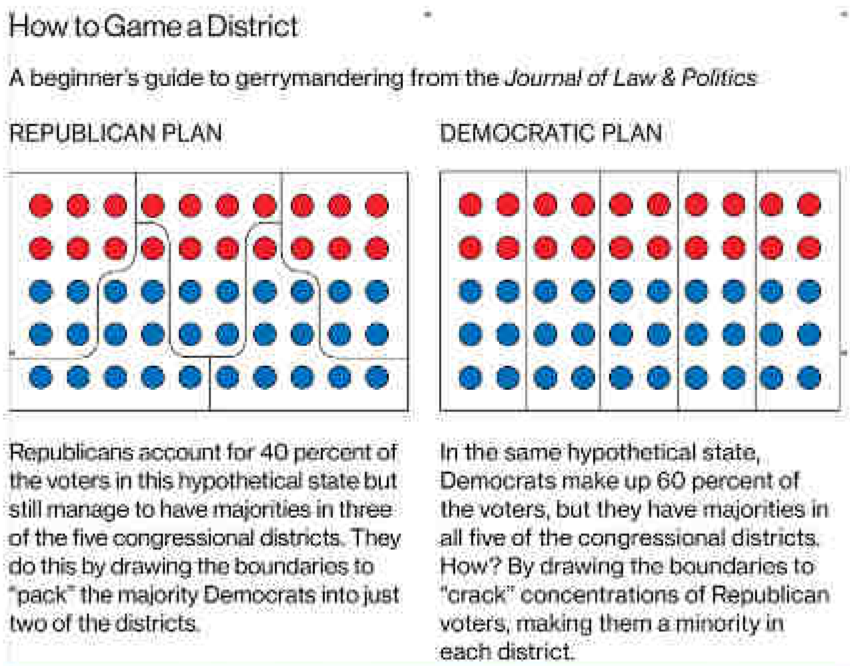
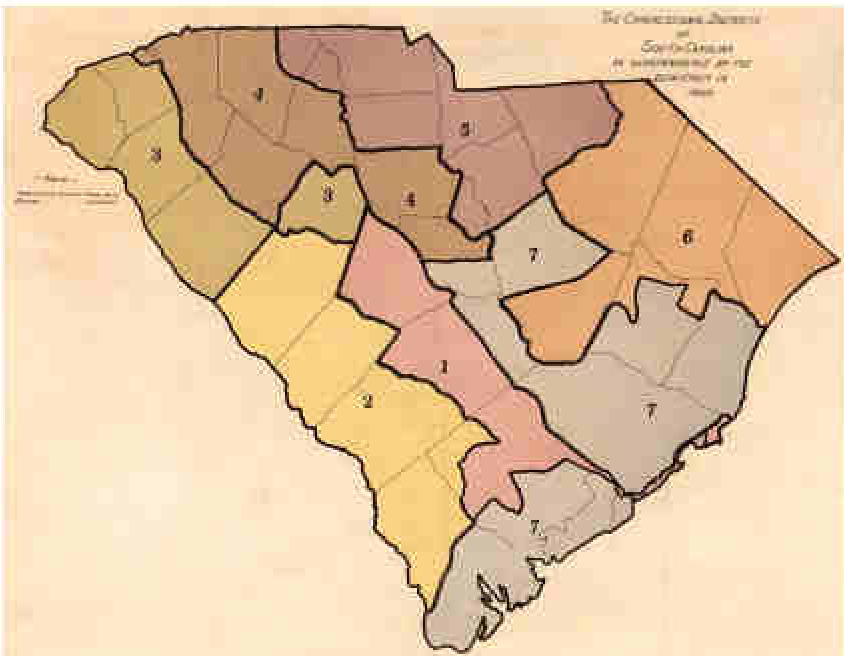
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 263 – Dicembre 2020 – Anno Ventiduesimo





Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM261 ha diffuso 3'303 copie e il 28/12/2020 per Google eravamo in 33'800 pagine.

Ad ogni elezione americana restiamo affascinati dal fenomeno del *gerrymandering*: il ***Journal of Law & Politics*** ha, finalmente, pubblicato una spiegazione matematicamente corretta. E, affinché non crediate sia una prerogativa dei tempi moderni o di una ben precisa parte politica, guardate cosa hanno combinato i Democratici nel 1882 in South Carolina... Manca solo la ridente contea di MöbiusRing, poi siamo a posto...

1. Vite difficili

"La logica non fa altro che sancire
le conquiste dell'intuizione."

Quando si parla dell'Unione Europea, dei vantaggi o svantaggi che essa comporta, è inevitabile che i sostenitori dell'idea di un'Europa unita sottolineino l'importanza dei proverbiali "settanta anni di pace". L'espressione ha certo qualche debolezza implicita; tanto per cominciare, i settanta anni sono ormai diventati settantacinque, visto che il computo tradizionale parte dalla fine della Seconda Guerra Mondiale, nella primavera del 1945; poi, inevitabilmente, c'è chi si premura di far notare che il generico termine "pace" è usato forse con troppa leggerezza, visto quanto è successo nell'ultima decade del secondo millennio in quella che una volta si chiamava Jugoslavia, le guerricciole sparse per il mondo che comunque hanno visto l'attiva partecipazione di diverse nazioni europee, e il tutto senza neanche dover affaticarsi troppo a capire se la "guerra fredda" del secondo dopoguerra possa realmente chiamarsi "pace".

1 *Moneta celebrativa in argento da 10 euro per i 70 anni di pace in Europa.*

Pur con tutte queste precisazioni, resta indubitabile che un lungo periodo di pace tra le maggiori nazioni europee – da sempre fucine di uno straordinario numero di massacri – ha cambiato radicalmente lo stile di vita delle persone che a quelle nazioni appartengono. È verosimile che tre quarti di secolo senza guerre rendano davvero impossibile comprendere come fosse la vita quando i conflitti si succedevano quasi a cadenza regolare: e questo non tanto durante gli effettivi anni di guerra – che quelli è facile annoverarli come drammatici e straordinari – ma proprio negli intervalli pacifici: nei militari, nei politici, e perfino nella gente comune doveva persistere una sorta di sentimento di ineluttabilità della "guerra a venire". Si parlava di "nemici naturali", di alleanze e contro-alleanze, ed è facile immaginare che durante un periodo di pace si trovasse ovvio prepararsi alla prossima guerra, quasi cantilenando il monito latino "*si vis pacem para bellum*", proprio come è naturale (e naturale per tutti, non solo per i matematici) aspettarsi un numero dispari come inevitabile successore di un numero pari. Persino il giovanissimo Regno d'Italia, la cui quasi completa unificazione (ovviamente anch'essa ottenuta a prezzo di guerre) può datarsi con la presa di Roma nel 1870[1], lascia passare a malapena una quindicina d'anni prima di lanciarsi nella sua prima guerra, quella d'Eritrea.

Ma l'Italia fa la figura della dilettante, in un contesto del genere: nel XIX secolo è appena nata, e ci sono in lizza nazioni che sono delle vere professioniste delle guerra. L'Inghilterra è lanciata nella costruzione del più grande impero del mondo, da quando è riuscita a rintuzzare la Francia di Napoleone, e lo fa senza economizzare soldati di terra e

[1] Al completamento mancano ancora, nel 1870, il Trentino e la Venezia Giulia: il processo di unificazione è interrotto proprio perché l'Austria – l'ostacolo cruciale all'unificazione – diventa alleata dell'Italia nel 1882, con la firma del trattato della Triplice Alleanza. Il patto tra Italia, Germania e Austria si sigla proprio per ragioni di interesse coloniale e quindi, in ultima analisi, belliche: la Francia aveva frustrato le ambizioni italiane sulla Tunisia che l'Italia voleva come colonia ("*Schiaffo di Tunisi*"), e per ripicca il governo italiano guidato da Depretis si allea con il nemico contro cui ha combattuto per tutto il Risorgimento.

di mare; e la Francia stessa, pur se ricondotta nei suoi esagonali limiti naturali dopo la patologica espansione napoleonica, è costretta a misurarsi sempre più spesso con i regni tedeschi. Il confine del Reno diventa rapidamente quello più instabile del pianeta, e resterà tale a lungo: non è certo un caso se poi, nella seconda metà del XX secolo, quando le acque finalmente si calmeranno un po' dopo secoli di sangue, l'Europa sceglierà proprio Strasburgo, la città simbolo di quel confine, come sede del suo Parlamento.

I rapporti tra quegli stati che oggi chiamiamo Francia e Germania non sono mai stati sereni, più o meno a partire dai tempi della spartizione dell'impero che fu di Carlo Magno. Restano su fronti opposti e nemici nelle due grandi guerre mondiali del Novecento, ma hanno già intessuto continui conflitti per gran parte dei secoli precedenti: sembra quasi un duello permanente, continuo, come dimostra il puntiglio con cui Napoleone Bonaparte, dopo la vittoria ottenuta sui campi della duplice battaglia di Jena e Auerstädt nel 1806 contro i prussiani, non tralascia di andare nella vicina Rossbach per demolire la colonna celebrativa della battaglia del 1757, quella in cui l'esercito di Federico il Grande aveva fatto strage dei francesi. Sembra esserci una guerra perenne da combattere anche attraverso i simboli, a volerla vedere con occhio benevolo; o piuttosto una ricerca accurata di ripicche, a volerla esaminare con uno sguardo più disincantato. La resa tedesca che pone fine alla Prima Guerra Mondiale si firma a Compiègne, l'11 novembre 1918, all'interno di un vagone ferroviario; ventidue anni dopo, quando la Francia cade sotto i colpi di maglio della Wermacht nel giugno del 1940, Hitler esigerà che il nuovo armistizio si firmi sempre a Compiègne, e sempre nel medesimo vagone ferroviario: lui stesso si siederà sulla poltrona che nel 1918 aveva occupato il maresciallo Foch, e ne imiterà perfino l'atteggiamento sprezzante.

2 *Gennaio 1871, Versailles: Bismarck, Favre e Thiers. Indovinate chi ha vinto e chi ha perso la guerra.*

In questa guerra di insulti simbolici, comunque, l'atto forse più significativo e sprezzante è quello che pone fine alla guerra franco-prussiana. Tecnicamente, nel 1870 la Germania non esiste ancora, ma è sufficiente la sua parte più aggressiva e militarizzata a gettare nella disperazione il velleitario Secondo Impero francese di Napoleone III. A Sedan il feldmaresciallo von Moltke distrugge l'esercito guidato dallo stesso imperatore francese, e il Cancelliere di Ferro, Otto von Bismarck, può presentarsi a Versailles da vincitore assoluto. È proprio qui, nel cuore della Francia sconfitta, che il leader prussiano fa nascere la Germania. L'Impero Tedesco, il Secondo Reich[2] con a capo il kaiser Guglielmo II, vede la luce non a Berlino o a Monaco di Baviera, ma in terra francese. Quasi a voler ribadire come un impero possa nascere solo sulle spoglie del nemico o, peggio, con l'implicita promessa che la dignità e la prosperità si ottengono dalle spoglie delle terre conquistate col sangue.

[2] Il Terzo Reich è quello, fin troppo famoso, di Adolf Hitler; quello creato da Bismarck è chiamato "secondo" perché lascia la primogenitura storica al Sacro Romano Impero, fondato nel 962 d.C. dall'altro Otto, l'imperatore Ottone I. I termini "Romano Impero" sono ovviamente indice di volontà di continuità con l'Impero Romano d'Occidente; l'aggettivo "Sacro" è stato introdotto da Federico Barbarossa. Nel 1512, Massimiliano I d'Austria specificherà ulteriormente la denominazione aggiungendo "…della Nazione Germanica", *Sacrum Imperium Romanum Nationis Germanicae*.

Tra il 1870 e il 1914 il cannone tace, sui confini franco-tedeschi marcati dal Reno. Sono quarantaquattro anni importanti, anni in cui la Germania riesce a sviluppare tutta la sua potenza culturale e industriale, anni grazie ai quali anche la Francia riesce a riprendersi, nonostante le gravissime ferite causate dalla disfatta del 1870; gli anni di pace hanno questo potere sanificante. Ma il clima guerresco, l'atmosfera di attesa di una "guerra prossima ventura" non viene mai del tutto meno; lo dimostra l'enorme impatto politico che, in Francia, genera un evento che capita giusto a metà di quei quarantaquattro anni: l'affare Dreyfus.

3 *Locandina del film "L'ufficiale e la spia" di Roman Polanski del 2019. Il titolo del film è lo stesso del romanzo di Richard Harris da cui è tratto, ma in Francia è stato distribuito con il titolo "J'accuse", con esplicito riferimento all'articolo di Émile Zola.*

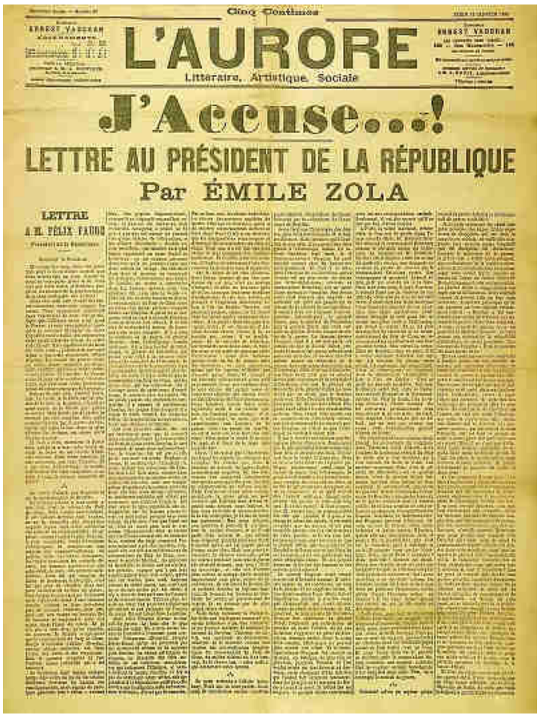
Per chi non è francese è veramente difficile comprendere quanto sia stato devastante il caso del capitano Alfred Dreyfus nella Francia a cavallo tra il XIX e il XX secolo: ha stravolto la politica della nazione e radicalmente diviso l'opinione pubblica transalpina per dodici anni. Inizia tutto nell'autunno del 1894, quando il controspionaggio francese trova delle prove di azioni spionistiche all'interno del Ministero della Guerra: i destinatari finali delle informazioni riservate sono ovviamente i tedeschi, e questo rende subito incandescente il caso, nella Francia che ancora sente bruciare le ferite dello smacco ricevuto dai prussiani vent'anni prima.

Oltre al perdurante sentimento anti-tedesco, c'è un altro fattore che contribuisce sensibilmente alla drammatizzazione del caso e, curiosamente, si tratta di un sentimento che è invece assai ben condiviso sia in Francia che in Germania[3]: l'antisemitismo. Dreyfus è infatti un ufficiale ebreo, e la combinazione dei due rancori è detonante. Alfred Dreyfus viene processato, condannato, degradato e mandato ai lavori forzati prima all'Isola di Ré, vicino a La Rochelle[4], poi definitivamente all'Isola del Diavolo, nella Guyana Francese; condanna a vita, naturalmente. Tutto avviene assai in fretta e in maniera assai poco ortodossa, come succede spesso quando sotto processo c'è un'idea, più che un atto commesso da un uomo.

Certo, non tutta la Francia è antisemita, impaurita dalla guerra, vogliosa di vendetta: c'è una parte di nazione che crede nel diritto, e trova scandaloso il modo in cui si è, di fatto, cancellata l'esistenza dell'ufficiale ebreo. Le prove a suo carico sono deboli, se non del tutto inesistenti: al massimo sono classificabili come indizi, e tutta la procedura militare che ha portato al verdetto è palesemente guidata più dal desiderio di trovare e condannare un colpevole, più che allo stabilire la verità dei fatti; e Alfred Dreyfus è perfetto, nel ruolo del colpevole. La Francia si divide: si coniano parole nuove, come "dreyfusardi" e "anti-dreyfusardi", ma sono i primi – coloro che sostengono l'innocenza di Dreyfus – ad avere la vita più difficile.

[3] E certo non solo in quei due stati, purtroppo.

[4] Al giorno d'oggi, l'Isola di Ré è un'isola solo da punto di vista strettamente geografico: un ponte di 3 chilometri la collega a La Rochelle.


Cinq Centimes

L'AURORE

Littéraire, Artistique, Sociale

J'Accuse...!

LETTRE AU PRÉSIDENT DE LA RÉPUBLIQUE

Par ÉMILE ZOLA

LETTRE A M. FÉLIX FAURE

4 *Prima pagina del giornale "L'Aurore" del 13 gennaio 1898 con il celeberrimo editoriale di Zola, la lettera al presidente Faure intitolata "J'accuse".*

La più esplicita presa di posizione a favore del capitano Dreyfus è senza dubbio quella che porta la firma di Émile Zola: è forse il più grande romanziere e giornalista francese del suo tempo, ed è stato testimone diretto dei maggiori sconvolgimenti politici e intellettuali francesi: dalla Comune di Parigi alla nascita dell'Impressionismo. Il suo "*J'accuse*" è una lettera aperta al presidente della repubblica in cui manifesta tutto il suo sdegno per il marciume costantemente presente nell'*affaire* e, col tempo, diventerà anche una sorta di simbolo, l'atto di nascita dell'intellettuale moderno che, da allora in poi, è chiamato a farsi carico, eleggersi a guardiano e megafono dell'opinione pubblica contro i detentori del potere.

Gli intellettuali infatti rispondono all'appello, ma non si può certo dire che Zola non abbia pagato a caro prezzo la sua decisa presa di posizione: viene processato per "vilipendio delle forze armate", condannato a pagare una sanzione in denaro e – soprattutto – a un anno di carcere. Per evitare la detenzione, Zola ripara in Inghilterra, e tornerà in patria solo dopo molti mesi, a seguito di un'amnistia; ma i colpevolisti sono ancora tanti e tanto potenti, e gli renderanno amari e difficili gli ultimi anni di vita. Quando Zola muore, nel 1902, il caso Dreyfus è ancora lontano dalla conclusione: anche se fin dal 1896 il maggiore Picquart[5] aveva scritto un rapporto che ne dimostrava l'innocenza; anche se nel 1899 un nuovo processo a Rennes si concluderà con l'annullamento della sentenza del 1894, Dreyfus rientra in patria ancora da detenuto[6], e dovrà attendere fino al 12 giugno del 1906, quando la Corte di Cassazione annullerà del tutto la condanna originaria e riconoscerà al capitano la sua totale innocenza. È riabilitato, non ripagato: anche se il Parlamento francese lo insignisce della Legion d'Onore, la Francia non gli riconosce i cinque anni passati all'Isola del Diavolo come anni di servizio, cosa che gli impedisce il naturale salto di carriera fino al grado di generale; e nel 1908 fu addirittura ferito in un attentato, perché i sentimenti anti-dreyfusardi erano ancora molto diffusi.

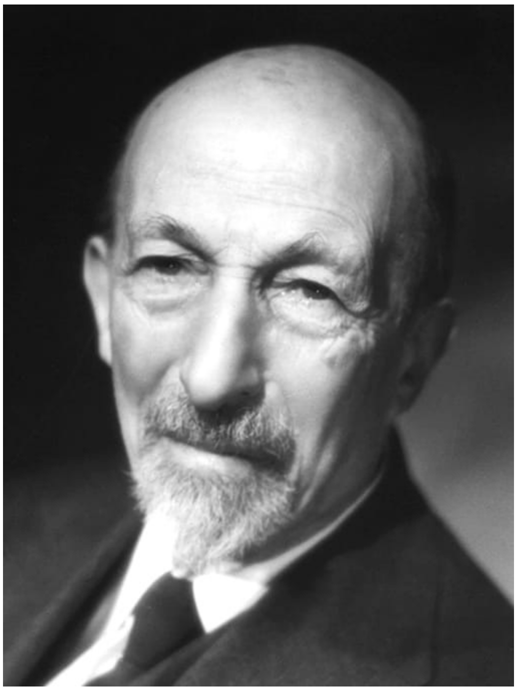
Naturalmente, schierati a fianco di Dreyfus non c'erano solo Zola e gli intellettuali che risposero alla richiesta di mobilitazione del "*J'accuse*": erano molti – anche se forse non sufficienti – quelli che ritenevano che l'ufficiale ebreo fosse più un capro espiatorio che un traditore. E naturalmente c'erano i parenti e gli amici di Dreyfus, che lo conoscevano e lo sapevano innocente: prima fra tutte Lucie, la giovane signora Dreyfus. Lucie è appena venticinquenne quando suo marito viene arrestato, e già madre di due bimbi di uno e tre anni; eppure, il sostegno che mostra e che offre al coniuge per tutti i lunghi, disperati dodici anni che dovranno passare prima della riabilitazione non verrà mai meno.

---

[5] George Picquart, ufficiale del controspionaggio, dimostra l'innocenza di Dreyfus ma il suo rapporto non viene preso in considerazione e subito dopo, per contro, Picquart viene inviato in servizio fuori dalla Francia. Dopo la pubblicazione del "*J'accuse*" viene addirittura imprigionato, e ritornerà in libertà solo grazie alla stessa amnistia che consente il rientro in patria di Zola. Anche nel suo caso la riabilitazione completa si avrà solo nel 1906, a cui farà presto seguito la nomina a generale di brigata e, poco più tardi, addirittura quella a Ministro della Guerra nel governo Clemenceau.

[6] La sentenza di Rennes annulla la precedente, ma condanna comunque Dreyfus a dieci anni di reclusione.

La famiglia di Lucie era originaria di Metz, una di quelle città di quella terra che così spesso cambiava padrone, sul confine franco-tedesco: dopo la guerra del 1870 diventa parte dell'Impero Germanico, e vedrà molte altre famiglie trasferirsi in altre zone della Francia. Non è però il caso di quella di Lucie, che si era trasferita a Parigi già all'inizio dell'Ottocento. La giovane moglie di Dreyfus si mobilita subito: scrive petizioni al parlamento e al papa, va trovare ogni giorno il marito in carcere, e quando questi sarà deportato all'Isola del Diavolo non lascerà passare un giorno senza scrivergli una lettera. Anche Lucie è ebrea: il matrimonio con Alfred è celebrato nella Grande Sinagoga di Parigi dal grande rabbino di Francia. È anche benestante, rampolla di una famiglia che commercia in diamanti; e saranno molti i parenti che si mobiliteranno per rendere l'onore ingiustamente perduto di suo marito. Tra questi, si impegnerà a fondo soprattutto un cugino che con lei condivide il cognome: Hadamard.


5 *Jacques Hadamard.*

Jacques Salomon Hadamard nasce a Versailles l'8 dicembre 1865. Al pari di Lucie, che gli è di soli quattro anni più giovane, ha un'infanzia segnata dalla situazione politica e cittadina: sono gli anni della sconfitta, gli anni in cui Parigi si ritrova affamata e insanguinata dalla repressione della Comune. Prima della resa del gennaio 1871 la città è sotto assedio da parte dell'esercito prussiano, e la gente muore di fame: il piccolo Jacques vede bruciare la sua casa e morire sua sorella Jeanne. Dopo l'assedio, la guerra civile della Comune, che si concluderà con il massacro di quarantamila[7] vittime. Un'altra sua sorellina, Suzanne, muore nel 1874 ad appena tre anni d'età.

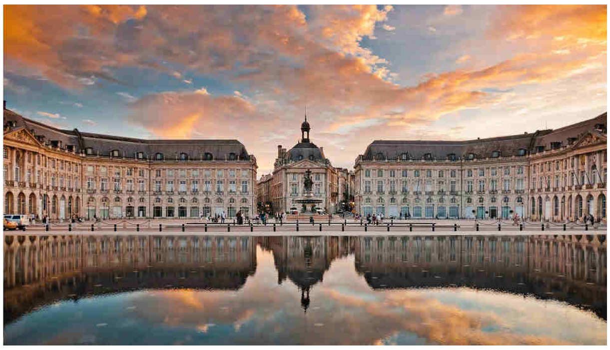
Ma la vita continua, dice il proverbio, e il giovanissimo Hadamard, quantomeno, può consolarsi con i suoi successi scolastici: è molto bravo in quasi tutte le materie, a parte… l'aritmetica. Come ricorderà spesso, ormai anziano e famoso, ai genitori preoccupati dello scarso rendimento in matematica dei loro figli, fino alla quinta elementare Jacques in matematica e scienze è un piccolo disastro. Ha però la fortuna che capita a molti studenti: quella di incontrare un bravo insegnante di matematica che riesce a mostrargli la bellezza delle scienze, e anche di quella più esatta di tutte. A ciò si aggiunge la fortuna – forse – che in quello stesso 1875 suo padre Amédée ottiene un posto al famoso liceo Louis-le-Grand, e Jacques, naturalmente, dall'anno successivo comincia a frequentare la medesima scuola. I suoi progressi sono rapidi e fruttuosi, cosicché a 17 anni si diploma in "Lettere e Scienze", e l'anno successivo esplicitamente in "Scienze"[8]. Quali che siano i titoli corrispondenti in italiano, certo è che Jacques Hadamard è ormai un giovane uomo pieno di talento: per proseguire gli studi si presenta candidato ad entrambi gli atenei più prestigiosi di Francia, l'*École Polytechnique l'École Normale Supérieure*, e risulta primo in entrambe le

[7] Il numero delle morti durante la repressione della Comune di Parigi non è mai stato accertato con sicurezza: le valutazioni più modeste parlano di almeno 20'000, ma è oggettivamente difficile arrivare ad una valutazione precisa. Del resto, come si può sperare di conoscere esattamente le vittime di una guerra civile che vede opporsi Versailles e Parigi, che la maggior parte delle persone considerano essere praticamente la stessa città?

[8] Quelli che Hadamard ottiene nel 1882 e 1883 e che noi abbiamo sommariamente tradotto con "diplomato" sono i titoli di "*Bachelier*", che corrispondono all'inglese "*Bachelor*" e vengono talvolta tradotti in italiano come "*baccelliere*" o "*baccalaureato*".

classifiche delle prove di ammissione. Sceglierà alla fine la Normale, e vi si laureerà un paio di mesi prima del suo ventitreesimo compleanno.

Ha ovviamente il taglio del ricercatore, tant'è che comincia a farlo già da studente alla Normale; continua a farlo anche dopo la laurea, quando studia per il dottorato, e nel frattempo lavora come insegnate di matematica. Il 1892 può forse ritenersi il suo "anno mirabile": ottiene l'agognato dottorato con una tesi sulle funzioni analitiche di variabile complessa, e mentre la sta completando si rende conto che può essere sviluppata per aderire al tema proposto dal Concorso Generale delle Scienze Matematiche, che quell'anno, su iniziativa di Hermite[9], sollecitava i candidati al completamento dello studio della Funzione Zeta di Riemann[10]. Ci riesce così bene che il suo lavoro, intitolato "*Determinazione del numero di numeri primi inferiori ad un numero dato*" vince il Concorso Generale. A completamento degli eventi notevoli, il 1892 è anche l'anno in cui sposa Louise-Anna.



6 *Bordeaux, piazza della Borsa.*

In realtà, il 1892 è solo il primo anno di un quinquennio particolarmente produttivo per Hadamard, e coincide con il periodo che trascorre a Bordeaux, dove è stato chiamato come lettore alla locale università. È durante questo periodo bordigalese che raggiunge il suo risultato più significativo, la dimostrazione del Teorema sui Numeri Primi. È un teorema così bello che non ha neppure bisogno di formule complesse, si può scrivere anche nel bel mezzo di una riga di testo: $\pi(N) \sim N/\log(N)$. Scegliete un numero N, domandatevi quanti numeri primi ci sono contando da 1 a N, e ringraziate Hadamard[11] che ha dimostrato che il numero cercato è comparabile al quoziente tra N e il suo logaritmo naturale. Ed è sempre in questo periodo passato sulle rive della Garonna che crea l'altro oggetto matematico che rende immortale il suo nome, le Matrici di Hadamard; e anche altre due creazioni meno matematiche, ma a lui certo più care: i figli Pierre ed Étienne.

Ma basta dare un'occhiata alle date per rendersi conto che è anche il periodo in cui prende fuoco il caso Dreyfus. Nonostante la parentela con Lucie, inizialmente Hadamard pensa che Dreyfus sia colpevole: è solo nel 1897, quando lascia Bordeaux per tornare a Parigi, che pian piano scopre la montatura costruita a carico del capitano. Da quel momento, nonostante la sua produzione matematica resti straordinaria sia per quantità che per qualità (il totale delle pubblicazioni di Hadamard supera il numero di trecento), è certamente il caso Dreyfus che lo occupa più di ogni altro impegno. Cerca di convincere chiunque; colleghi, conoscenti, ogni persona con cui entra in contatto dell'innocenza di Dreyfus, e lo fa in maniera del tutto oggettiva, senza sentimentalismi, senza palesare la passione che doveva comunque provare vista l'ingiustizia a cui era sottoposto un suo parente. La sua carriera, fortunatamente, non viene intaccata troppo dalla sua militanza dreyfusarda; il suo ritorno a Parigi era dovuto anche agli impegni accademici che nel frattempo aveva ottenuto con la Sorbona e con il Collège de France, alla pubblicazione di un libro di testo di geometria elementare. È a Parigi che nascono altri figli: ancora un maschio, Mathieu, e poi due bambine, Cécile e Jacqueline. Nel 1898 vince

[9] Il suo compleanno è "*Vite parallele*", RM095, dicembre 2006.

[10] "*Pellegrinaggio a Thule*", RM068, settembre 2004.

[11] Non dimenticate però di ringraziare anche Charles de la Vallée Poussin, che ha fatto la stessa cosa, nello stesso anno, e in maniera del tutto indipendente da Jacques Hadamard. Già che siete sulle spese, fate un sorriso di ringraziamento anche a Riemann, che è quello che ha scatenato tutto.

l'importantissimo Premio Poncelet, riceve l'apprezzamento e l'amicizia di Poincaré[12], e ottiene addirittura la presidenza della Società Matematica Francese. Quando, nel 1912, viene eletto all'Accademia Francese delle Scienze (proprio in sostituzione di Poincaré prematuramente scomparso), Hadamard appare pienamente realizzato, sia come uomo che come scienziato.

7 *Verdun.*

Ma è, appunto, il 1912. I quarantaquattro anni di pace sono quasi finiti, e si è già alla vigilia della Grande Guerra. Nel 1916 Hadamard è in Italia, a Roma, a tenere lezioni alla Sapienza su invito di Fano e Volterra[13], quando il suo primogenito Pierre muore in azione nel carnaio di Verdun. Si racconta ancora di come Volterra e Fano ricevettero la notizia dopo che Hadamard era già sulla via di ritorno verso Parigi, e provarono disperatamente – senza successo – ad avvertirlo prima che arrivasse nella capitale francese. Passano giusto due mesi, e da Verdun arriva a casa Hadamard anche la lettera che informa della morte di Étienne, nel medesimo inferno di trincee.

Come può sentirsi un padre, dopo? Ha ancora senso il lavoro, la matematica, la vita? Jacques continua a lavorare, a scrivere. Dopo la fine della guerra si delinea più marcatamente, e soprattutto per reazione al totalitarismo di Hitler si avvicina sempre più alle posizioni di sinistra; e poi scoppia la Seconda Guerra Mondiale, e Hadamard cerca di riparare negli Stati Uniti, come docente in una università americana. Non ci riesce, e gli tocca anche vedere il terzo figlio maschio morto con una divisa addosso, nel 1944.

Sopravvivere a tre figli morti in guerra è qualcosa che non si può neppure tentare di comprendere: Jacques Hadamard è ormai tutt'altro che giovane, è un ottantenne, ma ancora non è stanco. Si impegna a fondo nel Movimento per la Pace, nel 1950 finirà con il presidiarne il grande Congresso Internazionale di Cambridge, nel Massachusetts, ma le tragedie sembra costretto a viverle ancora, e non solo a ricordarle: perde anche il nipote Etienne, nel 1962, morto in un incidente alpinistico.

Jacques Salomon Hadamard ha vissuto quasi un secolo intero, dal dicembre 1865 all'ottobre 1963. È nato tra le macerie della Parigi sconfitta, pagato con le vite di tre figli le feste della Parigi vittoriosa, attraversato lo scandalo più sporco e significativo dei militari di Francia. Non ha avuto una vita facile: c'è da sperare che la matematica, in cambio di tutto quanto lui ha fatto per essa, sia riuscita a dargli almeno un po' di sollievo.

[12] "*Matematica per porcini*", RM075, aprile 2005.

[13] "*Sublimato all'un per mille*", RM136, maggio 2010.

2. Problemi

2.1 Prima o poi arriva aprile

Come sempre, abbiamo un problema. Solo che questa volta il problema è che o è un problema o una presa per i fondelli. Il titolo è giustificato dal fatto che lo abbiamo trovato in una rivista e ci hanno promesso "la soluzione con il numero di aprile". Ora, **loro** sono puntuali, nelle uscite (il primo del mese), ma non hanno specificato quale aprile intendevano... e noi non ci abbiamo capito niente.

Abbiamo due punti materiali (li trovate in ogni laboratorio di fisica, massa definita, raggio nullo): il punto B è fermo tra il punto A e il muro (uno solo, muro, la cosa è importante), e giacciono entrambi su una linea priva d'attrito; il punto A ha massa 100^n, mentre B ha massa 1. La palla A viene spinta verso quella B e contiamo gli urti.

Se n=0, A urta B e si ferma; B urta il muro e torna indietro; indi, B urta A e si ferma, mentre A si perde nell'infinito. Totale, 3 collisioni.

Se n=1, totale 31 collisioni.

Se n=5, totale 314159 collisioni.

...sembra esserci uno schema... Potete provarlo?

Prima, precauzionalmente, dateci il tempo di scappare.

2.2 Regalo di Natale

Questo Natale, con i divieti di movimento dati dal CoViD e l'impossibilità di preparare l'abituale pasto per le solite millemila persone che invitate, dovreste avere un po' di tempo libero, quindi vi diamo un problemino in più (anche perché siamo sempre più convinti che quello sopra sia un pesce di un paio di stagioni fa (quella con dentro aprile, per intenderci): "puzza".

Non sappiamo se sia o no vero, ma a quanto pare il problema che segue lo ha inventato Conway. E a noi sembra un "mezzo albero di Natale" (Niente presepe, quest'anno! È un assembramento!).

Fermo restando che a lettera diversa corrisponde cifra diversa, vi si chiede di ricavare il numero *abcdefghij* tale che:

- *a* sia divisibile per 1;
- *ab* sia divisibile per 2;
- *abc* sia divisibile per 3;
- *abcd* sia divisibile per 4;
- *abcde* sia divisibile per 5;
- *abcdef* sia divisibile per 6;
- *abcdefg* sia divisibile per 7;
- *abcdefgh* sia divisibile per 8;
- *abcdefghi* sia divisibile per 9;
- *abcdefghij* sia divisibile per 10.

...no, niente forza bruta: a Natale son tutti più buoni, anche gli algoritmi (forse solo un pochino, verso la fine... Quando ormai è Santo Stefano).

2.3 Dalla Cisleuthania alla Transnistria

...che non ci risulta siano poi così distanti.

Se volete tener buono Doc, dategli una sedia comoda e un *atlante*. Lo vedrete, perso con sguardo felice, compulsarne ogni pagina in improbabili ricostruzioni della Via della Seta o di epiche Anabasi, con temporanee digressioni sui luoghi non necessariamente lungo la strada che comunque "meritano la deviazione".

In assenza dell'atlante vero e proprio, anche un vecchio atlante stradale (non necessariamente limitato al terzo pianeta) va bene; ma qualche tempo fa, in affettuosa compagnia di un esemplare del genere talmente vetusto che, come usa dire Rudy, "La Via Domitia era segnata come in fase di progetto", il Nostro aveva l'aria piuttosto sconsolata.

Resisi conto della situazione, la parte restante dei Rudi cercava di raccogliere qualche informazione: il discorso che ne è sortito è riassumibile in poche parole.

Se mai avete provato a seguire un percorso su un atlante, vi sarete resi conto che dovete spesso saltare dei "pacchi" di pagine (soprattutto se andate da nord a sud... ma lasciamo perdere); la cosa è particolarmente seccante, e ci si chiedeva se fosse possibile eliminarla o, al limite, minimizzarla.

Giusto per statuire il nostro problema: abbiamo l'atlante stradale di una nazione sostanzialmente quadrata e composto da cento pagine (il che significa un po' quel che volete: potrebbero essere pagine doppie con il numero da una parte sola, o entrambe le pagine numerate... Insomma, come volete); la nostra nazione può quindi essere considerata un quadrato di 10×10 pagine. Secondo voi, è possibile costruire un atlante in modo tale che debba sempre girare una sola pagina? E, se la risposta è "no", qual è il valore cui non potrà mai essere inferiore il valore della distanza massima tra due mappe adiacenti nella realtà, ma non nell'atlante?

3. Bungee Jumpers

Sia S_n la somma dei primi n numeri primi; provate o smentite l'affermazione che per qualsiasi valore di n esiste sempre un quadrato tra S_n e S_{n+1}.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Dicembre!

Quasi finito, questo 2020. Per fortuna, direi, visto che non ha portato molto di buono. Malgrado la mancata incoronazione del trio redazionale, almeno per il momento, si può seriamente parlare di un anno di eventi cancellati e videoconferenze, dove piattaforme di condivisione hanno preso il sopravvento, abbiamo smesso di stringere la mano agli sconosciuti e non ci siamo più visti se non attraverso schermi. Ma dopotutto RM è sempre stata una rivista virtuale, la redazione tra le nuvole, quindi forse va tutto bene, forse andrà tutto bene.

Auguri a tutti.

4.1 [261]

4.1.1 Ebbasta con 'ste somme!

A volte ritornano, per esempio questo problema di ottobre:

> *Dato un dado onesto a nove facce, numerate da* 1 *a* 9*, lanciate n volte e ad ogni uscita moltiplicate il vostro punteggio (che all'inizio è* 1*) per l'uscita. Scommettete con un amico sul fatto che il vostro punteggio sia divisibile per* 14*: che probabilità avete di vincere?*

Il mese scorso abbiamo pubblicato la soluzione di ***Valter***, ***Alberto R.*** e ***Lorenzo***, vediamo adesso la versione di ***Franco57***:

> Il rischio in questo quesito è prendere l'approccio sbagliato tentando di calcolare direttamente la probabilità P_n che in n tiri del dado ci sia almeno un risultato pari ed esca almeno una volta il numero 7, condizione necessaria e sufficiente affinché il prodotto sia divisibile per 14, come ho fatto io inizialmente ingrippandomi in formulacce sgradevoli già per n basso.
>
> In realtà tutto fila liscio se si segue la logica opposta: sottrarre da 1 la probabilità dell'evento opposto, cioè quello per cui non esce mai un risultato pari oppure non esce mai il 7. La prima situazione ha probabilità $(5/9)^n$ poiché 5 sono i numeri dispari da 1 a 9, analogamente la seconda situazione ha probabilità $(8/9)^n$. Se le

sottraiamo entrambe da 1 non troviamo quello che cerchiamo perché contiamo due volte la probabilità che si verifichino entrambe, che vale $(4/9)^n$ essendo 4 le facce dispari e diverse da 7, cioè quelle numerate 1, 3, 5, 9. Così, per pareggiare i conti, quest'ultima probabilità va aggiunta e otteniamo $P_n = 1 - (5/9)^n - (8/9)^n + (4/9)^n$.

Possiamo generalizzare il ragionamento per un dado a m facce: la probabilità che in n lanci del dado nessun risultato sia divisibile per 2 vale $\left(1-\frac{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}{m}\right)^n$ perché $\lfloor\frac{m}{n}\rfloor$ è il numero degli interi minori o uguali a m divisibili per 2. Analogamente $\left(1-\frac{\lfloor\frac{m}{7}\rfloor}{m}\right)^n$ è la probabilità che in n lanci nessun risultato sia divisibile per 7. Infine, applicando la nota relazione che fornisce la probabilità della unione di due eventi A e B $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ e considerando che un numero è divisibile sia per 2 che per 7 se e solo se è divisibile per 14 , visto che 2 e 7 sono primi, abbiamo che la probabilità che il risultato di un lancio sia divisibile per 2 o per 7 vale $\frac{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}{m}+\frac{\lfloor\frac{m}{7}\rfloor}{m}-\frac{\lfloor\frac{m}{14}\rfloor}{m}$ e quindi la formula generalizzata:

$$\boxed{P_n=1-\left(1-\frac{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}{m}\right)^n-\left(1-\frac{\lfloor\frac{m}{7}\rfloor}{m}\right)^n+\left(1-\frac{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}{m}-\frac{\lfloor\frac{m}{7}\rfloor}{m}+\frac{\lfloor\frac{m}{14}\rfloor}{m}\right)^n}.$$

Il metodo si presta ulteriormente anche per generare la formula che calcola la probabilità che il prodotto dei risultati sia divisibile per un generico fattore f, <u>purché esso sia scomponibile come il prodotto $f_1\cdot f_2\cdots f_k$ di fattori primi diversi tra loro</u>, come nel caso di 14=7·2. Ad esempio se f è il scomponibile in tre fattori primi $f=f_1\cdot f_2\cdot f_3$, ponendo per sinteticità $F_i=\frac{\lfloor\frac{m}{f_i}\rfloor}{m}$, $F_{ij}=\frac{\lfloor\frac{m}{f_i\cdot f_j}\rfloor}{m}$ etc. avremo:

$$\begin{aligned}&P_n=1-(1-F_1)^n-(1-F_2)^n-(1-F_3)^n\\&+(1-F_1-F_2+F_{12})^n+(1-F_1-F_3+F_{13})^n+(1-F_2-F_3+F_{23})^n\\&-(1-F_1-F_2-F_3+F_{12}+F_{13}+F_{23}-F_{123})^n\end{aligned}.$$

L'esempio è decisamente più chiaro della formula generale, anche se essa risulta molto sintetica: $\boxed{P_n=\sum_{I\subseteq I_n}(-1)^{|I|}\left(\sum_{J\subseteq I}(-1)^{|J|}\cdot F_J\right)^n}$, dove $I_n=\{1,2,\ldots,n\}$, $|I|$ indica la cardinalità dell'insieme I e ancora avendo posto $F_J=\frac{\lfloor\frac{m}{\prod_{i\in J}f_i}\rfloor}{m}$ (e quindi come caso particolare $F_\phi=1$).

Da notare che nel caso particolare che m sia multiplo di f, sempre nella ipotesi che la scomposizione in fattori di f presenti solo esponenti unitari, abbiamo semplicemente $P_n=\left(1-\left(1-\frac{1}{f_1}\right)^n\right)\cdot\left(1-\left(1-\frac{1}{f_2}\right)^n\right)\cdots\left(1-\left(1-\frac{1}{f_k}\right)^n\right)$ poiché in questo caso gli eventi "*il risultato del lancio è multiplo di f_i*" hanno probabilità $1/f_i$ e sono indipendenti tra loro e di conseguenza anche gli eventi "*in n lanci almeno un risultato è divisibile per f_i*".

Il caso nel quale la scomposizione in fattori primi di f contenga esponenti superiori a 1 mi è risultata invece assai meno maneggevole, infatti non ho trovato una formula generale.

Ad esempio per m multiplo di 4 e $f = 2^2 = 4$ il prodotto di n lanci non è divisibile per 4 se i risultati sono tutti dispari oppure negli n casi nei quali c'è uno solo "fattore-2", intendendo un pari non divisibile per 4 e tutti gli altri dispari. In formule:

$$P_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n - n \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}.$$

Altro caso: m multiplo di f e $f=2^3=8$. Il prodotto di n lanci non è divisibile per 8 se e solo se:

tutti i risultati sono dispari	con probabilità $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ oppure
esce un fattore-2 e tutti gli altri dispari	con probabilità $n \cdot \frac{2}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ oppure
esce un fattore-4 e tutti gli altri dispari	con probabilità $n \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ oppure
escono due fattori-2 e tutti gli altri dispari	con probabilità $\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

Quindi

$$P_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - n \cdot \frac{2}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - n \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 1 - \frac{n^2+5n+8}{2^{n+3}}.$$

In queste formule spunta fuori un polinomio in n di grado k–1 se $f=2^k$, ma non sono riuscito a capire di più.

Chiediamo scusa a ***Franco57*** per le difficoltà di formattazione, e passiamo ai problemi del mese passato.

4.2 [262]

4.2.1 Negoziati semiformali

Il Capo ha deciso di aiutare tutti noi ad inventare nuovi complicati modi di comunicare senza avere contatti, in particolare i pezzi grossi del primo problema di novembre:

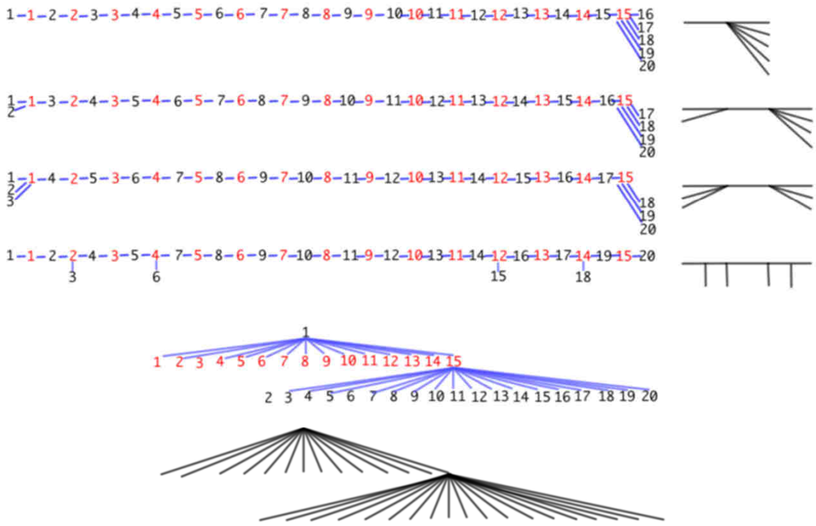
> *Esistono 35 persone in grado di prendere le decisioni e discutere le proposte, ognuno di questi ha assegnata una stanzetta in un corridoio, e sono 20 da una parte e 15 dall'altra; per comunicare tra loro e scambiarsi le proposte, hanno a disposizione dei portaborse. Ogni portaborse ha un percorso unico, dalla stanza "x" di un lato del corridoio alla stanza "y" dell'altro lato del corridoio e viceversa; non può andare in altre stanze e le due stanze devono essere su lati opposti del corridoio. I diversi percorsi dei messaggeri non devono mai incrociarsi, ed i messaggi possono essere rimbalzati al destinatario attraverso il numero necessario di stanze. Quante topologie di collegamenti sono possibili?*

Partiamo subito con la soluzione di ***Valter***:

Penso siano i possibili grafi ad albero con quindici nodi ai livelli pari e venti a quelli dispari. Vale, per simmetria, anche l'inverso e degli alberi topologicamente simili se ne considera solo uno. Ciò perché non si possono collegare, tramite archi, nodi a livelli di parità opposta non adiacenti. Unendo tali nodi si verrebbero a creare incroci tra i percorsi degli assistenti lungo il corridoio.

Disegno alcuni alberi numerando le stanze adiacenti in sequenza con colori diversi per i due lati. Ne ricavo le loro rappresentazioni topologiche cercando di ottenere figure facilmente confrontabili.

Ogni topologia può corrispondere a diversi alberi sia per profondità sia per i nodi ai vari livelli. I primi tre alberi sono da leggersi in orizzontale partendo da destra, mentre l'ultimo in verticale.



Tento di spiegare i grafi documentando com'è collegato il due rosso al livello tre del terzo albero:

- l'albero ha profondità trenta dato che il nodo radice, cioè l'uno nero, è al livello zero
- il due rosso al livello tre ha un arco che lo collega al due nero presente al livello due
- dal due rosso partono due archi ai nodi neri tre e quattro del successivo livello quattro
- dal quattro nero, quindi, parte l'arco che collega l'albero ai nodi dei livelli successivi
- ci sono venti nodi neri ai livelli pari e quindici rossi ai dispari che indicano le stanze
- si nota che da ogni stanza è possibile raggiungere tutte le altre e che non vi sono incroci.

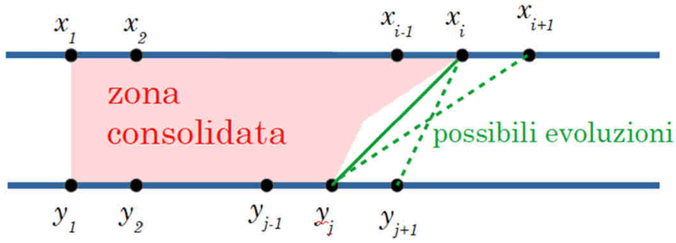
Bene, vediamo ora la spiegazione alternativa di ***Franco57***:

Stabiliamo una direzione nel corridoio e in base a questa numeriamo progressivamente le stanze su un lato come $x_1, x_2, \ldots, x_m$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nell'altro. Nel caso specifico m=20 e n=15. Un collegamento diretto generico tra due stanze lo indichiamo con x_iy_j.

Osserviamo che la prima stanza da un lato è collegata alla prima stanza sul lato opposto, quindi x_1 è collegato a y_1, altrimenti y_1 non si potrebbe collegare a nessun altro x_i perché incrocerebbe tutti gli altri percorsi di collegamento da x_1. Aggiungiamo adesso un percorso alla volta da una qualsiasi topologia ammissibile iniziando sempre a collegare le stanze con gli indici più bassi. Per evitare un incrocio uno solo tra x_1 e y_1 potrà appartenere ad un percorso diverso da x_1y_1. Supponiamo ad esempio che sia y_1 (se fosse stato x_1 il ragionamento sarebbe stato simmetrico): esso dovrà obbligatoriamente essere collegato a x_2 affinché quest'ultimo non rimanga isolato. Inserito quindi nella nostra lista anche il percorso x_2y_1 adesso, analogamente a quanto detto prima uno solo tra le due stanze appena collegate potrà avere un ulteriore collegamento.

Procedendo in questo modo inseriamo tutti collegamenti di una qualsiasi topologia ammissibile.

Al passo generico abbiamo inseriti collegamenti per x_1, x_2, …, x_i e per y_1, y_2, …, y_j. Sia per x_1, x_2, …, x_{i-1} che per y_1, y_2, …, y_{j-1} collegamenti ulteriori non sono più possibili perché creerebbero incroci – quindi diciamo che questa è la zona finora consolidata della topologia – occorre quindi solo scegliere se collegare x_i a y_{j+1} oppure a y_j, possibili rispettivamente solo se $j<n$ o $i<m$.



Ci accorgiamo che ogni volta che aggiungiamo un collegamento di una topologia ammissibile a partire dal primo x_1y_1 dobbiamo solo decidere se pescare dal gruppo delle x oppure dal gruppo delle y consumando uno dei restanti x_i oppure uno dei restanti y_j, perciò possiamo mettere in corrispondenza biunivoca le topologie valide con le possibili stringhe di $m-1$ simboli x e $n-1$ simboli y che come ben noto ammontano a

$$\binom{(m-1)+(n-1)}{m-1}=\frac{((m-1)+(n-1))!}{(m-1)!\cdot(n-1)!}.$$

(Un modo per vederlo è notare che una di queste stringhe, tutte di lunghezza $(m-1)+(n-1)$, è determinata dalla posizione degli x quindi sono come i sottoinsiemi di cardinalità $m-1$).

Nel nostro caso le topologie di collegamenti sono quindi più di 800 milioni:
$$\frac{33!}{19!\cdot 14!}=2^4\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11\cdot 23\cdot 29\cdot 31=818809200.$$

Dalla costruzione si ricava poi che i portaborse, cioè il numero di collegamenti diretti è sempre $m+n-1$ per qualsiasi topologia.

Tantissime combinazioni, come vedete. Passiamo ora la parola a ***Matteo***:

Ogni collegamento tra stanze può essere rappresentato tramite un vettore (x, y), dove x è il numero della stanza di sinistra e y il numero della stanza di destra. I collegamenti devono rispettare la condizione di non-intersezione: se il collegamento parte da una stanza con numero più alto, deve arrivare in una stanza con numero più alto. In termini più formali, se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono due collegamenti, il vettore differenza (x_1-x_2, y_1-y_2) deve avere componenti tutte dello stesso segno (lo zero può essere usato come jolly).

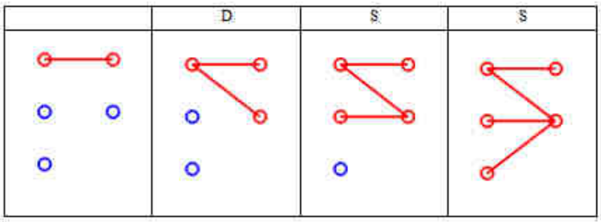
A questo punto possiamo determinare tutte le possibili topologie applicando un procedimento ricorsivo:

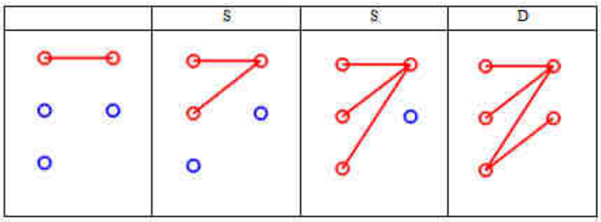
- Si parte dalle due stanze più in alto. Queste due stanze devono essere per forza collegate tra di loro direttamente, altrimenti una delle due non sarebbe più raggiungibile. Infatti, se dalla stanza x=0 esce un collegamento $(0, y)$ che non finisce nella stanza y=0, nessun altro collegamento $(x, 0)$ può finire nella stanza y=0. Il vettore differenza è infatti pari a $(x, 0) - (0, y) = (x, -y)$, e l'unico modo per non violare la condizione di non-intersezione è che sia x che y siano pari a zero. Quindi le due stanze devono avere un collegamento diretto.

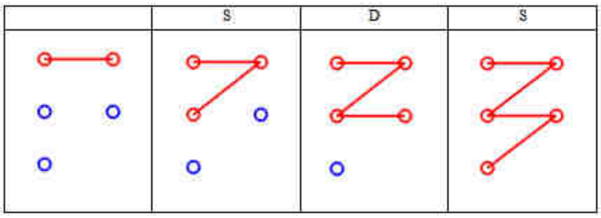
- A questo punto le due stanze più in alto sono collegate e formano un insieme connesso, che chiameremo sinteticamente "comunità". Se vogliamo ottenere un insieme connesso di tre stanze, sarà sufficiente collegare una terza stanza a una qualsiasi delle stanze della comunità. Tuttavia, il nuovo collegamento che andremo a tracciare deve rispettare dei vincoli precisi.
- Innanzitutto, il nuovo collegamento potrà provenire o da una stanza di destra, o da una di sinistra. Una volta scelto il lato da cui tracciare il collegamento, non se ne potrà più tracciare un secondo proveniente dall'altro lato, in quanto i due collegamenti sarebbero incompatibili. Indichiamo con l'asterisco le stanze che fanno già parte della comunità, e che hanno quindi i numeri più bassi. Un collegamento entrante nella comunità da sinistra può essere indicato genericamente come (x, y^*), uno entrante da destra come (x^*, y). Il vettore differenza è pari a $(x–x^*, y^*–y)$, e poiché le stanze della comunità hanno i numeri più bassi, il segno delle due componenti è per forza differente.
- Il collegamento deve per forza raggiungere la stanza della comunità con numero più alto nel lato di destinazione scelto. In caso contrario, il nuovo collegamento sarebbe incompatibile con i collegamenti già presenti all'interno della comunità. Supponiamo ad esempio di far partire il collegamento dal lato sinistro e che y^* sia la stanza della comunità sul lato destro con numero più alto. Se tentiamo di violare la condizione e tracciamo un nuovo collegamento $(x, y^*–1)$, questo collegamento sarà incompatibile con il collegamento della comunità già esistente (x^*, y^*) che finisce nella stanza y^*. Il vettore differenza è infatti pari a $(x–x^*, –1)$, che ha componenti di segno opposto.
- Il collegamento deve per forza partire dalla stanza del lato scelto con numero più basso. In caso contrario, l'eventuale stanza "saltata" non sarebbe più raggiungibile da nessun collegamento. Supponiamo di scegliere il lato sinistro e che x sia il numero più basso disponibile. Violiamo la condizione e tracciamo un collegamento verso la comunità $(x+1, y^*)$. Questo collegamento è incompatibile con qualsiasi collegamento (x, y) uscente dalla stanza x, in quanto la differenza è pari a $(1, y^*–y)$ e y^* è certamente più piccolo di y.
- Da questo ragionamento è evidente che l'unico grado di liberà che ci rimane è scegliere da quale lato del corridoio far partire il collegamento verso la comunità: o destra (D), o sinistra (S). Una volta scelto il lato, il collegamento può essere tracciato in un solo modo: dalla stanza esterna alla comunità con numero più basso a quella della comunità con numero più alto.
- Una volta tracciato il nuovo collegamento, la comunità si arricchisce di una stanza e la procedura riparte da capo. La comunità si ingrandisce fino a inglobare tutte le stanze, che risultano così connesse tra di loro.

Le topologie disponibili sono dunque pari alle possibili permutazioni delle lettere D ed S, con il vincolo che il numero di D sia pari alle stanze disponibili sul lato destro (meno una) e il numero di S a quelle disponibili sul lato sinistro (meno una). In formula: $(n_d + n_s)! / (n_d! * n_s!)$. È curioso notare come le topologie possibili siano solo quelle minime, cioè con il numero minimo di collegamenti necessario a formare un insieme connesso. Tuttavia, dalla procedura seguita è evidente che non sarebbe stato possibile inserire ulteriori collegamenti.

Qui sotto alcuni esempi su una situazione semplice che dovrebbero chiarire la procedura di costruzione utilizzata:







E qui ci fermiamo, ma pubblicheremo altre soluzioni se arrivano.

4.2.2 Calcoli tramviari

Rudy ha deciso di torturare i poveri autisti (o si chiamano piloti?) di tram:

> *L'autista del tram Guido deve tener conto dei numeri dei passeggeri a bordo ed ha lasciato il capolinea con un certo numero di uomini e donne; alla prima fermata, un terzo delle donne scendono e Guido fa salire un pari numero di passeggeri, tutti uomini, e annota la cosa. Alla seconda fermata un terzo degli uomini scendono e vengono ammesse a bordo un pari numero di persone, tutte donne; la cosa viene registrata, ma Guido si accorge di non aver registrato il numero iniziale dei passeggeri. Ad una veloce verifica, si vede che ci sono due donne più degli uomini; non solo, ma un solerte passeggero fa presente che adesso gli uomini sono tanti quante erano le donne all'inizio della corsa. Quanti erano, alla partenza dal capolinea?*

Anche qui cominciamo con ***Valter***:

> Chiamo D_0/U_0, D_1/U_1 e D_2/U_2 il numero di donne e uomini al capolinea e alla prima e seconda fermata.
>
> Dai dati del problema si ricava che: $D_0+U_0=D_1+U_1=D_2+U_2$, $D_0=U_2$, $D_2=U_0$ e $D_2–U_2=U_0–D_0=2$ per cui ho $U_0=D_0+2$.
>
> Un breve calcolo mi dà: $D_2=(D_0–⅓D_0)+ ⅓(U_0+⅓D_0)$; sostituisco U_0 con D_0+2 e ho $D_2=(D_0–⅓D_0)+ ⅓(D_0+2+⅓D_0)$.
>
> Da $D_2–U_2=2$ e $D_0=U_2$ ottengo l'equazione: $((D_0–⅓D_0)+ ⅓(D_0+2+⅓D_0))–D_0=2$; risolvendo la quale si ha $D_0=12$.
>
> Da cui i passeggeri al capolinea e alla prima e seconda fermata: $D_0=12/U_0=14$, $D_1=8/U_1=18$, $D_2=14/U_2=12$.
>
> Senza fare troppi calcoli bastava osservare che D_0 e U_1 devono essere entrambi divisibili per tre.
>
> L'unico modo perché ciò accada, dati i vincoli del problema, è che U_0 sia congruente a 2 modulo 3.

Il primo caso si ha con D_0=5/U_0=3 da cui abbiamo: D_1=6/U_1=2, D_2=4/U_2=4; sommando 9 a D_0 ho i seguenti. A ogni successiva serie di valori, D_2–D_0 e U_0–U_2 aumentano di un'unità rispetto a quella che precede.

Ne fornisco tre come esempio:

- D_0=12/U_0=14, D_1=8/U_1=18, D_2=14/U_2=12
- D_0=21/U_0=23, D_1=14/U_1=30, D_2=24/U_2=20
- D_0=30/U_0=32, D_1=20/U_1=42, D_2=34/U_2=28.

Dopo ***Valter*** viene un conciso ***Alberto R.***:

Alla partenza:

- Uomini U
- Donne D

Dopo la prima fermata:

- Uomini U + (1/3) D
- Donne (2/3) D

Dopo la seconda fermata:

- Uomini (2/3) [U + (1/3) D] = D
- Donne (2/3) D + (1/3) [U + (1/3) D] = D + 2

Sistema di due equazioni con soluzione U = 14 ; D = 12.

Che ne dite? A noi è piaciuta l'osservazione iniziale di ***Franco57*** che semplifica la vita del povero Guido:

Il non matematico che ha senso pratico risolve il quesito osservando semplicemente che tutti passeggeri scesi sono sempre stati rimpiazzati da altrettanti saliti a bordo, quindi per sapere quanti erano all'inizio basta contare quanti sono adesso!

Il matematico che va avanti come un tram risolve tipicamente il quesito con carta e penna ponendo ad esempio x il numero di uomini dopo la seconda fermata, poi chiama u_0, u_1, u_2 e d_0, d_1, d_2 rispettivamente le donne e gli uomini alla partenza, dopo la prima fermata e dopo la seconda fermata, quindi imposta il sistema

$u_2 = d_0 = x$;

$u_2 = x+2$;

$d_1 = 2/3\ d_0$;

$u_1 = u_0 + (d_0 - d_1)$;

$u_2 = 2/3\ u_1$;

$d_2 = d_1 + (u_1 - u_2)$;

che risolve ottenendo u_0 = 14 e d_0 =12 e la soluzione 26=14+12. Forse al termine del calcolo una lampadina si accende quando si accorge che anche le donne dopo la seconda fermata sono quanto gli uomini all'inizio della corsa.

Le lampadine si accendono anche da noi, ma abbiamo ancora un non-problema di cui parlare, quindi andiamo avanti vestiti da alberi di Natale.

4.2.3 Questo non è un problema

Quando il Capo non conosce la soluzione di qualcosa cataloga i problemi in altre rubriche, così ha deciso di passarvi questo suo dubbio per preparare le meditazioni natalizie:

Avete disposizione una quantità di semisfere cave e raggi tutti diversi tra loro; decidete di impilarle, e partite dalla più larga, a "buco in giù", mettendone sopra un'altra: quest'ultima, avendo un diametro minore, resterà in contatto lungo il suo cerchio massimo con quella più grande, fornendo un incremento dell'altezza della pila. E avanti così, esiste un'altezza massima della pila? Se ne abbiamo un numero finito, quale successione dei raggi ci permette di raggiungere l'altezza massima?

Prima di procedere, il Capo ha chiesto di esprimere i suoi specifici, personali e sentitissimi ringraziamenti ai solutori, per lui era diventato un tormentone... ma andiamo subito a cominciare. Il primo a scriverci, ancora una volta, è stato ***Valter***:

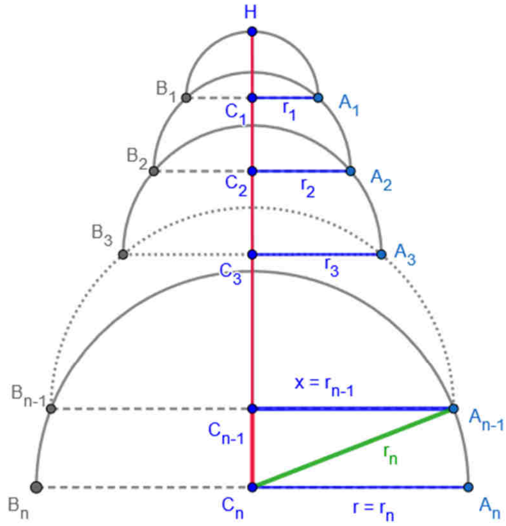
> Probabilmente è una delle mie solite farneticazioni; giacché lo richiedete, io ci provo rispondere.
>
> WLOG come usano abbreviare in lingua inglese, assegno il valore uno al raggio della prima semisfera.
>
> Penso si debba individuare il massimo della funzione cos(x)+sin(x), con cos(x) raggio della seconda.
>
> cos(x)+sin(x) dovrebbe infatti essere l'altezza delle due; si procede poi in scala allo stesso modo.
>
> Dato il raggio uno, sin(x) è l'altezza dove si appoggia la seconda semisfera e cos(x) il suo raggio.
>
> Mi sono fatto eseguire i calcoli da Wolfram:
>
> - "max sin(x)+cos(x), x>0, x<pi/2"; ho come risultato x=pi/4, quindi sin(pi/4) = cos(pi/4) = 1/2^(1/2)
>
> - "1 + sum(2^((1/2)–(i/2))–1/(2^((1/2)–(1/2–i/2)))), i=0 to infinity"; risultato 1+2^(1/2)=2.41421….

Siete preoccupati? Noi sì, abbiamo deciso di non editare la formula per timore di introdurre qualche errore e ve la lasciamo in originale. ***Andrea***, che non ci scriveva più da tanto tempo (bentornato!), ci offre un procedimento diverso:

> Vi scrivo perché ero incuriosito dalla domanda sulle sfere cave, essendo io notoriamente imbranato in cucina (nonostante i miei tentativi di ottimizzazione). Secondo me un massimo di altezza c'è, ed è R(1+sqrt(2)) ~ 2.4R. Per R intendo Il raggio della prima sfera, quella più grande.
>
> Il primo fattore è naturale: l'altezza della pila migliore cambia linearmente con il raggio della prima. Vediamo ora il secondo fattore.
>
> Se abbiamo una sfera di raggio a e vogliamo metterne sopra una di raggio b<a, si vede che la nuova altezza è
>
> b+a sqrt(1–(b/a) ^2)
>
> Derivando in b si ottiene che la scelta migliore, fissato a, è b=a/sqrt (2), nel qual caso l'aumento di altezza relativo è b(sqrt(2) –1).
>
> Partendo ora dalla prima sfera di raggio R, sceglieremo i raggi successivi come R /sqrt(2) ^k, e i relativi aumenti saranno
>
> (sqrt(2)–1)R/sqrt(2) ^k
>
> Sommando la geometrica in k si ottiene proprio R(sqrt(2) +1).

Anche qui le formule sono lasciate in originale. Vediamo ora la versione di ***Franco57***:

> Se ho bene interpretato le due domande "Esiste un'altezza massima della pila? Se ne abbiamo un numero finito, quale successione dei raggi ci permette di raggiungere l'altezza massima?" esse sottintendono "fissato il raggio r della semisfera più grande".



In questo caso ho trovato che per n semisfere, compresa quella alla base della piramide di raggio r, la successione dei raggi $r_1 < r_2 < \cdots < r_{n-1} < r_n = r$ che dà l'altezza massima è $\boxed{r_k = \sqrt{\frac{k}{n}} \cdot r}$ e che tale altezza vale $\boxed{h_n = \sqrt{n} \cdot r}$, quindi aumentando il numero delle semisfere si può arrivare in alto quanto si vuole.

Naturalmente se taglio la piramide di semisfere con un piano perpendicolare alle loro basi e passante per il vertice, lavoro in due dimensioni e ho semicerchi invece di semisfere, molto più maneggevoli (si veda la figura).

Le due formule si dimostrano per induzione su n.

Per n=1 le formule sono verificate banalmente, infatti abbiamo r_1=r e h_1=r.

Supponiamo adesso che le formule siano valide per $n-1$ e dimostriamo che sono valide anche per n.

Osserviamo che se la piramide con n semisfere è la più alta possibile, lo deve essere anche quella con le prime $n-1$ relativa al raggio r_{n-1} che, per l'ipotesi induttiva, vale $\sqrt{n-1} \cdot r_{n-1}$. Forti di questo, cerchiamo quindi il raggio $x = r_{n-1}$ che ottimizza l'intera piramide delle n semisfere.

Chiamo C_k il centro della semisfera di raggio r_k e H l'apice della piramide.

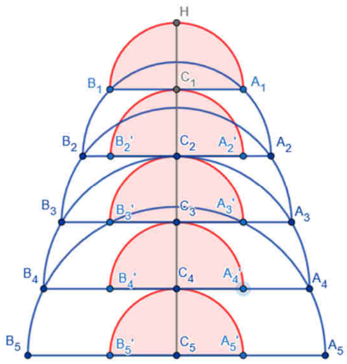
Abbiamo che $\overline{C_n C_k} = \sqrt{r^2 - x^2}$, perciò l'altezza totale vale $\overline{C_n H} = \overline{C_n C_k} + \overline{C_{n-1} H} = \sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{n-1} \cdot x$. Cerchiamo quindi il massimo della funzione $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{n-1} \cdot x$ per $0 \le x \le r$. Azzerandone la derivata $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} + \sqrt{n-1} = 0$ otteniamo che in semplici passaggi si risolve in $x = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot r$ e si verifica che effettivamente si tratta di un massimo perché risulta che sia in 0 che in r la funzione vale di meno.

Questo è quindi il valore che deve assumere r_{n-1} affinché la piramide con n semisfere sia la più alta.

Applicando l'ipotesi induttiva sulla successione ottimale dei raggi otteniamo per ogni k tra 1 e $n-1$ $r_k=\sqrt{\frac{k}{n-1}}\cdot r_{n-1}=\sqrt{\frac{k}{n-1}}\cdot\sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot r=\sqrt{\frac{k}{n}}\cdot r$ che, insieme alla proprietà banale $r_n=\sqrt{\frac{n}{n}}\cdot r$, ne dimostra la formula annunciata.

Anche l'altezza massima è confermata dal calcolo induttivo, infatti

$$h_n=f\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot r\right)=\sqrt{r^2-\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot r\right)^2}+\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot r=\sqrt{\frac{1}{n}\cdot r^2}+\frac{n-1}{\sqrt{n}}\cdot r=\frac{n}{\sqrt{n}}\cdot r=\sqrt{n}\cdot r.$$



Aggiungo una proprietà simpatica di cui mi sono accorto: l'altezza della piramide ottimizzata con n semisfere è risulta essere n volte il raggio della semisfera più piccola, infatti poiché $r_1=\sqrt{\frac{1}{n}}\cdot r$ $h_n=\sqrt{n}\cdot r=\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot r_1=n\cdot r_1$. Poiché per costruzione il modello è ottimizzato anche sulle prime k semisfere più piccole, significa che se si fa una pila con n delle semisfere più piccole chiudendole alla base e mettendole in bilico (rosse nella figura a fianco), le loro basi sono allo stesso livello della nostra piramide ottimizzata.

I regali sotto l'albero di Natale (non sarà che le sfere impilate ricordano la forma dell'alberello?) non finiscono qui, perché adesso arriva ***Br1***:

Invece che di *SemiSfere*, parliamo invece di *SemiCirconferenze*, dopo esserci trasferiti su (in?) *Flatlandia*; la Figura_1 che segue mostra le prime tre *tazze capovolte impilate* relative a questa faccenda, aventi raggi R_0, R_1 ed R_2:

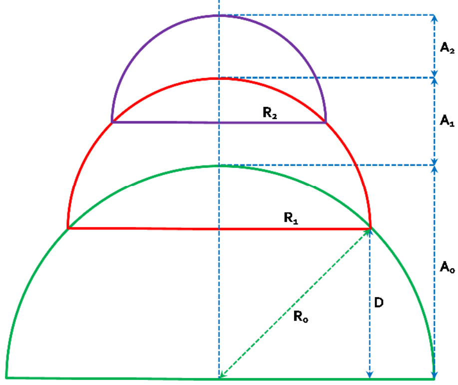


Figura_1: le prime 3 tazze

Per iniziare, lasciamo perdere la tazza viola, ed occupiamoci soltanto della verde e della rossa; detta D la distanza fra i diametri delle due semicirconferenze e ricordando il buon vecchio Pitagora, si vede subito che:

$$1)\ D = \sqrt{R_0^2 - R_1^2}$$

Il contributo all'altezza totale della pila fornito dalla prima tazza verde è dato da:

$$2)\ A_0 = R_0$$

Quello della tazza rossa è invece:

$$3)\ A_1 = D + R_1 - R_0 = \sqrt{R_0^2 - R_1^2} - (R_0 - R_1)$$

È più comodo ragionare in termini adimensionali; definiamo il rapporto fra i raggi di due qualsiasi tazze consecutivamente sovrapposte come segue:

$$4)\ r_K \equiv \frac{R_K}{R_{K-1}} \quad K \geq 1 \quad 0 < r_K < 1$$

Posto ciò, la 3) diventa:

$$5)\ A_1 = R_0\left[\sqrt{1 - r_1^2} - (1 - r_1)\right]$$

Al variare di r_1, l'andamento di A_1 è quello esposto qui sotto in Figura_2 (avendo posto per comodità R_0=1):

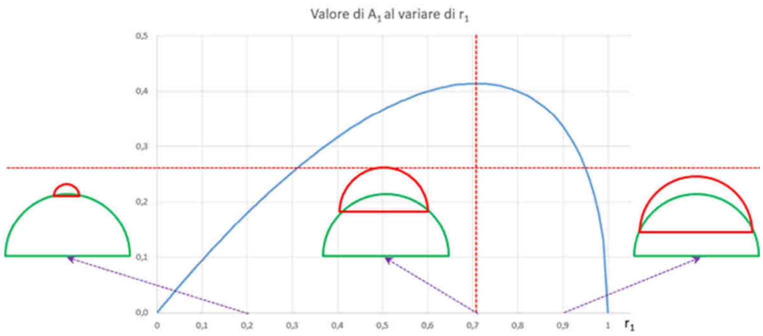


Figura_2: caccia al miglior r_1

Si vede che esiste un valore ottimale per r_1, quello che cioè massimizza il contributo della seconda tazza all'altezza totale della pila. Per trovarlo, occorre annullare la derivata della 5) rispetto ad r_1:

$$6)\ \frac{dA_1}{dr_1} = R_0 \frac{d}{dr_1}\left[\sqrt{1 - r_1^2} - (1 - r_1)\right] = 0$$

Dopo qualche calcolo, si ricava che il miglior valore possibile per A_1 si ottiene quando:

$$7)\ r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

E quindi il *miglior A_1 possibile* risulta essere:

$$8)\ A_{1(M)} = R_0\left[\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = R_0(\sqrt{2} - 1)$$

Adesso passiamo alla terza tazza, quella viola; la sua relazione geometrica con la seconda rossa è identica a quella che quest'ultima ha con la prima verde, solo su scala diversa. Si può quindi immaginar di ripetere gli stessi calcoli di cui sopra, arrivando a relazioni per r_2 ed $A_{2(M)}$ analoghe alle 7) e 8), dove cambiano solo i pedici dei vari termini:

$$9)\ \begin{cases} r_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ A_{2(M)} = R_1(\sqrt{2} - 1) \end{cases}$$

Ricordando la 4):

$$10)\ A_{2(M)} = r_1 R_0(\sqrt{2}-1) = R_0 \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)$$

E ancora:

$$10)\ A_{3(M)} = R_2(\sqrt{2}-1) = R_1 \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1) = R_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(\sqrt{2}-1)$$

E così via… In generale:

$$11)\ A_{K(M)} = R_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{K-1}(\sqrt{2}-1) \quad K \geq 1$$

Con N+1 tazze, l'altezza massima totale $A_{T(M)}$ della pila sarà quindi data da:

$$12)\ A_{T(M)} = R_0\left[1+(\sqrt{2}-1)\sum_{K=1}^{N}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{K-1}\right] = R_0[1+(\sqrt{2}-1)S]$$

La sommatoria S nella 12) è una serie geometrica (tronca) di ragione r<1; essa vale:

$$13)\ S = \sum_{K=1}^{N} r^{K-1} = \frac{1-r^N}{1-r}$$

Per cui, dopo qualche passaggio algebrico:

$$14)\ A_{T(M)} = R_0\left\{1+\sqrt{2}\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^N\right]\right\}$$

Poi, con un numero infinito di tazze:

$$15)\ A_{T(M\infty)} = R_0[1+\sqrt{2}] = R_0 \cdot 2{,}414 +$$

Nella pagina che segue, in Figura_3 la rappresentazione di una pila di 16 tazze (N=15); si ha in quel caso specifico:

$$16)\ \frac{A_{T(M)}}{A_{T(M\infty)}}\% = 100\frac{1+\sqrt{2}\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{15}\right]}{1+\sqrt{2}} = 99{,}67 +$$

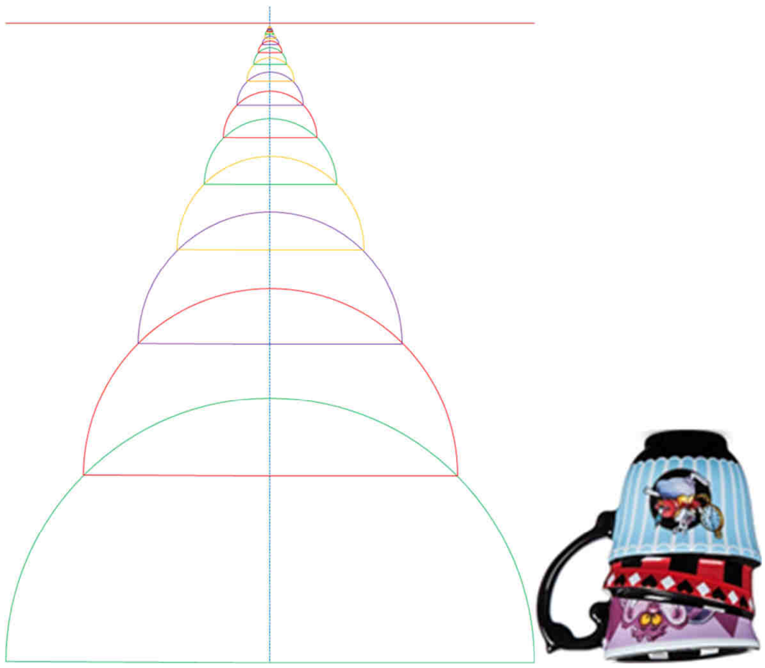


Figura_3: le prime 16 tazze…

Sì, la foto non era parte della figura 3, ma ci è piaciuta. Con questo direi che siamo arrivati al fondo di queste lunghe soluzioni e note. Non senza gli auguri per questa fine d'anno, che arrivano ad anno quasi finito. Non sapendo quando il numero di gennaio vedrà la luce ci permettiamo di anticipare gli auguri di un grandioso 2021 a tutti i nostri lettori e le loro famiglie, ma anche a tutti gli amanti della matematica, quelli che conosciamo e quelli che ci conoscono, e tutte le altre possibili combinazioni. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Si considerino i numeri di sei cifre composti unicamente delle cifre 1, 2 e 3; tra questi, si esaminino esclusivamente quelli contenenti solo due "3".

Quanti di questi sono divisibili per nove?

6. Pagina 46

Noto che la differenza tra due numeri primi è sempre almeno 2, il problema posto può essere generalizzato come segue:

> *Sia a_1, a_2, a_3, …, a_n, a_{n+1}, … una sequenza di numeri tale che $a_1=2$, $a_2=3$ e che $a_{n+1}-a_n\geq 2$, $\forall n=2, 3, \ldots$; sia inoltre $\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$. È vero che esiste sempre un quadrato tra σ_n e σ_{n+1} per qualsiasi valore di n?*

Questo problema va risolto per passi:

Passo 1: Supponiamo esista un dato numero n per il quale non siano presenti quadrati tra σ_n e σ_{n+1}; in questo caso, esisterà un qualche numero k per il quale vale la seguente relazione:

$$k^2 \leqslant \sigma_n < \sigma_{n+1} \leqslant (k+1)^2 \quad \textbf{[1]}$$

Questo implica che:

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n \leqslant (k+1)^2 - k^2$$

ossia, esplicitando il quadrato e considerando le definizioni degli elementi a primo membro:

$$a_{n+1} \leqslant 2k+1$$

ma $a_n \leq a_{n+1} - 2$, per ogni n maggiore o pari a 2: combinato con l'espressione appena ottenuta, porta alla serie di diseguaglianze:

$$\begin{aligned}
&a_{n+1} \leqslant 2k+1\\
&a_n \leqslant 2k-1\\
&a_{n-1} \leqslant 2k-3\\
&\ldots\\
&a_2 \leqslant 2k+1-2(n-1)=x
\end{aligned}$$

Nei passi successivi analizzeremo i valori di x pari a 3 e i valori di x maggiori di 3.

Passo 2: sia $x=3$.

Questo implica che sia $a_2=3$, ossia tutte le diseguaglianze nella serie vista qui sopra devono essere prese con il segno di uguaglianza.

Ossia,

$$\begin{aligned}
a_{n+1}+a_n+\ldots+a_2+a_1 &= (2k+1)+(2k-1)+\ldots+3+2\\
&> (2k+1)+(2k-1)+\ldots+2+1\\
&= (k+1)^2
\end{aligned}$$

che è equivalente a $\sigma_{n+1}>(k+1)^2$, in contraddizione con la nostra premessa **[1]**: quindi, non può essere $x=3$.

Passo 3: sia ora $x>3$.

Questo implica sia $a_2 \geq 5$ e che:

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 < (2k-1) + (2k-3) + \ldots + 5 + 3 + 1 = k^2$$

e quindi che sia:

$$\sigma_n < k^2$$

che, sempre per la **[1]**, non può essere.

Quindi, non può essere $x>3$.

Questo dimostra l'estensione del problema e quindi il problema.

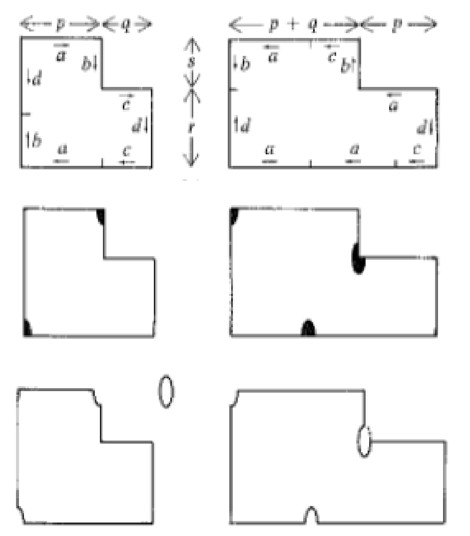
7. Paraphernalia Mathematica

Incredibilmente, una seconda puntata che esce *subito* dopo una prima puntata.

Approfittiamo di questo spazio per segnalare un interessante gioco di parole che, purtroppo, ci perdiamo; abbiamo visto che esistono piastrelle (*tiles*) che sono in grado di produrre figure simili (più grandi, evidentemente) alla piastrella di partenza: il termine inglese per questa costruzione è "proto*tiles*". Se trovate una buona traduzione, grazie.

7.1 Altri pavimenti

Dopo aver sparato i nomi dei pezzi grossi, non vorremmo pensaste che, come al solito, qui il lavoro lo hanno fatto tutto Penrose e Conway; in realtà, alcuni interessanti lavori sono stati portati avanti anche da ***Ammann***: il suo lavoro, pur non avendo la potenza estetica degli aquiloni e delle frecce, sviluppa alcuni concetti molto interessanti.



8 *A2 di Ammann (tre versioni).*

Qualche mese prima della comparsa delle tassellature di Penrose nella letteratura, infatti, Ammann pubblica un articolo nel quale presenta una sua tassellatura aperiodica, che diventerà nota nella letteratura come tassellatura A2[14]: ne trovate lo schema nella prima parte della figura qui a fianco. La cosa sembra piuttosto complessa, ma probabilmente vi sarà più chiara se vi diciamo subito che per quanto riguarda le dimensioni p, q, r e s potete fare come vi pare, ma per motivi che saranno più chiari in seguito meglio se tiriamo immediatamente in ballo la sezione aurea:

$$\frac{p}{q}=\frac{r}{s}=\phi$$

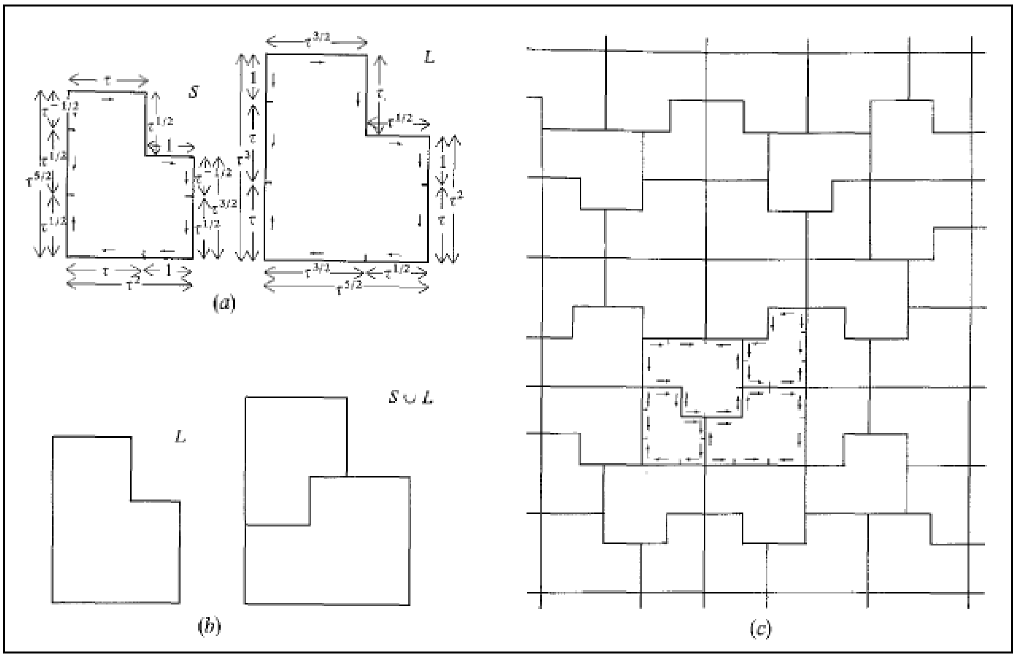
Una parte che sembra piuttosto complicata è rappresentata da tutte quelle lettere con le freccette sul bordo; la loro funzione principale è di impedirvi le rotazioni di 90° delle piastrelle *e di permettervene la riflessione* (insomma, potete metterle pancia all'aria come vi pare ma non potete metterle girate di fianco: a lettera uguale va associata lettera uguale, mantenendo coerente la direzione delle frecce.

Se non vi piacciono le freccette, potete provare con le ellissi: nella seconda immagine avete le stesse piastrelle, ma qui la forzante è che dovete costruire, nei vari angoli, delle ellissi "sensate"; notiamo che si usano ellissi e non cerchi proprio per evitare rotazioni a 90°, o le mettete "per dritto", o niente ellisse.

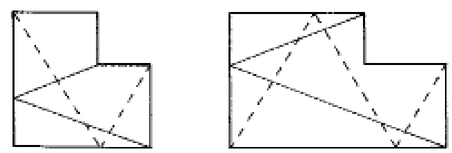
Questa faccenda delle ellissi ha dato ad Ammann un'idea che, seppur disprezzata dai Veri Matematici (dal loro punto di vista, richiede *una piastrella in più*), farà di sicuro la gioia dei Veri Piastrellisti: semplicemente, si tratta di *incavare* le ellissi nei due pezzi e supporre l'esistenza di un terzo pezzo, di forma ellittica, come mostrato nella terza parte della figura. Questo, soprattutto giocando con i colori (e con ellissi un po' più grandi), potrebbe permettere delle piastrellature interessanti anche nella realtà.

Tornando alle piastrelle A2 "originali", una cosa piuttosto seccante potrebbe essere rappresentata dal fatto che i due pezzi utilizzati "si somigliano, ma non tanto". La cosa è presto risolta dalla tassellatura A2*m* (dove la "*m*" sta per "modificata"); questa usa sempre due piastrelle (indicate di solito con S e L, "Small" e "Large"), ma che sono *simili* tra loro: trovate, nella figura di seguito, lo schema delle due piastrelle, il loro *prototile* e un esempio di tassellatura, con almeno in parte le freccette indicate; attenzione che qui, per motivi strettamente tipografici, l'autore indica la sezione aurea con τ.

[14] Nel senso che è la seconda che sviluppa: non siamo riusciti a trovare notizie sulla prima.



Dovrebbe, a questo punto, esservi sorta la domanda del "perché" venga tirata in ballo la sezione aurea. A parte motivazioni strettamente estetiche, una delle ragioni nasce proprio dalla tassellatura A2 di Ammann, di cui vi diamo la quarta versione qui di fianco.



9 *La quarta versione.*

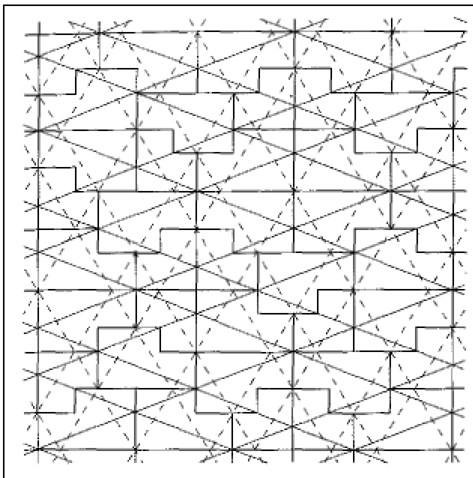
Se tracciate sulle piastrelle le opportune linee continue e tratteggiate, potete imporre la condizione di "mai girare le piastrelle" come "le linee dello stesso tipo devono venire dritte"; secondo noi questa forma della regola facilita notevolmente la costruzione: si "vede subito", se qualcosa sta "andando storto". Il disegno della tassellatura risultante forse viene un po' complicato, ma con un po' di attenzione si riesce a capire che cosa sta succedendo.

Il motivo per il quale abbiamo tirato in ballo la sezione aurea nel dimensionamento degli insiemi di Ammann A2 è proprio questo: solo con quelle proporzioni tra le piastrelle riuscite a "far venire le righe dritte".

Facile battuta: il gioco del "non pestare le righe", qui, richiede la danza sulle punte.

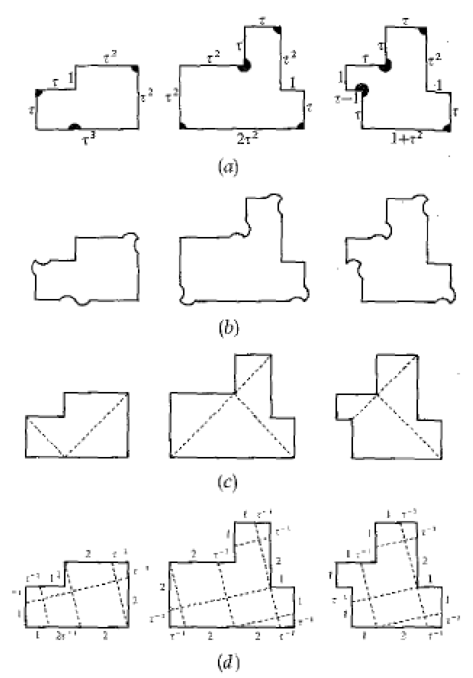
È interessante notare, a questo punto, che è valido anche il *contrario*: in qualsiasi tassellatura aperiodica eseguita con A2, le righe vengono dritte.

Amman, comunque, non si è fermato a due.



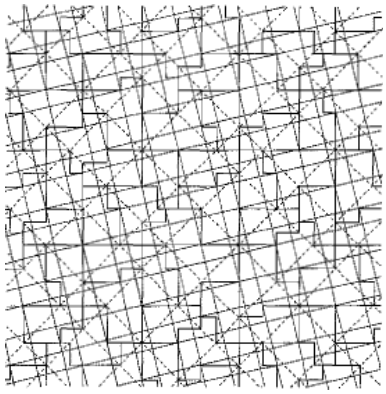
10 *Il pavimento di Casa Ammann.*

Una caratteristica interessante del set noto come ***tasselli A3 di Ammann*** è che potete tracciare *due insiemi* di ***Linee*** (o "Bande") di ***Ammann***: anche se le piastrelle non sono esattamente una meraviglia, ammetterete che la cosa è notevole.



11 *L'insieme A3.*

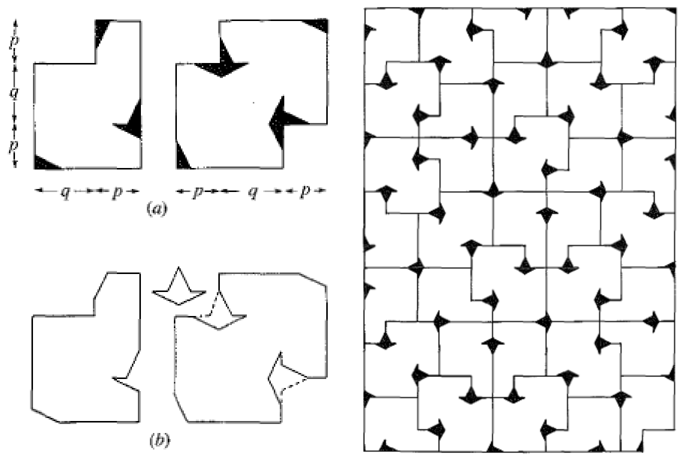
Nel prossimo disegno, vi diamo quattro versioni del set A3: quella con le proporzioni dei pezzi (attenzione che qui "tau" è sempre la sezione aurea) e le freccette di orientamento (a), una versione "con le orecchie" per garantire gli incastri corretti (b) e, come ultime due, le due versioni delle righe di Ammann. Siccome nella seconda la comprensione di quanto debbano essere larghe potrebbe non essere molto chiara, trovate marcate le relative proporzioni.



E qui, già anche solo con l'insieme "semplice" delle righe (c), la tassellatura con le Righe di Ammann diventa un incubo…

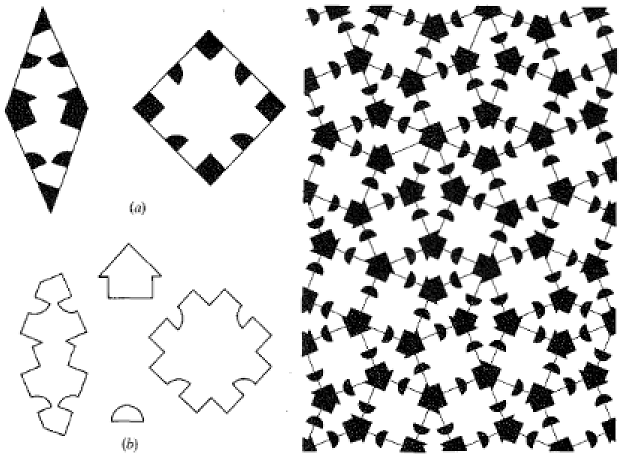
Vi siete accorti che nella "forma canonica" (a) A3 non ha come forzanti dell'orientamento delle ellissi, ma dei cerchi? Già, in questo caso bastano e, conseguentemente, le righe sono di un solo tipo: nel disegno della tassellatura sono state differenziate per indicare l'appartenenza a due "famiglie" diverse di curve. Ma di questo parleremo dopo.

Il nostro Ammann era persona instancabile: infatti, dopo A2 e A3, non si fa mancare di certo A4 e A5.

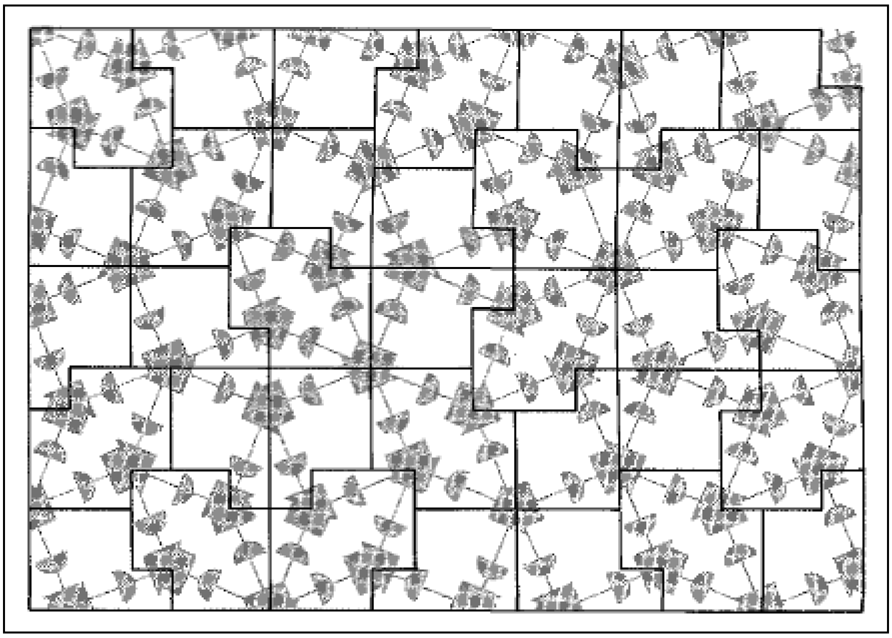


Per quanto riguarda A4, è interessante notare che p e q possono avere qualsiasi rapporto, ma se volete costruire i prototile questo rapporto deve valere 1:√2.

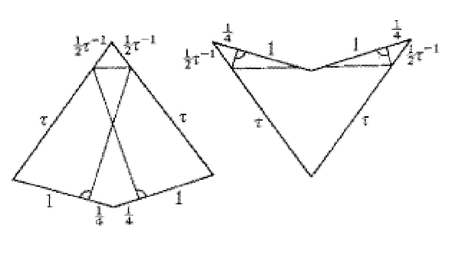
Quello che ci piace invece di A5 (e che, probabilmente, non piace ai Veri Matematici) è che ha *due chiavi*: la cosa, anche se non sembra, semplifica le costruzioni.



Esiste una relazione tra A4 e A5: anche se esprimerla formalmente è tutt'altro che semplice, risulta visivamente comprensibile nel momento stesso nel quale vengano opportunamente sovrapposte:



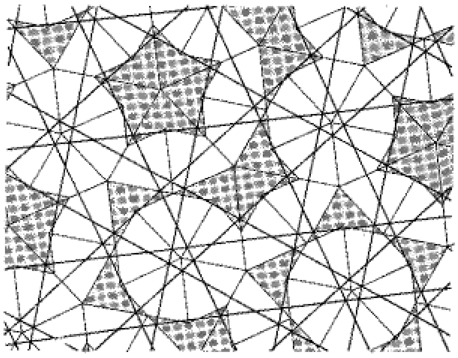
Torniamo alle Linee di Ammann: l'impressione è che, nel caos dell'aperiodicità, catturino una qualche parvenza di "ordine soggiacente" alla costruzione; questa impressione è corretta, ed è possibile costruirle *anche per i tasselli di Penrose*: le trovate indicate qui di fianco, con le dovute proporzioni necessarie per il loro tracciamento (e, come al solito, il "tau" per la sezione aurea). In merito a queste linee, esiste un aneddoto, non si sa quanto vero: se guardate con attenzione, vedete che la linea orizzontale nella "freccia" è poco al di sopra del vertice dell'incavo della freccia; quando Martin Gardner richiese al suo disegnatore di tracciare le Linee di Amman di una tassellatura di Penrose[15], quest'ultimo tracciò queste linee in modo tale da farle passare *esattamente* per i vertici, e la cosa fu scoperta solo successivamente alla pubblicazione. Nelle successive edizioni, MG preferì mettere nel testo la nota che le linee erano "leggermente fuori posto" piuttosto che cambiare disegno. Come dicevamo, non



12 *Le linee di Ammann-Penrose.*

[15] L'articolo cui facciamo riferimento non è mai stato tradotto in italiano.

abbiamo certezza della verità dell'aneddoto ma, come si suol dire, "è troppo bello per non essere vero".


13 *Penrose e Ammann.*

In una tassellatura di Penrose, le Linee di Ammann si comportano in un modo un po' strano, come potete vedere dall'immagine qui a fianco: sempre aperiodica, ma una certa qual regolarità, soprattutto guardando alle linee, sembra, in un modo o nell'altro, emergere.

La scoperta di Ammann, relativamente alle tassellature di Penrose, è stata che ognuna di queste definiva alcune famiglie di linee: per la figura qui a fianco, sono i due fasci di rette, l'uno formato da rette "quasi orizzontali" e l'altro da rette "quasi verticali"[16]. Le famiglie possibili sono cinque e, dato un insieme di Linee di Ammann, è possibile ottenere la tassellatura originale. Nella maggior parte dei casi ne sono sufficienti due, ma esistono alcuni disegni nei quali è necessaria una terza linea.

Se osservate attentamente, notate dalla figura qui sopra che ogni gruppo di Linee di Ammann forma delle barre che possono essere di due tipi o sono Larghe (***L***) o sono Strette[17] (***S***): in figura, per quanto riguarda le barre verticali, vedete l'alternanza ...(L)SLLSL… Se, data una linea, vi muovete perpendicolarmente ad essa e catalogate le barre, potete ottenere una sequenza infinita.

Che *non è periodica*.

Ma che rispetta il *teorema dell'isomorfismo locale*.

E che ammette *inflazione* e *deflazione*.

Vi ricorda nulla, tutto questo? Già, le Sequenze di Ammann sono l'*equivalente monodimensionale delle tassellature di Penrose*.

Data una sequenza, è possibile ottenerne un'altra attraverso due regole di composizione:

$$L'=\left(\frac{1}{2}L, S, \frac{1}{2}L\right)$$
$$S'=\left(\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}L\right).$$

Il significato di quegli strani "un mezzo" nasce dal fatto che per costruire la nuova linea prendo "mezza banda larga da una parte e mezza banda larga dall'altra linea"; in pratica, la sequenza che abbiamo trovata poco sopra diventa L'S'L'…

E se nella mia sequenza trovo "SS"? Beh, se la trovate, ricostruite la tassellatura e mandatela a Penrose (Spoiler: non esiste).

Siccome questo ricalcolo è una forma di *composizione*, quel burlone di Conway aveva deciso che le sequenze "ben formate" (ossia che generavano una tassellatura di Penrose) dovevano chiamarsi ***sequenze musicali***.

Se preferite una definizione più astratta, secondo Conway una sequenza musicale (finita) è una parte della sequenza delle differenze tra termini adiacenti della sequenza di Beatty per la sezione aurea: tutto più chiaro, ora, vero?

OK, andiamo con calma. Nell'ordine, in un foglio di calcolo, costruiamo la sequenza (estesa: prendiamo anche qualche negativo, come in riga 1 qui sotto) di Beatty per $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, moltiplicando per la sequenza degli interi e tenendo per ogni valore l'intero più vicino (riga 2, sempre qui sotto); calcoliamo poi la differenza tra due elementi adiacenti (riga 3);

[16] Nota per i pignoli: l'angolo tra i due fasci di rette è, "ovviamente", 72°.

[17] E, come sicuramente avrete già dedotto, le loro larghezze sono in rapporto aureo.

indi, scriviamo “0” per ogni “1” e “1” per ogni “2” (riga 4) e sostituiamo infine “1” con “L” e “0” con “S” (riga 5):

```
-4        -3        -2        -1         0         1         2         3         4
-7        -5        -4        -2         0         1         3         4         6
     2         1         2         2         1         2         1         2
     1         0         1         1         0         1         0         1
     L         S         L         L         S         L         S         L
```

Per *deflazionare* una sequenza, la regola più semplice è:

1. Sostituite ogni S con una L
2. Sostituite ogni LL con una S
3. (alla fine:) Cancellate ogni L isolata

L’inflazione è di poco più complicata:

1. Sostituite ogni L con una S
2. Sostituite ogni S con LL
3. (alla fine:) Aggiungete una L tra ogni coppia di S

Una sequenza musicale non può contenere sotto-sequenze di tipo “SS” o “LLL”, il che può essere utilizzato per verificare se una sequenza qualsiasi è una sequenza musicale o no: è sufficiente deflazionarla sin quando o da qualche parte ottenete una delle due sequenze vietate (e allora la vostra sequenza non è musicale) o ottenete un singolo carattere (e allora è una sequenza musicale).

Se partiamo dallo zero nella prima riga della nostra tabella e andiamo avanti a far di conto, scrivendo tutte le cifre della quarta riga di seguito con davanti uno “zero virgola”, ottenete un numero (binario e minore di uno); questo numero vale:

$$\cfrac{1}{2^0+\cfrac{1}{2^1+\cfrac{1}{2^1+\cfrac{1}{2^2+\cfrac{1}{2^3+\cfrac{1}{2^5+\cfrac{1}{2^8+\cfrac{1}{2^{13}+\ddots}}}}}}}}$$

Dove gli esponenti dei due nei coefficienti della frazione continua aritmetica sono i numeri di Fibonacci.

Scesi di una dimensione dalla tassellature di Penrose alle barre di Ammann, quest’ultimo si è messo alla ricerca di una tassellatura aperiodica dello spazio, e l’ha trovata; utilità di una cosa del genere? Zero, secondo molti. Poi, in un insignificante frammento di shechmanite, qualcuno ha trovato dei *quasicristalli*...

Rudy d’Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms