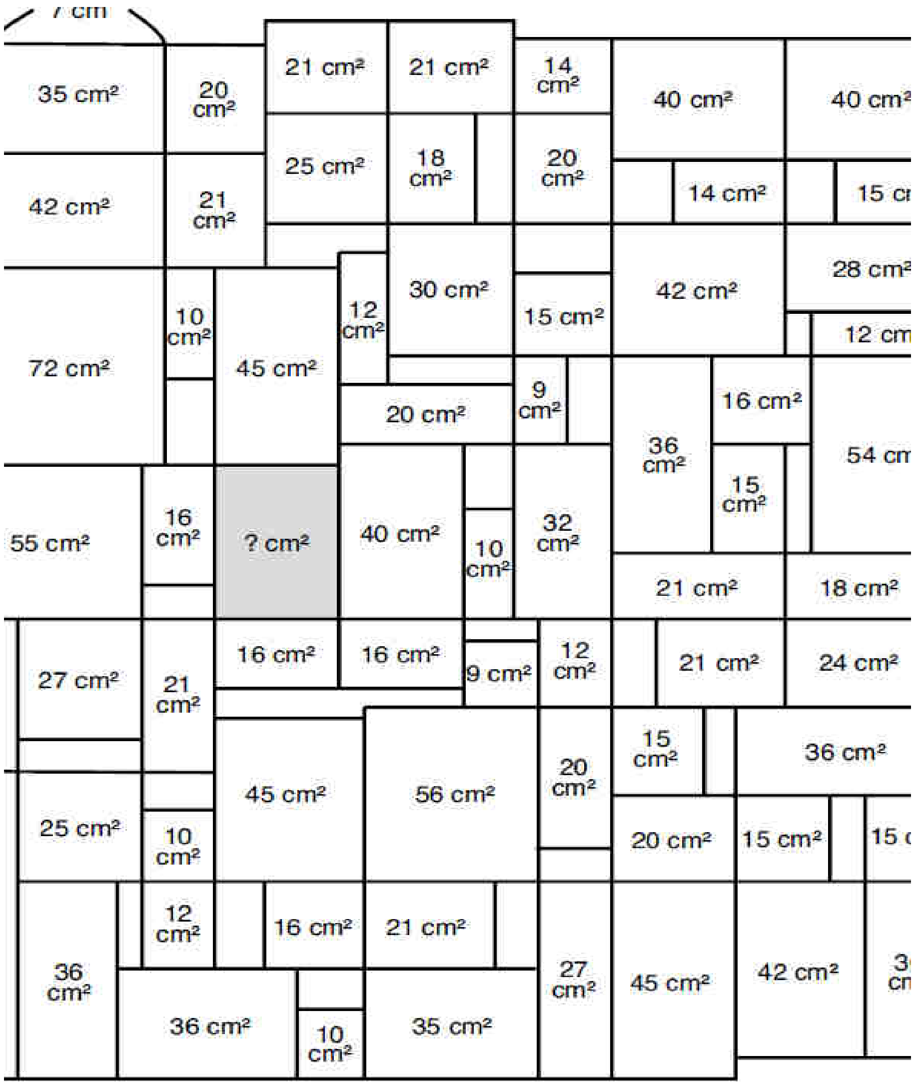
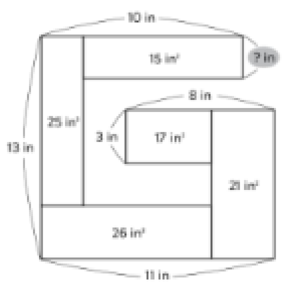
# Rudi Mathematici

*Rivista fondata nell'altro millennio*

Numero 269 – Giugno 2021 – Anno Ventitreesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

***Rudi Mathematici***

Rivista fondata nell'altro millennio da

*Rudy d'Alembert* (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

*Piotr Rezierovic Silverbrahms* (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

*Alice Riddle* (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM267 ha diffuso 3'325 copie e il 24/05/2021 per Google eravamo in 216'000 pagine.



Il giapponese ***Naoki Inaba*** si è specializzato in una categoria particolare di puzzle: in copertina ne vedete due. Il primo ci pare "interessante, ma lungo", mentre il secondo è, a quanto sostiene lui, tra i più difficili che abbia creato (no, non perché in pollici) anche se, per risolverli, bastano ampiamente le frazioni. Se vi divertono, potemmo cercarne altri, anche se più che l'ambientazione "giardino" non ci viene in mente...

# 1. La mano visibile del buon senso

*"È meglio essere grossolanamente nel giusto piuttosto che essere esattamente in errore."*

*"L'economia è una scienza molto pericolosa."*

*"Il mercato può restare irrazionale più a lungo di quanto tu possa restare solvente."*

*"A lungo termine saremo tutti morti."*

*"Quando le mie informazioni cambiano, io cambio le mie conclusioni: lei cosa fa, signore?"*

*"Investire con successo sta tutto nell'anticipare le anticipazioni degli altri."*

*"Il problema più grande non è far accettare alla gente le nuove idee, ma fargli dimenticare le vecchie."*

*"Il capitalismo è la stupefacente convinzione che i più perfidi degli uomini faranno le più perfide delle cose per ottenere il bene di tutti."*

*"I mercati sono mossi da istinti animali, non dalla ragione."*

*"L'atteso non capita mai; è sempre l'inaspettato che succede."*

*"Il motore che governa un'impresa non è il risparmio, è il profitto."*

*"La maggior parte degli esseri umani ama più il denaro e la sicurezza che la costruzione e la creazione, quando diventano vecchi."*

*"È incredibile a quante gigantesche idiozie uno può credere, almeno per qualche tempo, se passa troppo tempo a pensare da solo. Specialmente in economia."*

*"Il rimpianto più grande della mia vita è di non aver bevuto abbastanza champagne."*

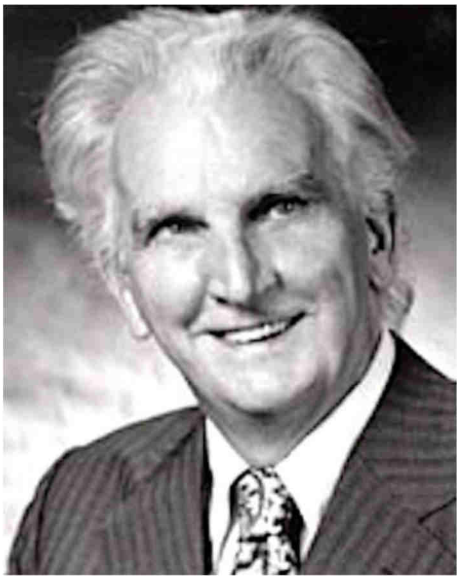
C'è una grossa distanza tra i cultori della matematica ricreativa e i veri matematici, e questa affermazione può serenamente essere catalogata sotto l'etichetta "Ulteriori dimostrazioni dell'avvenuta scoperta dell'acqua calda". Se la ribadiamo ancora una volta, è essenzialmente perché vorremmo affrontare una disciplina particolare che con la matematica ricreativa ha in comune solo un aspetto: quello di essere (talvolta) frequentata da matematici. Per tutto il resto, i punti di contatto sembrano ardui da trovare.

Stiamo parlando di quella scienza[1] che più di ogni altra occupa i pensieri degli esseri umani, le pagine dei giornali e i servizi dei notiziari televisivi: l'economia. Non è sorprendente che susciti così tanto interesse: in ultima analisi, oggetto dell'economia sono i beni, anche quelli più elementari, e la ricerca e l'ottenimento dei beni primari è un

[1] Sappiamo che il termine "scienza" secondo molti non dovrebbe essere associato all'Economia, e possiamo capirne in parte le ragioni. Ma è anche vero che la parola è ormai altamente inflazionata, come mostrano alcune delle "classi di laurea" riconosciute dall'Università Italiana: senza volerne minimamente sminuire l'importanza e men che mai la necessità, è palese che, solo qualche decennio fa, non sarebbe stato pensabile chiamare dei corsi di laurea "Scienze per la Cooperazione allo Sviluppo" (LM81) o addirittura "Scienze delle Religioni" (LM64). Con "scienza" sembra intendersi ormai sostanzialmente il concetto di "insieme di conoscenze" più che disciplina vincolata al metodo scientifico sviluppato da Galileo in poi. Tutto sommato questo ci rappacifica persino un po', visto che fino a non molto tempo fa – e in qualche caso ancora oggi – si discuteva se il termine "scienza" fosse o meno associabile anche a "matematica".

imperativo per la sopravvivenza: è però meno evidente e chiara la ragione per cui, una volta soddisfatti i suddetti bisogni primari, la pulsione all'accumulo e i relativi metodi di ottenimento e scambio siano così affascinanti per la quasi totalità degli esseri umani.

D'accordo, non è il caso di fare troppo a lungo la parte degli ingenui: ci è ben chiaro che anche il più intrigante dei giochi matematici perde rapidissimamente di interesse se lo si affronta quando si ha una fame vorace e non si ha un tetto per ripararsi dalle intemperie. I bisogni primari si chiamano così per un'ottima ragione, quella che esprime l'incontestabile verità che hanno la precedenza su tutti gli altri. In ultima (e prima) analisi, l'economia è la disciplina che si occupa – o quanto meno si dovrebbe occupare – di questi problemi fondamentali, ed è sacrosanto che venga tenuta in grande e dovuta considerazione. La matematica, più ancora che una scienza, è un metodo per organizzare relazioni e conoscenze, ed è inevitabile (e giustissimo) che metta a disposizione tutte le sue potenzialità al servizio di argomenti tanto importanti per tutta la specie umana. Il fatto sorprendente è piuttosto un altro: dovendo coniugare i bisogni e i desideri umani, così volatili e volubili, con il rigore scientifico dei numeri e delle relazioni, l'economia si ritrova spesso ad elaborare principi complessi, costrutti fortemente artificiali, e utilizza metodi matematici parimenti complicati. Gli appassionati di matematica ricreativa, per contro, si specializzano nel trovare percorsi di soluzione magari originali, poco ordinari, ma utilizzando per quanto possibile una matematica semplice, rispettosa dei principi elementari. E così finisce che molte cose che sembrano del tutto evidenti, naturali ed elementari agli economisti sono di difficile comprensione per chi ha un approccio alla matematica meno elaborato.



1 *Kenneth Boulding*

Tanto per rendere l'idea: da cultori di matematica ricreativa, abbiamo a lungo ritenuto che il miglior aforisma che mette in relazione matematica ed economia fosse quello, assai celebre, che recita: "*Chiunque creda che una crescita esponenziale possa continuare all'infinito in un mondo finito è un pazzo o un economista*". L'ammirazione verso la citazione non è affatto scemata, ma solo di recente abbiamo scoperto che a pronunciarla è stato Kenneth Boulding, che peraltro è proprio un economista. Un economista probabilmente considerato non troppo ortodosso da molti suoi colleghi, ma indubbiamente un economista. La scoperta ci ha un qualche modo rasserenato, e in parte anche dato un po' di coraggio per palesare un certo numero di dubbi fondamentali che ci tormentano da tempo immemore e che sono talmente sciocchi ed elementari che ci siamo sempre vergognati di palesare. Il fatto è che, verosimilmente, i cultori di matematica ricreativa stanno agli economisti come i bambini stanno agli adulti; e questo è, ovviamente, un guaio.

I dubbi cominciano già con l'elemento economico più familiare: il denaro. Probabilmente, i guai nascono proprio dal fatto che si imparano a conoscere le monete proprio nello stesso periodo in cui si inizia a conoscere i numeri, ed è del tutto naturale immaginare che denaro e numeri abbiano esattamente le stesse caratteristiche. I soldi si sommano, moltiplicano e dividono benissimo, e sono un modello quasi perfetto per familiarizzarsi con le proprietà dei numeri: se desidero tanto il pupazzetto di Spiderman che costa 15 euro e nel salvadanaio ne ho 12, capisco facilmente che me ne servono altri 3; se ognuno dei quattro nonni mi regala una moneta da 2 euro capisco che il pupazzetto potrò finalmente averlo, e perfino che mi resteranno ancora 5 euro per le caramelle.

Il guaio è che il modello è così buono che si tende facilmente ad attribuire al denaro anche caratteristiche che i numeri non hanno; errore del tutto comprensibile, specialmente in quelle società in cui la matematica viene considerata utile e necessaria soprattutto per "far di conto", ovvero, in buona sostanza, per assicurarsi che il verduriere non ci abbia imbrogliato nel darci il resto quando si comprano le zucchine.


2 *Soldi e matematica: la recente banconota di 50 sterline dedicata ad Alan Turing. In basso uno dei "modelli" proposti da scolari inglesi per il concorso indetto dalla Banca d'Inghilterra per il tema della nuova banconota.*

Le prime anomalie arrivano presto: ad esempio quando le zucchine (o il pupazzetto di Spiderman) aumentano di prezzo. I soldi sembrano essere un modello perfetto di grandezza conservativa, tant'è vero che sono forse i soli oggetti di uso comune che hanno un bel numero stampigliato sopra: la moneta da 1 euro ha scritto grosso "1", e non è proprio possibile correggerla scrivendo sopra 1,2 o 5, o 7. Ciò nonostante occorre imparare presto, anzi prestissimo, che il pupazzetto che costa 15 euro non "vale" perennemente 15 euro, a differenza di quanto fanno una banconota da 10 e una da 5 euro quando sono prese assieme. Alla prima caduta di certezze ne fanno presto seguito altre: la frase "*Non ci sono più soldi*" è perfettamente comprensibile anche a un bambino piccolo, quando a pronunciarla è uno dei genitori che gli nega la possibilità di ottenere un ulteriore giocattolo. La stessa frase pronunciata dal presidente della Banca Centrale Europea – pur avendo in ultima analisi lo stesso significato di quella identica pronunciata da mamma e papà – suona però più strana, una volta che si scopre che è proprio quella Banca che stampa i soldi. L'inevitabile obiezione infantile ("*…e perché non ne stampano altri, allora?*")[2], per quanto ingenua, non può restare senza risposta, e il guaio è che la risposta non è facile quanto sommare due o tre monete.

A un certo punto, diventa chiaro anche ai bambini che i "soldi", per quanto importanti (quasi tutte le attività dei "grandi" sembrano governate da essi) in fondo sono solo dei contrassegni. I dischetti di metallo e i pezzetti di carta colorata conservano il magico potere di soddisfare quasi tutti i desideri, perlomeno quelli di ordine materiale: ma si incomincia a capire che quel "valore" è in qualche modo frutto di una convenzione. Perché mai una torta gigantesca può arrivare sul tavolo della festa di compleanno in cambio di un pezzetto di carta colorata? Davvero gli adulti sono talmente folli da non riconoscere che quella carta è sicuramente quasi inutile, e certo rigorosamente non commestibile, rispetto a quella fantastica golosità? No, dev'esserci qualcosa sotto: gli adulti non sono così sciocchi, ci saranno delle regole ben precise e ancora sconosciute. E i bambini, visto che non sono sciocchi neppure loro, cominciano a intuire che a monte di tutto ci dev'essere

[2] Un'obiezione quasi identica viene avanzata da "nonno Joe" al piccolo Charlie Bucket, protagonista di "*Willy Wonka e la fabbrica di cioccolato*", il libro di Roald Dahl da cui sono stati tratti almeno un paio di film. Grazie a un inaudito colpo di fortuna, il piccolo e poverissimo Charlie ha trovato uno dei cinque biglietti che danno diritto a visitare la misteriosissima fabbrica di cioccolato di Willy Wonka, e gli viene offerta una montagna di denaro in cambio del biglietto. Charlie vorrebbe molto visitare la fabbrica, ma è consapevole che vendere il biglietto solleverebbe tutta la sua famiglia dalla miseria. Ciò non di meno, nonno Joe lo convince a tenerlo e ad andare a realizzare il suo sogno, perché quella è un'occasione unica, mentre di soldi è pieno il mondo, e "*là fuori continuano a stamparli…*"

una specie di accordo, che fa sì che una cosa che non vale niente come un dischetto di metallo possa trasformarsi in qualcosa di utile o piacevole come un gelato[3].

Monete e banconote sono sostanzialmente dei "*pagherò*". L'ente che le emette (ormai, quasi sempre una Banca Nazionale o sovranazionale, come nel caso della BCE; ma per molto tempo non è stato così) in qualche modo si impegna a riconoscere al portatore del denaro in questione un controvalore corrispondente. Nel lontano passato, questa sorta di "impegno" non era neppure necessario: la moneta aveva un suo valore intrinseco costituito dal metallo di cui era costituita (oro, argento, bronzo), cosa che generava comunque qualche problema al contorno. Trasportare grosse quantità di metallo prezioso è impegnativo, costoso e soprattutto pericoloso; e poi, come non ricordare il più matematico tra tutti i direttori di zecca? Quando Newton assume la direzione della Zecca Reale d'Inghilterra introduce la zigrinatura, ovvero quella serie di incisioni lungo il bordo delle monete. Un individuo pragmatico e quasi privo di senso estetico come il vecchio Isaac non lo fece certo per mere ragioni di eleganza, ma solo per impedire la nociva pratica di "grattare via" dai bordi delle monete qualche scaglietta di metallo prezioso.

3 *Una banconota onestamente esplicita. Recita: "Questo certifica che sono stati depositati nel Tesoro degli Stati Uniti cento dollari in monete d'oro pagabili a richiesta al portatore" – USA, 1922.*

In seguito, si riesce ad instaurare una sorta di rapporto fiduciario (e che abbia funzionato è cosa che, tutto sommato, ancora ci stupisce): un governo stampa dei pezzi di carta e annuncia che, quando chiunque lo vorrà, restituirà al portatore una determinata quantità di oro. Può sembra un metodo abbastanza ingenuo e soprattutto arcaico, ma in realtà ha funzionato esattamente così fino a pochissimo tempo fa (e, almeno in un certo senso, funziona così ancora oggi). Il governo in questione è quello del Regno Unito, l'anno è il 1815, e il sistema si chiama "*gold standard*": forse non è una coincidenza sia anche l'anno in cui gli inglesi sono riusciti finalmente a liberarsi di Napoleone e possono cominciare a chiamarsi legittimamente padroni del mondo. Il sistema procede per un bel po', anche quando altre monete – prima fra tutte il dollaro – cominciano a mostrarsi più affidabili e sicure della sterlina britannica. Fino allo scoppio della Prima Guerra Mondiale ogni persona poteva, almeno in teoria, presentarsi alla Federal Reserve degli Stati Uniti e ricevere poco più di 1,5 grammi d'oro in cambio di un biglietto verde da un dollaro. Poi, tra Guerre Mondiali e Grandi Depressioni le cose cominciano a vacillare, fino ad arrivare alla crisi a cui provano a mettere una pezza gli accordi di Bretton Woods del 1944. Alla fine toccherà al presidente americano Richard Nixon, nel 1971, annunciare che no, il gioco non vale più: in cambio di quel biglietto verde il governo americano non è più tenuto a restituire un certo quantitativo d'oro.

E allora, adesso che il cosiddetto "sistema aureo" non vale più, come ci si comporta? Perché mai le persone accettano dei dollari (sterline, euro, corone, dinari, yuan, etc.) in cambio di merci o servizi? Questa è una cosa che è davvero abbastanza complicata da spiegare ai bambini; la risposta più onesta – che è anche la più frequente – è una sorta di tautologia: "il denaro è accettato perché è accettato". Insomma, è tutta una questione di fiducia: accetto un pagamento in una certa moneta perché sono convinto che potrò a mia volta usare i soldi che ricevo per comprare ciò che mi serve; insomma, troverò altre

[3] Gli adulti, in effetti, non sono tutti sciocchi; ma imprevedibili lo sono di certo. Qualche decennio fa girava la voce (quasi certamente falsa) che le monete da 50 e 100 lire, in ottimo *acmonital* (*AC*ciaio *MON*etario *ITAL*iano) fossero oggetto di incetta da parte dei giapponesi perché il valore fisico del metallo superava quello nominale (un'altra teoria complottistica sosteneva addirittura che fossero usate come basi per la produzione di orologi, sempre dai giapponesi). Assai più realistica era invece la tesi che sosteneva che il costo di produzione di una moneta da 100 lire avesse raggiunto, nel periodo peggiore, il costo di 130 lire, quindi nettamente maggiore al valore facciale.

persone che accetteranno da me questi soldi che io ho appena accettato da altri. A lungo andare, non serve neppure che ci sia un "garante": certo, le banche centrali servono anche a questo, a dire che il governo si fa carico del riconoscere al possessore delle banconote il giusto valore, ma a ben vedere si tratta di una garanzia opzionale, una volta che il rapporto di fiducia tra scambiatori di denaro è ben instaurato. Stanno lì a dimostrarlo i paesi dai governi traballanti, i cui abitanti preferiscono scambiarsi dollari ed euro invece che banconote in valuta nazionale, e soprattutto i bitcoin e le nuove, emergenti criptovalute, che hanno un loro mercato anche se non sono di fatto garantite da nessuno. Per contro, se il garante c'è ma non riceve più la fiducia necessaria, si finisce facilmente a dover pagare con carrettate di soldi un panino al salame, come è successo alla Repubblica di Weimar.


4 *Banconota tedesca quasi contemporanea alla precedente. Cinquemila miliardi di Marchi – Germania, 1923*

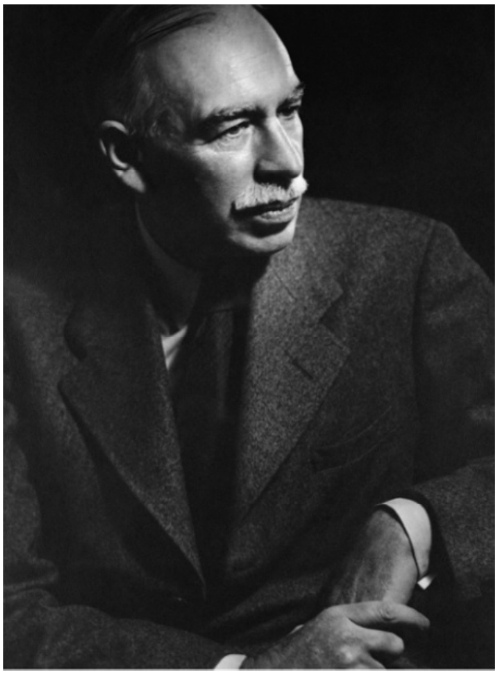
Lo abbiamo detto: è una cosa difficile spiegare a un bambino (e quindi anche a un cultore di matematica ricreativa), ma a ben vedere non è che l'altro metodo sia tanto diverso, anzi. In cambio di banconote si può ricevere dell'oro ma, alla fin fine, a cosa diavolo può servire l'oro? La domanda pare assurda, non fosse altro perché abbiamo millenni di storia, oltre che una pletora di miti e leggende, che raccontano che da sempre gli uomini sono stati affamati d'oro. Eppure, anche in questo caso deve essersi creato una sorta di rapporto fiduciario, perché l'oro non è un bene di consumo: è esso stesso un ottimo "contrassegno" – perché anche i contrassegni devono avere un certo numero di caratteristiche, prima fra tutte una limitazione di disponibilità, altrimenti non funzionano – ma non è direttamente trasformabile in cibo, o in armi. Ha una limitata possibilità di essere convertito in attrezzi, ma anche in questa funzione è facilmente sostituibile con altri materiali più efficienti o economici. Specialmente nell'antichità, l'unica caratteristica davvero speciale dell'oro è la sua ottima capacità di essere lavorato per creare gioielli. Ma questa è una conclusione abbastanza circolare, quasi contraddittoria: l'oro è prezioso perché serve a creare oggetti preziosi, o gli oggetti preziosi sono tali perché fatti d'oro? E, in ultimissima analisi, a che diavolo servono i gioielli? Possibile che alla radice ultima di tutto l'impianto monetario che governa il mondo ci sia solo un principio estetico ("i gioielli sono belli") o addirittura erotico ("i gioielli piacciono alle donne e le rendono più disponibili")?

Appurato che l'approccio infantile – o, se lo si preferisce, l'approccio da cultore di matematica ricreativa – finisce in un vicolo cieco dopo solo pochi tentativi di esplorazione di una parte davvero minuscola dell'economia (che tanto è la moneta, dal punto di vista economico: giusto una piccola sezione, e certo non tra le più importanti), non resta che cedere le armi e riconoscere che la cosa più saggia è lasciare l'economia agli economisti, o al massimo ai matematici professionisti, quelli che riescono ad applicare principi matematici anche in spazi che agli ignari e agli ingenui appaiono del tutto irrazionali (nel senso meramente colloquiale, e non matematico, del termine).

Su tali premesse, non può non essere annoverata tra le liete sorprese l'imbattersi in una lunga serie di citazioni di colui che probabilmente è il più grande economista del XX secolo. Abbiamo riconosciuto di essere estranei alla disciplina, e quindi l'incoronazione appena celebrata potrà certo essere contestata da molti; ma siamo ragionevolmente certi che una gran parte degli addetti ai lavori si troverà d'accordo con noi. Le citazioni in questione[4] sono tutte facilmente comprensibili: cosa che appare naturale quando si parla

[4] Alcune delle quali, come i lettori avranno già capito, sono riportate in testa a quest'articolo. Sono tutte di Keynes, e sono naturalmente solo una piccola parte di quelle che è facilissimo trovare in Rete.

di citazioni (che razza di citazione potrà mai essere una frase che non si riesce a comprendere?), ma che naturale non è quando si parla di economia. Oltre che comprensibili, sembrano trasudare tutte di buon senso, e la cosa è ancora più sorprendente (sempre tenendo conto che si sta parlando di economia); in conclusione, il tutto sollecita il desiderio di conoscere un po' più a fondo – ma solo un po', sia ben chiaro – che razza di economista possa essere questo originale. Stiamo parlando, e forse gli esperti lo avranno già capito, di John Maynard Keynes.


5 *John Maynard Keynes.*

Keynes nasce il 5 giugno 1883, a Cambridge; il luogo di nascita basta già a identificarne le origini e il destino. John è figlio di una famiglia accademica (padre docente, madre scrittrice e attivista), e respira aria universitaria fin dai primi vagiti. Rispetta le tradizioni, quantomeno nel senso che fa una carriera scolastica assai brillante, mettendosi in evidenza sia a Eton che nella natia Cambridge.

Dei suoi esami, il più celebre è quello, post-universitario, che fece a ventitré anni per il "Civil Service": in buona sostanza, per entrare nella pubblica amministrazione inglese. Il suo obiettivo era arrivare primo, perché solo a chi si classificava in tale posizione era consentito scegliere l'ufficio di destinazione, e Keynes desiderava entrare nel Ministero del Tesoro. L'esame verteva su molte materie: John si classificò primo in logica, psicologia, e componimento; ma ebbe risultati non buoni in matematica ed economia. Il posto al Ministero del Tesoro andò così al primo classificato, che aveva gli stessi suoi desideri, e Keynes, piazzato secondo, dovette accontentarsi di entrare nel cosiddetto "India Office". Era una sorta di ministero dedicato al grande subcontinente asiatico, al tempo la maggiore colonia inglese. Più che del mancato ingresso al Tesoro, Keynes confessò poi di essere deluso dal risultato dell'esame, e avanzò il sospetto che i suoi test in economia e matematica fossero stati mal giudicati perché "*probabilmente ne sapevo più io dei miei esaminatori, in quelle materie*". La gran parte dei commentatori odierni tendono a pensare che avesse ragione.

Il lavoro all'India Office non lo soddisfa affatto: passa il tempo libero studiando per conto proprio e infine, dopo tre anni di calvario, chiede aiuto al padre per potersi dedicare nuovamente allo studio a tempo pieno ed entrare al King's College di Cambridge. Non ci riesce al primo colpo, ma tutto va meglio al secondo tentativo, nel 1909: a ventisei anni si ritrova pertanto professore di Economia.

Il lavoro di ricercatore gli si addice assai di più: scrive libri, cerca di pubblicarli, si avventura in diatribe accademiche – è famosa quella che lo vide contrapporsi a Karl Pearson, contro il quale forse esagerò anche con la sua ferocia oratoria – e finisce con il farsi un nome di tutto rispetto, al punto che allo scoppio della Grande Guerra è ragionevolmente famoso anche al di fuori della stretta cerchia degli esperti del suo campo.

È però proprio la guerra che porterà il nome di Keynes alla ribalta: entra finalmente al Ministero del Tesoro, e la sua opinione di esperto è tenuta in considerazione, anche se spesso è contraria alle decisioni del governo inglese[5].

[5] È rimasta celebre la sua risposta a Lloyd George, il Cancelliere dello Scacchiere (in termini italici, una sorta di Ministro del Tesoro e delle Finanze; tenendo però conto che il Regno Unito era al tempo forse la maggiore


6 *Vignetta satirica sui costi di riparazione richiesti alla Germania alla fine della Grande Guerra.*

La Grande Guerra finisce nel 1918, e a Versailles si apre la Conferenza di Pace: in rappresentanza del Ministero del Tesoro inglese è proprio John Maynard Keynes che attraversa la Manica. Non resta troppo a lungo in terra francese, comunque: nel Giugno 1919 abbandona la Conferenza, dimettendosi dall'incarico ufficiale, perché ritiene che le riparazioni di guerra imposte alla Germania siano a un tempo ingiuste e impossibili da sostenere per il popolo tedesco. Visto che gli storici contemporanei concordano virtualmente tutti nel considerare i costi di riparazione imposti alla Germania una delle cause principali – se non definitivamente la sola e cruciale – della caduta della Repubblica di Weimar e dell'ascesa al potere di Adolf Hitler, è inevitabile riconoscere a Keynes un buon grado di lungimiranza.

Il periodo tra le due guerre mondiali non è tra i migliori, per quasi tutti gli esseri umani. La Grande Depressione comincia nel 1929 e spiega con dovizia di sofferenze a tutto l'Occidente, e di conseguenza a tutto il mondo, i danni che possono creare la disoccupazione e una perdurante crisi economica. È il periodo in cui Keynes scrive forse la sua opera più importante, la sua "*Teoria Generale dell'Occupazione, dell'Interesse e della Moneta*" in cui chiarisce una volta di più che l'idea della "mano invisibile del mercato" in grado di regolamentare i commerci alla stregua di una provvidenza divina, cara ad Adam Smith, non è altro che una pia illusione, nel migliore dei casi. Nei peggiori, non è altro che criminale e proditoria menzogna.


7 *"Il libro" di Keynes.*

Prima di andarsene definitivamente nell'Aprile del 1946, Keynes ha la soddisfazione di vedersi elevato alla Camera dei Lord, dove occupa uno scranno nelle fila del Partito Liberale, e inoltre viene eletto alla presidenza del neonato consiglio Nazionale per lo Sviluppo della Musica e delle Arti.

E forse, in quel periodo, ha ritrovato un po' di serenità e di pace: la stessa, forse, che aveva attorno al 1908, quando abbandona l'India Office, torna all'Università e si dedica con tutto sé stesso alla stesura e alla ricerca di un editore di quella che per molto tempo, forse per tutta la vita, lui ha considerato la sua opera più importante: "Il Trattato sulla Probabilità".

Ci ha lavorato da quando era studente e seguiva i corsi di Russell e Whitehead fino a quando è riuscito a pubblicarlo, nel 1921; e sarà proprio Bertrand Russell che ne saluterà l'uscita definendolo "*Indubbiamente il miglior testo sulla probabilità da molto, molto tempo*". Perché già, forse ci siamo dimenticati di ricordarlo: John Maynard Keynes era un matematico, prima che un economista.

potenza economica mondiale, e che si era in tempo di guerra) che dopo aver relazionato sulla situazione in Francia e messo in evidenza le proprie proposte, chiedeva commenti ai presenti. Keynes si alzò ed educatamente osservò: "*Con il massimo rispetto devo, se si chiede mio parere, dirvi che ritengo la vostra relazione pura spazzatura*".

# 2. Problemi

## 2.1 Un problema tutto italiano

Come tutti ben sapete, l'Italia ha un grosso, pressante e preoccupante problema.

Come si traduce una barzelletta sui Carabinieri?

Esistono alcuni *escamotage locali*: se dovete raccontarla ad un americano, inserite un polacco; se dovete raccontarla a uno spagnolo, inserite un portoghese (e, curiosamente, viceversa), ma se vi ritrovate in un ambito variegatamente multietnico, il problema può essere grave.

Noi, almeno limitatamente ai nostri contatti internazionali, abbiamo trovato una soluzione che, all'atto pratico, si sta dimostrando molto buona: se iniziate una barzelletta con "*There was an IT from Pune...*", i partecipanti coglieranno al volo tutta la carica umoristica del vostro racconto, al punto da sviluppare in merito il neologismo di *PUNformation Technology*.

Nel suo piccolo, Rudy ha dovuto affrontare un dilemma simile: aveva un simpatico problema che prevedeva, nell'ambientazione originale, logica, ferocia e cannibalismo, ma era completamente sbagliato dal punto di vista etologico; dovendo raccontarlo ad un americano, non ci sarebbero stati problemi[6], ma l'equivalente italiano sembrava piuttosto difficile da trovare; sino all'illuminazione.

Appena un dipendente dell'Ufficio del Personale (UdP, nel seguito) vede un impiegato, la prima cosa che fa è cercare di licenziarlo; in questa operazione è trattenuto solo dal fatto che, subito dopo averlo licenziato, tutto tronfio e fiero di sé, perde temporaneamente suoi poteri di UdP e, se è in compagnia di un altro UdP, viene da quest'ultimo immediatamente licenziato (con la successiva e temporanea "perdita di poteri" da parte del secondo UdP, chiaramente). Essendo perfettamente logici, quindi, se due UdP sono assieme nessuno dei due licenzierà un impiegato, per paura che l'altro UdP lo licenzi subito dopo.

Un giorno, dieci UdP incrociano in corridoio un impiegato: che cosa succede?

Va specificato che un impiegato può essere licenziato da un solo UdP (e un UdP da un solo altro UdP), e che questi ultimi sono tutti logici perfetti e agiscono sempre nel proprio interesse.

...e se gli UdP con l'impiegato fossero stati undici? Generalizzare, ragazzi, generalizzare.

## 2.2 Veleno Praticamente Omeopatico

"*...non ho mai visto una cavia morire di vecchiaia...*"
La prof di Scienze di Rudy

Alcune cose, ultimamente, ci hanno fatto venire in mente un problema; siamo volutamente criptici in merito, visto che la risposta che dareste sapendo di cosa stiamo parlando sarebbe sbagliata.

A seguito di alcuni eventi che non staremo ad approfondire, siete appena diventati i felici possessori di mille bottiglie di ottimo vino con un paio di problemi; il primo è che sono pericolosamente vicine alla data di "cassage" *[ci pare si dica così, quando un vino è "cassée" e sa di vecchio: se siete a conoscenza di un termine più corretto, segnalatecelo, anche senza soluzione (RdA)]*, e quindi vi affrettate ad organizzare una festa con tutti i vostri amici in tempi *molto* stretti in modo da finire sostanzialmente in un colpo solo le bottiglie. Leggendo però più attentamente le istruzioni allegate alle bottiglie, scoprite il secondo problema: una delle bottiglie, anziché vino, è interamente composta da un veleno

[6] "Su una strada ci sono stati due incidenti: in uno hanno investito una gallina, in un altro un avvocato: come si distinguono i luoghi dei due incidenti il giorno dopo?" "Per la gallina c'è il segno della frenata".

di cui, con buona pace del Numero di Avogadro, una sola molecola è letale (ve l'abbiamo detto, di non approfondire gli eventi...).

Non avete problemi ad aprire tutte le bottiglie, visto che tanto verranno bevute in una festa sola ma, consci del fatto che i vostri amici non apprezzerebbero questa versione particolarmente alcoolica della roulette russa, state cercando un modo per capire quale sia la bottiglia avvelenata.

Sempre per motivi che non staremo ad approfondire *[...certo che siete tipi ben strani, voialtri...]*, avete a disposizione dieci cavie geneticamente modificate per essere straordinariamente favorevoli all'ebbrezza alcoolica, e quindi vi affrettate a pianificare una serie di test per verificare quale sia la bottiglia avvelenata, quando vi accorgete di due cose: tanto per cominciare, il veleno fa effetto sempre dopo un'ora (a qualsiasi dose) e, secondariamente, la festa è pianificata *per oggi*!

Una volta tanto, quindi, non siete particolarmente interessati a risparmiare vino (o cavie), ma ad effettuare i test nel più breve tempo possibile, onde identificare la bottiglia contenente il veleno. Come fate?

Svelti, che tra poco suonano alla porta...

# 3. Bungee Jumpers

Nel 1957, Hugo Steinhaus ha posto la seguente domanda:

"È possibile costruire un cerchio sul piano cartesiano in modo tale che al suo interno vi siano $n$ punti appartenenti al reticolo intero, per qualsiasi valore naturale di $n$?

Abbastanza sorprendentemente, la risposta è ricavabile attraverso un teorema dimostrato da Sierpinsky:

"Il punto $P(\sqrt{2}, 1/3)$ ha distanze diverse da tutti i punti del reticolo intero".

1. Provate il teorema dimostrato da Sierpinsky.
2. In funzione di questo, trovate la risposta alla domanda di Steinhaus..

*La soluzione, a "Pagina 46"*

# 4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Questa rubrica è così discontinua e pigra che siamo quasi colti da vergogna nel constatare che l'ultima volta che è comparsa su queste auguste colonne l'umanità ancora non conosceva il termine CoVid-19. Correva infatti il mese di Agosto 2019, il numero d'ordine della Prestigiosa Rivista era a malapena 247, e da queste righe narravamo le gesta editoriali di un amico che costruiva relazioni tra la matematica e le chitarre elettriche.

Sono passati un bel po' di giorni (anzi settimane, mesi, anni); soprattutto, quelli passati sono stati giorni abbastanza strani, e tutto sommato continuano ad esserlo: non è invece affatto strano che anche questa volta la rubrica sia resuscitata per render conto delle performance di un amico. Vale la pena ricordarlo per l'ennesima volta: che in questa serie di recensioni snoopyanamente intitolata "*Era una Notte Buia e Tempestosa*" si parli di libri scritti da amici non è strano, anzi. Lo scopo istituzionale di queste colonne è proprio quello di recensire opere frutto (totale o parziale) di persone in qualche modo legate a Rudi Mathematici.

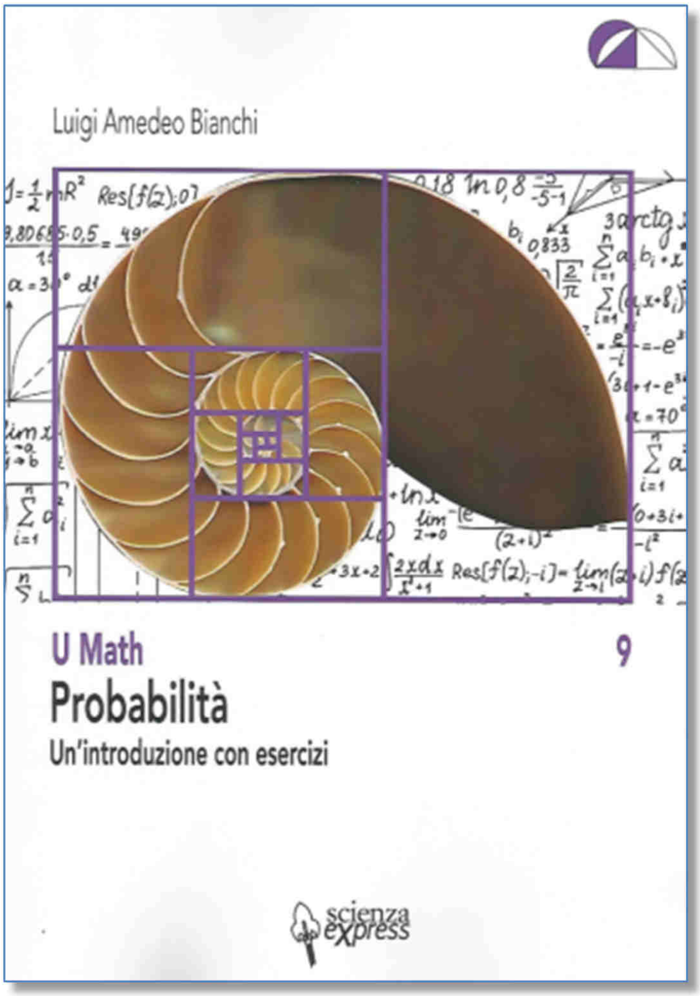
E anche questa volta l'amico in questione è speciale: è un matematico che conosciamo da prima che diventasse matematico, e già questo definisce una situazione del tutto particolare. Doveva ancora prendere il diploma del liceo quando ha incontrato Rudi Mathematici, e (a meno che noi si abbia preso abbagli nei conti, cosa possibilissima) può già dire di aver frequentato RM per più di mezza vita. Dopo la maturità ha scelto davvero di fare Matematica (e noi ci pavoneggiamo ripetutamente dicendo che è tutto merito nostro), l'ha fatta in quella Scuola Normale che tanto normale invero non è, e poi ha cominciato ad andare in giro per l'Europa a fare il docente universitario. Ultimamente è tornato in Italia (certamente perché non tollera l'idea di essere troppo lontano da Rudi Mathematici), ruba una parte del suo tempo all'insegnamento per organizzare Olimpiadi di Matematica, gare e giochi (senza dubbio perché è stato infettato da giovane dai problemi di Rudi Mathematici), e ha pure scritto un libro (del resto, si era già allenato sulle pagine di Rudi Mathematici: uno dei rari "compleanni" scritti da persone estranee alla redazione di RM è suo, quello dedicato a George Pólya e lo trovate in archivio su RM131, Dicembre 2009), cosa che ci dà l'occasione di dedicare a lui questa rubrica.

Ovviamente, conosce così bene i vizi e le virtù della Redazione che noi non dubitiamo minimamente – anzi siamo più che sicuri – che questo libro Loba[7] lo abbia scritto per far dispetto alla nostra Alice.

## 4.1 Probabilità (U Math 9)

*«Ai Rudi Mathematici e a Carlo e Alberto, per i problemi (da tre birre) condivisi anni fa.»*

Il problema numero 30 (pagina 107, Capitolo 5, "Altri Esercizi") di questo libro inizia con le parole "*In un'urna…*" e il sostantivo chiamato in causa è subito accompagnato dal rimando ad una nota a piè di pagina, che recita: "*Nei problemi di probabilità compaiono molto spesso le urne. È chiaro che non sono particolarmente interessanti, dal punto di vista delle applicazioni del mondo reale. Ma solo all'apparenza. Questo tipo di formulazione permette di eliminare dal problema i dettagli irrilevanti, mantenendo solo le caratteristiche importanti e l'aspetto più intuitivo. Versioni differenti i questo stesso problema prevedono genitori con figli suddivisi in base al genere, pesci in una vasca appartenenti a due specie diverse, premi di due tipi in un'attrazione al Luna Park, e così via.*"




Forse è un po' strano cominciare la recensione di un libro partendo da una nota a piè di pagina, per di più prelevata nel bel mezzo del volume e non nelle introduttive pagine iniziali. Eppure, la nota ci appare significativa, e adatta alla bisogna.

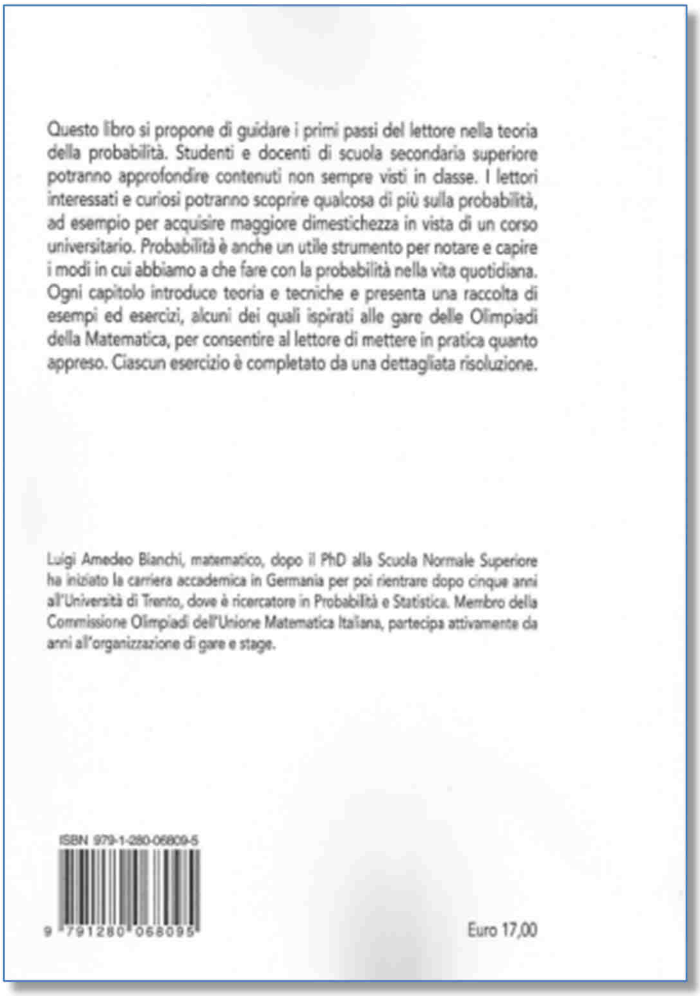
[7] Come si vede poche righe sotto, il nome anagrafico del soggetto è Luigi Amedeo Bianchi. Il suo allonimo da battaglia come RMer gioca sulle sue triplici iniziali L.A.B. e sulla citazione di un matematico che definire rivoluzionario è dir poco: in breve, L. A. Bachevskij , che suona più o meno come "Lobačevskij". Poi, si sa, la familiarità accorcia i nomi, e il passaggio verso il nomignolo "Loba" era virtualmente inevitabile.

In parte, per ragioni che non dovrebbero figurare in una recensione professionale e imparziale, ma che questa recensione non abbia né l'una né l'altra caratteristica lo abbiamo già chiarito nella parte introduttiva. Nella fattispecie, quella nota ci ha ricordato il già citato articolo che Luigi Amedeo Bianchi ha scritto per Rudi Mathematici nel 2009, che si intitolava appunto "*Alle urne! Alle urne!*".

Ma non si tratta solo di mero egocentrismo da parte di vanitosi redattori: è significativa la necessità che l'Autore sente nel dover spiegare per quale ragione le scatole piene di palline bianche e nere sono così frequenti nei problemi di calcolo delle probabilità.

Pensateci bene: la precisazione posta in nota è quasi sempre assente nei testi destinati agli esercizi. Non c'è dubbio che ogni autore abbia ben chiara la ragione, e probabilmente la ritenga tanto scontata da non meritare espliciti chiarimenti: lo fanno spesso i testi di matematica – e non solo gli eserciziari, anche quelli di pura teoria – quasi ritenessero superfluo, offensivo per il lettore ricordare le ragioni per cui si sceglie un determinato modello didattico piuttosto che un altro.

Il professor Bianchi, invece, quella nota la scrive, e ribadisce una filosofia che è costantemente presente in tutto il libro: il Calcolo delle Probabilità è forse la parte della matematica che ha più applicazioni dirette nella vita reale, e – forse proprio per questa ragione – quella in cui è più facile prendere abbagli, quella in cui è più *probabile* trovare distanze tra il risultato che intuitivamente ci si aspetta e quello che è invece il risultato vero. Per questo occorre imparare, fin dall'inizio, ad eliminare ciò che non è significativo, costruire un modello aderente al caso specifico del problema che si sta affrontando, senza lasciarsi fuorviare dagli aspetti di contorno che potranno essere magari anche intriganti, ma che generano solo rumore se non sono significativi.



Questo libro si propone di guidare i primi passi del lettore nella teoria della probabilità. Studenti e docenti di scuola secondaria superiore potranno approfondire contenuti non sempre visti in classe. I lettori interessati e curiosi potranno scoprire qualcosa di più sulla probabilità, ad esempio per acquisire maggiore dimestichezza in vista di un corso universitario. *Probabilità* è anche un utile strumento per notare e capire i modi in cui abbiamo a che fare con la probabilità nella vita quotidiana. Ogni capitolo introduce teoria e tecniche e presenta una raccolta di esempi ed esercizi, alcuni dei quali ispirati alle gare delle Olimpiadi della Matematica, per consentire al lettore di mettere in pratica quanto appreso. Ciascun esercizio è completato da una dettagliata risoluzione.

Luigi Amedeo Bianchi, matematico, dopo il PhD alla Scuola Normale Superiore ha iniziato la carriera accademica in Germania per poi rientrare dopo cinque anni all'Università di Trento, dove è ricercatore in Probabilità e Statistica. Membro della Commissione Olimpiadi dell'Unione Matematica Italiana, partecipa attivamente da anni all'organizzazione di gare e stage.

ISBN 979-1-280-06809-5

9 791280 068095

Euro 17,00

È una nota dal profondo sapore didattico, e fa piacere leggerla; in qualche modo ci rassicura scoprire che anche coloro che da giovani giocavano con problemi confusi, descritti in maniera complicata e zeppa di indicazioni volutamente criptiche, se armati di talento sanno che insegnare è cosa diversa rispetto a giocare. E il testo di Lugi Amedeo Bianchi è davvero un buon testo introduttivo al Calcolo delle Probabilità: come recita il sottotitolo ("*Un'introduzione con esercizi*") l'intento è quello di guidare il lettore attraverso esempi e applicazioni (cos'altro sono, in fondo, gli "esercizi"?), ma soprattutto di introdurre i cardini fondamentali che fanno della Probabilità una delle regine indiscusse dei nostri tempi. Si inizia, come nelle migliori tradizioni sportive, con una sorta di allenamento pre-partita (Capitolo 1: *Combinatoria – Riscaldamento*), in cui si passa anche attraverso gli anagrammi pur di mostrare le strette relazioni tra il calcolo combinatorio e quello delle probabilità, ma solo per il tempo strettamente necessario; già al secondo capitolo si chiamano in ballo i grandi del Novecento (*La strada di Kolmogorov*) in cui si può imparare come termini abituali della lingua italiana (universo, misura, tribù, spazio, esito) possano assumere significati diversi e ineluttabilmente precisi. E poi si procede, con passo spedito ma sereno e sicuro, attraverso i fondamentali del Calcolo delle Probabilità, esplorando condizionamenti e valori attesi, quasi in preparazione dell'inevitabile incontro con il reverendo Thomas Bayes[8].

La quarta di copertina dichiara che il libro è destinato a un pubblico che potremmo definire a cavallo tra gli studenti degli ultimi anni delle superiori e i primi dei corsi universitari; in buona sostanza, a quella platea cruciale per cui quel che si apprende vale ancora più da "reale formazione" che da "mera informazione": e ed è forse opportuno spendere qualche parola per rendere merito, una volta tanto, non solo all'Autore, ma anche all'Editore. Perché se è sacrosanto che questo "*Probabilità*" di Luigi Amedeo Bianchi è davvero un libro prezioso per chi voglia familiarizzarsi in maniera non banale (per non dire profonda) con il Calcolo delle Probabilità, è altrettanto vero che è un volume che si inserisce perfettamente nella collana *U Math* della coraggiosa casa editrice Scienza Express di Daniele Gouthier. Lo spirito della collana è proprio quello di fornire, su diversi campi della matematica, una formazione che si collochi esattamente in quel crinale prezioso e delicato al tempo stesso, in cui le giovani menti ancora indecise trovano gli elementi necessari a individuare la loro strada.

Resta comunque il fatto – e non sappiamo neppure se considerarlo sorprendente o meno – che il libro di Loba è piaciuto molto anche a noi[9], che siamo ormai ben distanti dalla magica età del lettore ideale.

| | |
|---|---|
| **Titolo** | Probabilità |
| **Sottotitolo** | Un'introduzione con esercizi |
| **Autore** | Luigi Amedeo Bianchi |
| **Editore** | Scienza Express |
| **Collana** | U Math 9 |
| **Data Pubblicazione** | Gennaio 2021 |
| **Prezzo** | 17,00 Euro |
| **ISBN** | 979-1-280-06809-5 |
| **Pagine** | 164 |

# 5. Soluzioni e Note

Giugno?

## 5.1 [268]

### 5.1.1 Strani cavalli su strane scacchiere

Il Capo ritorna a maltrattare delle povere scacchiere, ma i pezzi sono tramvieri:

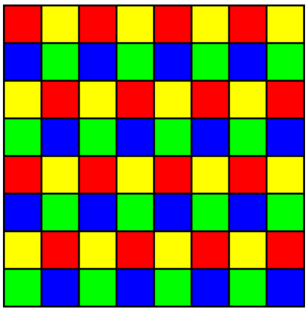
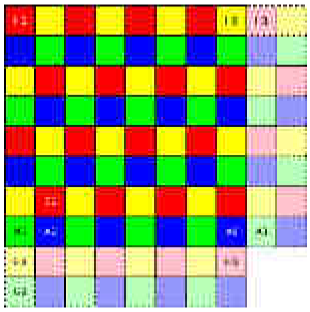
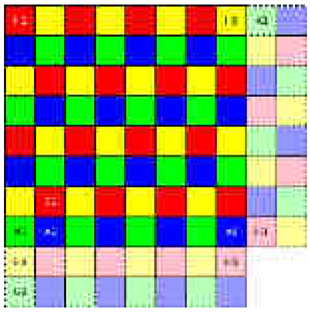
> *Sono dati dei pezzi (tramvieri) che muovono di due caselle solo in avanti per poi spostarsi di una casella a destra o a sinistra, su una scacchiera toroidale, dove la colonna H è attaccata alla colonna A, esattamente come la riga 8 è attaccata alla*

[8] Nel leggere il libro non siamo riusciti a capire se la posizione dell'Autore sia più vicina alla scuola *bayesiana* o a quella *frequentista*. Non che ci interessi davvero conoscere le sue preferenze, anzi: ci piace solo sottolineare che troviamo apprezzabile e degna di nota la sua capacità di presentare i due approcci senza lasciar trasparire le sue preferenze.

[9] A dire la verità, Alice non si è ancora cimentata nella lettura; però ha detto che prima o poi lo leggerà e questo – come sa bene chi la conosce – è certamente il miglior complimento possibile.

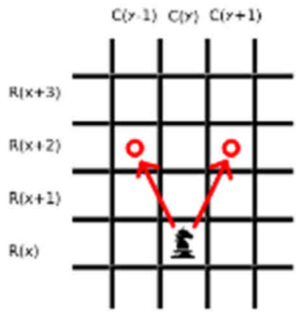
> *riga 1. Definiamo due tramvieri come "dello stesso colore" se, con opportune mosse, sono in grado di finire uno nella casella dell'altro; quanti "colori" esistono, sulla nostra scacchiera?*
>
> *Espansioni: diamo alla scacchiera mezzo giro di torsione, in modo tale che A8, anziché collegarsi ad H8, si colleghi ad H1, quanti "colori di tramviere" ci sono? E se diamo un giro di torsione anche "dall'altra parte"?*

Dopo la prima stesura di questo articolo, il Capo ha iniziato una diatriba sulla corretta grafia di "tramviere", ma siccome chi scrive queste note tende al pragmatismo e non c'era proprio tempo per discussioni sul sesso degli angeli, vi avvertiamo: i vari "tranvieri" sono stati sovrascritti. Che ci crediate o no, la prima soluzione è di ***.mau.***, piena di disegnini:

> Sì, il problema originale è troppo facile. Nella figura rm268.png vedi una colorazione a quattro colori: ciascun tramviere non potrà mai cambiare colore ma può toccare tutte le caselle dello stesso colore. Quindi servono quattro tramvieri.
>
> 
>
> (a)
>
> Il piano proiettivo è trattato nella figura rm268b.png. Come si vede, da H8 (giallo) si passa a B2 (rosso) e da G8 (verde) si passa a A2 (blu). Quindi giallo e rosso collassano, così come rosso e verde, e restano due diversi gruppi di caselle.
>
> 
>
> (b)
>
> 
>
> (c)
>
> Per la bottiglia di Klein, se non ho sbagliato il disegno, basta invece un solo tramviere.

Bello vero? Per la serie "a volte ritornano", un caro vecchio amico, ***GaS***:

> Cavalli su scacchiere è il tipo di problemi che mi intriga parecchio, non posso quindi esimermi dall'affrontarlo...
>
> Risposta veloce: per la scacchiera 8×8 servono 4 cavalli posizionati inizialmente, ad esempio, nei 4 angoli della scacchiera. Si verifica velocemente a mano.
>
> Ma cosa succede per per una generica scacchiera N×N?
>
> Questo è proprio uno di quei classici problemi per i quali è facile ed immediato "intuire" la soluzione che però risulta un po' tediosa da "formalizzare".
>
> **Scacchiera toroidale**
>
> Affrontiamo allora il caso generale di una scacchiera con N righe ed N colonne (N×N) e definiamo R($x$)C($y$) la posizione nella riga $x$ e colonna $y$ per $0 \leq (x; y) \leq N-1$.
>
> N.B.: per comodità identifichiamo con 0 la prima riga e la prima colonna.




Un cavallo in R($x$)C($y$) potrà raggiungere le posizioni R($x$+2)C($y$–1) o R($x$+2)C($y$+1), dove però i valori tra parentesi devono essere sempre considerati in "modulo N" così da tenere in conto il fatto che si esca dalla scacchiera e si rientri "dall'altra parte". Non lo esplicito per semplicità ma sempre e solo valori modulo N andranno ovviamente considerati per righe e colonne.

Vediamo separatamente casi per diverse N.

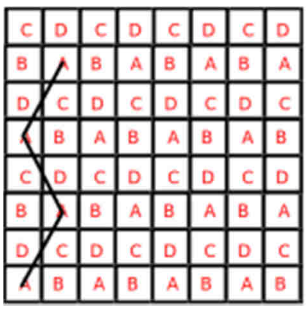
**N multiplo di 4**

Etichettiamo ogni casella della scacchiera con le label A-B-C-D in maniera periodica con lo schema mostrato nell'immagine a destra (es. per N=8 ma facilmente generalizzabile per ogni N=4$a$).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | D | C | D | C | D | C | D |
| B | A | B | A | B | A | B | A |
| D | C | D | C | D | C | D | C |
| A | B | A | B | A | B | A | B |
| C | D | C | D | C | D | C | D |
| B | A | B | A | B | A | B | A |
| D | C | D | C | D | C | D | C |
| A | B | A | B | A | B | A | B |

Così definita la scacchiera, **ad ogni salto il cavallo rimane obbligatoriamente in una casella con la stessa label, e questo rimane vero anche oltrepassando i bordi**. Quindi un cavallo su una casella con un certo label, ad esempio A, non potrà mai arrivare su una casella con un diversa label, ad es. B. Abbiamo quindi dimostrato che 4 cavalli differenti sono *necessari*. Dobbiamo adesso dimostrare che 4 siano anche "sufficienti" e che, quindi, partendo da una casella è possibile raggiungere tutte le altre con lo stesso label.

Partendo da R(0)C(0), casella con label A, possiamo far procedere il cavallo a zigzag [R0C0 → R2C1 → R4C0 → R6C1 → ecc…] arrivando sempre, visto che N è multiplo di 4, alla casella R(N–2)C(1) prima di scavallare il bordo.




Da qui possiamo quindi raggiungere la casella R(0)C(2).

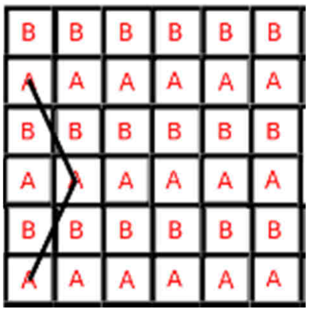
Partendo da una casella possiamo quindi sempre raggiungere la casella con la stessa label immediatamente alla sua destra. Procedendo iterativamente possiamo raggiungere tutte le caselle con lo stesso label di una riga e quindi possiamo raggiungere tutte le caselle con lo stesso label della scacchiera.

*Per evidenti ragioni di simmetria* [cit] lo stesso ragionamento si applica partendo da una casella con label differente (B-C-D).

Abbiamo quindi dimostrato che 4 cavalli sono necessari ma anche sufficienti per ogni scacchiera N×N con N multiplo di 4.

**N multiplo di 2 (ma non di 4)**

Come citato anche nel testo del problema, per N pari ogni cavallo può raggiungere solo caselle in righe con la stessa parità, quindi 2 cavalli sono sicuramente necessari.




Procediamo adesso similmente al caso precedente ma etichettiamo le caselle con 2 solo lettere, A o B, a righe alternate. Partendo sempre dalla casella R(0)C(0), casella con label A, possiamo far procedere il cavallo a zigzag [R0C0 → R2C1 → R4C0 → R6C1 → ecc…] arrivando sempre, visto che N è multiplo di 2 ma non di 4, alla casella R(N–2)C(0) prima di scavallare il bordo (a destra es. per N=6).

Da qui possiamo quindi raggiungere la casella R(0)C(1).

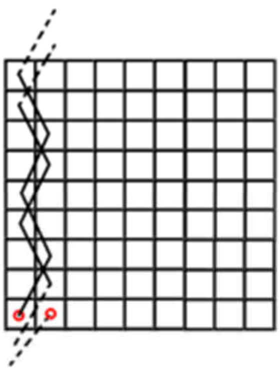
Partendo da una casella possiamo quindi sempre raggiungere la casella immediatamente alla sua destra. Procedendo iterativamente possiamo raggiungere tutte le caselle della riga di partenza e quindi possiamo raggiungere tutte le caselle con lo stesso label di ogni scacchiera.

Lo stesso ragionamento si applica partendo da una casella con label B e quindi abbiamo dimostrato che 2 cavalli sono necessari ma anche sufficienti per ogni scacchiera N×N con N multiplo di 2 ma non di 4.

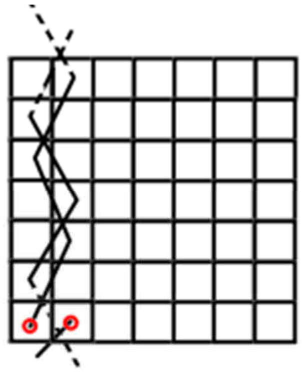
**N dispari**

Leggermente più complesso, ma neanche troppo, è il caso di scacchiere con N dispari. Partiamo sempre dalla casella R(0)C(0) e procediamo sempre a zigzag, prima di scavallare il bordo potremo raggiungere la casella R(N–1)C(0) o la R(N–1)C(1), dipende da N.

Nel primo caso possiamo quindi procedere sulla casella R(1)C(1), procediamo sempre a zigzag e raggiungeremo, dopo aver nuovamente scavallato il bordo, la casella R(0)C(1) (a destra esempio per N=9).



Nel secondo caso, quando al primo giro arriviamo sulla casella R(N–1)C(1), scavalliamo arrivando sulla casella R(1)C(0), proseguiamo nello zigzag ed anche in questo caso arriviamo, dopo il secondo scavallamento, alla casella R(0)C(1) (a destra esempio per N=7).



In entrambi i casi abbiamo quindi raggiunto la casella a destra di quella di partenza e quindi, procedendo iterativamente possiamo raggiungere tutte le caselle di una stessa riga di partenza.

Inoltre, in entrambi i casi siamo passati per tutte le righe della scacchiera e quindi, per le solite *evidenti ragioni* ecc…., partendo da una casella qualsiasi possiamo raggiungere con un solo cavallo qualsiasi casella della scacchiera.

**Riassumendo:**

- per N dispari basta un solo cavallo
- per N multiplo di 4 servono 4 cavalli
- per N pari ma non multiplo di 4 servono 2 cavalli

**Scacchiera proiettiva**

Nel caso in cui la scacchiera non venga chiusa a forma di toro ma a forma di piano proiettivo le cose non cambiano poi molto. Dobbiamo però considerare che abbiamo due diversi casi, la torsione la possiamo fare:

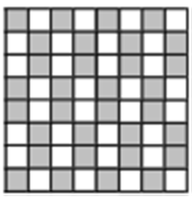
(A) sul lato dove si uniscono le righe
(B) sul lato dove si uniscono le colonne

Infatti il movimento del cavallo ha una direzionalità e, quindi, sebbene la figura finale sia uguale (un piano proiettivo) cambiano le possibilità di movimento del cavallo.

Con considerazioni perfettamente analoghe a quelle precedenti è facile dimostrare che

- nel caso A:
  - per N dispari basta un solo cavallo
  - per N multiplo di 4 servono 2 cavalli
  - per N pari ma non multiplo di 4 servono 4 cavalli
- Nel caso B:
  - per N dispari basta un solo cavallo
  - per N pari servono 2 cavalli

Il caso B per N multiplo di 4 è quello più interessante in quanto le caselle coperte da ogni cavallo formano una struttura più complessa che non quanto visto negli altri casi; di seguito un esempio per N=8 facilmente generalizzabile ad altri N=4$a$.



**Scacchiera di Klein**

Con considerazioni perfettamente analoghe a quelle precedenti è facile dimostrare che

- per N dispari basta un solo cavallo
- per N multiplo di 4 basta 1 solo cavallo
- per N pari ma non multiplo di 4 servono 2 cavalli (e la struttura è analoga a quella della figura presentata per il caso B e N multiplo di 4 del piano proiettivo)

**Riassunto**

| | TORO | PIANO PROIETTIVO A | PIANO PROIETTIVO B | KLEIN |
|---|---|---|---|---|
| N dispari | 1 | 1 | 1 | 1 |
| N multiplo di 4 | 4 | 2 | 2 | 1 |
| N pari ma non multiplo di 4 | 2 | 4 | 2 | 2 |

È sempre un piacere avere notizie di ***GaS***! Diamo ora spazio a ***Valter***:

Numero le caselle della scacchiera da 1 a 64 riga per riga dal basso a sinistra sino in alto destra.

Toroide:

- partendo dalla casella 1 si raggiungono le caselle dispari delle righe 1 e 5 e le pari righe 3 e 7
- partendo dalla casella 2 si raggiungono le caselle dispari delle righe 3 e 7 e le pari righe 1 e 3
- in questo modo si riescono quindi a raggiungere tutte le caselle, delle righe dispari: 1, 3, 5 e 7
- simmetricamente, dalle caselle 9 e 10, si è in grado di finire su tutte le righe pari: 2, 4, 6 e 8
- dovrebbero esistere, perciò, quattro colori assegnati ai tramvieri, sulla nostra scacchiera strana
- uno per caselle e righe dispari, uno per celle pari e righe dispari; similmente per le righe pari.

Piano proiettivo:

- la parità del valore sulla casella di partenza, a ogni attraversamento della scacchiera, s'inverte
- dovrebbero, quindi, essere sufficienti solamente due colori, da assegnare ai tramvieri, su di essa
- uno che riesce a raggiungere tutte le caselle sulle righe pari l'altro quelle delle righe dispari.

Bottiglia di Klein:

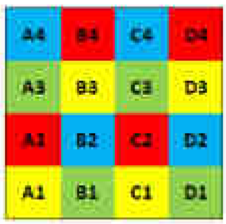
- in questo caso, dopo il primo passaggio s'invertono pure righe pari e dispari: la riga 1 diventa 8
- mi pare servano due colori per coprire le quattro combinazioni tra le due parità di casella e riga
- partendo da casella/riga dispari/dispari, come la 1, al giro dopo sarò su pari/pari per esempio 64
- partendo da casella/riga pari/dispari, come la 2, al giro dopo sarò su dispari/pari per esempio 63
- riuscendo, così, a finire sui quattro tipi di abbinamento di parità del valore/riga delle caselle.

Schematico come sempre, il nostro ***Valter***. Il prossimo è ***Galluto***:

1) Scacchiera toroidale “normale” (si fa per dire)

il cavallo (o tramviere che dir si voglia) che sta in A1, oltre che non andare mai sulle righe pari, non riuscirà mai neanche ad arrivare sulla cella alla sua destra (B1) o su quella diritta davanti in riga 3 (A3), e così via; la situazione è equivalente alla seguente: su una scacchiera normale (bianca e nera), degradiamo il cavallo a pony, che fa 1 passo (e non due) avanti e uno di lato: comunque sia rimarrà sempre sulle caselle bianche e non riuscirà mai ad andare su una nera.

La stessa cosa avviene ovviamente per chi parte in B1, in A2 e in B2 e quindi i colori sono almeno 4. Resta da capire se da A1 posso arrivare in C1, D3, ecc. andando solo in avanti e di lato.




Se sviluppo in piano la superficie del toro ottengo una ripetizione all’infinito del modulo qui di fianco, sia in orizzontale (destra e sinistra) che in verticale, ed è facile verificare che da A1 si riesce ad arrivare in C1, E1, ecc.

I colori sono dunque 4 e ciascuno riguarda 16 caselle della scacchiera.

2) Scacchiera con torsione delle righe

Se continuo ad andare avanti rimanendo “dentro” alle 8 colonne della scacchiera di partenza, nulla è cambiato: da una casella gialla posso andare solo su altre caselle gialle.

Se invece, avanzando, esco dalle 8 colonne iniziali, mi sposto su una scacchiera dove il modulo diventa quello qui di fianco


Affiancando i due moduli…


Da una casella gialla vado su caselle blu, **nel senso che erano blu sulla scacchiera di partenza** (e viceversa) e da quelle rosse vado su quelle verdi (e viceversa)

Quindi i colori si sono ridotti a due: l’Hellas Verona (giallo-blu) e la Ternana (verde-rosso)

2) Scacchiera con torsione delle colonne

Non è un caso richiesto, ma per completezza…

Stavolta nulla cambia se rimango nelle 8 righe della scacchiera iniziale, anche spostandomi sui lati, mentre passo a questo modulo se avanzo oltre la riga 8…

| | | | |
|---|---|---|---|
| H4 | G4 | F4 | E4 |
| H3 | G3 | F3 | E3 |
| H2 | G2 | F2 | E2 |
| H1 | G1 | F1 | E1 |

… che, impilato sul modulo originale, mi da una situazione dove dalle caselle gialle passo a quelle verdi, e da quelle rosse a quelle blu (continuando con la metafora calcistica, abbiamo Brasile e Bologna)

| | | | |
|---|---|---|---|
| A8 | B8 | C8 | D8 |
| A7 | B7 | C7 | D7 |
| A6 | B6 | C6 | D6 |
| A5 | B5 | C5 | D5 |

4) Scacchiera con torsione di righe e colonne

Quale è il modulo della scacchiera a cui arrivo se mi sposto fuori sia dalle righe che dalle colonne iniziali? È quello qui a lato, e lo ottengo sia se ci arrivo torcendo le colonne dopo le righe (cioè facendo prima il passo 2 e poi il passo 3) che il viceversa…

| | | | |
|---|---|---|---|
| D5 | C5 | B5 | A5 |
| D6 | C6 | B6 | A6 |
| D7 | C7 | B7 | A7 |
| D8 | C8 | B8 | A8 |

… e lo schema con le quattro scacchiere adiacenti è il seguente

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| H1 | G1 | F1 | E1 | D1 | C1 | B1 | A1 | H8 | G8 | F8 | E8 | D8 | C8 | B8 | A8 |
| H2 | G2 | F2 | E2 | D2 | C2 | B2 | A2 | H7 | G7 | F7 | E7 | D7 | C7 | B7 | A7 |
| H3 | G3 | F3 | E3 | D3 | C3 | B3 | A3 | H6 | G6 | F6 | E6 | D6 | C6 | B6 | A6 |
| H4 | G4 | F4 | E4 | D4 | C4 | B4 | A4 | H5 | G5 | F5 | E5 | D5 | C5 | B5 | A5 |
| H5 | G5 | F5 | E5 | D5 | C5 | B5 | A5 | H4 | G4 | F4 | E4 | D4 | C4 | B4 | A4 |
| H6 | G6 | F6 | E6 | D6 | C6 | B6 | A6 | H3 | G3 | F3 | E3 | D3 | C3 | B3 | A3 |
| H7 | G7 | F7 | E7 | D7 | C7 | B7 | A7 | H2 | G2 | F2 | E2 | D2 | C2 | B2 | A2 |
| H8 | G8 | F8 | E8 | D8 | C8 | B8 | A8 | H1 | G1 | F1 | E1 | D1 | C1 | B1 | A1 |
| A1 | B1 | C1 | D1 | E1 | F1 | G1 | H1 | A8 | B8 | C8 | D8 | E8 | F8 | G8 | H8 |
| A2 | B2 | C2 | D2 | E2 | F2 | G2 | H2 | A7 | B7 | C7 | D7 | E7 | F7 | G7 | H7 |
| A3 | B3 | C3 | D3 | E3 | F3 | G3 | H3 | A6 | B6 | C6 | D6 | E6 | F6 | G6 | H6 |
| A4 | B4 | C4 | D4 | E4 | F4 | G4 | H4 | A5 | B5 | C5 | D5 | E5 | F5 | G5 | H5 |
| A5 | B5 | C5 | D5 | E5 | F5 | G5 | H5 | A4 | B4 | C4 | D4 | E4 | F4 | G4 | H4 |
| A6 | B6 | C6 | D6 | E6 | F6 | G6 | H6 | A3 | B3 | C3 | D3 | E3 | F3 | G3 | H3 |
| A7 | B7 | C7 | D7 | E7 | F7 | G7 | H7 | A2 | B2 | C2 | D2 | E2 | F2 | G2 | H2 |
| A8 | B8 | C8 | D8 | E8 | F8 | G8 | H8 | A1 | B1 | C1 | D1 | E1 | F1 | G1 | H1 |

> Partendo da una casella gialla, ero andato su caselle blu se sconfinavo a sinistra, o su caselle verdi se sconfinavo in alto; in tutte due i casi quando entro nella scacchiera in alto a sinistra mi sposto su caselle rosse.
>
> Poiché, continuando ad avanzare, tornerò ripetutamente sui vari tipi di scacchiera, ma spostato opportunamente a destra o sinistra rispetto alla mia casella di partenza, potrò raggiungere tutte le 64 caselle.

E se non abbiamo fatto errori, queste sono tutte le soluzioni al primo problema. Andiamo avanti.

### 5.1.2 Il giardino dei sentieri che (non) si biforcano

Problemi da problemi di problemi… anche questo non fa eccezione:

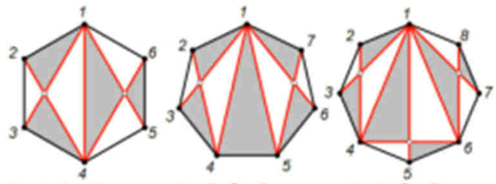
> *Avete a disposizione un n-agono convesso e il vostro scopo è tirare delle diagonali, che, quando vengono costruite, possono incrociare al più una delle diagonali precedenti. Supponendo voi siate intenzionati a tracciare il maggior numero possibile di diagonali, quante riuscite a tracciarne?*

La prima soluzione è di ***Valter***:

> La risposta dovrebbe essere: 2($n$–3):
>
> - scelgo un vertice e, partendo da questo come 1, li numero incrementalmente tutti in senso orario
> - tiro nell'ordine le diagonali che uniscono i vertici 2/4, 3/5, 6/6, …, $n$–5/$n$–3, $n$–4/$n$–2, $n$–3/$n$–1
> - traccio infine tutte le $n$–3 diagonali che partono dal vertice numero 1:1/3, 1/4, …, 1/$n$–3, 1/$n$–1.
>
> Devo mostrare che tale valore è "il maggior numero possibile di diagonali" come chiede il problema.
>
> Lo faccio per induzione:
>
> - si può verificare facilmente, utilizzando la "forza bruta", che ciò è valido per $n$=3, 4 oppure 5
> - assumo quindi che sia pure valido per $n$=$k$–1 e mostro che lo deve essere obbligatoriamente per $k$
> - l'ultima diagonale tracciata, dovendo incrociarne al più una, lo è, a sua volta, solo da quella
> - uso tale diagonale come lato per "spezzare l'$n$-agono in due, la cui somma totale dei lati è $n$+2
> - questo perché essi avranno complessivamente i lati dell'$n$-agono più la diagonale diventata lato
> - le diagonali in totale, sommando sui due poligoni ottenuti dalla spezzatura, sarebbero 2($n$–3)–2
> - restano tutte quelle dell'$n$-agono meno una diventata loro lato e la diagonale che la incrociava
> - ciò contraddice l'ipotesi induttiva perché avrei un $n$-agono con $n$<$k$ di numero diagonali >2($n$–3)
> - faccio un esempio per $k$=6; posso spezzarlo in un triangolo e un pentagono o in due quadrilateri
> - se potessi tirare 2(6–3)+1=7 diagonali, nel primo caso, o il triangolo ne ha 1 o il pentagono 5
> - spezzando in due quadrilateri, invece, uno di essi dovrebbe averne più dei 2(4–3)=2 ipotizzati.

Benissimo, lo "spezzare in due" si scopre essere attività possibile anche per i poligoni e non solo per i pugili. La prossima soluzione è di ***trentatre***:

Il problema *sbagliato* è stato proposto in RM248 2.2 con il titolo "... in che anno siamo?" e in RM250 è riportata una mia soluzione. Indicando con *N*, *D* il numero di lati del poligono e delle diagonali, in fig. 1 le soluzioni massime trovate allora per $N = 6, 7, 8$.



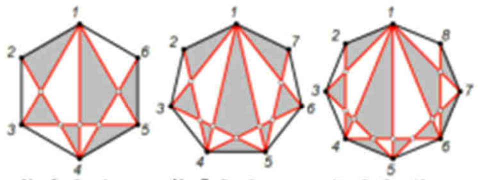
**1** *N = 6 D = 5* *N = 7 D = 6* *N = 8 D = 8*

La colorazione a scacchiera (ogni incrocio separa quattro aree), a parte l'elegante impatto grafico, evidenzia le simmetrie delle figure.

Il numero massimo di diagonali è

$$[1] \qquad D = \lfloor (3N-8)/2 \rfloor .$$

Nel rispetto della clausola *"un solo incrocio quando vengono costruite"* ho trovato, per gli stessi *N*, le soluzioni di fig. 2



**2** *N = 6 D = 6 (13,24,35,46,51) (14)* *N = 7 D = 8 (13,24,35,46,57,61) (14,15)* *N = 8 D = 10 (13,24,35,46,57,68,71) (14,15,16)*

Le diagonali sono tracciate con la sequenza indicata, divisa in due parti. Per $N = 8$ si inizia dalle diagonali fra vertici alterni $(13, 24, 35 \ldots 71)$ dove, salvo per la prima, ognuna incrocia la precedente – la successiva 82 è proibita perché ne incrocerebbe due già tracciate (*); di seguito si possono aggiungere solo le $(14, 15, 16)$.

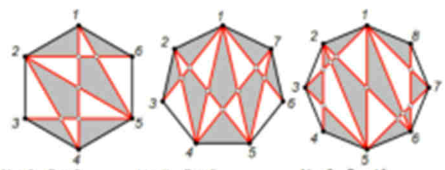
(*) questo vale in generale; i lati di ogni poligono interno non possono essere tutti diagonali, perché quella tracciata per ultima ne incrocia due precedenti; tutti i poligoni interni hanno un almeno un vertice esterno, e tutti i triangoli stanno al bordo del poligono. Gli schemi sono gli stessi di fig. 1 con l'aggiunta di alcune diagonali.

Il numero di diagonali è

$$[2] \qquad \boxed{D = 2N - 6} .$$

La costruzione, possibile per ogni *N*, è massima per i casi semplici $N = 4, 5, 6$.

Ho trovato una dimostrazione che questo vale per ogni *N*, ma è lunga e complicata e risparmio a me di scriverla, e a forse a qualcun altro di leggerla (e capirla).



**4** *N = 6 D = 6 (14,25,35,26,24,15)* *N = 7 D = 8 (13,24,25,14,47,15,16,57)* *N = 8 D = 10 (13,24,35,25,26,15,57,68,17,16)*

Le soluzioni di fig. 2 non sono uniche; in fig. 4 alcuni schemi equivalenti (oltre a *D* si conservano il tipo e numero dei poligoni minori interni).

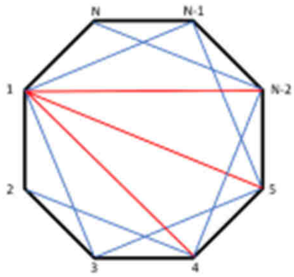
Ed ecco che cosa ne dice ***Galluto***:

Prendo il mio poliedro e identifico i vertici con i numeri 1, 2, 3, …, N;

Traccio la diagonale da 1 a 3, poi quella da 2 a 4, … fino a quella da N–1 a 1; ciascuna di queste N–1 diagonali incrocia solo quella tracciata immediatamente prima;

quella da N a 2 non la posso tracciare perché incrocerebbe sia la 1–3 che la (N–1)–1

dopo di che, torno su 1 e traccio tutte le diagonali restanti che partono da 1; visto che da 1 già ne sono state tracciate 2, me ne restano N–5.




In totale sono riuscito a tracciarne (N–1) + (N–5) = 2N – 6.

È una costruzione elegante, la formula è semplice e da sicuramente il risultato giusto per i primi casi (anche per il quadrilatero, per il quale l'addendo N–5 non ha grande senso logico), le diagonali che NON riesco a tracciare corrispondono alla successione dei numeri triangolari (per l'esattezza, sono (N–4)*(N–3)/2), solo che…

… non riesco a dimostrare che non si possa fare di meglio; la mia impressione è che, ragionando per assurdo, se ne potessi tracciare 1 in più non ne rimarrebbero abbastanza per realizzare tutte le intersezioni mancanti, ma, appunto, è solo una impressione.

Ringraziamo come al solito tutti i nostri solutori e vi rimandiamo alla prossima!

## 6. Quick & Dirty

Purtroppo (per voi), Rudy sta di nuovo lavorando con alcune bilance.

La linea orizzontale è una barra senza peso bilanciata al fulcro F e di lunghezza infinita alla destra del fulcro. La parte visibile è lunga un metro, e all'estremità abbiamo un peso da un chilogrammo.


8 *…ma mezza bilancia, è un'unilancia?*

Anche se senza peso, la barra è in grado di sopportare qualsiasi peso e, essendo bilanciata, deve esserci un peso alla destra da qualche parte.

Quali sono i limiti minore e maggiore delle possibili forze verso il basso agenti in F?

## 7. Pagina 46

**(1)**

Siano $A(a,b)$ e $B(c,d)$ due diversi punti del reticolo intero, ossia per i valori $a, b, c, d$ sia valida almeno una delle relazioni $a \neq c$, $b \neq d$.

Supponiamo contro la tesi che sia $PA=PB$, ossia:

$$\sqrt{(\sqrt{2}-a)^2+\left(\frac{1}{3}-b\right)^2}=\sqrt{(\sqrt{2}-c)^2+\left(\frac{1}{3}-d\right)^2}$$

che porta alla:

$$a^2+b^2-c^2-d^2-\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}d=2\sqrt{2}(a-c)$$

Essendo $a, b, c, d$ interi, quest'ultima implica che $a–c=0$ e che:

$$b^2 - d^2 - \frac{2}{3}(b-d) = 0$$

Da $a=c$ segue che $b \neq d$, ossia che $b-d \neq 0$. Quindi deve essere:

$$b + d = \frac{2}{3}$$

il che è impossibile, essendo $b$ e $d$ interi; questo dimostra il teorema enunciato da Sierpinsky.

**(2)**

Sia dato un cerchio $C_r$ di raggio $r$ con centro in P($\sqrt{2}$, 1/3), e sia $f(r)$ il numero dei punti del reticolo intero all'interno di $C_r$. La funzione $f(r)$ ha le seguenti proprietà:

- *per piccoli valori di r,* $f(r)=0$

  ad esempio, $f(0.1)=0$.

- $f(k+1)>k^2$ *per qualsiasi naturale k.*

  L'interno di $C_{k+1}$ contiene un quadrato $s_k$ con i lati paralleli agli assi coordinati e di lato $a_k>k$, il che implica che il numero dei punti del reticolo intero all'interno di $C_{k+1}$ sia almeno $k^2$.

- $f(r)$ *procede per incrementi unitari al crescere di r*

Questo si vede dal teorema precedentemente dimostrato.

Da queste tre assunzioni si deduce che $f(r)$ assume tutti i valori interi positivi. Quindi, per qualsiasi numero naturale $n$ esiste un cerchio centrato in P($\sqrt{2}$, 1/3) contenente esattamente $n$ punti del reticolo intero.

# 8. Paraphernalia Mathematica

Lo sappiamo benissimo che ha un altro nome, ma a noi piace questo.

## 8.1 Il Problema di Douglas Adams

Il problema citato nel titolo viene proposto nel 1966 da ***Leo Moser*** e, a quanto sappiamo, non se l'è filato nessuno. Sino al 1987.

> *"Odd," agreed Reg. "I've certainly never come across any irreversible mathematics involving sofas. Could be a new field. Have you spoken to any spatial geometricians?*
>
> Douglas ADAMS, "Dirk Gently's Holistic Detective Agency.

Una sua versione molto semplice (monodimensionale) viene riportata alla luce da alcuni loschi figuri nel 1999, e ci pare corretto partire da questa.

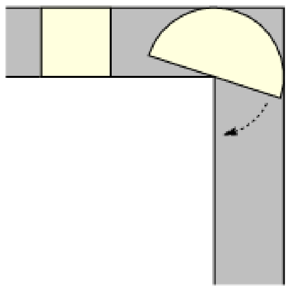
> "Durante il suo mitico trasloco, Doc si è scontrato con la necessità di trasferire un grosso quadro rappresentante il contributo di Vische alla Corsa allo Spazio da una stanza all'altra; nessun problema per quanto riguarda l'altezza, ma ci si chiedeva come affrontare il corridoio della larghezza di un metro presentante un angolo retto lungo il percorso; quale può essere la larghezza massima del quadro trasferibile da una stanza all'altra?"

Non dovreste avere problemi a risolverlo, quindi non ci sogniamo neanche di fare calcoli in merito. Tutto questo, però, ci ha portato a fare alcune ricerche sul problema originale, che possiamo finalmente statuire nella sua forma primeva:

> *Qual è la forma (piana) di massima area che può essere spostata attorno all'angolo retto di un corridoio di larghezza unitaria?*

A quanto ne sappiamo, dal punto di vista formale il problema è ancora irrisolto, nel senso che non esistono dimostrazioni che "quella" sia la forma di massima area; esistono, ovviamente, un mucchio di tentativi e relativi festeggiamenti ogni volta che qualcuno riesce ad aggiungerne "un pezzettino"; ma procediamo con ordine.

L'idea "zero" può essere considerata quella di partire da un sofà ***quadrato***, di lato unitario: matematicamente (ossia, non considerando gli "sbuffi" dei cuscini) può essere fatto passare nel nostro corridoio, spingendolo nell'angolo e poi "tirandolo" dall'altro lato del corridoio; quindi, siamo ad un'area unitaria. Possiamo fare di meglio.



9 *Un paio di sofà triviali.*

Infatti, se consideriamo un sofà ***semicircolare***, la nostra situazione migliora: considerato che, come si vede dalla figura qui a fianco, il nostro sofà deve avere un raggio unitario, è immediato capire che la nostra area aumenta sino a $\pi/2 = 1.57\ldots$; un bel salto in avanti, e siamo solo alla prima pagina.

Si può *arzigogolare* (cit. Ghersi) su questa seconda soluzione; infatti, contrariamente alla prima, oltre alla semplice traslazione utilizza anche una *rotazione*, il che "fa stare più sofà". Probabilmente questo è stato il punto di partenza per la geniale idea di ***Nicole Song***[10], sviluppata nella sua tesi di dottorato: "...e se tenessimo fermo il divano, facendo girare i muri"? In effetti, potete ottenere il semicerchio facendo ruotare l'intero corridoio con centro di rotazione lo spigolo interno (di 90° in senso antiorario): l'area che "resta bianca" e non è spazzata dai muri è il nostro divano. Song tratta la cosa in un modo "non semplicissimo", introducendo comunque dei bellissimi termini come "coordinate di corridoio" e "sistema del divano".

Il metodo, comunque, sembra definito, e alcuni celebri sofà (matematici) vengono analizzati secondo questa linea di lavoro: infatti, chi ha mai detto che il punto di

[10] Doc e i nostri più affezionati lettori saranno deliziati dalla notizia che la tesi è amorevolmente conservata negli archivi del *St.Andrews*.

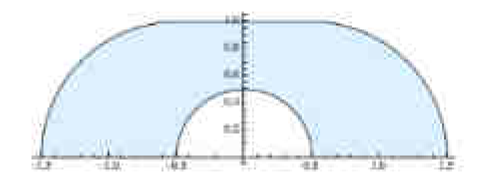
rotazione del divano debba essere uno solo, e non cambiare durante il trasloco? Inoltre, il grosso pregio di questo metodo è quello di fornirvi, oltre alla forma del divano, anche la "ricetta" per affrontare l'angolo senza scrostare i muri.

Quello che non vi avevamo detto è che ***Hammersley***, tempo prima, aveva trovato una soluzione migliore del "semicerchio"; Song applica il proprio metodo a questa soluzione e definisce un simpatico oggetto:

Dato un qualsiasi $R \in (0, 1)$, si definisce ***sofà generalizzato di Hammersley*** il sofà definito dalle seguenti curve:

1. Un'area semicircolare con raggio $R$ da 0 a $\pi$ con centro in (0, 0). questo semicerchio inizia in $(R, 0)$ e termina in $(-R, 0)$.
2. Un segmento (di retta) da $(R, 0)$ a $(R+1, 0)$.
3. Un quadrante di cerchio tra $\pi/2$ e 0 con centro in $(R, 0)$ che inizia in $(R+1, 0)$ e termina in $(R, 1)$.
4. Un segmento (di retta) da $(R, 1)$ a $(-R, 1)$.
5. Un quadrante di cerchio tra $\pi/2$ e 0 con centro in $(-R, 0)$ che inizia in $(-R, 1)$ e termina in $(-R-1, 0)$.
6. Un segmento (di retta) da $(-R-1, 0)$ a $(-R, 0)$.

Una volta tanto, più facile a farsi che a dirsi. E, infatti, qui di fianco trovate il disegno (senza le quote indicate, ma dovreste farcela da soli) per $R$=0.5.



10 *...e ha anche un'estetica apprezzabile...*

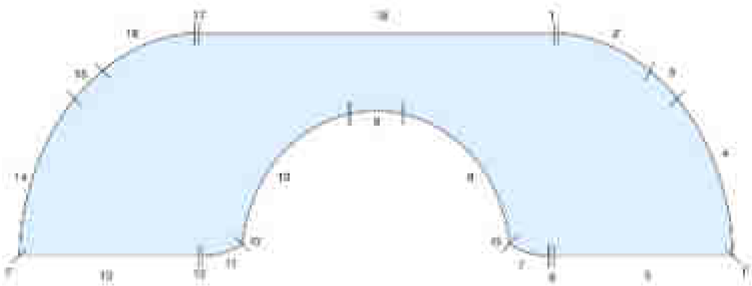
Aspettate un attimo, prima di segare alberi, scuoiare mucche e tosare pecore: infatti, Song dimostra (attraverso le summenzionate coordinate di corridoio e divano) in modo relativamente semplice che il divano "gira" nel corridoio; non solo, ma che ***il Divano di Hammersley con area massima è quello per cui R=2/ π***.

Infatti, l'area del divano generalizzato di Hammersley risulta pari a:

$$A = \frac{\pi}{2} + 2R - \pi \cdot \frac{R^2}{2}$$

e, derivando: $A' = 2 - \pi R$ che, per $R \in [0, 1]$, ci porta a quanto affermato, con un'area totale pari a $\pi/2 + 2/\pi$; siccome senza un nome le cose in matematica non sono belle, questo oggetto è noto come ***Pianoforte di Shephard***. A noi piaceva di più l'idea di spostare il divano e lasciare il pianoforte di là, ma siamo costretti ad ammettere che il problema è perfettamente equivalente dal punto di vista matematico.

Ora, noi non ci pronunciamo sui vostri, ma sicuramente gli amici di ***Gerver*** erano delle "taglie forti". Infatti, non contento delle soluzioni di Hammersley e Shephard, prova a modificare il divano arrivando ad un mostro formato dai raccordi di *diciotto* tratti elementari (...mica tanto... aspettate a vedere la descrizione).



Cominciamo dalle parti facili.

Le sezioni 5, 3 e 18 sono *linee rette*.

Le sezioni 1, 6, 11 e 17 sono *archi di cerchio* di raggio 1/2.

Le sezioni 2, 3, 7, 11, 15 e 16 sono delle *involute*[11] *di cerchio*.

Le sezioni 5 e 14 sono *involute di involute di cerchio*.

A parte il fatto che si utilizzano curve piuttosto complicate, va notato che il sofà di Gerver si muove in un modo piuttosto strano; sempre riferito al disegno qui sopra, in cinque parti.

Prima, va dritto scorrendo lungo i muri sulle sezioni rettilinee 18 e 13, sin quando il punto ***F*** non sbatte contro il muro davanti. Poi inizia la rotazione, toccando il muro con le sezioni 12 e 17. Segue un movimento rettilineo, sin quando non toccano il muro il punto ***F*** e la sezione 7. Qui finisce la prima parte del movimento, e il sofà tocca nel muro con i punti ***G*** e ***F***. Poi il sofà scorre toccando il muro nei segmenti 11, 8, 4 e 16; si noti che in questa fase il punto ***G*** dista al massimo poco più di 0.0012 dal muro, e alla fine del movimento "tocca". Continuando a ruotare, il sofà tocca il muro nelle sezioni 15, 3 e 9.

"...e le altre due fasi?" Sono immagini speculari delle prime due.

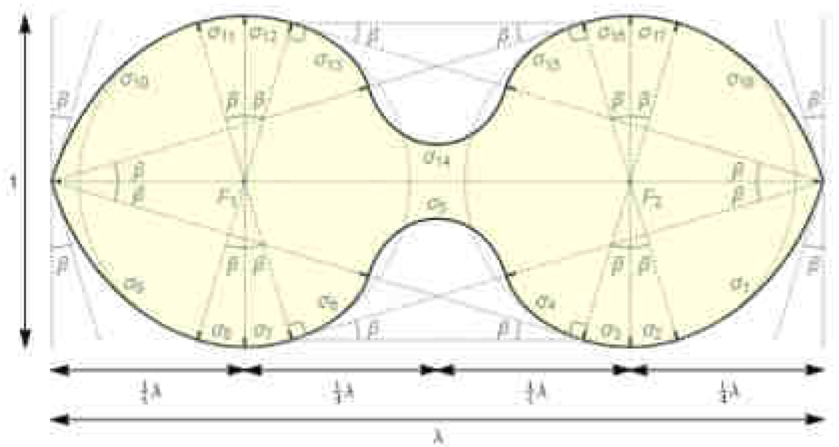
Ah, non vi abbiamo detto l'area: qui è complicata da calcolare, comunque si arriva ad un emozionante 2.22 (e rotti).

Dalle parti del 2016, ***Dan Romik*** decide di aggiungere un po' di pepe al problema[12]: non potendo complicare ulteriormente la curva del sofà, complica il corridoio: *che forma deve avere un sofà di area massima in grado di superare un corridoio di larghezza unitaria comprendente prima un angolo a destra e poi un angolo a sinistra?*

Incredibili, i matematici: hanno davanti un problema irrisolto e cosa fanno? Lo complicano.

Comunque, questo è noto come ***il problema del sofà ambidestro***, e oltre a Romik *forse* ci ha lavorato anche il buon ***Conway***. Il "forse" nasce dal fatto che aveva problemi di parcheggio.

Ma torniamo al sofà. Romik ne ha trovato uno in grado di affrontare entrambe le curve, e, come dice lui stesso "di seguito vedete il disegno, con evidenziate alcune interessanti simmetrie":



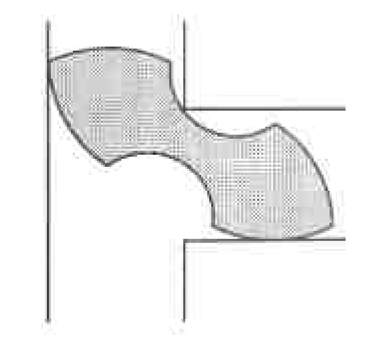
Ci limitiamo a dirvi che anche qui ci sono diciotto settori, ma le curve sono più complesse: abbastanza stranamente, sono tutte esprimibili in forma chiusa, così come l'area dell'oggetto, che risulta pari a:

$$\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} - 1 + \arctan\left[1/2\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\right)\right] \approx 1.64495$$

[11] Ricordiamo a margine che l'involuta di una curva consiste nell'attaccare un'estremità di uno spago ad una curva e tracciare la sua estremità libera man mano che si arrotola alla curva.

[12] ...ma Song non si ferma qui: la parte restante della sua tesi di dottorato affronta il problema dei *corridoi con angoli non retti*: non ditelo agli architetti, potrebbero subire dei brutti traumi.

"...e che cosa c'entra Conway?" Oh, lui cercava parcheggio, ve l'abbiamo detto. Infatti, il suo problema era: *che forma deve avere una macchina di massima superficie per riuscire a fare un'inversione in un incrocio a "T"*? Nella figura a fianco vedete la prima ("rozza", nelle sue stesse parole) ipotesi di Conway[13] su questo sogno dei parcheggiatori abusivi: la macchina arriva dal basso, gira a destra, fa marcia indietro inserendosi nella strada in alto e riparte verso il basso "girata".



11 *Quando Conway parcheggia...*

Ulteriori affinamenti hanno portato ad una forma molto più "à la Romik" dell'oggetto ma anche qui, non esistono prove del fatto che l'automobile ottenuta sia di area massima; non solo ma, anche se intuitivamente i due problemi "sembrano la stessa cosa", non ci risultano dimostrazioni formali della loro equivalenza: ...metti che si possa sfruttare il fatto di avere spazio "sopra e sotto" per aggiungere qualche pezzetto al nostro aggeggio...

Avanziamo, comunque, un'ardita congettura: se un giorno verrà provato che una data forma risolve entrambi i problemi, non sarà formata da diciotto raccordi.

Ne serviranno quarantadue.

*Rudy d'Alembert*
*Alice Riddle*
*Piotr R. Silverbrahms*

[13] In realtà le ipotesi erano *due*, la seconda citata più volte da Romik come "ispirata al *pianoforte di Sheperd*". Siamo convinti che o Romik o Song abbiano (reiteratamente) scritto il nome sbagliato, ma non abbiamo idea di quale sia la versione giusta.