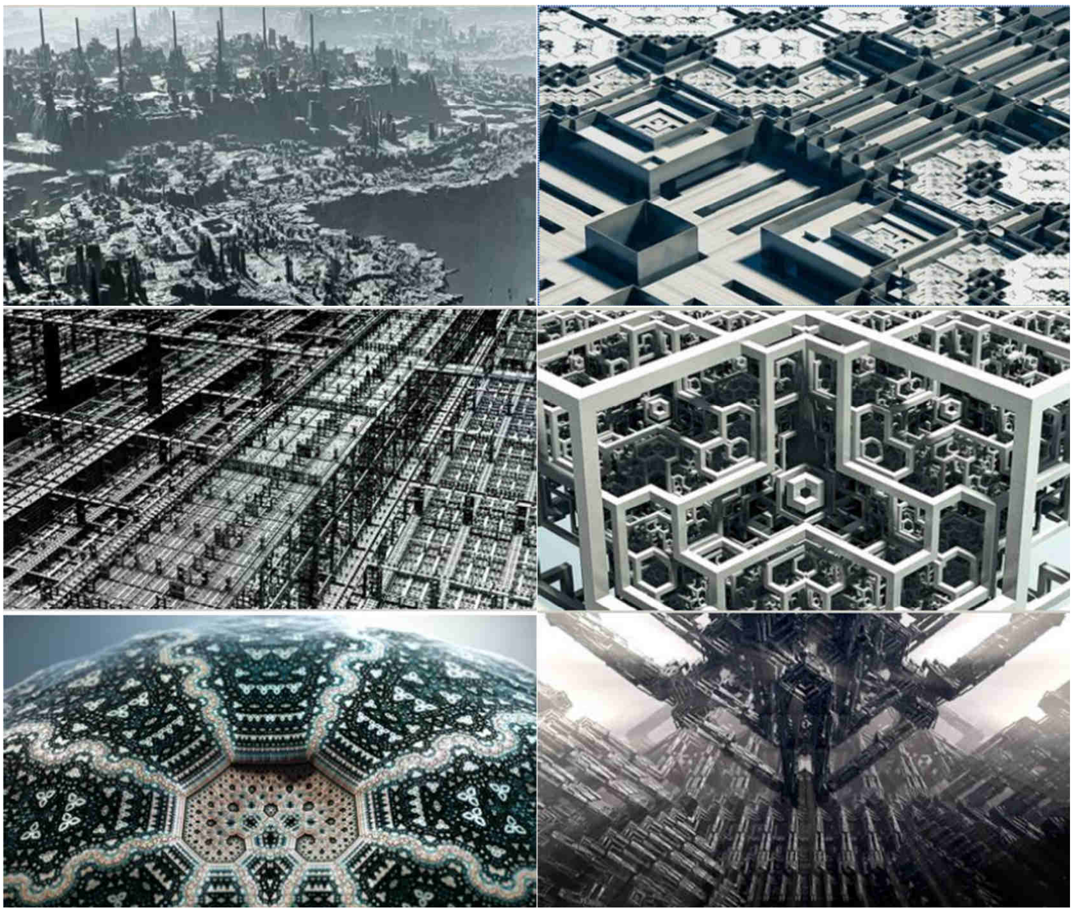
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 267 – Aprile 2021 – Anno Ventitreesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell’altro millennio da

Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM263 ha diffuso 3’310 copie e il 08/04/2021 per Google eravamo in 76’100 pagine.

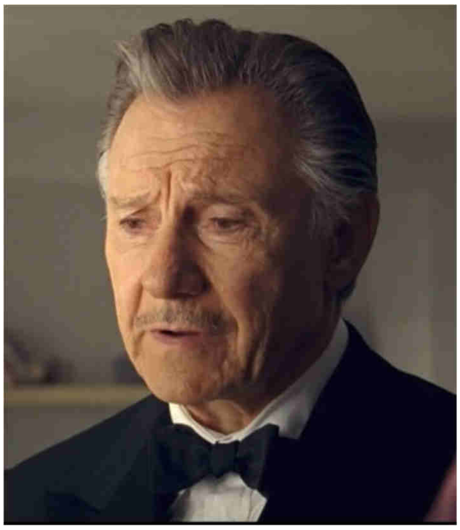
Tom Beddard (sub.blue) è uno specialista di fisica dei laser che, ad un certo punto, ha deciso di passare all’arte: non sappiamo di preciso che cosa abbia fatto con il laser, ma ci pare che nel secondo campo se la cavi decisamente bene. Ognuno di questi disegni, che vi passiamo per evidenti motivi di copyright in bassa definizione, è in realtà la “presentazione” di una serie. Questo numero esce in ritardo perché nella prima (“Aurullia”) ci siamo persi.

1. Mr. Wolf e il ballo di San Vito

"I am Winston Wolf. I solve problems"

(Harvey Keitel in "*Pulp Fiction*" di Quentin Tarantino)

Non c'è dubbio che un personaggio con le caratteristiche di Mister Wolf potrebbe tornare utile in molte discipline, matematica compresa.



1 *Mister Wolf, risolutore di problemi*

Bisognerebbe forse specificare un po' meglio a quali "caratteristiche" ci si sta riferendo, visto che non tutte le doti di Winston Wolf possono considerarsi desiderabili: per coloro che non hanno avuto occasione di vedere quello che è il secondo (e probabilmente il più famoso) film di Quentin Tarantino, forniremo un breve riepilogo.

Il film in questione è *Pulp Fiction*, del 1994; la trama è al tempo stesso molto complicata e poco significativa nell'economia del film, che tra l'altro viene narrato con la tecnica della cronologia frammentata, ovvero con le scene che non seguono la lineare sequenza temporale degli avvenimenti. Di certo è un film che dovrebbe rientrare nella tipologia delle "gangster story", e il cast impegnato nelle riprese è stato particolarmente ricco, sia dal punto di vista del numero di attori coinvolti, sia da quello della notorietà e della capacità artistica degli stessi.

Sia come sia, ad un certo punto i due personaggi principali[1] si trovano in forte imbarazzo, avendo ucciso per sbaglio un tizio all'interno della loro automobile: il guaio, ovviamente, non è nell'omicidio in sé (sono assassini professionisti, scannare persone è mera routine) ma piuttosto nel fatto che la macchina è totalmente imbrattata di sangue e hanno pochissimo tempo per ricondurla in condizioni presentabili. È a questo punto che i potenti mezzi dell'associazione a delinquere forniscono ai due inguaiati quanto serve a cavarli di impaccio: il deus ex-machina della situazione si chiama Mr. Wolf e la sua battuta d'ingresso sulla scena resterà negli annali del cinema: "*Sono Winston Wolf, risolvo problemi*".

Il signor Wolf, che sullo schermo ha la faccia di Harvey Keitel, è uomo di parola: nonostante il poco tempo a disposizione mantiene fede alla sua nomea e risolve il problema di John Travolta e Samuel L. Jackson perfino in anticipo, quindi si dilegua con pacifica eleganza (indossa sempre uno smoking)[2] dopo aver rimorchiato la giovane bellezza di turno. Comunque si voglia interpretare l'estetica e l'etica del film, quel che è

[1] Ci rendiamo conto che, per i cultori più affezionati al film, definire Vincent Vega (interpretato da John Travolta) e Jules Winnfield (Samuel L. Jackson) come "personaggi principali" potrebbe essere oggetto di contestazioni, visto che il film di "personaggi principali" ne contiene almeno una mezza dozzina: sono però, senza dubbio, tra i migliori candidati alla conquista del titolo.

[2] Per coloro che ritengono che ogni fotogramma di Tarantino nasconda significati reconditi (e magari hanno pure ragione, chissà), segnaliamo che Mr. Wolf, con il suo immancabile *tuxedo*, arriva sulla scena "nove minuti e trentasette secondi" dopo la sua convocazione, e che la macchina da presa inquadra con ostentazione la sua targa "3ABM581". Sui 9'37" non si è discusso più di tanto, e noi ci limiteremo ad osservare che corrispondono a 577 secondi, e che 577 è un numero primo; sulla targa invece si sono versati fiumiciattoli di inchiostro, ma senza troppo successo: le due ipotesi principali vertono su una supposta lettura "alla giapponese" che suonerebbe più o meno come "samurai" e una più complessa che – basandosi sulla traslitterazione "per somiglianza" delle cifre: 3 come E, 5 come S, 1 come L e 8 come doppia O – porterebbe a EABMS00L, anagrammabile in "Esma Lobo", diminutivo di "Esmarelda Villalobos", che è uno dei personaggi del film. Sia come sia, per un certo periodo si sono viste in giro molte T-shirt con l'immagine della targa dell'Acura NSX di Mr. Wolf bene in evidenza.

certo che saper risolvere problemi con l'abilità di Mr. Wolf è una competenza che viene molto apprezzata anche negli ambienti meno propensi a mostrare ammirazione e riconoscenza.

I problemi sono fastidiosi. Ci rendiamo conto che sia un concetto un po' pericoloso da esprimere nell'articolo di una rivista che fa della sottomissione di problemi ai lettori il suo punto di forza, quando non proprio la sua ragione di esistere; ma gli innocenti problemi di matematica ricreativa – peraltro del tutto teorici e del tutto ignorabili, se solo lo si desidera – costituiscono una evidente e sparuta minoranza dell'insieme dei problemi che la vita è solita porre. La stessa parola "problema" ha un che di impositivo, quasi di aggressivo: l'origine è come al solito greca (πρόβλημα) e il significato originario non si discosta poi tanto da quello attuale: "sporgenza, impedimento, ostacolo", insomma tutti termini che in linea di principio si vorrebbe che non venissero a disturbare la routine quotidiana. Nello spulciare ulteriormente il termine greco si scopre che il "pro-" iniziale sta a indicare più o meno "davanti", mentre il nocciolo finale "-blema" viene dal verbo βάλλω, che significa "mettere" o, più propriamente, "gettare", "lanciare"[3]: in buona sostanza, un "problema" è quasi per definizione qualcosa che ci viene inaspettatamente gettato davanti e ci impedisce la prosecuzione del cammino, come un grosso macigno su uno stretto sentiero. Al limite, è piuttosto strano che per proseguire sia necessario "risolvere" il problema, ovvero "scioglierlo" (anzi, scioglierlo almeno un paio di volte, visto il prefisso iterativo "ri-") e sciogliere un macigno sembra abbastanza più complicato che non semplicemente spostarlo via.

2 *Il Problem Solving secondo Linus.*

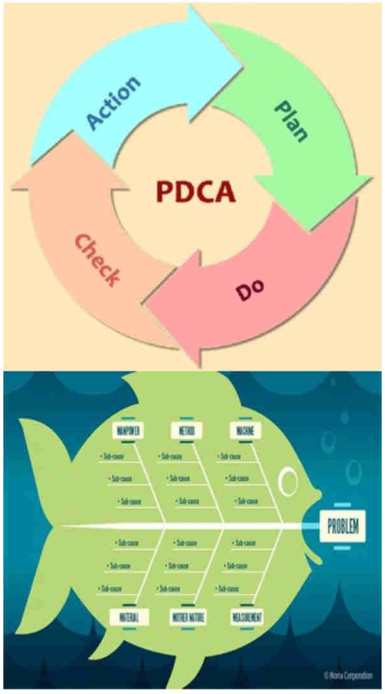
Fatto sta che, visto che la maggioranza della popolazione non segue l'ammirevole filosofia di Linus van Pelt, la capacità di risolvere problemi è di recente assurta a disciplina a sé stante: cosa abbastanza sorprendente, visto che l'approccio naturale è stato per lungo tempo quello di affidarsi a qualche esperto competente nel campo specifico del problema, non a "teorici dei problemi" in generale. In fondo, risolvere il grosso guaio del riscaldamento globale del pianeta sembra oggettivamente ben diverso che trovare l'area di un esagono o approntare una strategia per disinfestare una cantina dagli scarafaggi; ciò nondimeno gli esperti ritengono che il "*problem solving*" abbia sufficienti caratteristiche proprie da poter essere considerato una disciplina a sé stante, anche se con ovvie coniugazioni specifiche dovute alla natura dei problemi.

L'idea di fondo è quella di considerare genericamente la risoluzione di problemi come un'attività riconducibile ad una serie di processi; anzi, a voler essere più precisi, la "risoluzione" è a sua volta solo una componente dell'azione globale. La fase risolutiva (appunto, il *problem solving*) è preceduta da quella di individuazione (*problem finding*) e da quella di definizione (*problem shaping*): nel loro insieme, le tre fasi sono comunque caratterizzate e unificate dal concetto stesso di problema, ovvero di un impedimento imprevisto che blocca il proseguimento dell'azione in modo automatico, naturale, insomma superabile tramite le normali competenze del soggetto. Da questo punto di vista, il problema è pertanto "nuovo" per definizione, e richiede uno sforzo originale e creativo per raggiungere la sua eliminazione. Così ci si trova presto di fronte a quella che

[3] Che l'aggressivo "lanciare" sia più attinente del moderato "mettere" lo si nota facilmente in altre parole italiane quali "balistica" o addirittura in nomi geografici internazionali, quali quello delle isole Baleari. Nei tempi antichi la grande abilità con la fionda di quegli isolani li fece apprezzare come frombolieri in diversi eserciti, al punto da associare il nome delle loro isole natie alla loro straordinaria capacità usare con destrezza le fionde.

sembra essere, allo stesso tempo, sia una sorta di definizione del termine problema ("qualcosa che non si sa gestire con le conoscenze pregresse"), sia una specie di contraddizione in termini (come posso imparare ad affrontare qualcosa che per definizione non so affrontare?).

È insomma abbastanza inevitabile che le tecniche del *problem solving* risultino essere prevalentemente una raccolta di "buone pratiche" da mettere in atto di volta in volta, più che una metodologia chiara, lineare e di facile assimilazione. Senza volerne minimamente sminuire l'efficacia, è inevitabile notare che la parte più creativa di queste tecniche è probabilmente quella dei nomi che sono stati dati loro. L'acronimo forse più famoso è il PDCA, che sta per "*Plan, Do, Check, Act*", che è tanto naturale da apparire quasi banale: pianificare le azioni, metterle in atto, vedere se funzionano, agire di conseguenza. In realtà, la parte più significativa di questa sequenza è nella sua ciclicità, tant'è vero che la tecnica è forse più nota con il nome di "*Ciclo di Deming*", che mette appunto in evidenza l'aspetto cruciale, ovvero il sottinteso "*…e ricomincia da capo*" dopo l'azione ("*Act*") correttiva. In qualche modo, il ciclo di Deming sembra così una moderna perifrasi dello storico motto dell'Accademia del Cimento: "*Provando e riprovando*"[4].



3 *Ciclo di Deming e Diagramma di Ishikawa*

Un po' più originale è l'*Analisi di Ishikawa*, non fosse altro per il grafico a lisca di pesce che si vede abbastanza spesso nei documenti dei manager e perfino in qualche telefilm poliziesco, anche se in questo caso la lisca di pesce, più che una suddivisione delle possibili cause del problema, è sostanzialmente solo una riproduzione cronologica degli eventi.

Dal punto di vista delle sigle, una abbastanza carina è la *5W2H*, che in qualche modo ripercorre quelli che una volta erano considerati i "migliori aiutanti dei giornalisti", ovvero le magiche paroline inglesi *What, When, Where, Who* e *Why*[5], a cui si aggiungono per buon peso anche "*How*" e il quantificatore "*How many*", in maniera da giustificare pienamente le 5 "W" e le 2 "H" dell'acronimo. In verità, per quanto resi famosi dai film americani sui giornalisti coraggiosi, l'individuazione di questi cardini fondamentali della conoscenza risale addirittura all'antichità: ne parla già Boezio nelle sue istruzioni agli avvocati che devono prepararsi a sostenere processi penali, prima di lui sono citati da

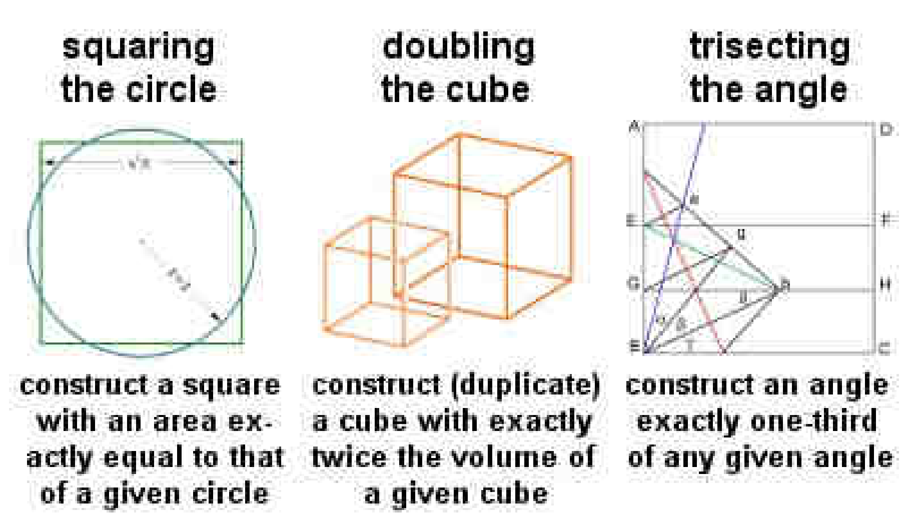
[4] Come succede più spesso di quanto è lecito aspettarsi, alcune cose che sembrano ovvie si rivelano tutt'altro che tali. "*Provando e riprovando*", detto caro a Galileo ed eletto come motto dai suoi discepoli nell'Accademia del Cimento, sembra davvero l'esortazione principe della ricerca scientifica e del metodo sperimentale: non basta una prova, ne occorrono molte, prima di giungere ad una ipotesi di verità. Ciò non di meno, la frase è una citazione dantesca della Commedia (Paradiso, canto III, versi 1-3): "*Quel sol che pria d'amor mi scaldò 'l petto – di bella verità m'avea scoverto – provando e riprovando, il dolce aspetto".* A giudizio di molti studiosi, tra i quali nientepopodimeno che Umberto Eco, il "riprovando" non va inteso come reiterazione di "provando", ma bensì nel senso di "confutare", ormai in disuso nell'italiano corrente (se ne può però trovare traccia, ad esempio, nell'aggettivo "riprovevole", che indica qualcosa di sbagliato). Insomma, Dante (e forse i galileiani con lui) esortano a provare (nel senso di "dimostrare") e a "confutare", non a ripetere successivamente tentativi nella ricerca della verità. A ben vedere, la lettura di Eco e compagni è particolarmente adatta al verso dantesco: Beatrice (il "*sol che pria d'amor mi scaldò il petto*") non deve aver faticato poi troppo a convincere Dante della verità divina, ma piuttosto aver usato dimostrazioni e confutazioni; e anche l'Accademia del Cimento può ben essersi ripromessa sia di rivelare la verità che di confutare le menzogne, nel nome della scienza. A noi vanno benissimo entrambe le interpretazioni: resta il rammarico che, prendendo per buona la seconda, la battuta sul Ciclo di Deming non è più granché calzante.

[5] Noti anche come i "Five Ws", indicano quali siano le domande essenziali alle quali ogni articolo di cronaca dovrebbe rispondere con completezza: Cosa, Quando, Dove, Chi e Perché. I due successivi "How" e "How Many" stanno per "Come" e "Quanti".

Cicerone, analizzati ancora prima da Aristotele, e probabilmente anche da Ermagora di Temno. Più recente – e tutto sommato forse persino più attinente al *problem solving* propriamente detto – potrebbe risultare non tanto la tecnica che coinvolge le 5W, ma quella più angosciante dei 5*Why*: si tratta di una escalation aggressiva di "perché" ripetuta per cinque volte, ogni volta chiedendo il "perché" relativo alla risposta precedente appena ottenuta. Non c'è genitore che non sia stato sottoposto all'applicazione di questa tecnica dai propri virgulti: 1W) "Perché non posso uscire a giocare?" "Perché piove" – 2W) "E perché piove?" "Perché le nuvole ogni tanto fanno cadere l'acqua" – 3W)"E perché lo fanno?" "Perché il sole riscalda la Terra e fa salire le goccioline d'acqua nell'aria, queste diventano nuvole e quando si raffreddano ridiventano gocce d'acqua che cade dal cielo" – 4W) "E perché il sole scalda tutto?" "Perché è una specie di grandissima palla di fuoco" – 5W) "Sicuro? E perché il fuoco dovrebbe essere a forma di palla e non di fiammifero?", eccetera, eccetera, eccetera, fino alla Gravitazione Universale, un assaggio di Relatività Generale e magari sulla possibilità che Dio sia o meno un giocatore di dadi. La catena di perché è virtualmente infinita, ma gli esperti ritengono che una successione di cinque perché sia in genere sufficiente a raggiungere la causa ultima del problema. Evidentemente, gli esperti suddetti non hanno figli in età prescolare.

Restando sugli acronimi, uno dei più belli è certamente *FARE*, che sta per *Focalizzare, Analizzare, Risolvere* ed *Eseguire*, anche se temiamo che sia un'italica rivisitazione in lingua nazionale del *Ciclo di Deming*. Di certo, è uno dei più facili da ricordare per gli italiani, visto che la concorrenza è rappresentata da fonemi semi-impronunciabili come *APS, DMAIC, FMECA, OODA, RPR, TRIZ*; al punto che quando finalmente si incontra un *GROW* (*Goal-Reality-Obstacles/Options-Way forward*) ci si rilassa perfino un po', e infine ci si ritrova ad essere perfino un po' grati ai cervelloni della Toyota che hanno battezzato il loro metodo di *problem solving* semplicemente *A3*, e non perché ci fossero tre concetti chiave che iniziassero tutti per "A", ma solo perché loro erano soliti cominciare la loro analisi abbozzandola su fogli di formato A3.

È possibile che alcuni problemi matematici siano affrontabili con le metodologie del *problem solving*, ma a prima vista sembra che, almeno dal punto di vista storico, i matematici utilizzino generalmente degli approcci abbastanza diversi. Il fatto è che i problemi puramente matematici sono oggettivamente qualcosa di diverso rispetto agli "ostacoli da rimuovere". Di fronte ad un impedimento pratico, la cosa che conta è la rimozione dell'ostacolo; una gomma forata va sostituita o riparata per proseguire il viaggio, e se ci si riesce il problema può essere dimenticato. Certo, può rivelarsi una buona idea, specie per i viaggiatori abituali, capire se c'è una causa più profonda che può rinnovare il problema, e quindi analizzarla a fini di prevenzione (cambiare fornitore degli pneumatici, togliere dall'itinerario le strade dissestate, fare controlli periodici dello stato del veicolo, etc.) ma niente di più. In matematica, invece, l'esistenza di un problema è una sorta di sfida esistenziale, cruciale per l'esistenza della disciplina intera. A differenza da quanto succede nelle discipline che devono confrontarsi con la realtà, in matematica non esistono imprevisti; non c'è nulla che assomigli a un chiodo che fora uno pneumatico o a un bug che impedisca il corretto funzionamento di un programma di computer. Per di più, il corpus delle conoscenze matematiche è virtualmente condiviso tra tutti gli studiosi, e l'esistenza di un "problema" attira gli sforzi, sostanzialmente paritetici, di tutti gli esperti del campo. Soprattutto, nella vita di tutti i giorni scoprire che un problema è irresolubile è una pessima notizia, ancora peggiore della persistenza del problema non ancora risolto; in matematica, invece, la dimostrazione dell'irresolubilità di un problema è una conquista positiva, non troppo diversa, in termini di soddisfazione, da una canonica dimostrazione conclusiva. Anzi.



4 *I tre problemi della geometria classica*[6]

A dimostrazione di ciò, si pensi all'accoglimento del lavoro di due grandi matematici, Pierre-Laurent Wantzel e Andrew Wiles[7]. La geometria greca classica aveva tramandato una tripletta di problemi irrisolti; in un colpo solo, Wantzel[8] ne fa fuori due nel 1837, alla verde età di 23 anni e con addosso solo lo status di studente. Il termine "fa fuori" è giusto un mero tentativo di esplicitare, appunto, la cancellazione fisica dei due argomenti dal novero dei problemi, perché Wantzel non risolve le questioni della Trisezione dell'Angolo e quella della Duplicazione del Cubo, ma dimostra la loro impossibilità ad essere risolte. Dimostrazione di impossibilità che probabilmente non sarebbe piaciuta agli antichi matematici greci che la posero sul tavolo secoli prima, visto che minava alla radice il loro approccio alla geometria: per loro non era possibile discutere di geometria se non limitando le costruzioni all'utilizzo di riga e compasso[9]. Wantzel analizza cosa realmente si intenda, dal punto di vista algebrico, con queste limitazioni apparentemente solo grafiche, e arriva alla definizione di "numero costruibile"; da qui arriva ad associare alla "costruibilità" dei numeri la possibilità di essere espressi mediante determinati tipi di polinomi di grado *pari*. Il problema del cubo richiede l'estrazione d'una radice cubica, e il grado 3 del polinomio è inalienabile, ergo comporta numeri non costruibili, ergo col cavolo che si riesce a disegnare un cubo di volume doppio rispetto a un cubo dato con solo riga e compasso. La trisezione (generale) dell'angolo fa la stessa fine, e come buon peso si capisce anche perché alcuni angoli particolari sono invece effettivamente trisecabili: sono quei pochi casi in cui il grado terzo del polinomio corrispondente può essere, con opportuni artifici, ricondotto a un maneggevole grado secondo. Dopo Wantzel, della trisezione dell'angolo e della duplicazione del cubo nessun Vero Matematico si interessa più.

Andrew Wiles[10], invece, affronta un altro problema e lo risolve positivamente. Problema meno vecchio di quelli presi di petto da Wantzel, ma forse ancora più famoso: il celeberrimo Ultimo Teorema di Fermat, per intenderci quello del citatissimo – almeno su questa rivista – "*Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet*". Ma la dimostrazione di un

[6] La figura l'abbiamo rubata da https://www.assignmentexpert.com/

[7] Dopo tante tecniche che si appellano a un certo numero di "W", confessiamo di essere stati colpiti dalla duplice occorrenza di queste due iniziali di cognome…

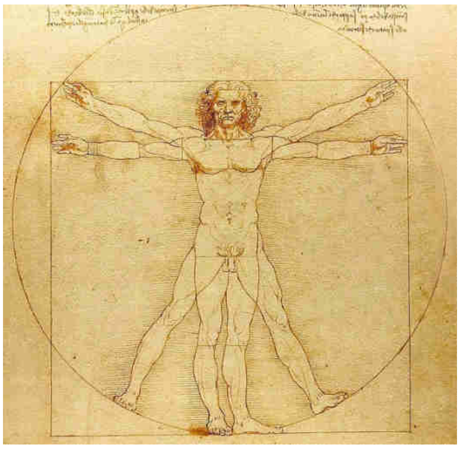
[8] Sì, di Wantzel parliamo più diffusamente in un apposito compleanno, "*Una fionda per Davide*", RM065, Giugno 2004.

[9] Vale sempre la pena di ricordarlo: riga senza tacche numeriche e compasso che si chiude non appena sollevato da foglio; insomma senza speranza di poter riportare una distanza x da una parte a un'altra del disegno semplicemente "misurandola".

[10] Ovviamente anche Wiles ha il suo compleanno: "*Matematica per gioco*", RM207, Aprile 2016.

teorema, paradossalmente, sembra meno definitiva della conferma dell'impossibilità della dimostrazione, tant'è che molti sono ancora alla ricerca di soluzioni più dirette[11].

C'è però almeno un elemento davvero significativo che accomuna tutti i problemi, matematici o meno, soprattutto quelli che notoriamente sono stati affrontati da molte persone senza che nessuno abbia ancora trovato una soluzione, e l'abbiamo già menzionato: il senso di sfida. È probabilmente una caratteristica propria della natura umana: certo assai variabile da persona a persona, ma in qualche misura presente anche negli individui più timidi. Senso di sfida che è poi facilmente esaltato quando il problema irrisolto ha un'esposizione di facile comprensione, e di conseguenza appare impossibile che non abbia una soluzione, se non proprio altrettanto facile, quantomeno raggiungibile con un po' di sforzo. In matematica esistono esempi particolarmente evidenti di questa natura, e l'Ultimo Teorema di Fermat e la sua dimostrazione da parte di Andrew Wiles sono una fantastica conferma di quanto possa essere illusoria l'idea che a facile esposizione debba corrispondere una soluzione altrettanto abbordabile. Ma persino l'UTF impallidisce nel confronto della Quadratura del Cerchio.



5 *L'Uomo Vitruviano di Leonardo. Non è una "quadratura", ma che quadrato e cerchio siano simboli evocativi è cosa ben evidente.*

Dei tre problemi classici della geometria, è indubbiamente quello che ha maggiormente trasceso il suo significato matematico, rivestendosi di una grande valenza simbolica: e forse era così già per gli antichi geometri greci, visto che duplice regolarità del cerchio e del quadrato hanno una forza evocativa che manca a quasi tutte le altre forme geometriche. Di certo, con il perdurare dell'incapacità di ottenerne la risoluzione, il problema è assunto a simbolo filosofico, esoterico e perfino religioso. C'è stato infatti chi leggeva nell'impossibilità di ridurre il cerchio (la forma perfetta, quindi divina) al quadrato (la forma concreta, che simboleggia la Terra) l'impossibilità per l'Uomo di comprendere la natura di Dio[12]. Certo è che il problema della quadratura è rapidamente assunto a simbolo stesso di "Problema" con tanto di maiuscola, tant'è che si ritrova ancora oggi, nella comunicazione di massa, l'espressione "trovare la quadratura del cerchio" nel senso di riuscire a risolvere un problema impossibile, o quantomeno davvero difficile.

Ma quella che è oggi solo un'espressione giornalistica o al più letteraria è stata a lungo una vera e propria mania; pur tralasciando gli approcci filosofici ed esoterici, anche i tentativi puramente matematici di risoluzione si sono susseguiti con impressionante costanza e dedizione, soprattutto da parte di dilettanti affascinati – appunto – dal senso di sfida.

Mania, dicevamo: ma c'è anche chi è stato più spietato, come Augustus De Morgan; nel suo libro più famoso, "*A Budget of Paradoxes"*[13], il matematico dedica diverse pagine

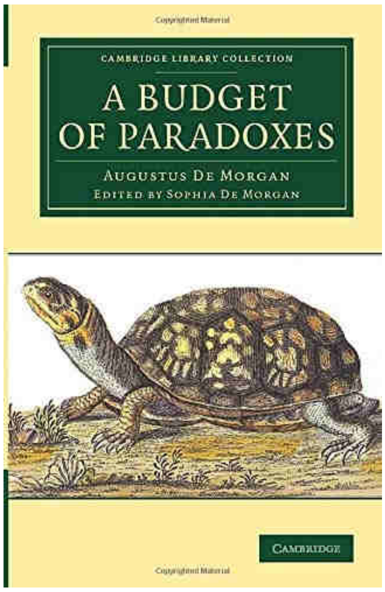
[11] Bisogna però riconoscere un paio di condizioni particolari: la prima è che tra i cacciatori di soluzioni più semplici dell'UTF figurano pochi "Veri Matematici", che di solito sono ben contenti e soddisfatti dell'immane lavoro di Wiles; la seconda è che certamente la dimostrazione di Wiles non ha nulla a che vedere con quella (giusta o sbagliata che fosse) che indusse Fermat a scrivere il fatidico appunto sul margine dell'*Arithmetica* di Diofanto.

[12] Significativo e terribile l'ammonimento che John Donne tuonò dal pulpito della basilica di San Paolo nel giorno di Natale del 1624: "*Dio è un cerchio Egli stesso, e farà di te altrettanto; così tu non quadrerai altri cerchi per portare ciò che è già uguale in sé stesso a parificarsi ad angoli e incroci, nei tristi e tenebrosi simulacri di Dio, o di te stesso; perché Dio non può dare – né tu potrai ricevere – più misericordia di quanta tu ne abbia già avuta.*"

[13] Libro pubblicato postumo, nel 1872, l'anno successivo alla morte dell'autore: tutt'altro che tecnico e pieno di humor ottocentesco inglese, non ci sembra abbia mai avuto una traduzione italiana. In compenso, almeno nella sua forma elettronica di e-book, si trova a prezzo davvero irrisorio.

accanendosi contro i "quadratori del cerchio". C'è da dire che l'Accademia Francese delle Scienze aveva già perduto la pazienza ben prima di lui: con una risoluzione ufficiale aveva annunciato nel 1775 che non avrebbe più accettato (e men che mai pubblicato) delle sedicenti "dimostrazioni" di quadratura del cerchio, tanti erano, già allora, i tentativi prodotti dai dilettanti in cerca di gloria.

De Morgan, comunque, anche prima della postuma uscita del suo libro aveva fustigato i quadratori dalle colonne del *Journal of the Institute of Actuaries* nel gennaio del 1867, fino a giungere all'emanazione di quello che sembra avere tutte le caratteristiche di un anatema.



6 *"A Budget of Paradoxes" di Augustus De Morgan*

"Io dichiaro e ordino, in forza dal diritto che mi deriva dal fastidio che mi sono preso in questo argomento, che lui, San Vito, che guida i suoi seguaci in una danza senza fine e senza senso, d'ora in poi dovrà essere venerato come santo patrono dei Quadratori del Cerchio. Il suo giorno è il 15 giugno, che è invero anche quello di san Modesto, con il quale peraltro i detti Quadratori spesso non hanno nulla a che fare."

Occorre un certo grado di britannica spietatezza per assimilare il furore creativo dei quadratori del cerchio al Ballo di san Vito, soprattutto se si tiene conto che il ballo suddetto è in realtà il triste sintomo di una grave malattia, la corea reumatica. La tradizione cristiana associa al santo[14] capacità taumaturgiche per le persone colpite dal morbo, i cui sintomi più caratteristici sono appunto convulsioni particolarmente violente che costringono a continui movimenti inconsulti, fino allo stremo delle forze; a tale interminabile violenza motoria De Morgan associa la pervicacia del Quadratori del Cerchio.

Tutto assume un aspetto ancora più strano se si pensa che, in ultima analisi, quando De Morgan fustiga i tentativi di quadratura questa non è ancora dimostrata come impossibile; ma la convinzione che lo fosse era opinione diffusissima tra i matematici dell'epoca[15]: non solo perché sotto sotto avevano grande fiducia nelle capacità deduttive degli antichi matematici greci, quando si trattava di questioni geometriche basate su riga e compasso, ma anche per altre buone ragioni. Prima ancora che Wantzel giungesse a dimostrare l'impossibilità della trisezione dell'angolo e della duplicazione del cubo, era diventato evidente che π fosse un numero irrazionale, non esprimibile come rapporto tra due interi: e questo era un indizio assai forte; non una dimostrazione, perché esistono numeri irrazionali che sono costruibili – basti pensare alla diagonale del quadrato – ma un forte indizio sì, perché la gran parte delle costruzioni geometriche è prodotta da numeri razionali. Per contro, era già noto che un numero trascendente, ovvero tale da non essere in nessun caso radice di un'equazione polinomiale a coefficienti razionali, non era costruibile. In altri termini, almeno tra i matematici c'era consapevolezza che, qualora si fosse dimostrato che π è un numero trascendente, si sarebbe dimostrato anche che la Quadratura del Cerchio è impossibile da realizzare alla maniera dei Greci, con la riga e il compasso. E finalmente, non troppi anni dopo la scomparsa di Augustus De Morgan, ci fu chi ci riuscì.

[14] La sua agiografia lo narra come fanciullo siciliano, figlio di padre pagano ma convertito al cristianesimo dal suo precettore Modesto e dalla nutrice Crescenzia. Tutti e tre sono martirizzati sotto l'impero di Diocleziano, e tutti e tre santificati e ricordati nello stesso giorno, appunto il 15 giugno.

[15] Del resto, anche oggi la gran parte dei matematici pensa che l'Ipotesi di Riemann, per quanto ancora non dimostrata, sia vera.

7 *Ferdinand von Lindemann.*

Carl Louis Ferdinand von Lindemann nasce a Hannover il 12 Aprile 1852. Per molti versi, la sua biografia sembra essere un perfetto esempio di una tranquilla – e tutto sommato anche fortunata – vita da accademico. La fortuna è in gran parte leggibile anche solo dalle date che marcano la sua esistenza: gli anni a cavallo tra Ottocento e Novecento sono tutt'altro che pacifici per la maggior parte dei tedeschi, ma nascere nel 1852 significa essere un po' troppo giovane per finire nella guerra franco-prussiana del 1870 e un po' troppo vecchio per essere chiamato nelle trincee della Grande Guerra; se si aggiunge che lascerà questa valle di lacrime nel marzo del 1939, si può concludere che gli saranno risparmiate le delizie della Seconda Guerra Mondiale (e, tutto sommato, che vivrà gli anni del nazismo ormai protetto da una età avanzata). Per il resto, gli 87 anni di vita di Ferdinand von Lindemann si sviluppano secondo un copione che si può immaginare sereno: la sua infanzia e giovinezza sono ragionevolmente tranquille, insomma quelle prevedibili per un rampollo di una famiglia borghese del suo tempo. Figlio di insegnante e nipote d'un preside liceale, frequenta i primi anni di scuola, fino al liceo, senza particolari difficoltà o meriti. Quando diventa studente universitario – ovviamente in matematica – fa quello che fanno gli universitari tedeschi del suo tempo: viaggia da un ateneo all'altro.

Prima Göttingen, poi Erlangen e infine Monaco di Baviera, e anche in questo la fortuna gli sorride, visto i docenti con cui si forma: a Göttingen trova Clebsch[16], e lo fa appena in tempo, visto il grande matematico scomparirà appena un paio di anni dopo; a Erlangen trova come relatore addirittura Felix Klein[17] e Monaco, infine, diventerà la sua università di riferimento, quella in cui trascorrerà quasi tutta la carriera accademica. Ma non subito, ovviamente: sempre seguendo la tradizione del tempo, Ferdinand von Lindemann, una volta ottenuto il dottorato, fa viaggi verso i maggiori centri matematici di Germania e d'Europa, Cambridge, Oxford, Londra, Parigi, Wurzburg, Friburgo, Königsberg.

Così come era stato fortunato coi docenti, è fortunato con i colleghi: nei suoi viaggi conosce e collabora con Hermite[18], Jordan, Bertrand, e molti altri.

Sarà fortunato anche con i suoi studenti: ne avrà una sessantina, e tra questi ci sarà la stella di prima grandezza di David Hilbert[19]. Nel 1883 si sposa, e possiamo immaginare che abbia avuto un matrimonio felice[20]; dieci anni dopo accetta quello che sarà il suo incarico definitivo all'Università di Monaco.

Per il resto, la sua carriera si sviluppa serenamente, come il resto della sua esistenza: si occupa di geometria e di analisi, e si concede qualche escursione nella matematica

[16] Dagli appunti presi alle lezioni di Clebsch, Lindemann comporrà più avanti un libro di testo.

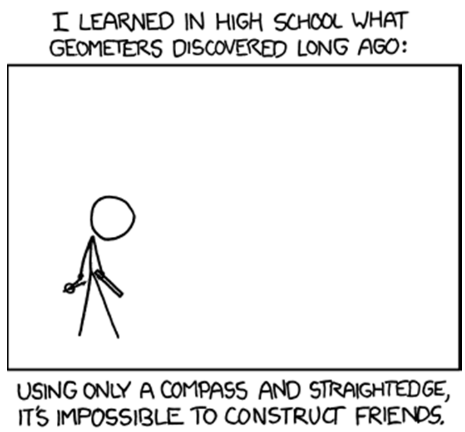
[17] Ne parliamo in "*Fischi per fiaschi*", RM255, Aprile 2020.

[18] "*Vite parallele*", RM095, Dicembre 2006.

[19] "*Wir müssen wissen. Wir werden wissen*", RM060, Gennaio 2004.

[20] In realtà non abbiamo evidenze che il matrimonio sia stato davvero felice, solo indizi circostanziali che non sarebbero certo accettati come prove in nessun tribunale: innanzitutto, l'assenza di notizie in senso contrario e la constatazione che i coniugi si trovarono bene al punto da lavorare insieme alla traduzione delle opere di Poincaré; per il resto, abbiamo solo il nome e la professione della sposa, Elizabeth Küssner: era un'attrice, e solitamente le attrici sono belle e, visto il periodo, anche dotate di una personalità notevole e sperabilmente ben realizzata. Infine, quel pochissimo di tedesco che conosciamo ci fa sperare che il suo cognome possa essere stato, se non altro, un buon auspicio per la reciproca felicità coniugale.

applicata, in particolare si occupa della teoria dell'elettrone, fino ad arrivare a qualche contenzioso con Arnold Sommerfeld. Una carriera certo priva di ombre, ma non particolarmente densa di luci: con una sola eccezione clamorosa, quella che lo condusse in vita ad inaspettati onori, quali l'elezione all'Accademia Bavarese delle Scienze e titoli accademici ad honorem e, soprattutto, un posto inamovibile nella Storia della Matematica: la dimostrazione dell'impossibilità della Quadratura del Cerchio.



8 *L'ultima parola sulla Quadratura del Cerchio spetta meritatamente a xkcd.*

A voler essere crudelmente spietati, si potrebbe dire che questo trionfo di Ferdinand von Lindemann è il suo più riuscito colpo di fortuna. Sarebbe un giudizio certo ingeneroso, ma è comunque vero che, per necessità di sintesi, il suo nome resta legato ad un problema metaforicamente ipertrofico grazie ad un singolo passaggio finale che non richiedeva neanche un'idea rivoluzionaria per essere compiuto. Il punto cruciale è già stato menzionato: per risolvere definitivamente la Quadratura del Cerchio – o meglio per archiviarla sotto l'etichetta "impossibile" – era già chiaro che era sufficiente mostrare la trascendenza di π. Ora, dimostrare la trascendenza di un numero non è un'operazione semplice, anzi: però è anche vero che nel 1873 proprio Hermite, che Lindemann aveva conosciuto nei suoi viaggi di studio per l'Europa, era riuscito nell'impresa di dimostrare la trascendenza di e, la base dei numeri naturali. Per quanto difficile possa essere stato raggiungere un risultato così significativo – perché quello di Hermite è un risultato davvero maiuscolo: è la prima prova di esistenza di numeri trascendenti – è stupefacente che il francese abbia tralasciato di compiere il passo successivo, relativamente semplice, di dimostrare la trascendenza anche di π. Perché è questo che Lindemann fa, pochi anni dopo: usando gli stessi metodi di Hermite, e utilizzando inoltre l'informazione della trascendenza di e oltre a quella che è probabilmente la formula più famosa della matematica $e^{i\pi}+1=0$, senza troppa fatica (almeno per un matematico professionista) riesce a dimostrare la trascendenza di π, e a guadagnarsi l'immortalità. Un risultato più che ampiamente alla portata di Hermite; ma in fondo, un po' lo sospettavamo fin dall'inizio: risolvere i problemi, con buona pace del problem solving, è anche questione di fortuna.

2. Problemi

2.1 Ricordi di passeggiate

Recentemente, abbiamo trovato un simpatico problema che ci ha fatto venire in mente un paio di passeggiate di quando eravamo giovani e belli (quindi circa venti minuti fa, non necessariamente primi). Una, forse, come "passeggiata" è un po' esagerata, visto che Torino-Zurigo non è esattamente una cosa da affrontare con le scarpine da sera, ma è il pensiero che conta.

I più paleontologi tra i lettori probabilmente ricorderanno[21] quel simpatico problema relativo alla camminata per una Torino ideale, dalle strade perpendicolari e parallele, equispaziate e di lunghezza quantomeno infinita: a seguito di una riunione del Comitato di Redazione non esattamente analcolica, i nostri eroi si sono ritrovati all'uscita da una birreria con un paio di problemi: oltre a dover smaltire (prima di salire in macchina) la ragguardevole quantità di alcool circolante nei loro vasi sanguigni, si presentava anche la necessità di ritrovare la macchina, parcheggiata in un qualche luogo che nessuno ricordava; tutti però ne avevano perfettamente presente la targa. Volendo di due problemi fare una soluzione, decidono di partire con un *random walk* (mai traduzione italiana fu più azzeccata: "cammino dell'ubriaco") in una direzione a caso e, arrivati ad un incrocio, decidere con probabilità ¼ quale strada prendere.

Torniamo al problema. Quello che i nostri eroi avevano dimenticato era che *la macchina era parcheggiata esattamente davanti alla birreria*. Che probabilità ha il Terribile Trio di ritrovare la macchina?

E questo era il problema "vecchio", anche se qui ci starebbe bene un problemino di riscaldamento... Anche se Rudy ha sempre con sé il suo fido dado tetraedrico onesto, riuscite (con un numero a vostra scelta di monete) a trovare un modo per ottenere quattro possibilità equiprobabili?

Ma veniamo al nostro problema. Supponiamo che, in un afflato di organizzazione ed originalità, la nostra Sindaca (hanno appena spostato le elezioni, quindi lo sarà ancora per un po') ridenomini le strade come "vie" quelle in direzione nord-sud, e come "corsi" quelle in direzione est-ovest: non solo ma, per evitare i soliti problemi del tipo "il tizio della via dove abito mi sta antipatico", partano da "Corso Zero" e "Via Zero" per poi procedere come Uno, Due, Tre, eccetera.

Non ci ricordiamo se all'epoca del vecchio problema a Torino ci fosse già la metropolitana (denominata, in un afflato di ottimismo, "Linea Uno": non c'entra niente né con Via Uno né con Corso Uno, quindi potete continuare a chiamarla "Metropolitana", anche perché la "Linea Due" è ancora *molto* di là da venire), comunque due su tre dei nostri eroi si ritrovano all'uscita della fermata all'angolo tra Corso Sei e Via Cinque con una congrua scorta di monetine di pari valore; partendo con il simpatico algoritmo che avete trovato risolvendo il problemino di riscaldamento, si spostano all'incrocio deputato, e qui cominciano i guai.

Infatti, l'obiettivo di Doc è arrivare in Via Zero o in Via Otto, mentre l'obiettivo di Rudy è quello di arrivare in Corso Zero o in Corso Otto. Volendo avere una dimensione dinamica della passeggiata, quando arrivano su un incrocio effettuano una verifica. Se Rudy (o Doc) si trova ora più vicino di prima al proprio obiettivo, questi riceve dall'altro una monetina; se, al contrario, uno dei due si trova più lontano di prima dal proprio obiettivo, dà una monetina all'altro. Se la posizione risulta "neutrale" (nel senso che non varia), allora non c'è scambio di monetine. Indi, si estrae una nuova direzione e si parte verso un nuovo incrocio.

Il gioco finisce quando uno dei due arriva al proprio obiettivo.

[21] ...e se non lo ricordano, che lo risolvano.

Trovando la cosa molto divertente, i nostri eroi giocano questo gioco molte volte, uscendo sempre alla stessa fermata della Metropolitana; ma secondo voi, sul lungo periodo, chi guadagna più monetine?

"...e cosa c'entra Zurigo?" Beh, all'epoca si parlava di Teoria dei Giochi, dove l'obiettivo è sembra ben definito. Il fatto che qui gli obiettivi siano "uno o l'altro", e oltretutto neanche puntiformi, ci divertiva alquanto. Non solo, ma il vecchio adagio "Vinci alla svelta, perdi con calma" qui sembra importare piuttosto poco.

Posto che siate interessati alle espansioni, comunque, ne abbiamo pensata una (da noi non esplorata, *ça va sans dire*): ma quanta strada fanno, per ogni gioco, in media, i nostri due eroi?

Fate con calma, che qui il *locdaun* sembra prendersela comoda...

2.2 Per far arrabbiare Alice

Già dal titolo, dovreste aver capito che si parla di probabilità. E, in particolare, di come "girando un po' le parole" sia facile sbagliare. Ma tranquilli! Di un problema, vi diamo la soluzione. Anzi, due, addirittura.

Nello **zeresimo problema**, abbiamo il solito sacchetto, che contiene una e una sola pallina (o bianca o nera: le due cose, giusto per tranquillizzare i malpensanti, sono equiprobabili); a questa, aggiungiamo una pallina nera e agitiamo il sacchetto; esausti da questa attività, estraiamo una pallina che risulta essere nera. Quali sono le probabilità che la pallina restante sia anch'essa nera?

La **prima soluzione** procede esaminando tutti i possibili casi, *a priori* equiprobabili:

1. La pallina originariamente nel sacchetto era bianca, ed è stata rimossa.
2. La pallina originariamente nel sacchetto era bianca, è stata aggiunta una pallina nera che poi è stata rimossa.
3. La pallina originariamente nel sacchetto era nera ed è quella che è stata rimossa.
4. La pallina originariamente nel sacchetto era nera ed è quella rimasta lì.

Il primo caso è impossibile, visto che sappiamo che la pallina estratta era nera. Quindi, restano gli altri tre casi equiprobabili. Ora, siccome in due casi sui tre restanti la pallina restante è nera, abbiamo che la probabilità che la pallina restante sia nera è *due terzi*.

La **seconda soluzione** procede con un pericoloso uso della parola "ovvio". È ovvio che se la pallina originariamente nel sacchetto era bianca, allora la pallina restante sarà bianca, e se la pallina originariamente nel sacchetto era nera, la pallina restante sarà nera. Quindi, la probabilità del colore della pallina che resta nel sacchetto non cambia aggiungendo una pallina nera e quindi rimuovendo una pallina nera. Ma avendo come casi equiprobabili i due colori della pallina all'inizio, la probabilità che sia bianca è *un mezzo*.

Ora, il **primo problema** è stabilire chi ha ragione, visto che due terzi è uguale a un mezzo solo per valori molto grandi di tre.

Come **secondo problema**, stiracchiamo un po' il primo: anziché rimuovere una pallina a caso, *lurkiamo* nel sacchetto e, scientemente, tiriamo fuori una pallina nera. Questo cambia la risposta, rispetto a quella data al problema zero? No, niente soluzione. Fate voi.

Come **terzo problema**, ci resta solo un caso: la biglia è estratta casualmente, ma nessuno ci dice se è bianca o nera. Qual è la probabilità che sia nera?

3. Bungee Jumpers

Dimostrate che qualsiasi numero primo dispari può essere espresso come differenza di due quadrati.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Aprile!

Presto che è tardi.

4.1 [265]

4.1.1 Avanzi di Natale

Riprendiamo questo problema dal mese scorso:

> *Il banco sceglie due numeri casuali diversi tra loro, li mette uno per mano e quindi vi mostra le due mani chiuse: voi dovete sceglierne una. A questo punto, il banco apre la mano che avete scelto e vi mostra il numero: voi potete "tenere il numero" o "cambiare mano". Il vostro scopo è quello di trovare il numero più grande: se è quello che avete scelto avete vinto. Se giocate molte partite di seguito, riuscite a trovare una strategia che vi dia una probabilità di vittoria maggiore del* 50%*?*
>
> *Se il banco sceglie numeri compresi tra zero e dieci, come modificate la vostra strategia? E se sono inclusi in un altro intervallo fisso ma ignoto, come cambia la situazione?*
>
> *Se ogni volta che vincete il banco paga un euro, ma ogni volta che perdete voi pagate un euro e un centesimo, conviene?*

In RM266 trovate solo la soluzione di ***Valter***, ci ha scritto ***Alberto R.***:

> *"Il banco sceglie due numeri casuali diversi tra loro".* Non è specificato il criterio di estrazione e ciò esclude la possibilità di calcolare alcunché.
>
> Solo se il banco fosse così sprovveduto da usare un metodo semplice e sempre lo stesso si potrebbe tentare una analisi statistica basata sui risultati precedenti. Ma ciò è stato esplicitamente escluso perché è precisato che *"data la completa casualità dei due numeri fare statistiche e assolutamente inutile"*
>
> La limitazione dell'intervallo da cui i numeri sono estratti non cambia nulla perché comunque piccolo sia l'intervallo i numeri reali ivi contenuti sono infiniti.
>
> In definitiva non saprei fare di meglio che rassegnarmi a una probabilità di indovinare del 50%
>
> In particolare osservo che la soluzione proposta da Valter è valida ma presuppone ipotesi aggiuntive non contenute nell'enunciato del problema.
>
> Nel caso dell'intervallo indefinito egli (anche se non lo dice) dà per scontato che il banco scelga con distribuzione di probabilità simmetrica rispetto allo zero. Ma si tratta di una ipotesi arbitraria. Supponiamo, ad esempio che il banco ottenga il numero N (intero positivo) mettendo in fila 20 cifre ottenute lanciando 20 volte un dado a 10 facce numerate da 0 a 9, poi metta N nella mano sinistra e metta nella destra N+1 o N–1 a seconda del risultato del lancio di una moneta. A parte il caso strafortunatissimo che il dado fornisca 20 nove o 20 zeri, Per il giocatore la vedo ben dura migliorare la speranza di vittoria al di là del 50%
>
> Nel caso che i numeri compresi tra 0 e 10 Valter suppone che il banco scelga con distribuzione uniforme di probabilità per cui 5 è il valore mediano. Ma non è detto che il banco sia così ingenuo, il banco potrebbe, ad esempio, scegliere a caso, e con distribuzione uniforme, due numeri A, B nell' intervallo 1…e^10 e poi mettere in una mano ln(A) e nell'altra ln(B). Così facendo 5 non è più il punto mediano della distribuzione perché la probabilità che un numero sia compreso tra 0 e 5 è ben diversa da quella che sia compresa tra 5 e 10. La prima è circa 0,67% e la seconda 99,33%.
>
> Infine, ad abundantiam, occorre considerare che il testo del problema non vieta che il banco usi ad ogni partita un criterio diverso, inventandosi di volta in volta i più fantasiosi sistemi per ottenere i due numeri.

> In definitiva io concluderei che il problema non ha soluzione, ma fornisce il seguente consiglio: Chiunque usi l'espressione "numero scelto a caso" senza che sia specificato (o quantomeno sottinteso) il metodo con cui il numero è stato ottenuto, dovrebbe essere punito con N (numero scelto a caso!) frustate sul sedere.

E così sapete anche perché chiamiamo spesso ***Alberto R.*** "il grande fustigatore". Come si vede anche nel seguito.

4.1.2 "Famolo strano"

Il secondo problema del mese scorso era dedicato alla riproduzione:

> *I nostri camaleonti sono in grado di assumere tre colori (uno per volta e sempre gli stessi tre); se due camaleonti sono dello stesso colore, non si accoppiano; se sono di colori diversi, devono incontrarsi moltissime volte prima di procedere alla riproduzione. Durante questi incontri non fruttiferi, due camaleonti di colore diverso assumeranno istantaneamente entrambi il terzo colore. Ogni camaleonte cambia colore solo in queste occasioni e mantiene il colore assunto sino al prossimo incontro. Inoltre, se i camaleonti sono dello stesso colore, si ignorano, e gli incontri sono possibili solo due alla volta. A seconda del numero iniziale di camaleonti dei diversi colori, la specie sopravvivrà o si estinguerà, diventando monocolore?*

Le soluzioni pubblicate il mese scorso erano di ***Lorenzo***, ***Valter***, il ***Panurgo***, ***Franco57*** e ***Alberto R.***. Quest'ultimo, ci ha scritto:

> Cari Rudi, mi avete fatto fare un'immeritata figuraccia.
>
> Il 14/2 vi ho mandato la mia soluzione del problema sui camaleonti. Era vergognosamente sbagliata!
>
> Però, vivaddio, me ne sono accorto e, con mail del 17/2, ho rimediato mandandovi la soluzione corretta che qui trovate in allegato.
>
> Avete pubblicato su RM 266 quella sbagliata.

Vero, la mail è comparsa magicamente dopo che Alberto ce l'ha indicata, nell'archivio sbagliato. Per punizione (va beh, per la punizione suggerita da lui siamo fuori allenamento, scegliamo noi), pubblichiamo la soluzione corretta di ***Alberto R.***, con capo cosparso di cenere:

> R camaleonti rossi, V verdi e G gialli.
>
> Sono possibili le seguenti trasformazioni
>
> 1) (R, V, G) diventa (R-1, V-1, G+2)
>
> 2) (R, V, G) diventa (R-1, V+2, G-1)
>
> 3) (R, V, G) diventa (R+2, V-1, G-1)
>
> Se esiste una coppia di colori uguali, ad esempio R=V, la ripetuta trasformazione 1) annulla R e V e rende monocromatica la popolazione dei camaleonti.
>
> Se non ci sono due numeri uguali ma una coppia di colori differisce per un multiplo di 3, ad esempio $R - V = 3k$, ripetendo k volte l'operazione 2) otteniamo che V aumenta di $2k$ e R diminuisce di k sicché alla fine risulta $R - V = 0$ e siamo ricondotti al caso precedente, con possibile contemporaneo annullamento di R e di V.
>
> Negli altri casi è impossibile l'annullamento contemporaneo di due colori perché è facile verificare che nessuna delle tre trasformazioni suindicate altera il resto modulo 3 della differenza tra due colori.
>
> CONCLUSIONE: Condizione necessaria e sufficiente perché la popolazione di camaleonti possa diventare monocromatica è l'esistenza di almeno una coppia di numeri aventi lo stesso resto modulo 3.

Che sia chiaro: la colpa di tutto quello che accade con le vostre soluzioni è di Alice, che raccoglie il tutto e fa spesso pasticci. Quindi non esitate a prendere esempio da ***Alberto*** e riportare errori e mancanze, ché correggere senza sapere di doverlo fare è difficile.

4.2 [266]

4.2.1 Cyborg!

Il Capo deve aver ripreso in mano qualche manuale di biologia e deciso di continuare a torturarci con la riproduzione. Grazie al cielo in questo problema le specie non si estinguono:

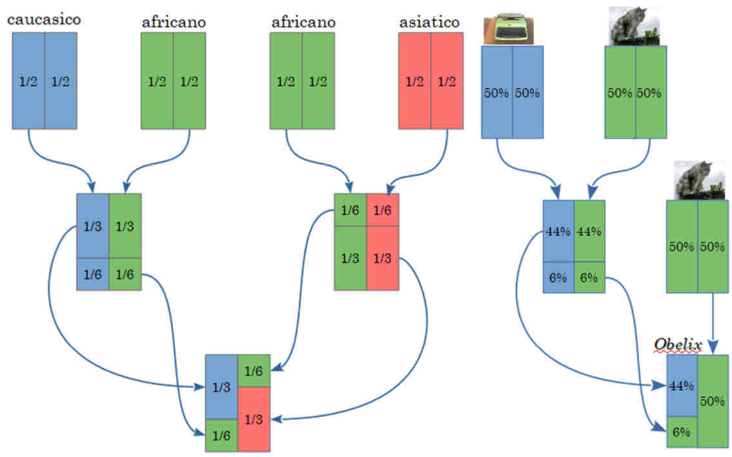
> *Il nostro gatto è 56% di una razza e 44% di un'altra. Ora, supponendo di voler riprodurre la stessa proporzione, quale dovrebbe essere la "fornitura iniziale" di rappresentanti puri di entrambe le specie, se vogliamo evitare problemi genetici dati da incroci parentali?*

Questo problema non ha avuto molti solutori, anzi, l'unico che ci ha scritto a marzo è un frustratissimo ***Valter***:

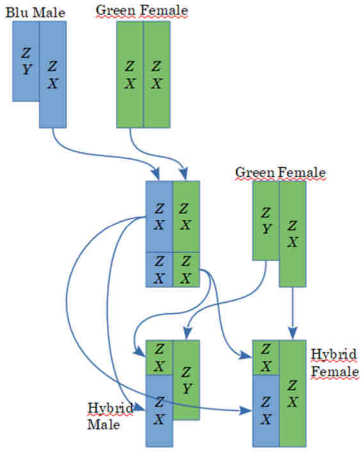
> Questa volta mi devo proprio arrendere, non ho nemmeno la pur minima idea di come sia la soluzione. Penso dipenda anche dal fatto che non conosco il metodo per calcolare le percentuali della mixture. Le mie farneticazioni mi hanno portato a pensare che al denominatore debba starci una potenza di 2.
>
> Nel caso del 56%/44%, come nei restanti, non è possibile ricondurre a tale rapporto le percentuali.
>
> Andrebbero invece bene, ad esempio:
>
> . 50%-50% = ½-½
>
> . 25%-75% = ¼-¾
>
> . 50%-25%-25% = ½-¼-¼ nel caso di "un mezzo caucasico, un quarto africano, un quarto asiatico".
>
> Se un gatto è nato da un Maine Coon e un Lettera 32 sarà geneticamente 50%-50% = ½-½ di ognuno.
>
> Se si accoppia con Maine Coon, il figlio dovrebbe esserlo per ¾ e per il restante ¼ Lettera 32. Comunque poi si proceda, le percentuali dovrebbero essere, quindi, tipo: intero / potenza di 2. Se devo proprio dirla tutta, ho anche ipotizzato un Pesce d'Aprile; ma penso sia mia ignoranza.

Con il Capo non si sa mai… potrebbe senz'altro essere un pesce d'aprile, ma la causa più probabile è che il problema sia così ben nascosto nella formulazione, che nessun altro ha trovato la voglia di affrontarlo. Però proprio alla vigilia della pubblicazione di questo numero è arrivata la soluzione di ***Franco57***:

> Comincerei dall'ultimo del maestro Martin Gardner. Con l'assunzione che ogni figlio eredita esattamente la metà del codice genetico da ciascuno dei due genitori, mi pare che bastino tre generazioni con la soluzione sotto illustrata (che auspico autoesplicativa). Segue a fianco la genealogia del cybor-gatto *Obeix*, sempre di terza generazione e il metodo è estendibile a qualsiasi percentuale *Main Coon* almeno del 50%.



Sempre con metodo molto simile, in presenza del cromosoma Y più piccolo dello X, ho preparato lo schema qui sotto dove chiamo con Z la parte di codice genetico che non è sessuale cioè non X e non Y, chiamo con ZX una metà del corredo cromosomico che dopo la meiosi contiene Z e X e analogamente ZY una metà del corredo cromosomico che contiene Z e Y. (per essere precisi Y dovrebbe essere quella parte di cromosoma Y che non può scambiarsi con X tramite il *crossing-over*).



Alla fine in tre generazioni riesco a formare (mi sento un po' il dottor Victor Frankenstein) un maschio e una femmina con qualsiasi percentuale per tipo verde maggiore o uguale al 50%.

Complimenti al nostro ***FrancoVictor***, e passiamo di corsa al secondo problema.

4.2.2 "Puzza di Ramsey"

Ogni volta che il Capo scrive Ramsey o toziente sappiamo che siamo nei guai, ma perseveriamo. Ecco il problema:

In cinque sono seduti ad un tavolo circolare da dieci in modo del tutto casuale. A richiesta si spostano tutti in senso orario dello stesso numero di posti. Per qualsiasi posizione iniziale è possibile trovare almeno un movimento di questo tipo che porta tutti a sedersi su tre sedie precedentemente occupate da altri?

Il primo è ***Alberto R.***:

22 febbraio 2021. Grande tavolata tonda con 10 sedie, 5 delle quali occupate da altrettanti commensali disposti a caso. Sono gli invitati alla cena offerta dal fantasma di Ramsey per il suo 118° compleanno.

Chiamiamo "calde" (per ovvio motivo) le 5 sedie occupate e "fredde" le altre 5.

Quando il fantasma dà il comando "via!" tutti si alzano, si spostano a destra di un posto e si risiedono. N1 di essi capiteranno su una sedia calda e 5 – N1 capiteranno su una sedia fredda. Ma non hanno il tempo di scaldarla perché arriva subito un nuovo comando "via!" che obbliga a un secondo spostamento unitario, con N2 commensali che capitano su una sedia calda, e così via.

La storia si ripete 9 volte, sicché ogni commensale assume tutte le posizioni possibili attorno alla tavola.

Consideriamo la somma S = N1+N2+….+N9

Siccome ognuno dei 5 commensali ha assaggiato tutte le 4 sedie calde diverse dalla sua di partenza, risulta S=5*4=20

Ma se la somma dei 9 numeri N1, N2, …N9 dà 20 (tenuto conto che 2*9 fa solo 18) almeno uno di essi deve essere un Nk >2. Ciò significa che lo spostamento di k posizioni porta, come richiesto, all'occupazione di almeno 3 sedie calde.

Bellissima vero? Trovo il trucco magico ogni volta che si risponde ad una diversa domanda per poter rispondere alla domanda principale. La prossima soluzione è di una new entry, ***Galluto***:

Faccio una premessa (resa forse superflua dal fatto che esplicitamente sono proibiti gli spostamenti di 0 e 10 sedie, ma perché perdere l'occasione di fare il saputello?): la domanda è se è sempre possibile che dopo lo spostamento ci siano ALMENO tre sedie che rimangono occupate; se invece la domanda è che siano ESATTAMENTE tre, la risposta è che non è possibile; ad esempio se sono occupati i 5 posti "dispari" qualunque spostamento di un numero pari di posti lascia sempre occupate tutte le 5 iniziali, e ogni spostamento di un numero dispari le svuota tutte e 5.

Detto questo…

- Chiamo Capotavola il posto numero 1 e 2, 3, … i successivi in senso orario; solo, stabilisco io quale è il Capotavola in base ai posti occupati.
- Così facendo, potrò sempre scegliere il Capotavola in modo che siano occupati più posti dispari che posti pari
- Se i posti dispari occupati sono 4 o 5, basta che tutti si spostino di un numero pari di posti e il problema è risolto
- Se i posti dispari occupati sono 3, sempre scegliendo opportunamente dove piazzare il Capotavola, potrò sempre ricondurre la situazione ad uno dei due casi seguenti
    - (a) I posti dispari occupati sono 1 – 3 – 5
    - (b) I posti dispari occupati sono 1 – 5 – 9
- Per ciascuno dei 2 casi gli altri due posti occupati sono posti "pari" e ovviamente le combinazioni sono 10, che divido in due cinquine
    - (a) Coppie "vicine": 10-2; 2-4; 4-6; 6-8; 8-10
    - (b) Coppie "lontane": 2-6; 4-8; 6-10; 8-2; 10-4
- Per tutti i casi a-a lo spostamento di due posti (o di otto) lascia occupate due delle sedie dispari e una delle sedie pari
- Stessa cosa avviene per tutti casi b-b con uno spostamento di quattro posti (o di sei)
- Rimangono i casi a-b e b-a, dove la soluzione è meno generica (in **grassetto** le sedie che rimangono occupate):

Casi a-b:

Situazione di partenza					Spostamento	Situazione di arrivo				
1	**2**	**3**	5	**6**	1 posto	**2**	**3**	4	**6**	7
1	3	**4**	5	**8**	3 posti	**4**	6	7	**8**	**1**
1	3	**5**	**6**	**10**	5 posti	**6**	8	**10**	**1**	**5**
1	**2**	3	**5**	**8**	7 posti	**8**	9	10	**2**	**5**
1	**3**	**4**	5	**10**	9 posti	**10**	2	**3**	**4**	9

Casi b-a:

Situazione di partenza					Spostamento	Situazione di arrivo				
1	**2**	5	9	**10**	1 posto	**2**	3	6	**10**	**1**
1	**2**	**4**	**5**	9	3 posti	**4**	**5**	7	8	**2**
1	**4**	5	**6**	**9**	5 posti	**6**	**9**	10	**1**	**4**
1	**5**	**6**	**8**	9	7 posti	**8**	2	3	**5**	**6**
1	5	**8**	**9**	**10**	9 posti	**10**	4	7	**8**	**9**

Benvenuto al nostro nuovo solutore! Vediamo la versione di ***Valter***:

A mio avviso per qualsiasi posizione iniziale, è possibile trovare almeno un movimento "sincrono".

Prima di mostrarlo; alcune notazioni che dovrebbero agevolarmi nell'esposizione e a semplificarla:

- numero le dieci sedie con gli interi da zero sino a nove, nelle configurazioni che sono mostrate

- “1” inizialmente sulla sedia uno è seduto uno dei cinque colleghi; dopo lo spostamento si libera

- “1” dopo il movimento “sincrono” è, nuovamente, occupata da uno dei colleghi

- “L” la sedia, nella disposizione sequenziale mostrata, è inizialmente libera

- “^{9}” la sedia è occupata dal collega seduto, in precedenza, sulla numero nove

- “${}_{3}$” il collega, dopo lo spostamento “sincrono”, va a sedersi sulla sedia tre

- “0_3” significa che la sedia zero è occupata e lo spostamento di tre posti lo colloca alla tre

- “${}^{7}0_3$ come prima solo che la zero viene occupata poi da quello sulla sette, invece di liberarsi

- ….

Provo ora a mostrare che esiste sempre almeno un movimento “sincrono”:

- non possono esserci quattro colleghi affiancati; ad esempio “0_1-${}^{0}1_2$-${}^{1}2_3$-${}^{2}3_4$-${}^{3}4_5$-L-L-L”

- con tre vicini è possibile trovare un movimento “sincrono”; a seguire tutti i casi

-- “L-1_2-${}^{1}2_3$-${}^{2}3_4$-^{4}L-5_6-${}^{5}6_7$-^{6}L-L-L”

-- “L-1_3-2_4-${}^{1}3_5$-^{2}L-${}^{3}5_7$-L-${}^{5}7_9$-L-^{7}L”

-- “L-${}^{8}1_4$-2_5-3_6-^{1}L-${}^{2}5_8$-^{3}L-L-${}^{5}8_1$-L”

-- “^{0}L-${}^{6}1_6$-L-L-${}^{9}4_9$-5_0-${}^{1}6_1$-L-L-${}^{4}9_4$”

-- i restanti equivalgono ai primi tre considerati in senso antiorario e poi rigirati in orario.

Alcune considerazioni “an passant”:

- con stessa configurazione, un “sincrono” nei due sensi ha uguale numero di sedie già occupate

- un movimento di n posti in senso orario, si può ottenere, pure, con uno di 10-n in antiorario

- per sapere la sedia occupata dopo lo spostamento bisogna sommare a quella di partenza n mod10

- il numero di sedia precedente occupate vale per la configurazione che inverte libere/occupate.

Ora resta da mostrare che esiste sempre un movimento “sincrono” senza tre o quattro consecutivi:

- quattro si ottengono invertendo libero/occupato e orario/antiorario nelle ultime due di prima

- “${}^{8}0_2$-L-${}^{0}2_4$-L-${}^{2}4_6$-L-^{6}L-7_9-8_0-^{7}L”

- “0_2-^{1}L-${}^{0}2_4$-L-${}^{2}4_6$-L-^{4}L-7_9-L-${}^{7}9_1$”

- altri due si ottengono dai due precedenti visti in senso antiorario e poi rigirati in orario

- “${}^{5}0_5$-${}^{6}1_6$-L-3_8-L-${}^{0}5_0$-${}^{1}6_1$-L-^{3}L-L”

- “${}^{8}0_2$-L-${}^{0}2_4$-L-${}^{2}4_6$-L-${}^{4}6_8$-L-${}^{6}8_0$-L”.

Speriamo di non aver perso nessun colore… lasciamo la parola a ***trentatre***:

In una tavola rotonda con N posti e K persone sedute in ordine qualsiasi esiste almeno una rotazione sincrona di tutte le persone per cui il numero di posti che permangono occupati è maggiore o uguale di

[1] $\lceil K(K-1)/(N-1) \rceil$.

Nel nostro caso $N=10$, $K=5$ si ha $\lceil 20/9 \rceil = 3$, che risponde al problema.

Numeriamo i posti con $(1,2,\ldots N)$ e siano

$(P_1, P_2, \ldots P_K)$ i posti occupati all'inizio

d_{ab} distanza (numero di posti in senso orario) da P_a verso P_b

$R(m)$ una rotazione oraria sincrona di m posti

D insieme di tutte le distanze d_{ab} per ogni coppia ordinata (P_a, P_b).

Valgono le

[2] d_{ab} è un numero in $(1, 2, \ldots N-1)$ e vale $d_{ab} + d_{ba} = N$

[3] D contiene $K(K-1)$ numeri

- ad ognuno dei K indici a corrispondono $(K-1)$ indici b

[4] la rotazione $R(d_{ab})$ porta P_a in P_b e quindi mantiene almeno un posto

[5] se il numero m compare q volte in D, la rotazione $R(m)$ mantiene almeno q posti

- le diverse distanze $d_{ab} = m$ corrispondono a coppie di persone diverse.

Applichiamo il *principio della piccionaia* (o *dei cassetti*): se x piccioni si infilano in y buchi, almeno un buco contiene $\lceil x / y \rceil$ piccioni

- i piccioni sono le distanze in D: $x = K(K-1)$

- i buchi sono i valori possibili $(1, 2, \ldots N-1)$: $y = N-1$

- quindi esiste un m che compare $\geq \lceil K(K-1)/(N-1) \rceil$ volte in D e $R(m)$ mantiene lo stesso numero di posti.

Il risultato dipende solo da N e K e vale per ogni disposizione iniziale delle K persone.

Prima di concludere, vediamo la soluzione di ***Franco57***, che ha deciso di adottare lo stesso metodo di tortura del Capo sul povero estensore di queste note:

Effettivamente, per qualsiasi posizione iniziale è possibile trovare almeno un movimento "sincrono" che porti a sedere su tre sedie precedentemente occupate da altri. Si può vedere con un po' di pazienza accorgendoci che delle possibili $\binom{10}{5} = 252$ disposizioni di 5 commensali in una tavola da 10, a meno di rotazioni e riflessioni, che non influiscono evidentemente sulla soluzione, ne rimangono alla fine solo le 16 seguenti, in cui ho riportato per ciascuna di esse uno spostamento sincrono circolare che garantisca almeno 3 coincidenze di posto occupato sia prima che dopo:

Gruppi di persone accanto	Formazione a sedere (cerchio pieno se posto occupato)	Spostamento circolare	Coincidenze di posto
5	●●●●●○○○○○	+1	4
4+1	●●●●○●○○○○	+1	3
	●●●●○○●○○○	+1	3
3+2	●●●○●●○○○○	+1	3
	●●●○○●●○○○	+1	3
3+1+1	●●●○●○●○○○	+2	3
	●●●○●○○●○○	+3	3
	●●●○●○○○●○	+2	3
	●●●○○●○●○○	+5	4
2+2+1	●●○●●○●○○○	+3	3
	●●○●●○○●○○	+3	3
	●●○○●●○●○○	+4	3
	●●○○○●●○●○	+5	4
2+1+1+1	●●○●○●○●○○	+2	3
	●●○●○●○○●○	+2	3
1+1+1+1+1	●○●○●○●○●○	+2	5

Ho trovato però una soluzione più brillante che scrivo di seguito. Soprattutto è interessante perché porta alla generalizzazione per k persone sedute a un tavolo circolare da n posti. Si tratta di osservare che qualsiasi sia la configurazione scelta dai k colleghi, applicando tutte le $n-1$ possibili rotazioni sincrone, ciascuno di essi si troverebbe prima o poi, e solo per una volta, al posto prima occupato da ciascuno degli altri. Quindi in media il numero di sedie che rimangono occupate dopo una rotazione vale $\frac{k(k-1)}{n-1}$ indipendentemente dalla configurazione iniziale. Poiché non tutte le rotazioni possono stare sotto la loro media, almeno per una di esse il numero di sedie che rimangono occupate deve essere maggiore o uguale a questo numero, cioè maggiore o uguale all'intero superiore che scriviamo con la notazione classica $\left\lceil\frac{k(k-1)}{n-1}\right\rceil$.

Per k=5 e n=10 ritroviamo la garanzia delle nostre 3 sedie ancora occupate per almeno una rotazione, infatti $\left\lceil\frac{5\cdot 4}{9}\right\rceil = \left\lceil\frac{20}{9}\right\rceil = 3$.

Per 50 posti occupati su 100 la formula ci garantisce 25 sedie ancora occupate dopo opportuna rotazione, quindi un quarto, e in generale se le sedie occupate sono una certa frazione f la soglia fornita dalla funzione è circa[22] la percentuale f^2 di tutte sedie, almeno questo è sicuramente vero al limite, al crescere del numero di sedie all'infinito, poiché $\frac{\left\lceil\frac{fn(fn-1)}{n-1}\right\rceil}{n} \to f^2$.

E anche in questo caso speriamo di non aver perso niente. Ci fermiamo qui. Scriveteci ancora, alla prossima!

5. Quick & Dirty

In che base 11111 è un quadrato perfetto?

6. Pagina 46

Il nostro scopo è di trovare due numeri a e b tali che $p = a^2 - b^2$, ossia per cui:

$$p = (a + b)(a - b).$$

Essendo p primo, l'equazione precedente implica che:

$$a + b = p \text{ e } a - b = 1.$$

Quindi, deve essere

$$a = (p + 1)/2 \text{ e } b = (p - 1)/2.$$

Essendo p un numero dispari, entrambe le frazioni origineranno numeri interi e quindi p può essere espresso come differenza di due quadrati in un solo modo:

$$p=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

[22] Sperimentalmente si vede che in prevalenza è l'intero superiore e negli altri casi l'intero inferior.

7. Paraphernalia Mathematica

...nel caso siate distratti, questo pezzo è la prosecuzione di quello del mese corso, che si intitolava "Comincia a fare caldo...".

7.1 ...quindi parliamo di (orsi) polari

No, non proprio orsi, anche se rischiano di diventare delle brutte bestie, se non fate attenzione. Ma cominciamo con un breve riassunto della puntata precedente.

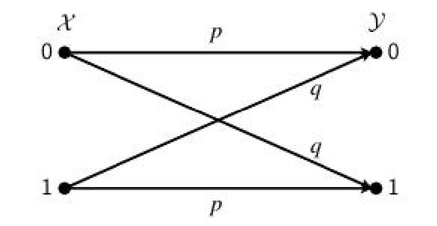
Se consideriamo una sorgente di informazioni ***X*** come un insieme di simboli di un alfabeto generati con una frequenza $p(x)$, la quantità di informazione generata può essere definita attraverso l'***entropia di Shannon***:

$$H(x) = -\sum_x p(x)\log_2 p(x)$$

Un esempio semplice in questo campo è una sorgente in grado di trasmettere due simboli nell'alfabeto {0, 1} con probabilità rispettivamente p e $1-p$. In questo caso specifico,

$$H(x) = -p\log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p)\ .$$

$H(X)$ è allora una misura della libertà che ha la sorgente di generare messaggi: se $p = 1$ o $p = 0$, la nostra sorgente genererà sempre lo stesso simbolo, e la sua entropia varrà zero; se, invece, $p = 1/2$, entrambi i simboli saranno equiprobabili, la sua entropia sarà massima e la sorgente sarà altamente informativa.



9 *BSC(p).*

L'entropia viene normalmente misurata in bit per simbolo ma, se consideriamo la generazione di un simbolo per unità di tempo, possiamo misurarla anche come bit al tempo, e quindi considerarla come una misura della velocità alla quale l'informazione viene generata.

Tutto bene, ma non abbiamo considerato cosa succede se il canale ha un *rumore*. Ossia se sul mio canale W trasmetto il simbolo[23] x ma ricevo il simbolo y. In figura, abbiamo un *Canale Simmetrico Binario* (Binary Symmetric Channel) che "azzecca" la trasmissione con probabilità p e lo sbaglia con probabilità $q = (1-p)$. Il nostro problema è calcolare la velocità alla quale possiamo trasmettere le nostre informazioni in modo da minimizzare l'errore.

Per risolvere questo problema Shannon ha definito il concetto di ***entropia informatica***; se X è una sorgente i cui simboli sono trasmessi attraverso W e Y è la destinazione, dobbiamo tener conto della probabilità $p(x, y)$ indicante la frequenza con cui trasmetto x e ricevo y e della probabilità (condizionata) $p(x\,|\,y)$ di ricevere y posto che si sia trasmesso x: possiamo calcolare le *entropie condizionali*:

$$H(X|Y) = -\sum_{x,\,y} p(x, y)\log_2 p(x|y)$$

$$H(Y|X) = -\sum_{x,\,y} p(x, y)\log_2 p(y|x)$$

In particolare, ci interessa $H(X\,|\,Y)$, che Shannon chiama *ambiguità* (*equivocation*), ossia la *media di* $H(X\,|\,y)$ *su tutti i simboli ricevuti* y:

$$H(X \vee Y) = \sum_y p(y)\,H(X|y)$$

[23] Introduciamo in nota una complicazione: "x" e "y", a tutti gli effetti, sono caratteri dell'alfabeto di canale, non necessariamente della "lingua che parla X".

Se pensiamo all'entropia come misura dell'incertezza, l'ambiguità misura l'incertezza che abbiamo nella ricostruzione dei simboli inviati o, equivalentemente, alla quantità di informazione persa nella trasmissione.

Vediamo un esempio in due parti.

Per cominciare, consideriamo un canale $BSC(1)$, ossia un canale perfetto per cui $x = y$, per il quale riceviamo sempre il segnale corretto: allora, $p(x|y) = 1$ (se $y = x$) e $p(x|y) = 0$ in tutti gli altri casi. In questo caso, l'ambiguità vale zero e il nostro canale è perfetto.

Adesso, cambiamo canale, considerando un $BSC(1/2)$, nel quale riceviamo 0 o 1 indipendentemente dal segnale trasmesso. Non possiamo stabilire che simbolo sia stato trasmesso e si vede che è $H(X|Y) = H(X)$.

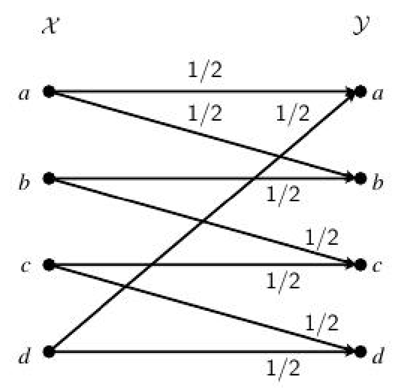
Tutto più chiaro? Bene, perché quello che ci interessa è la differenza $H(X)–H(X|Y)$, ossia quanta informazione riesca a trasmettere il nostro canale. Shannon quindi descrive la ***capacità*** di un canale W con rumore come il massimo valore assunto su tutto l'alfabeto trasmissivo di:

$$I(W) = \max_x \left[H(X) - H(X|Y) \right]$$

Per restare sugli esempi facili: se $W = BSC(1)$, allora $I(W) = 1$, e questo succede quando i nostri due segnali (0 e 1) appaiono con pari frequenza: il nostro canale è perfetto e la capacità è di un bit per simbolo. Al contrario, se $W = BSC(1/2)$, avremo $I(W) = 0$, e quindi il canale non trasmette informazione.

La parola "capacità" è giustificata dal cosiddetto ***Teorema Fondamentale dei Canali con Rumore***: "Se X è una sorgente la cui entropia è non superiore alla capacità del canale W, ossia per cui è $H(X) \leq I(W)$: in questo caso esiste una codifica (di canale) che permette di rendere l'errore di trasmissione arbitrariamente piccolo; se, al contrario, $H(X) > I(W)$, questa codifica non esiste".

La cosa sembra piuttosto controintuitiva, proviamo a chiarirla con un esempio. Consideriamo un canale W con input e output $X = Y = \{a, b, c, d\}$ con le probabilità di trasmissione indicate in figura.



10 *Un canale "balordo".*

Con un po' di calcoli, si vede che (come al solito) il massimo di $I(W)$ si ha per l'equiprobabilità dei simboli, e quindi $H(X) = 2$, il che significa che la nostra ambiguità vale $H(X|Y) = 1$ e quindi la capacità del canale diventa $I(W) = 1$.

Se il nostro alfabeto di sorgente è $\{0, 1\}$ (con simboli equiprobabili) con $H(X) = 1$, allora il Teorema di Shannon ci dice che possiamo ottenere un livello di errore arbitrariamente piccolo, e questo è possibile, ad esempio, attraverso la codifica $0 \to a$ e $1 \to c$: infatti, se arrivano "a" o "c" il nostro canale "ha scritto giusto, e riceviamo il segnale corretto; se il canale "sbaglia" e riceviamo "b" o "d", sappiamo comunque che questi errori sono generabili solo da una trasmissione "0" (per "b") o "1" (per "d"), e il nostro canale diventa perfetto! In pratica, *un canale con rumore può trasmettere senza errori se usa solo un **sottoinsieme** dei caratteri disponibili.*

Adesso arriva la brutta notizia: il Teorema di Shannon ci dice che esiste un codice, ma *non ci dice qual è*. Il che, capirete, è seccante.

Prima di trovare la soluzione, vediamo lo stesso canale di prima, il $BSC(p)$: $\{0, 1\} \to \{0, 1\}$: ci sono due misure che possono essere interessanti.

Tanto per cominciare, ci interessa la ***capacità*** $I(W)$: si vede che il massimo della capacità si raggiunge per $p(x) = 1/2$ per tutti gli x, ossia se "0" e "1" possono essere trasmessi in modo equiprobabile.

Qualche calcolo basato sulle probabilità condizionate ci porta alla conclusione

$$I(W)=\sum_{x,y}\frac{1}{2}p(x|y)\log_2\frac{p(x|y)}{\frac{1}{2}p(y|0)+\frac{1}{2}p(y|1)}$$

...che ha l'aria di una brutta bestia, ma ci permette di esprimere *tutto in funzione della probabilità condizionata* $p(x\,|\,y)$. E, per il caso in esame, abbiamo:

$$I(BSC(p))=1-H(p)=1-p\log_2(p)-(1-p)\log_2(1-p)$$

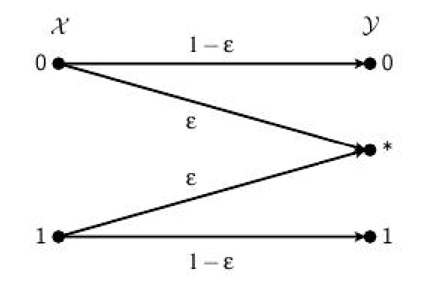
Ma c'è un altro parametro importante, che considera l'***affidabilità*** del canale: questa la possiamo considerare in prima istanza come la quantità $p(y\,|\,0)p(y\,|\,1)$, ossia con quanta sicurezza, avendo ricevuto y, possiamo determinare il valore "vero"?

In realtà, si usa il cosiddetto ***Parametro di Bhattacharyya***, di poco più complicato[24]:

$$Z(W)=\sum_{y}\sqrt{p(y|0)p(y|1)}$$

Vediamo un altro tipo di canale, noto come *canale binario a cancellazione* (***BEC***: Binary Erasure Channel), definito come W: $\{0,\ 1\}\rightarrow\{0,\ *,\ 1\}$ e rappresentato nella figura: in pratica, in uscita dal canale abbiamo o il simbolo "giusto" o un simbolo (indicato dall'asterisco) talmente incomprensibile che non possiamo far altro che buttarlo via; i parametri fondamentali vengono ad essere:

$$I(BEC(\epsilon))=1-\epsilon$$
$$Z(BEC(\epsilon))=\epsilon$$



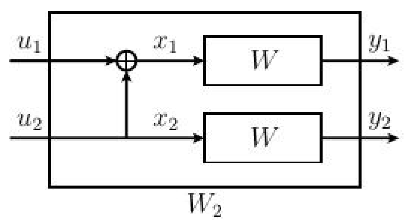
11 *Un canale che cancella.*

...e dovrebbe essere immediato calcolare i valori estremali della capacità in funzione di ε.

Bene, questa era l'introduzione. Possiamo partire con questo pezzo.

Infatti, l'argomento che abbiamo in mente sin dal mese scorso sono i *codici polari*: questi sono costruiti attraverso un processo ricorsivo, e infatti procederemo in due tappe.

Consideriamo un canale W, che "raddoppiamo" in un canale *vettoriale* formato da due copie identiche di sé stesso W_2: $X^2\rightarrow Y^2$, dove con il "quadrato" abbiamo indicato il fatto che i nostri due canali possono portare informazioni indipendenti, e quindi è come se avessimo "un canale doppio".



12 *Un canale "strano".*

Il nostro canale "grosso" riceve un input (vettoriale) $(u_1,\ u_2)$, ma l'ingresso vero e proprio è dato da una combinazione lineare dei due; in pratica, $x_1 = XOR(u_1,\ u_2)$, $x_2 = u_2$. Lo schema logico è indicato nella figura qui di fianco.

Questo ci dà le probabilità di trasmissione:

$$W_2((y_1,\ y_2)|(x_1,x_2))=W(y_1|XOR(u_1,u_2))\,W(y_2,u_2)$$

...e, siccome $I(W_2) = 2I(W)$, vediamo anche che non abbiamo perso capacità.

Da questo aggeggio possiamo ottenere due canali:

$$W_2^{(1)}=X\rightarrow Y^2$$
$$W_2^{(2)}=X\rightarrow Y^2\times X$$

Le cui probabilità di transizione risultano piuttosto complesse, ma permettono di dimostrare che:

[24] Per ogni singolo simbolo, è una *media geometrica*, quindi se ad esempio il vostro alfabeto fosse ternario la radice diventerebbe cubica; notate anche che tiene conto della possibilità che il canale sia asimmetrico.

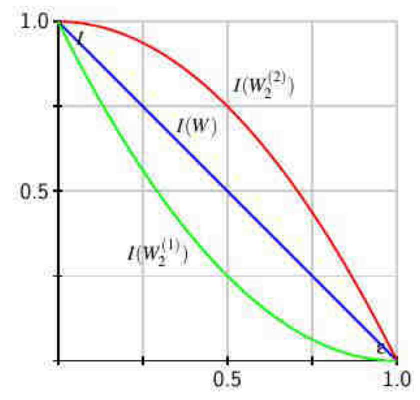
$$I\left(W_2^{(1)}\right)+I\left(W_2^{(2)}\right)=I\left(W_2\right)=2I\left(W\right)\ ,$$

ossia la capacità totale si mantiene, anche se viene *ridistribuita*:

$$I\left(W_2^{(1)}\right)\leqslant I\left(W\right)\leqslant I\left(W_2^{(2)}\right)$$

In pratica, il canale (1) “cede” parte della sua capacità a (2), tendendo a diventare un canale inutile ma avvicinando (2) a un canale perfetto!

La cosa risulta particolarmente evidente per il nostro canale a cancellazione, il ***BEC***; facendo i conti, si vede che per quanto riguarda il canale (1), su nove[25] combinazioni ce ne sono cinque che non permettono di ricostruire l’input; non solo, ma la capacità risulta ***minore*** del canale *W* mentre il parametro di Bhattacharyya risulta ***maggiore***: se ricordate, “Il PdB maggiore è *male*”.

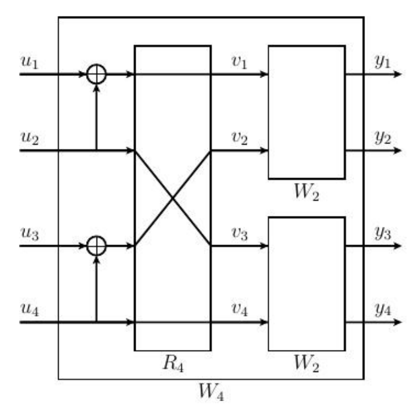


13 *In media, non cambia niente.*

Ma ***esattamente l’inverso*** succede per il canale (2): qui, ***I*** sale, e *Z* scende, il che è bene: in funzione del parametro ε (ossia, della probabilità che un simbolo in ingresso diventi una cancellazione), vedete il comportamento dei due canali (confrontati con l’originale) nella figura qui di fianco.

Il che è bene, perché in pratica riusciamo a costruire un canale “quasi perfetto” (2) a spese del canale (1).

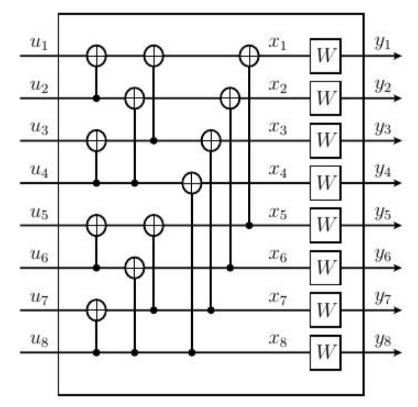
Suppergiù la stessa cosa succede con i canali *BSC*, anche se la figura diventa molto meno impressionante.



14 *Di poco più complesso.*

Bene, questo era il primo passo: siamo partiti da due copie di un canale e abbiamo costruito due canali *polarizzati*, uno dei quali è “quasi inutile” mentre l’altro diventa “quasi perfetto”. A questo punto, l’idea potrebbe essere quella di proseguire, e mettere altri canali. Ed è esattamente quello che fa ***Erdal Arikan***.

La costruzione procede in modo *ricorsivo*: per metterla in modo formale, se *N* è una *potenza di* 2, possiamo costruire il canale W_N: $X^N \rightarrow Y^N$ a partire da due copie del canale $W_{N/2}$, secondo lo schema indicato nella figura qui di fianco, dove viene creato W_4 a partire da due copie di W_2.



15 *Otto in un colpo!*

La cosa sembra complicata, ma se sorvoliamo sulla logica e ci basiamo solo sui risultati (“sprecando un po’ di macchinario” per fare le cose semplici), vediamo che la struttura di W_8, costruita solo a partire dai blocchi *W*, ha una sua innegabile potenza estetica. La trovate nella figura qui di fianco.

Formalmente, quello che Arikan ha dimostrato è che: *dato un* $\delta\in(0,1)$*, al crescere di N tra le potenze di 2, la frazione dei canali soddisfacente* $I\left(W_N^{(i)}\right)\in[1-\delta,1]$ *approssima I(W). Nello stesso modo, la frazione di canali soddisfacente* $I\left(W_N^{(i)}\right)\in[0,\delta]$ *approssima* 1–*I*(*W*).

[25] Ricordate che il BEC ha tre simboli {0, *, 1}, ed è un canale da *X* in Y^2, quindi nove combinazioni tra ingresso e uscita.

Da un punto di vista pratico, i canali che guadagnano capacità e affidabilità sono quelli con gli indici maggiori: *potendo scegliere*, quali canali usereste, quindi? Bene, la buona notizia è che potete scegliere e che, aumentando la complessità di calcolo, potete trasformare il vostro canale in una serie di canali quasi perfetti, il che è quello che Shannon diceva che si può fare (ma non ci diceva come).

"Carino, Rudy, ma a cosa serve?" La sigla "5G", vi dice qualcosa? Ecco, quello.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms