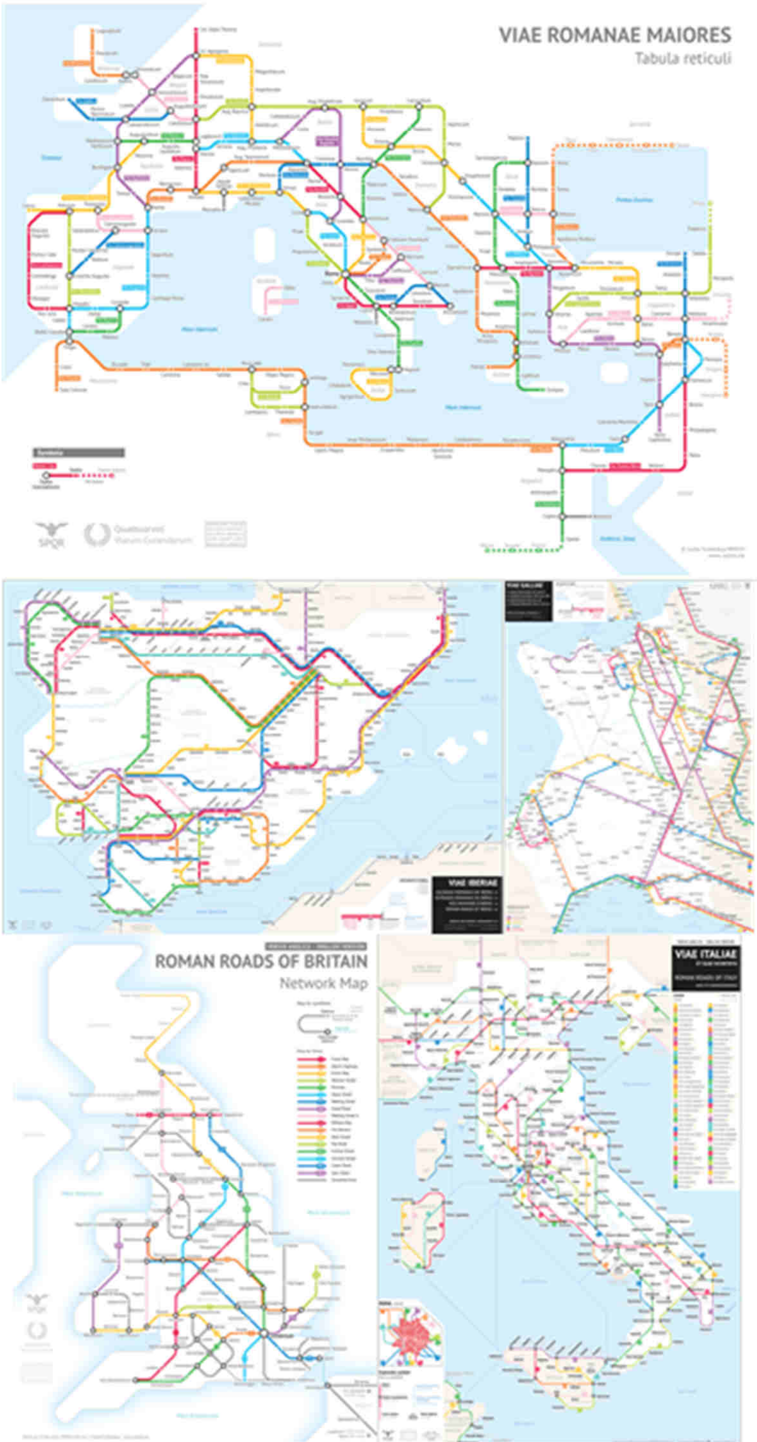
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 262 – Novembre 2020 – Anno Ventiduesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM261 ha diffuso 3'303 copie e il 12/11/2020 per Google eravamo in 38'800 pagine.

Tutto quanto pubblicato dalla rivista è soggetto al diritto d'autore e in base a tale diritto *concediamo il permesso di libera pubblicazione e ridistribuzione* alle condizioni indicate alla pagina `diraut.html` del sito. In particolare, tutto quanto pubblicato sulla rivista è scritto compiendo ogni ragionevole sforzo per dare le informazioni corrette; tuttavia queste informazioni non vengono fornite con alcuna garanzia legale e quindi la loro ripubblicazione da parte vostra è sotto la vostra responsabilità. La pubblicazione delle informazioni da parte vostra costituisce accettazione di questa condizione.

Sasha Trubetskoy (che trovate su https://sashamaps.net/) ha avuto una grandiosa idea: tracciare le mappe delle strade romane nello stile della mappa della metropolitana di Londra. Ci piace da matti quel "*Tabula Reticuli*" della tavola d'insieme, e d'ora in poi intendiamo usarlo. Versioni a media definizione scaricabili liberamente dal sito, copie ad alta definizione in vendita.

1. L'occhio di Monet, gli occhi di Cézanne

"Monet, ce n'est qu'un œil,
mais bon Dieu, quel œil!"[1]
(*Paul Cézanne*)

Paul Cézanne nasce a Aix-en-Provence il 19 gennaio del 1839, e morirà nella stessa città 67 anni dopo, il 22 ottobre del 1906; per avere un'idea del suo aspetto, non può esserci nulla di meglio che guardare il suo autoritratto.

1 *Paul Cézanne. Foto e autoritratto.*

A ben vedere, è un bel privilegio riservato ai pittori, questo; sul valore di una rappresentazione per immagini (che è pur sempre quella più diretta e immediata per la gran parte degli esseri umani, anche quelli che pittori non sono) non c'è dubbio che un autoritratto è più efficace di qualsiasi altra forma. La foto del passaporto, o anche una foto artistica eseguita da un abile fotografo potranno forse essere più precise e dettagliate per quanto riguarda il "riconoscimento" fisico del soggetto, ma non possono dire granché riguardo a come il soggetto vede sé stesso. Un pittore che si autoritrae dà invece anche questo livello ulteriore di informazione: racconta come egli vede sé stesso, non solo come lo vedono gli altri. Se poi l'immagine che l'artista offre di sé sia correttamente interpretata da chi la osserva è ovviamente tutta un'altra questione, ma questo è un tema che riguarda ogni soggetto e l'arte tutta, non solo quella pittorica.

Tanto per dire, gli studiosi solitamente dividono le opere (e quindi la vita) di Cézanne in quattro periodi: il periodo Romantico (che gli inglesi chiamano misteriosamente "Dark"), il Periodo Impressionista, il Periodo Costruttivo (o "Maturo", sempre per gli anglofoni) e il Periodo Sintetico (o "Finale"). L'autoritratto con la bombetta è del Periodo Costruttivo, e non è affatto detto che sarebbe stato pienamente apprezzato dallo stesso Cézanne ventenne o sessantenne. La ricerca della giusta rappresentazione è l'angoscia persistente e continua dell'anima di ogni artista, e verosimilmente non viene mai del tutto placata. Invecchiando, sembra che Cézanne lasciasse passare ore intere prima di posare sulla tela una singola pennellata: si era convinto che ogni singolo colpo di colore dovesse restare a lungo intriso sul pennello, prima di finire sull'opera, quasi dovesse "respirare" il tempo, il momento preciso in cui lui stava componendo quel dettaglio, e lo potesse così catturare

[1] "Monet è solo un occhio ma, buon Dio, che occhio!"

per sempre. Le sue ultime opere, raccontano gli storici dell'arte[2], gli richiesero ognuna dalle cento alle centocinquanta sessioni di lavoro.

2 *Claude Monet. Foto e autoritratto.*

Claude Monet nasce a Parigi il 14 novembre 1840 e muore ultraottantenne il 5 dicembre 1926 in quel di Giverny, minuscolo villaggio in Normandia il cui nome è ormai indissolubilmente legato a quello del pittore. È qui che si trova il giardino con il bacino delle "*Ninfee*", forse il quadro più famoso tra i molti capolavori dell'artista. A differenza di Cézanne, la sua opera non è solitamente suddivisa in "periodi", perché il suo nome è strettamente legato a quel movimento che – in fondo proprio per causa sua – è passato alla storia dell'arte con il nome di "Impressionismo". La storia è assai nota: nel 1874 una trentina di pittori riescono ad organizzare una mostra a Parigi; sono accomunati dalla giovane età e dal desiderio, più o meno conscio, di voler rivoluzionare la pittura. I critici del tempo erano, in gran maggioranza, ben lontani dall'apprezzare le nuove idee di qui giovinastri, e in particolare uno di essi, Louis Leroy, scrisse una feroce stroncatura sul quadro numero 98 della mostra, intitolato "*Impression, soleil levant*". Si trattava di un'opera che Monet aveva realizzato due anni prima, e che già conteneva tutte le caratteristiche del nuovo movimento. Leroy, nella sua spietata critica, gioca molto proprio sulla parola "impressione" del titolo, e naturalmente lo fa in tono ferocemente dispregiativo, al punto di assimilare il quadro (e un po' la mostra tutta) alla peggiore delle carte da parati. Come tutta risposta, Monet e i suoi compagni d'avventura decidono di trasformare l'insulto in una sorta di bandiera di guerra, chiamandosi, da quel momento in poi, proprio "impressionisti". Il successo dell'Impressionismo, che ancora oggi è forse la corrente pittorica più apprezzata dal pubblico, basterà e avanzerà a ridicolizzare i primi giudizi dei critici ancora legati all'idea che l'artista debba riprodurre esattamente la realtà, e Monet sarà considerato universalmente come il maggior rappresentante della nuova scuola pittorica.

In estrema (e, inevitabilmente, molto approssimativa) sintesi, quello che attuano gli impressionisti è un rivoluzionario cambio di prospettiva: sulle tele non riportano più la rappresentazione oggettiva della realtà, ma l'impressione che la realtà lascia in loro stessi. Una sorta di rivoluzione copernicana, o quantomeno un cruciale cambio di sistema di riferimento, se si volesse definirlo in termini fisico-matematici; nonostante l'indiscusso

[2] E non solo loro, ma anche – forse soprattutto – i filosofi: la convinzione che fosse necessario riportare su tela "tutto" quanto fosse possibile del momento vissuto è raccontata dal filosofo esistenzialista Maurice Merleau-Ponty nel suo saggio "*Il dubbio di Cézanne*".

successo del nome, la parola chiave non è *impressione*, ma lo *spostamento* del centro dell'opera d'arte; dalla realtà oggettiva rappresentata al soggetto che la osserva.

Le rivoluzioni sono un po' come le valanghe: sconvolgenti già di per sé stesse, ma soprattutto in grado di crescere, autoalimentarsi, provocarne altre: Monet e gran parte dei giovani pittori di Francia reclamano la pari uguaglianza tra le loro impressioni e la realtà, e qualcuno, tra loro, va oltre; Cézanne è persino più anziano di Monet, al quale certo riconosce il ruolo di suo maestro nell'impressionismo, ma proprio come un adolescente entusiasta cavalca l'onda della corrente pittorica e infine la supera. Se l'arte si può svincolare dalla rappresentazione puntuale della natura, allora la sua essenza è misteriosa, variegata in molti aspetti, e nessuno di questi meno degni l'uno dell'altro: forse è possibile imprimere sulla tela qualcosa della realtà che non è solo immagine o impressione, ma anche qualcosa di diverso; e così si può spiegare, forse, il colore che resta a respirare l'attimo presente sul pennello, prima di finire sulla tela. Così si spiega, forse, il senso di quella sua celebre frase sull'occhio di Monet, però spostando l'accento sulla prima parte di essa: lo sguardo impressionista di Monet era insuperabile, ma era uno solo dei molti sguardi possibili, tutti parimenti degni di rispetto. E così si spiega – forse e infine – perché gran parte della pittura successiva si stacchi definitivamente dalla rappresentazione oggettiva, fisica di quanto raccontano gli occhi, e si apra al cubismo, al florilegio delle macchie di colore della pittura astratta, ai tagli della tela e a qualsiasi altra violazione di confini.

3 *Evoluzione di Vasilij Kandinskij: olik"Porto di Odessa" (1898); "Il cavaliere azzurro" (1903); "Composizione VIII" (1923).*

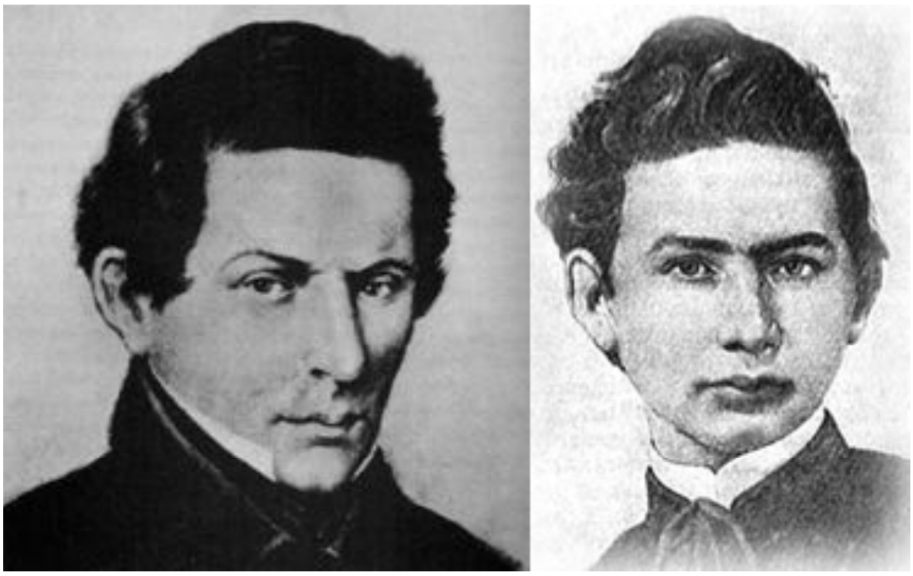
Nikolaj Ivanovič Lobačevskij[3] nasce a Nižnij Novgorod il 1° dicembre 1792, e morirà a Kazan' il 24 febbraio 1856. È quindi quasi perfettamente contemporaneo di János Bolyai[4], che nasce a Cluj-Napoca, in Ungheria, il 15 dicembre 1802 e morirà a Târgu Mureș il 27 gennaio 1860. Anche loro sono protagonisti di una rivoluzione, e la mettono in atto circa mezzo secolo prima di quella parigina realizzata dagli Impressionisti: e anche la loro rivolta, in ultima analisi, riguarda la realtà e il modo di rappresentarla.

Certo, si tratta di una rivoluzione diversa, perché matematica e arte sono cose diverse. L'arte procede per rivoluzioni estetiche, che forse non sono solamente soggettive, ma che non hanno regole precise su cosa e come possano essere violate: la matematica ha l'obbligo della dimostrazione, e demolire vecchie convinzioni è quasi impossibile, perché non comporta solo un atto di volontà, ma una certosina ricerca analitica. Lobačevskij e Bolyai aggrediscono una questione vecchia di millenni, che in estrema (e, inevitabilmente, molto approssimativa) sintesi, si incentra sulla misteriosa ragione per la quale Euclide abbia deciso di introdurre, tra le basi della geometria, il celeberrimo Quinto Postulato, quello delle parallele. Buona parte dei due millenni che intercorrono tra la scrittura degli "*Elementi*" euclidei e le opere di Bolyai e Lobačevskij vedono nugoli di matematici impegnati nel tentativo di dimostrare che Euclide sbagliava a chiamare "postulato" il Quinto Postulato: aveva tutto l'aspetto di un oggetto matematico dimostrabile, insomma

[3] RM083, Dicembre 2005, "*Quintum non datur*".

[4] Vedi nota precedente: era un compleanno "doppio", Nikolai e Jànos sono abituati a farsi compagnia.

di essere un teorema, non un assioma da prendere per buono per fede o per concessione dialettica. Però il Quinto sembra essere davvero geloso della sua essenza di postulato, e rifiuta pervicacemente di farsi dimostrare: e più passa il tempo, più la comunità matematica si stupisce per l'incredibile lungimiranza di Euclide.



4 *Nikolaj Lobačevskij a sinistra, János Bolyai a destra.*

È solo all'inizio del XIX secolo che i due giovinastri – che, a differenza della banda degli impressionisti, non si conoscevano tra loro – decidono di dare piena fiducia a Euclide e provano a vedere cosa succede se si concede pienamente la "dignità di postulato" al Quinto Postulato, e si mettono a cercare di capire cosa possa accadere alla geometria se a quel postulato ci si rinuncia.

Quello che succede è che spuntano fuori, quasi dal nulla, delle nuove geometrie. La scoperta getta nel panico la comunità dei matematici (con l'eccezione di Gauss, ovviamente: dall'alto del suo incommensurabile genio, aveva già percorso in anticipo buona parte del percorso dei due giovani e, dall'alto della sua saggia prudenza, aveva deciso di non pubblicizzare quanto scoperto) che non sa come prendere la notizia e cosa fare di questi strani oggetti. Anche questo è un cambio di prospettiva, uno sconvolgente cambio di sistema di riferimento: ma a che cosa mai può servire? Di un quadro rivoluzionario si può scrivere una stroncatura, di una geometria inutile che cosa si può fare? Niente, a parte tacciarla di irrealtà, visto che non si riesce a dimostrarne l'inconsistenza.

Arte e matematica sono cose diverse, dicevamo: eppure non bisognerebbe trascurare l'impressionante numero di idee che le accomunano. In particolare, quella sezione dell'arte che è la pittura classica ha avuto in comune con quella sezione della matematica che è la geometria euclidea perfino il ruolo, il compito che a lungo hanno attribuito loro gli esseri umani. Entrambe erano considerate rappresentazioni della realtà: l'abilità del pittore era misurata da molte peculiarità, ma la più essenziale era la perfetta riproduzione dell'oggetto dipinto con l'immagine che l'occhio dava dello stesso oggetto. Al geometra, in fondo, si chiedeva qualcosa del tutto analogo: rappresentare la realtà; certo con mezzi e intenti diversi, ma con il medesimo obiettivo. Il mondo, l'universo era considerato perfettamente aderente alla geometria, e per geometria non si poteva intendere altro che la geometria euclidea. Già consentire dignità di esistenza al plurale di quel termine, "geometrie", aveva un che di blasfemo.

Così, a differenza di quanto accadde agli Impressionisti, che trovarono in Cézanne l'alfiere che riuscì a mostrare al resto del mondo che la pittura poteva essere qualcosa di più ampio, più vasto della mera rappresentazione della realtà, a Lobačevskij e Bolyai manca chi riesca a dare alle loro geometrie la stessa dignità di quella di Euclide. Del resto, come sperare in un tale salto di prospettiva, se anche i più tolleranti e curiosi colleghi, nell'esaminare le geometrie non-euclidee, palesano magari curiosità e interesse, ma non si sognano neppure di mettere in discussione l'evidente, assoluto primato della geometria euclidea?

Quella delle geometrie non-euclidee è ancora una rivoluzione incompleta. Anzi, peggio: non è una rivoluzione, è solo qualcosa che deve ancora essere classificato, indagato, riportato nei giusti binari "naturali". Qualcosa da correggere, in ultima analisi: sotto sotto, il pensiero più diffuso tra i matematici è riepilogabile in una specie di sensazione di fastidio: d'accordo, il Quinto Postulato è davvero un postulato, i due giovanotti hanno dimostrato che se si prova ad eliminarlo non si arriva a contraddizioni formali, ma in un sistema geometrico coerente ma palesemente diverso dalla realtà. Quindi, dacché la geometria è la descrizione della realtà, deve essere possibile demolire, cancellare certe abiezioni; non che sia cosa particolarmente urgente, del resto: che la geometria euclidea è superiore, è cosa indiscussa.

Così pensavano tutti, o quasi. Lo stesso Lobačevskij chiama la sua creazione "geometria immaginaria", quasi a voler prendere le distanze dalla realtà: altri, ovviamente meno indulgenti verso il suo lavoro e quello di Bolyai, definiranno quelle costruzioni "geometrie da manicomio"[5]. Poi, all'improvviso, anche le geometrie non-euclidee riescono a trovare il loro Cézanne: più vecchio del vero Cézanne di poco più di quattro anni, e certo niente affatto parigino, è un matematico italiano, figlio di un pittore.

5 *Eugenio Beltrami.*

Eugenio Beltrami nasce a Cremona il 16 Novembre 1835, da una famiglia non particolarmente agiata. Il padre, anch'egli di nome Eugenio, dipinge miniature, e non sembra che a quel tempo fosse una professione in grado di sostenere agevolmente una famiglia: tanto che il giovane Beltrami comincia a frequentare l'università di Pavia sotto la guida di Francesco Brioschi[6], ma deve interrompere gli studi e impiegarsi, ventunenne, come segretario di un ingegnere ferroviario.

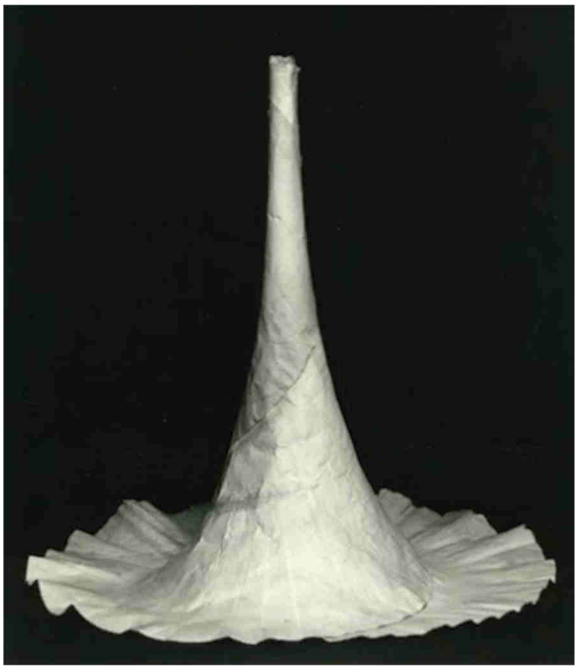
Sono gli anni più effervescenti del Risorgimento: mentre Eugenio si trasferisce per lavoro prima a Verona e poi a Milano, l'Italia diventa uno stato unitario. C'è tutto da rifondare e, come accade quasi sempre, la cosa più significativa è la rifondazione del sistema scolastico, davvero arretrata rispetto a quello delle grandi nazioni europee. Pur senza aver ottenuto la laurea, Beltrami riprende gli studi matematici, e nel 1862 dà alle stampe la sua prima memoria: non doveva essere una brutta pubblicazione, se l'Università di Bologna lo chiama in qualità di "professore invitato" a tenere corsi di Algebra e Geometria Analitica. Resterà sotto le due torri per due anni, e ci tornerà poi anche nel 1866, come professore di Meccanica

[5] Ad esempio, Giusto Bellavitis (1803-1880), professore a di Geometria all'università di Padova.

[6] Famoso per aver partecipato alle Cinque Giornate di Milano, per aver creato una vera scuola di matematici (oltre a Beltrami, anche Luigi Cremona e Felice Casorati studiano con lui) e soprattutto per essere il fondatore del Politecnico di Milano.

Razionale: ma tra il 1864 e il 1866 sarà professore di Geodesia in quel di Pisa, dove avrà occasione di incontrare e conoscere Bernhard Riemann[7].

Saranno proprio gli studi di Riemann, anni più tardi, a convincerlo dell'esattezza delle sue idee. Beltrami, professore universitario senza laurea[8], è da tempo affascinato dalle idee rivoluzionarie di Bolyai, Lobačevskij e da quelle, posteriori ma forse ancora più innovative, dello stesso Riemann. Nel 1868 pubblica il suo "*Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*" che, su consiglio di Cremona, aveva tenuto nel cassetto perché l'amico temeva che contenesse un ragionamento circolare: in particolare, che si facesse uso della geometria euclidea per esporre la geometria non-euclidea. Il dubbio, che Cremona espresse certo in buona fede, era infondato: Beltrami, attraverso lo studio delle geodetiche a curvatura costante negativa, arriva a concludere che Bolyai e Lobačevskij non hanno inventato geometrie immaginarie, dei vuoti contenitori basati sul nulla, ma delle vere e proprie geometrie alternative a quella euclidea, che al pari di essa hanno piena dignità.



6 *La "cuffia della nonna" di Beltrami.*

Una volta fornita la dimostrazione formale, Beltrami passa anche alla costruzione fisica, oggettiva di modelli che – per dirla in maniera un po' aulica – fanno davvero toccare con mano l'immanenza delle geometrie non euclidee: se la sfera euclidea è l'esempio perfetto e tridimensionale di un solido a curvatura costante, allora la sua "pseudosfera" ben dimostra l'esistenza di un solido a curvatura costante negativa, che è perfettamente descritto dalle geometrie non euclidee; ne costruisce con molta carta e ancor più pazienza diversi modelli, e uno di essi è ancora conservato al Museo dell'Università di Pavia: fosse nero, anziché bianco, potrebbe essere facilmente scambiato per un cappello da strega preparato per festeggiare Halloween. Ai tempi di Beltrami la ricorrenza americana non era granché famosa in Lombardia, e il nomignolo che presto si guadagnò il suo modellino fu il più tradizionale "cuffia della nonna", per diventare poi, nel giro di poco, la "cuffia di Beltrami".

Come Cézanne, neanche Beltrami ha piena consapevolezza delle conseguenze della sua opera: il suo intento non è quello di fare una rivoluzione, e neppure quello di dimostrare davvero la piena consistenza logica delle geometrie euclidee. In ultima analisi, probabilmente non ha neppure l'intenzione di dimostrare la vera "essenza di postulato" al Quinto Postulato di Euclide. Il suo vero intento, dicono gli storici, è solo quello di mostrare l'esistenza di varietà geometriche che sono descritte dalle geometrie non-euclidee (come la sua "cuffia", che è perfettamente descritta dalla geometria iperbolica di Lobačevskij) e un principio generale in grado di raccogliere sotto la stessa classificazione le geometrie non euclidee, compresa quella nuova di Riemann. Solo più tardi altri trarranno le inevitabili conclusioni, ovvero che sì, la rivoluzione è davvero completa: le geometrie non-euclidee hanno la piena dignità di esistenza, tanto quanto quella

[7] "*Pellegrinaggio a Thule*", RM068, Settembre 2004.

[8] Ad onor del vero, vale la pena precisare che, pura avendo abbandonato gli studi a Pavia al terzo anno del corso di laurea in Matematica, nel 1856 l'università di Bologna aveva deciso di "approvarlo" come "Dottore in Scienze Naturali".

tramandataci da Euclide. A tutte può essere affidato il compito di rappresentare la realtà; cosa che implica, inevitabilmente, che non sappiamo quale di esse riesca meglio in tal compito, o addirittura se sia possibile che una geometria possa mai farlo.

Ed è forse per questo che la geometria moderna sembra così astrusa agli occhi dei non iniziati: cresciuti con gli occhi pieni delle meraviglie pittoriche di Raffaello e Caravaggio, facciamo fatica, necessitiamo di tempo e di istruzione per poter davvero apprezzare Kandinskij. Ipnotizzati dalle meraviglie dei teoremi degli Elementi di Euclide, ci sentiamo sperduti di fronte ai misteri della geometria differenziale; quasi non la riconosciamo come geometria, proprio come molti si rifiutano di chiamare "quadri" le tele astratte. Ma la realtà è che matematica e arte, quasi nello stesso tempo, ha fatto insieme il gran salto, svincolandosi dall'obbligo della rappresentazione della realtà. Non è dato sapere se sia un bene o un male, ma di certo è innegabile che né l'una né l'altra hanno perso l'altra caratteristica fondamentale che hanno in comune: la bellezza.

2. Problemi

2.1 Negoziati semiformali

In questo periodo di minimizzazione degli incontri di persona, ci pare giusto adattare un vecchio problema alla nuova situazione.

Nell'ambito di un negoziato sulla distribuzione di aiuti per quanto riguarda l'uscita dall'emergenza CoViD-19, per evitare di distribuire il virus tra i partecipanti, è stato ipotizzato un sistema di comunicazione piuttosto interessante.

Tanto per cominciare esistono 35 "pezzi grossi", ossia persone in grado di prendere le decisioni e discutere le proposte; dato il loro ruolo, ognuno di questi ha assegnata una "stanzetta" in un corridoio, e sono 20 da una parte e 15 dall'altra; per comunicare tra loro e scambiarsi le proposte, hanno a disposizione dei portaborse (una volta si diceva "corrieri diplomatici"), che però devono sottostare a ben precise regole.

Tanto per cominciare, ogni portaborse ha un percorso unico, dalla stanza "x" di un lato del corridoio alla stanza "y" dell'altro lato del corridoio; non può andare in altre stanze e le due stanze devono essere su lati opposti del corridoio. I nostri validi assistenti sono abbastanza di larghe vedute da comprendere il concetto di "percorso inverso", quindi "percorso unico" significa anche dalla stanza "y" alla stanza "x".

Inoltre, per evitare contagi durante il trasporto e impedire scontri (pensate alla solita gag dei due tizi che si urtano e scambiano le valige), i diversi percorsi dei messaggeri non devono mai incrociarsi.

"...e se devo parlare con il mio vicino di stanza?" Nessun problema: parli (sempre via portaborse) con un tizio dall'altra parte, che poi passerà il messaggio (attraverso un altro portaborse) ad un tizio dalla tua parte, eccetera: insomma, dovete trovare il percorso "rimbalzando" da un lato all'altro del corridoio.

Evidentemente, ad una medesima stanza possono affluire (ed effluire) più portaborse: in questo caso i diversi percorsi non vengono considerati incrociantisi.

I nostri pezzi grossi, che stanno organizzando la cosa, una volta tanto non sono interessati a minimizzare le spese (in fondo, dato il periodo di crisi, avere qualche ulteriore posto di lavoro potrebbe anche essere una buona cosa, senza esagerare, chiaro) e neanche ad ottimizzare i tempi di trasmissione dei messaggi (i portaborse sono efficientissimi), ma vorrebbero avere un minimo di possibilità di scelta sull'organizzazione, quindi vi hanno chiesto di calcolare *quante* topologie di collegamenti, fatte salve le regole di cui sopra, siano possibili.

Oh, prima che nel vostro cervello si attivi il Dipartimento Sporchi Trucchi: il corridoio è lineare, quindi non sognatevi di metterli tutti su una ciambella. E le stanze dei capoccia non hanno finestre.

Poi, se voleste un'espansione (con il solito monito che sono idee che ci sono venute, di cui non abbiamo neanche cercato la soluzione), potreste calcolare quanti portaborse vi servano e quale sia il diametro della rete... Hanno un minimo? Hanno un massimo?

2.2 Calcoli tramviari

Sono costosi, la manutenzione è complessa, non possono fare i sorpassi e la loro guida è tutt'altro che semplice, ma a Rudy i tram piacciono moltissimo, soprattutto quelli vecchi (a Torino erano verdi), con i sedili in legno e metallo e dall'aria vagamente liberty; come diceva sua nonna, "è l'unico posto dove trovi dei giovani educati che ti cedono il posto a sedere. Probabilmente perché i sedili sono scomodissimi".

Quindi, lo ambientiamo sul tram.

È nostra convinzione, sempre per restare in tema CoViD, che buona parte della diffusione del virus sia ad oggi imputabile all'affollamento sui trasporti pubblici[9]; essendo questa ipotesi non scartabile a priori, la locale azienda tramviaria ha deciso di *statisticare* un po', e quindi adesso il nostro Guido[10] si ritrova a dover guardare dove mette il tram[11], a spiegare alla vecchina che ha preso il dodici mentre doveva prendere il quindici nell'altra direzione, a verificare che tutti abbiano il biglietto e a contare i passeggeri. Logico che ogni tanto "scappi qualcosa" (nel campo del turpiloquio dialettale, i tramvieri torinesi danno dei punti a qualsiasi scaricatore di porto), fortunatamente per ora solo nell'ultima attività loro richiesta.

Nella fattispecie, il nostro Guido ha lasciato il capolinea con un certo numero di uomini e donne a bordo; alla prima fermata, un terzo delle donne scendono e il Guido fa salire un pari numero di passeggeri, tutti uomini, e annota diligentemente la cosa.

Alla seconda fermata, succede il contrario: un terzo degli uomini scendono e vengono ammesse a bordo un pari numero di persone, tutte donne; la cosa viene registrata, ma...

"*Boiafauss!*" si ode dalla cabina di guida, "non ho scritto quanti erano 'sti *gadani* all'inizio!" Ad una veloce verifica, si vede che ci sono due donne più degli uomini; non solo, ma un solerte passeggero fa presente che adesso gli uomini sono tanti quante erano le donne all'inizio della corsa.

Aiutate il nostro Guido! Quanti erano, alla partenza dal capolinea?

2.3 Questo non è un problema

È una richiesta, se ne avete voglia: sta tormentando Rudy da un po' di tempo, e la cosa lo secca. Se gli passate la soluzione, grazie in anticipo.

Avete disposizione una quantità (potenzialmente infinita) di semisfere cave (spessore zero) e raggi tutti diversi tra loro; decidete di impilarle, e partite dalla più larga, a "buco in giù", mettendone sopra (sempre "a buco in giù") un'altra: quest'ultima, avendo un diametro minore, resterà in contatto lungo il suo cerchio massimo con quella più grande, fornendo un incremento dell'altezza della pila. E avanti così, per tutte le semisfere (OK, "tazze") che vi pare, anche tutte.

Esiste un'altezza massima della pila? Se ne abbiamo un numero finito, quale successione dei raggi ci permette di raggiungere l'altezza massima? Non sono così sicuro che venga fuori una serie armonica, ma se riuscite a dimostrarlo, grazie uguale.

3. Bungee Jumpers

Se il pentagono (generico) $P=A_1A_2A_3A_4A_5$ è dato, è banale costruire il pentagono $P'=M_1M_2M_3M_4M_5$, con i vertici sui punti medi di P.

Studiate il problema inverso: è possibile, dato il pentagono P', costruire il pentagono P?

Estendete il problema agli n-agoni, per qualsiasi valore di n.

La soluzione, a "Pagina 46"

[9] Un blogger col quale teniamo contatti sostanzialmente monodirezionali qualche giorno fa ha fatto notare una cosa: "Quello che stupisce di questo virus è la sua precisione: tutto bene se prendi l'autobus per andare in ufficio, ma come ti azzardi a farti una birra e una pizza con gli amici, colpisce inesorabile".

[10] Da una ventina d'anni a Torino è il soprannome degli autisti in generale, ivi incluse le persone che, quando si esce la sera, non bevono alcoolici per tutta la serata onde essere in grado di riportare poi a casa gli amici: è diffuso anche altrove?

[11] Aneddoto (vero): fateci sapere se esiste anche altrove. Tempo fa, ai novelli tramvieri, al primo "giro" con passeggeri, veniva imposto di guidare con un paraocchi conservato in deposito e riadattato da quando i tram erano a cavalli, per fargli dimenticare completamente di guardare a destra o a sinistra: come da Codice della Strada, il tram ha comunque la precedenza e ha anche i "suoi semafori", quindi guardare di fianco non serve a nulla.

4. Soluzioni e Note

Novembre!

4.1 [260]

Il mese scorso avevamo un numero limitato di soluzioni, e così ***trentatre*** ha pensato di mandarci il suo contributo. Riportiamo qui il commento che accompagnava le sue soluzioni, che trovate più avanti:

> Guardando anche le altre soluzioni, mi chiedo: è così faticoso, parlando di geometria piana, aggiungere un disegno che può chiarire le cose riducendo al minimo il ricorso, spesso confuso e a volte disperato, alla geometria analitica?
>
> Per questo aggiungo anche una mezza pagina sull'altro problema RM260 2.2. che certamente Valter risolve (e vorrei vedere) ma in prosa, forse lavorando al buio. Eppure parliamo della sezione aurea, il simbolo della perfezione estetica, perbacco; e neanche una figurina.
>
> Si obietterà che Lagrange, nella prefazione alle 530 pagine delle Mecanique Analytique, mise in guardia il lettore che non avrebbe trovato nessuna figura. Ma lui era Lagrange, e poteva permetterselo.

Ci sono elementi in queste poche righe per mandare in sollucchero ognuno del trio, complimenti.

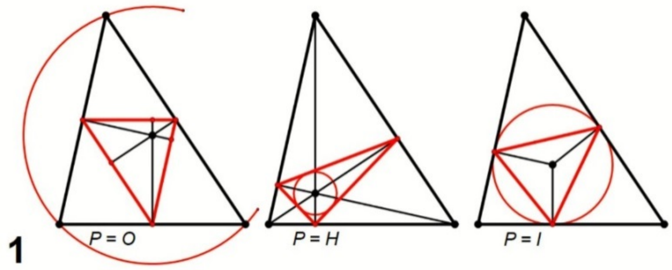
4.1.1 Lavori (teorici) in giardino

Qui il testo del primo problema di ottobre:

> *Il nostro giardino è composto da aiuole triangolari, tutte diverse tra loro. Per ogni aiuola scegliamo un punto P al suo interno e, tracciate le perpendicolari ai tre lati passanti per P, individuiamo un nuovo triangolo formato dai piedi delle perpendicolari. Poi iteriamo il procedimento, mantenendo lo stesso punto P: perpendicolari, triangolo dei piedi, perpendicolari, eccetera, finché si ottiene un triangolo simile a quello originale. È sempre possibile?*

Il mese scorso abbiamo pubblicato la soluzione di ***Pasquale*** e ***Valter***, vediamo che cosa ci scrive ***trentatre***:

> Indicando il triangolo iniziale con T_1 e i successivi con $T_2, T_3 \ldots$, mettendo P in uno dei punti notevoli O, H, I (circocentro, ortocentro, incentro) del triangolo T_1 come in fig. 1



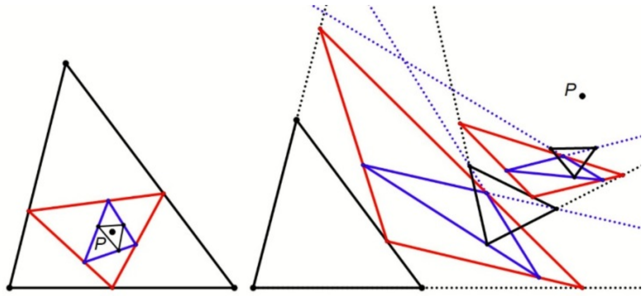
> $P = O_1$ - le rette per P sono le altezze di T_2 da cui $O_1 = H_2$
>
> $P = H_1$ - le rette per P sono le bisettrici di T_2 da cui $H_1 = I_2$
>
> $P = I_1$ - l' incerchio di T_1 è il circocerchio di T_2 da cui $I_1 = O_2$.
>
> Le tre equazioni combinate danno la ricorsione in tre passi
>
> $O_n = H_{n+1} = I_{n+2} = O_{n+3} = \ldots$.

Poiché T_n determina anche i vertici e le rette (lati, assi, altezze, bisettrici, mediane) di T_{n+1}, con P in uno dei punti O, H, I ogni tre passi i triangoli sono simili.

A questo punto basterebbe suggerire al giardiniere di piantare i suoi fiori solo in uno dei tre punti notevoli; e questo per ogni possibile triangolo (ma se è ottuso O e H sono proibiti perché esterni al triangolo).

La ricorrenza sembra valere anche per altri P ; una verifica grafica in fig. 2, con P in posizione arbitraria interna ed esterna, lo conferma.

2



A questo punto, sospettando un teorema generale, ho cercato su internet *triangoli pedali*, e ho trovato la voce

https://mathworld.wolfram.com/PedalTriangle.html

che dice senza mezzi termini

The third pedal triangle is similar to the original one.

(il terzo triangolo pedale è simile a quello originale, in italiano fa anche rima)

Questo risponde completamente al problema: P si può mettere, per qualsiasi triangolo, in qualunque punto del piano (ma un giardiniere accorto lo metterà dentro al triangolo), e tre passi bastano.

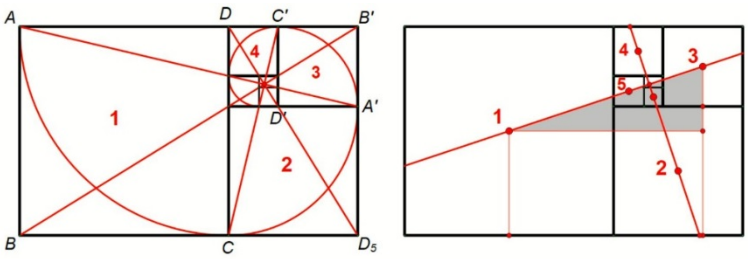
Bene, come al solito ***trentatre*** ci mette in riga. Andiamo avanti.

4.1.2 Giardino "armonioso"

Altro problemino geometrico:

Preso un rettangolo aureo, cominciamo a disegnarne i quadrati a spirale, e ne individuiamo i centri: è vero che i centri sono allineati su due rette?

Il mese scorso la soluzione di ***Valter***, qui di seguito quella di ***trentatre***:



Il quadrato (2) corrisponde, seguendo la spirale, al quadrato (1) ruotato di 90° e ridotto del rapporto $1/\varphi$, l'inverso della sezione aurea. Il quadrato (3) è quindi (1) ruotato di 180° e ridotto di $1/\varphi^2$, con il centro di rotazione e dilatazione K posto nella intersezione delle rette AA', BB', CC' - cioè nella intersezione delle diagonali dei successivi rettangoli.

La trasformazione è una dilatazione di modulo $1/\varphi^2$ che sposta un qualsiasi punto scelto in (1) nel suo analogo in (3), e successivamente in $(5),(7)\ldots$ e tutti sono allineati su una retta per *K*; lo stesso per i quadrati $(2),(4),(6)\ldots$ lungo un'altra retta, che seguendo a rotazione dei triangoli, è ortogonale alla prima.

Questo vale in particolare, nella figura a destra, per i centri dei quadrati.

Le rette, rispetto ai lati, hanno pendenza 1/3.

Infatti con i lati dei quadrati $s_1 = 1, s_2 = 1/\varphi, s_3 = 1/\varphi^2 \ldots$, la base e l'altezza del triangolo grigio sono $b = s_1/2 + s_4 + s_3/2$, $h = s_2 + s_3/2 - s_1/2$; sostituendo i valori e applicando $\varphi^2 = 1 + \varphi$ si ottiene $h/b = 1/3$.

E con questo passiamo ai problemi del mese scorso.

4.2 [261]

4.2.1 Ebbasta con 'ste somme!

Il solito problema di probabilità presentato come novità:

> *Dato un dado onesto a nove facce, numerate da* 1 *a* 9*, lanciate n volte e ad ogni uscita moltiplicate il vostro punteggio (che all'inizio è* 1*) per l'uscita. Scommettete con un amico sul fatto che il vostro punteggio sia divisibile per* 14*: che probabilità avete di vincere?*

Cominciamo subito con la soluzione di ***Valter***, arrivata a stretto giro di posta:

Premetto alcuni simboli per semplificare l'esposizione:

- *f* numero di facce
- *n* numero di lanci
- d valore per cui deve essere divisibile il punteggio.

Il numero dei casi possibili è f^n.

Non ho trovato una formula chiusa ma solo una procedura di calcolo che, mi pare, porta al risultato. Accompagno i calcoli a un caso concreto non semplice, per mostrare che questi sono generalizzabili:

- *f*=6
- *n*=9
- *d*=2700.

Elenco i modi in cui *d* può essere ottenuto dal prodotto di *k* fattori, anche ripetuti, di valore ≤*f*:

- 5.5 . 3.3.3 . 2.2
- 5.5 . 3.3.3 . 4.

Tratto i prodotti con *k*≤*n* per non superare il numero di lanci; nel nostro caso entrambi soddisfano:

- *k* = 7
- *k* = 6.

Con k_p indico il numero di volte in cui, ogni distinto fattore *p*, è ripetuto nella fattorizzazione:

- $k_5 = 2$, $k_3 = 3$, $k_2 = 2$
- $k_5 = 2$, $k_3 = 3$, $k_4 = 1$.

Calcolo le possibili combinazioni dei *k* fattori tramite: $c = k!/(k_p! \cdot \ldots \cdot k_p!)$; nei nostri due casi:

- 7!/(2! . 3! . 2!) = 210

- $6!/(2!\cdot 3!\cdot 1!) = 60$.

Mi serve ora avere il numero totale t dei fattori in tutte le fattorizzazioni, per noi t=4:2,3,4,5. Moltiplico i c a $[(f–t)^{(n–k)}\cdot(n$ su $n–k$ binomiale)] per conteggiare, di ognuno, i restanti $n–k$ lanci:

- $210\cdot(9–4)^{(9–7)}\cdot(9$ su $2) = 189000$
- $60\cdot(9–4)^{(9–6)}\cdot(9$ su $3) = 630000$.

La loro somma mi dà il totale dei casi favorevoli; nel nostro calcolo ho: 189000 + 630000 = 819000. Ottengo infine la probabilità dal rapporto fra casi favorevoli e quelli possibili: $819000/6^9 \approx 8.1\%$. Ho conteggiato le fattorizzazioni di d assumendo che sulle facce dei dati restanti non ci siano t. Ripeto con le fattorizzazioni ottenute da quelle basi, aggiungendo i t, in tutti i modi possibili:

- $5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2$, $5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2$, $5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2$
- $5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$, $5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2$, $5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2$
- …
- $5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot4\cdot2$, $5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot44$, $5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot4$, $5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot4$
- …

Sono molte ma, altrimenti, avrei considerato fattorizzazioni di multipli del valore d più volte. La cosa si semplifica notando che quelle con stesso k coincidono; nel nostro caso k vale 6, 7, 8, 9. Sommando, infine, tutte le probabilità ottenute ricavo quella totale, che è richiesta dai Nostri.

Verifico nel caso proposto dal problema, rieseguendo i calcoli precedenti utilizzando tali valori:

- f=9
- n=3 (scelgo 3 come numero di lanci dato che non ci è proposto un valore e che semplifica i conti)
- d=14
- $f^n=9^3=729$
- $14=7\cdot2$
- k=2
- $k_7=1$, $k_2=1$
- $c= k!/(k_p!\cdot\ldots\cdot k_p!)=2!/(1!\cdot1!)=2$
- t=2
- $c\cdot[(f–t)^{(n–k)}\cdot(n$ su $n–k$ binomiale$)]=2\cdot[(9–2)^{(3–2)}\cdot(3$ su $1)]=42$
- $42/9^3 \approx 5.7\%$
- $28=7\cdot2\cdot2$, $98=7\cdot7\cdot2$ (eseguo i conti una sola volta per entrambi perché coincidono)
- k=3
- $k_7=1$, $k_2=2$; $k_7=2$,$k_2=1$
- $c= k!/(k_p!\cdot\ldots\cdot k_p!)=3!/(2!\cdot1!)=3$
- t=2
- $c\cdot[(f–t)^{(n–k)}\cdot(n$ su $n–k$ binomiale$)]=3\cdot[(9–2)^{(3–3)}\cdot(3$ su $0)]=3$
- $3/9^3 \approx 0.4\%$
- probabilità dei lanci il cui prodotto è divisibile per 14: $42/9^3 + 3/9^3 + 3/9^3 = 6.585\%$.

Bene, ora vediamo la versione di ***Alberto R.***, detto anche in altre occasioni il fustigatore, in questo caso… la voce della sintesi:

Un numero random tra 1 e 9 fornito da un dado equo

- Non contiene il fattore 2 (cioè è dispari) con prob 5/9
- Non contiene il fattore 7 (cioè è diverso da 7) con prob 8/9

- Non contiene né il fattore 2 né il fattore 7 con prob 4/9

Di conseguenza il prodotto di n numeri random tra 1 e 9

- Non contiene il fattore 2 con prob $(5/9)^n$
- Non contiene il fattore 7 con prob $(8/9)^n$
- Non contiene né il fattore 2 né il fattore 7 con prob $(4/9)^n$

Adesso non ci resta che sfruttare la nota relazione

$$\text{Prob(A or B)} = \text{Prob(A)} + \text{Prob(B)} - \text{Prob(A and B)}$$

per concludere che la prob che detto prodotto <u>non</u> sia divisibile per 14 è

$$(5/9)^n + (8/9)^n - (4/9)^n$$

Ovviamente la prob che lo sia è il complemento a 1 della quantità suddetta.

La versione di ***Lorenzo*** parte dallo stesso principio:

La probabilità di vincita è la probabilità di uscita di almeno un 2 e almeno un 7 nella sequenza di n lanci del dado (buono) con facce da 1 a 9: soltanto in tal caso, infatti, la produttoria dei numeri usciti è divisibile per 14.

Consideriamo dapprima il caso in cui esattamente k (≥ 2) volte su n ($\geq k$) esce un 2 o un 7, e quindi le altre $n - k$ volte esce una delle altre sette cifre. Nella sequenza risultante dagli n lanci, le possibili posizioni occupate dalle k cifre 2 o 7 sono date dal coefficiente binomiale n su k, per cui le sequenze che rientrano nel caso considerato sono

$$(n\ k) \cdot 2^k \cdot 7^{n-k}$$

Da queste dobbiamo però escludere sia quelle che contengono k volte 2, sia quelle che contengono k volte 7, per cui ne rimangono

$$(n\ k) \cdot (2^k - 2) \cdot 7^{n-k}$$

Per ottenere la probabilità di vincita, basta quindi calcolare la sommatoria di tutti questi termini per k da 2 a n, e dividerla per il numero di tutte le possibili sequenze, cioè 9^n.

Con $n = 11$ la probabilità di vincita già supera il 50% (è quasi il 51,6%); con 18 lanci arriva a circa il 77,1%.

E visto questo passiamo al prossimo problema.

4.2.2 Festa al Circolo

Un torneo di scacchi per il Capo e il Doc non può portare niente di buono, non pensate? Qui la versione corta di come è andata:

Il torneo di scacchi è un torneo all'italiana con un punto per la vittoria e mezzo punto per la patta. Rudy e Doc hanno totalizzato in totale otto punti, i restanti giocatori tutti lo stesso punteggio, maggiore sia di quello di Rudy sia di Piotr. Quanti sono gli altri giocatori?

Anche qui cominciamo con ***Valter***:

Due simboli per facilitarmi l'esposizione:

- g il numero di giocatori

- p il punteggio comune per ciascuno dei g–2 restanti.

Alcuni vincoli, ricavati dai dati del problema, ai loro valori per poterli, poi, ottenere:

- ogni giocatore fa g–1 incontri

- il numero totale delle partite è $g(g-1)/2$, che risulta anche la somma di tutti i punteggi

- tale somma vale pure $p(g-2)+8$; da ciò si ricava, quindi, l'eguaglianza $g(g-1)/2=p(g-2)+8$

- essendo ultimi, i punteggi dei nostri sono inferiori a quello degli altri, cioè $2p>8=p>4$

- ovviamente g deve essere un numero naturale, come pure $2p$ essendo somma di zeri, uno e ½
- volendo filtrare ulteriormente i possibili risultati, ma non serve, da p>4 segue che g>5.

Risolvendo si ha che g=16 e p=8; per chiudere devo mostrare come sono terminati gli incontri.

Ecco una possibilità:

- i 14 membri "seri" hanno vinto ciascuno una partita e pareggiate tutte le restanti 14
- le 14 vittorie sono altrettante sconfitte di uno dei nostri che, però, batte l'altro
- l'altro inetto, quello sconfitto al punto precedente, pareggia gli altri 14 incontri
- i punteggi delle due schiappe sono 1 e 7 con somma 8 e inferiori a quello degli altri
- lo score degli altri 14, avendo tutti vinto una partita e pareggiate le altre 14, è 8
- vanno bene gli altri modi in cui le schiappe si spartiscono le 14 sconfitte e pareggi
- l'unico modo non ammesso è che uno subisca solo sconfitte poiché l'altro otterrebbe 8.

Si può arrivare facilmente al risultato notando che il numero di partite è g su 2 binomiale.

Con g=16 si ha 8·15; se si contano i nostri come uno unico è come se il punteggio di 15g è 8.

Notando che con tutti pareggi ognuno ottiene 7½ è necessario ai 14 "seri" vincere una volta.

Per simmetria, essendo uguale il punteggio dei 14, l'unico modo è: 14 pareggi, una vittoria.

Adesso arriva ***Alberto R.***, che trova sempre versioni alternative o estensioni:

I giocatori sono g più Rudi e Doc, in totale g+2.

Se ognuno incontra tutti gli altri una sola volta, il numero delle partite giocate è (g+2)(g+1)/2 che è anche la somma dei punti di tutti i partecipanti, posto che per ogni partita si distribuisce un punto.

D'altra parte Rudi e Doc cumulano 8 punti mentre i restanti g ne cumulano n (>4) a testa. Ne risulta l'equazione diofantea

$$(g+2)(g+1)/2 = n \cdot g + 8$$

Con soluzione n=8 g=14

NOTA: Il testo del problema si limita a precisare che giocano "tutti contro tutti" per cui, in mancanza di diversa indicazione, ho supposto una sola partita per ogni coppia. Questo però non sarebbe equo a causa del leggero vantaggio del bianco che gioca per primo. Se quindi ipotizziamo un torneo con due partite a coppia l'equazione diofantea perde il "diviso due" al primo membro e la soluzione diventa n=8 g=6

Le equazioni diofantee servono anche per ricordare al Capo che ***Alberto R.*** è sempre uno dei suoi lettori preferiti. Gli stessi solutori nello stesso ordine? Ebbene sì, ecco ***Lorenzo***:

Nel primo torneo ciascun giocatore disputa una partita contro ciascun altro giocatore. Detto n il numero dei giocatori (compresi Rudy e Doc), i punti in palio sono dunque tanti quante le partite, ossia $n \cdot (n-1)/2$, numero che deve eguagliare gli 8 punti di Rudy e Doc più $n-2$ volte il punteggio di ogni altro giocatore, chiamiamolo $x/2$, con x intero (e tale da garantire che $x/2$ superi sia il punteggio di Rudy sia quello di Doc):

$$n \cdot (n-1)/2 = 8 + (n-2) \cdot x/2$$

da cui $x = (n+1) - 14/(n-2)$, che ha come unica soluzione accettabile $x = 16$, per $n = 16$.

Ad esempio, Rudy subisce una sconfitta da ciascuno dei primi altri sette giocatori e patta con ciascuno dei secondi altri sette; viceversa, Doc patta con ciascuno dei primi altri sette giocatori e subisce una sconfitta da ciascuno dei secondi altri sette. Non importa come Rudy e Doc si spartiscano il punto nel loro incontro (che finiscano entrambi a 4, oppure uno a 3.5 e l'altro a 4.5: la somma dei loro punteggi sarà comunque 8), ma ciascuna delle partite tra gli altri quattordici giocatori deve finire in parità. In conclusione, ciascuno degli altri quattordici giocatori totalizza 8 punti e il secondo torneo sarà disputato tra questi 14 giocatori.

Siamo arrivati al fondo. Malgrado altre soluzioni siano arrivate, dovranno aspettare il mese prossimo… Alla prossima!

5. Quick & Dirty

L'estate è ormai un ricordo, fisicamente rappresentato dai 100 chilogrammi di angurie che, stregati da un inizio settembre insolitamente caldo, avete acquistato. Trattandosi di angurie strettamente matematiche, sono composte al 99% in peso di acqua. Complice il fatto che non ne avete ancora mangiata nessuna e il calore settembrino, parte dell'acqua è evaporata e la sua percentuale nelle nostre angurie è ora al 98%.

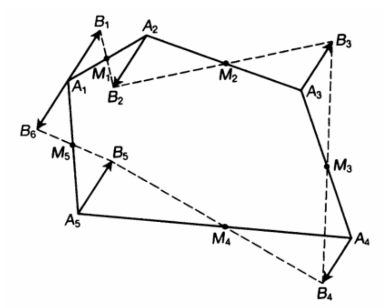
Quanto pesano adesso le angurie?

50 chilogrammi. Consideriamo il concetto platonico di anguricità, ossia di quel che resta di un'anguria una volta estratta tutta l'acqua, e che non varia durante l'essicazione. Nel nostro caso, abbiamo (sempre) 1 chilogrammo di anguricità.

*All'inizio, l'anguricità era l'*1% *del peso totale; al termine, era il* 2%*. Di quale peso il valore di 1 chilogrammo rappresenta il* 2%*? Più matematicamente, oltre al chilogrammo di anguricità nelle nostre angurie abbiamo* 98/100 *del peso composti di acqua; se x è il peso delle angurie, deve essere:* $1+98/100\,x = x$, *ossia* $x = 50$.

6. Pagina 46

Supponiamo il pentagono P sia stato costruito: siano $M_1M_2M_3M_4M_5$ i punti medi dei lati consecutivi A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1.



7 *La costruzione.*

Si scelga un punto qualsiasi B_1 sul piano non appartenente al perimetro di P; si ruoti B_1 di 180° attorno ad M_1 per ottenere B_2, si ruoti B_2 i 180° attorno a M_2 per ottenere B_3 e si proceda in questo modo; i vettori $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i$ soddisfano la relazione:

$$\mathbf{A_1B_1} = -\mathbf{A_2B_2} = \mathbf{A_3B_3} = -\mathbf{A_4B_4} = \mathbf{A_5B_5} = -\mathbf{A_1B_6}.$$

Quindi, B_6, A_1 e B_1 sono collineari, e A_1 è il punto medio del segmento B_6B_1.

Quindi, per costruire il pentagono P dato P', possiamo scegliere un qualsiasi punto B_1 non sul perimetro del pentagono, e quindi costruire i punti B_2, B_3, B_4, B_5 e B_6 e, infine, trovare il punto medio A_1 di B_1B_6.

I punti restanti vengono costruiti per rotazione di 180° attorno a M_i del punto A_i.

Per quanto riguarda il secondo quesito, la medesima costruzione si può applicare per ogni *n* ***dispari***: in questi casi, il poligono P ottenuto da P' è unico.

Se *n* è ***pari***, allora $\mathbf{A_1B_1}=\mathbf{A_1B}_{n+1}$; e quindi il problema non ha soluzione se $B_{n+1}\neq B_1$. Se, invece, $B_{n+1}=B_1$, esistono infinite soluzioni in quanto A_1 è arbitrario.

7. Paraphernalia Mathematica

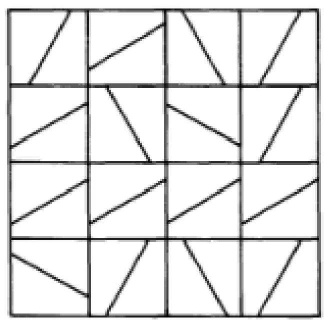
OK, è probabile che ne abbiate sentito parlare. Ma ci serve come premessa, per una interessante espansione…

7.1 Pavimenti interessanti

Sarà perché le abbiamo viste in un mucchio di pavimenti, sarà perché danno l'aria di qualcosa di statico e vecchiotto, sarà perché (quelle regolari) sono descrivibili matematicamente e ne esistono un numero definito di tipi, ma le tassellature periodiche dopo un po', stufano.

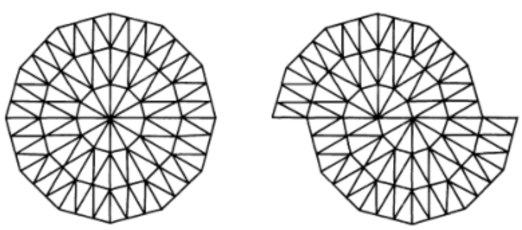
Va detto che lo studio delle tassellature non periodiche comincia con un grosso ostacolo: il fatto che, appunto, non siano periodiche. Già solo il pensare a come descriverle non è facile. Ma partiamo con calma: ad esempio, con una definizione. Del contrario.

Si definisce ***tassellatura periodica*** quella nella quale possiamo definire una *regione* che, ripetuta per sola traslazione (e quindi senza riflessioni o rotazioni) possa saturare il piano; si noti che non viene detto nulla sul fatto che la "regione" comprenda un numero *intero* di piastrelle; potete "tagliarla" come volete, e poi usare quella come regione: questa notazione può sembrare abbastanza inutile per le tassellature basate su poligoni *regolari*, ma quando passate a delle figure più complesse spesso questa possibilità semplifica notevolmente la vita: se non ve ne viene in mente nessuna, citofonare "M.C.Escher": buona parte delle sue tassellature sono riconducibili a regioni quadrate, triangolari (equilatere) o esagonali.



8 *Da periodica ad aperiodica.*

Un'infinità di forme ammettono solo tassellature periodiche; un'altra infinità le ammettono sia periodiche che aperiodiche e un'altra infinità (di tassellature periodiche) può essere facilmente trasformata in aperiodica. Se quest'ultima frase vi sembra un po' azzardata, prendete un reticolo di quadrati uguali, e divideteli come nella figura qui a fianco, "tirando la linea" in modo tale che le due parti del quadrato siano messe in modo da dare uno schema che non si ripete: *et voila*, avete trasformato una tassellatura periodica in una aperiodica.

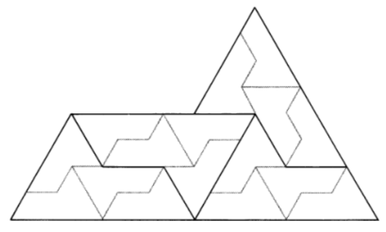


9 *Un paio di cose che si possono fare.*

Non che sia una grossa impresa… è piuttosto facile, anche con figure ragionevolmente regolari, ottenere delle tassellature per le quali non è definita una *regione* da duplicare; ad esempio, se partite da un triangolo isoscele il cui angolo al vertice sia un divisore esatto di 360° (insomma, sia uno degli angoli al centro di un qualche poligono regolare), potete facilmente costruire una tassellatura aperiodica (anche se molto "ordinata"), come quella nella prima figura qui a fianco (dove abbiamo usato il triangolo con l'angolo al vertice di 36°).

Non solo, ma ***Goldberg***, nel 1955, ha "segato" orizzontalmente la tassellatura, l'ha spostata di un lato del triangolo e ha ottenuto la tassellatura (*ancora più* aperiodica) della seconda parte della figura.

Inoltre, ha anche sviluppato un'interessante congettura (come vedremo, qui si lavora spesso per congetture – e, ci si lasci dire, si prendono speso delle "nasate pazzesche". Va detto che Goldberg ha premesso un "in tutti i casi conosciuti", quindi non siamo sicuri si tratti effettivamente di una congettura): che "ogni figura che tasselli in modo *aperiodico* il piano lo tassella anche in modo periodico"; attenzione, che qui stiamo parlando di *figure*, non di *regioni*.


10 *Saluti dall'Egitto.*

Dal punto di vista del *divertissement* matematico, qui una grande idea l'ha avuta **Golomb**: esistono figure che ricoprono in modo aperiodico il piano, *generando copie sempre più grandi di sé stesse*? Sì, esistono. La più famosa (e, secondo noi, anche la più bella) delle ***Tassellature di Golomb*** è la "sfinge", e ve ne mostriamo la costruzione in figura: *divertissement* quando volete, ma cerchiamo di ricordarci che mancavano alcuni anni all'idea di Mandelbrot dei *frattali*, e secondo noi Golomb con la sfinge ci è passato pericolosamente vicino. Si noti, comunque, che due sfingi (una delle quali ruotata di 180°) tassellano il piano in modo periodico.

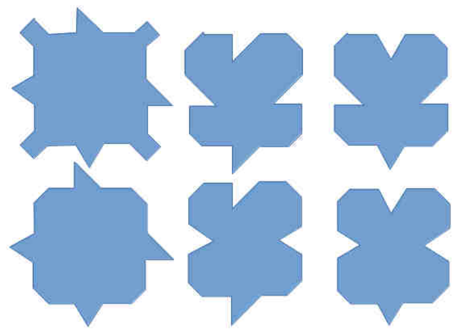
Ora, vi chiederete: esistono insiemi di almeno due forme *differenti* che tassellano il piano *solo* in modo aperiodico? Qui, però, è meglio intendersi sui termini.

Il nodo del contendere è cosa intendiamo per "solo": statuiamo che si intenda "né una singola figura, né un sottoinsieme delle figure danno origine a tassellature periodiche ma, utilizzando tutte le figure, è possibile ottenere una tassellatura aperiodica."

E ammettiamo rotazioni e riflessioni[12], se vogliamo (...già, ogni tanto "non vogliamo". E in qualche altro caso "non serve").

Sino al 1961, era diffusa l'idea che questi insiemi non esistessero: ma appunto in quell'anno ***Hao Wang*** ha cominciato a fare ricerche su tassellature di quadrati i cui lati fossero colorati, imponendo che due quadrati potessero stare vicini solo se i due colori a contatto fossero uguali; come detto prima, se non vi piacciono i lati colorati potete sempre costruire una serie di "dentini" che svolgono lo stesso ruolo (in questo caso, attenti che Wang non ammetteva rotazioni o riflessioni).

Wang ipotizzava che se (e solo se) esiste una procedura generale di decisione per tassellare il piano in modo aperiodico, allora qualsiasi insieme che tasselli il piano aperiodicamente lo tassella anche in modo periodico. Siccome la "Congettura di Wang" non è molto famosa, potete facilmente dedurre che fosse falsa: infatti, nel 1964, ***Robert Berger*** è riuscito a dimostrare che *non esiste una procedura generale*; quindi, esiste un insieme di "Quadrati di Wang" che tassella *solo in modo aperiodico*. Berger riuscì anche a costruire un insieme del genere, composto di "soli" 20000 quadrati.


11 *L'insieme di Robinson.*

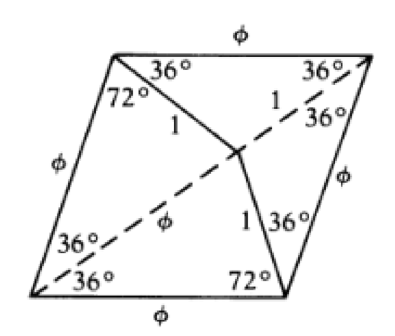
Siccome l'"Insieme di Berger" è piuttosto difficile da manovrare in salotto, ci si è dato da fare per ridurlo; lo stesso Berger è riuscito a portarlo a soli 104 pezzi, ma nel 1976 ***Raphael Robinson*** è arrivato a 24. Non solo, ma (sempre Robinson) ammettendo rotazioni e riflessioni e dotando i pezzi di sporgenze e incavi, ha fatto di meglio: ha ridotto il tutto a 6 pezzi! Li trovate nella figura a fianco.

Poi, sono arrivati i pezzi grossi. Nella forma di ***Roger Penrose***, il quale cerca ulteriormente di ridurre l'insieme.

E ci riesce, portandolo prima a quattro e poi a due, nel 1974.

[12] Prima di mettervi a tagliare nuove figure speculari, considerate l'idea di "girarla dall'altra".

Il modo più facile (attenzione: non è il più efficace per "giocarci") per costruire i tasselli di Penrose è quello di partire da un "rombo aureo", che viene poi diviso in nei due pezzi, la "freccia" e l'"aquilone": questa costruzione ha alcune interessanti proprietà, evidenziate nel "progettino" che trovate in figura.

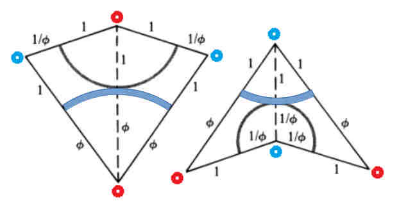


12 *La costruzione di Penrose.*

"Rudy, guarda che il rombo satura il piano…" Già, ma metterle così è vietato.

Infatti, o lavorate di "spuntoni e incavi", per forzare la giustapposizione forzata, o colorare i pezzi. Una volta tanto, esiste una colorazione "piacevole" (e dovremmo aspettarcelo, visto che coinvolge potentemente la sezione aurea.

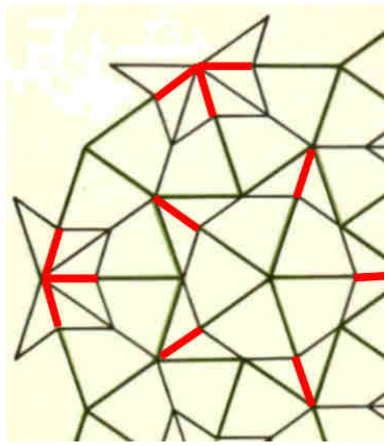
Il modo più immediato di coloritura è quello di "colorare i vertici", e imporre che solo vertici dello stesso colore possano stare vicini: decisamente migliore quella di inserire due "archi" di colore (...o anche di spessore) diverso. Questi ultimi sono i nostri preferiti, anche perché le loro dimensioni sono "matematicamente interessanti". Tra l'altro, essendo le nostre piastrelle simmetriche per riflessione, vi basta fare i disegnini da una parte sola.



13 - *La costruzione di Penrose.*

Bene, saturiamo il piano di un A4 con i nostri rombi, tiriamo le righe, ritagliamo e via a saturare il piano senza fare rombi, giusto? Beh, no. Nonostante attraverso i rombi sia facile da disegnare, se vogliamo saturare il piano (in modo aperiodico) ci mancano dei pezzi. Infatti, nonostante un numero uguale di aquiloni e frecce saturi il piano in modo periodico, se forziamo l'aperiodicità questo rapporto cambia: ci si aspetterebbe (dato che sono più piccole) che serva un numero maggiore di frecce, ma è vero il contrario: vi servono più aquiloni. All'infinito, vi serviranno φ (il rapporto aureo) aquiloni per ogni freccia. Per rendere le cose ancora più complicate, il rapporto tra le aree dell'aquilone e della freccia è, anche lui, φ.

Per costruire la nostra tassellatura, il modo migliore è quello di cominciare unendo un po' di frecce e aquiloni e poi procedendo radialmente; qualche volta siete forzati a mettere un solo pezzo, ma spesso dovrete scegliere: se, procedendo, vi ritrovate in una situazione non risolvibile (non ci sta nessun pezzo), tornate indietro sino al precedente punto di scelta e provate nell'altro modo. Adesso, avete capito perché gli informatici odiano il *backtracking*.

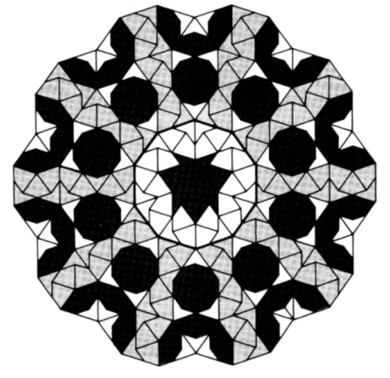


14 *Inflazione!*

Esistono un paio di fenomeni interessanti, data una tassellatura: nella figura a fianco, se per un momento ignorate le linee rosse, vedete un pezzo di una tassellatura aperiodica. Con le linee rosse, *dividete le frecce in due*; se guardate bene, quella che ottenete è una tassellatura *diversa*, con pezzi più grandi: dove si incontrano tre linee rosse si incontrano (nel nostro disegno) due "code di aquilone" grandi, mentre le linee rosse da sole formano parte dei lati esterni della coda di una freccia "grande". Siccome i pezzi piccoli vengono trasformati in pezzi più grandi, questo fenomeno è noto come "inflazione"; esiste anche il processo inverso, noto evidentemente come "deflazione". Opinione personale: qui, come in economia, sembra molto più facile inflazionare che deflazionare.

Supponiamo ora di trovarci su una Flatlandia Penrosizzata (insomma, su un piano completamente ricoperto da una tassellatura aperiodica di aquiloni e frecce); abbiamo esplorato un cerchio di diametro *d*, del quale conosciamo benissimo la struttura (Conway chiama questo cerchio "la nostra città"). Ci chiediamo quanto sia lontana una copia *esatta* della nostra città: la risposta sorprendente, data dal ***teorema dell'isomorfismo locale*** è che la distanza *non è mai superiore a 2d*. Purtroppo, pur garantendoci questo sorprendente risultato, il teorema non può dirci in che direzione sia.

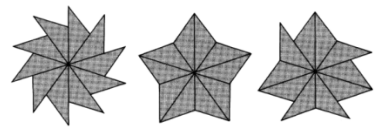
"Beh, anche per pigreco, se scelgo una successione (finita) di cifre al suo interno, prima o poi ritroverò la stessa successione…" Già, ma *non sapete quanto sia distante*. Qui, siete sicuri che esiste in una zona ben limitata[13]!



15 *Una ruota con i raggi.*

Se prendiamo una delle tassellature più note, "La Ruota Infinita", nella sua aperiodicità possiamo comunque notare alcune simmetrie: al centro c'è un decagono regolare e, attraverso l'inflazione, potete ottenere una ruota con un decagono più grande. Inoltre, i "raggi" (che Conway chiama "bruchi") sono composti da due strutture a farfalla (ah, ecco perché…) grandi e piccole che si alternano: per inflazione, un bruco resta bruco e mantiene il suo asse.

Potete ribaltare le farfalle mantenendo lo stesso contorno (ma notate che le tessere al loro interno vengono "messe diverse"): varia solo, considerando le opportune tessere bianche del decagono come facenti parte del relativo bruco, la forma della zona nera centrale e, considerato che potete ribaltare la farfallina o no, avete 1024 (2^{10}) possibili combinazioni di "bruchi", ma eliminando le rotazioni e le riflessioni, le combinazioni distinte sono solo 62; queste danno origine a una zona centrale (quella nera) che possiamo considerare come formata da dieci triangoli isosceli uniti nel centro per uno dei vertici di base (ossia per uno degli angoli a 36°).



16 *Qualche decapodo.*

Queste figure sono state chiamate da Conway "decapodi": ne vedete alcune nella figura qui di fianco.

Anche qui, potete evidentemente costruirne 1024 ma, eliminate le rotazioni e riflessioni, ne restano 62: se però sperate di costruire tutti i decapodi all'interno della stella, dobbiamo disilludervi: solo quello nella figura della ruota è tassellabile con le nostre piastrelle, gli altri (ottenibili appunto per rivoltamento dei raggi) vi lasciano la ruota "bucata": non potete tassellarli!

Almeno in parte, ci viene in soccorso però una congettura di Conway: qualsiasi buco nella vostra struttura (comunque sia fatta) per spostamento, aggiunta o sottrazione di pezzi *può essere trasformato in un buco decapodo*. Se vi state chiedendo dov'è il soccorso… beh, se avete *n* buchi, potete prima trasformarli in un buco solo (molto grande...), e poi trasformarlo in un decapodo: un buco in meno!

...e non è finita...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[13] ...così, a stima, la seconda città dovrebbe trovarsi in un cerchio di diametro 7*d* e centro nel centro della prima città... un "*d*" per la vostra città, una corona di larghezza "2*d*" attorno (che conta doppio), poi un altra corona larga "*d*" (doppia anche questa) per farci stare la città...