** se, per qualsiasi taglio **C** tale che $[C_1,C]_P \subseteq [C_1,C_2]_P$ abbiamo che è:

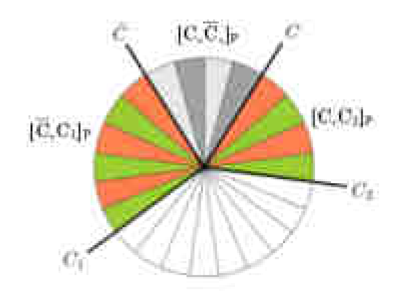
$$G([C_1,C]_P) \geq R([C_1,C]_P)^{19}$$

Se parliamo di intervalli *dispari*, quindi $[C_1,C_2]_D$, dobbiamo aggiungere la proprietà che, per qualsiasi taglio C tale che $[C_1,C]_P \subseteq [C_1,C_2]_D$ si abbia:

$$G([C_1,C]_P) \geq R([C_1,C]_P)$$

Si noti che questa proprietà, nel caso di intervallo pari, dipende dall'*ordine* dei tagli di confine: ossia, un intervallo può essere verde pesante in un senso, ma non nell'altro. La cosa, intuitivamente, dipende da come "comincia e finisce" (in coloritura canonica) il nostro avanzo di pizza.

Dalla definizione si ricava che un taglio C con $[C,C_1]_P \subseteq [C_1,C_2]_P$ è la miglior risposta a $[C_1,C_2]_D$ se solo se $[C,C_1]_P$ e $[C,C_2]_P$ sono verdi pesanti: in figura, si vedono due tagli C e $\underline{C}$ che sono possibili migliori risposte a $[C_1,C_2]_D$: l'insieme $R([C,C_1]_P) \cup R([C,C_2]_P)$ è l'insieme dei pezzi rossi e di quelli grigio scuro, mentre l'insieme $R([\underline{C},C_1]_P) \cup R([\underline{C},C_2]_P)$ è l'insieme dei pezzi rossi e di quelli grigio chiaro.



9 *Un taglio complesso.*

Siccome in questi campi la parte più interessante sono le definizioni, cerchiamo di semplificarci la vita: definiamo come ***pizza facile*** la pizza per la quale Alice ha una SB-strategia che le garantisce *almeno metà pizza*; in caso contrario, definiamo la pizza come ***difficile***.

[19] Vi ricordiamo che, come in tutte le formule relative al guadagno sin qui viste, in caso di generalizzazioni dovete considerare i *valori assoluti* di queste grandezze.

In merito alle pizze facili e difficili, esistono alcuni teoremi che ci aiuteranno ad arrivare a conclusioni piuttosto interessanti.

Per cominciare, se *due tagli limitrofi sono la miglior risposta rispetto ad una singola fetta, allora la pizza è facile*: in pratica, avete due tagli C e C', da una parte, tra di loro, c'è la singola fetta p, dall'altra parte c'è il resto della pizza (che risulta pari); questo significa che Alice può mangiare almeno mezza pizza (agendo, supponiamo, su **C**). Quindi una SB-strategia garantisce ad Alice almeno mezza pizza.

Se consideriamo l'insieme C_{pgg} (il pedice sta per "peggiore") che *minimizza* $R([C,C]_D)$ su tutti i pezzi, allora un taglio $C \in C_{pgg}$ è la miglior risposta a qualsiasi pezzo $p \in R([C,C]_D)$.

Ma per ogni pizza difficile e ogni $C_1 \in C_{pgg}$ esistono C_2 e C_3 tali che $[C_1,C_2]_D$, $[C_1,C_3]_D$ e $[C_2,C_3]_D$ sono *disgiunti* e sono *verdi pesanti*. Ossia, ogni pizza difficile può essere partizionata in tre settori ciascuno dei quali ha la proprietà di essere verde pesante.

Siccome ci pare che tutto sia troppo chiaro, abbreviamo le notazioni: diciamo che r_i è il guadagno dato dall'intervallo (dispari) *opposto* a C_i; in pratica, ricordando che il fulcro della nostra dimostrazione si basa sul tagliare la pizza in tre settori (o "tagli"), ciascuno composto da un numero dispari di pezzi, abbiamo $r_2 = R_2 = R([C_1,C_3]_D)$: usando questa notazione (che, se non vi piace, potete comunque espandere per tornare a quella originale), se supponiamo Alice giochi una SB-strategia associata ad un qualche $C \in \{C_1, C_2, C_3\}$, (ossia che inizi con un pezzo p che rappresenta la miglior risposta e poi segua una SB-strategia): facendo questo, Alice guadagna almeno $R([C,C]_D)$ che, nella nostra nuova notazione, può essere espresso secondo la tabella:

Taglio	Guadagno di Alice	Guadagno di Bob
C_1	$g_1+r_2+r_3$	$r_1+g_2+g_3$
C_2	$r_1+g_2+r_3$	$g_1+r_2+g_3$
C_3	$r_1+r_2+g_3$	$g_1+g_2+r_3$

Da cui si può dedurre, se supponiamo $C_2 \in C_{mgl}$ (ossia appartenente all'insieme che *massimizza* $R([C,C]_D)$ il pedice sta per "migliore"):

$$g_1 + r_2 + r_3 \leq r_1 + r_2 + g_3 \leq r_1 + g_2 + r_3$$

Si noi che *essendo la pizza difficile*, ognuno dei guadagni della formula qui sopra è *minore di metà pizza*. Questo significa che $g_i > r_i$, ossia si ha che i pezzi verdi di ogni intervallo della colorazione canonica sono *più grandi* dei pezzi rossi del medesimo intervallo, anche se sono meno (gli intervalli sono dispari!).

Per vedere una buona strategia, ci serve ancora una definizione: sia $p_i \in G_i$ il *pezzo medio* di G_i, ossia supponiamo che partendo da p_i e procedendo verso un taglio in $\{C_1, C_2, C_3\}$ si abbia una somma di pezzi verdi pari *almeno alla metà* di g_i.

Quindi, possiamo avere una *mSB-strategia* (la "*m*" sta per "modificata") che proceda in questo modo:

1. Alice inizia mangiando $p_i \in G_i$.
2. Sin quando Bob rende prendibili dei pezzi in G_i, Alice segue Bob (ossia, applica la SB-strategia)
3. Quando la presa di Bob libera un pezzo rosso in un altro settore, Alice smette di seguire Bob. Quindi, prende un pezzo in R_i (che sarebbe "quello dall'altra parte").
4. Alice ricomincia quindi a seguire Bob.

Una mSB-strategia contiene *sempre esattamente una mossa* nella quale Alice non segue Bob (essendo la pizza divisa in tre settori, non è riapplicabile). Si noti che ci sono *tre* mSB-strategie, esattamente come ci sono *tre* SB-strategie. Per quanto riguarda le nuove strategie, abbiamo una tabella dei guadagni (che limitiamo ad Alice) di questa forma:

Taglio / Strategia	Guadagno di Alice
mSB_1	$g_1/2 + g_2 + r_3$
mSB_2	$g_1 + g_2/2 + r_3$
mSB_3	$g_1 + g_2 + r_3/2$

Adesso, consideriamo *tre* strategie, delle sei che abbiamo visto:

1. la SB-strategia associata a C_2;
2. la mSB-strategia mSB_1;
3. la mSB-strategia mSB_3.

Sommando gli opportuni valori (e ricordandoci di pesare opportunamente ognuna delle strategie), si vede che *almeno una strategia deve dare ad Alice il valore* 3/7: non sarà proprio il massimo, ma con un Bob ingordo è già un ottimo risultato.

...si può fare di meglio? Forse. Ma non siamo sicuri di volervelo dire. Fa sempre comodo, avere una strategia di riserva.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms