Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 261 – Ottobre 2020 – Anno Ventiduesimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com

RM257 ha diffuso 3'303 copie e il 18/10/2020 per Google eravamo in 111'000 pagine.

La prossima volta che volete magnificare la vostra nuova fotocamera digitale e il solito rompiscatole vi dice "Eh, ma l'analogico è un'altra cosa...", attenti che potrebbe aver ragione. Il trucco in copertina è molto più facile da realizzare in analogico che in digitale. Grazie a ***Delfo*** che ce l'ha segnalata.

1. Separati alla nascita

La matematica esiste da sempre:
l'umanità l'ha solo trovata.

Forse toccherà al tredicesimo, ma non è certo.

Probabilmente lo sapremo nei primi mesi del 2022, salvo imprevisti; la scadenza naturale del mandato del Presidente della Repubblica Sergio Mattarella è infatti il 2 Febbraio 2022[1] e, a parte la possibilità di un secondo mandato, è più o meno in quel periodo che lo scopriremo.

1 *Il dodicesimo Presidente della Repubblica Italiana, Sergio Mattarella.*

Curiosare tra i dati della dozzina presidenziale rivela qualche informazione inaspettata, se non proprio sorprendente: ad esempio, che ben la metà di essi sia nata nel XIX secolo, e solo la residua metà sia nata nel Novecento. Può stupire un po' anche la provenienza geografica dei dodici presidenti: le due regioni più popolose, Lombardia e Lazio, non hanno dato i natali a nessun capo della repubblica; in compenso, Piemonte e Campania ne hanno generati tre ciascuna, Einaudi, Saragat e Scalfaro per l'uno e De Nicola, Leone e Napolitano per l'altra; due presidenti ciascuno per Sardegna (Segni e Cossiga) e Toscana (Gronchi, Ciampi); e uno soltanto per Liguria (Pertini) e Sicilia (Mattarella).

In merito alla durata del mandato, l'indagine statistica sembrerebbe avere ben poco da dire: stabilita nella durata di sette anni[2] dalla Costituzione e immaginato il compito di presidente come difficilmente ripetibile, ci si ritrova con una durata "standard" di 2556 o 2557 giorni[3]; eppure solo sei presidenti (Einaudi, Gronchi, Saragat, Pertini, Scalfaro e Ciampi), sugli undici che hanno già completato il mandato, hanno avuto una durata compatibile con quella standard. De Nicola è stato presidente effettivo solo per quattro mesi circa, in una sorta di "prosecuzione temporanea" del suo incarico precedente come "capo provvisorio dello stato"; Segni ha interrotto la carica dopo due anni e mezzo per malattia; Leone si è dimesso con sei mesi di anticipo sull'onda di scandali politici (ai quali, peraltro, risultò in seguito essere estraneo); Cossiga ha lasciato il Quirinale con quasi tre mesi di anticipo in una sorta di protesta contro la politica nazionale. Il caso di Napolitano è di segno opposto, avendo completato pienamente il suo primo mandato ed essendo stato eletto – sebbene con palese intenzione di eccezionalità transitoria – anche per un secondo, che si è protratto per quasi altri due anni. Nonostante tutte queste eccezioni, la media dei mandati si assesta sui 2218 giorni, non troppo distante (86%) dalla durata standard teorica. Trascurando il mandato di De Nicola, che era provvisorio quasi per definizione, la media arriva a 2427 giorni, un buon 95% della durata prevista dalla Costituzione.

Dal punto di vista della formazione, la buona notizia è che tutti gli inquilini del Quirinale dal 1946 a oggi si sono fregiati di (almeno una) laurea: la notizia meno piacevole – almeno nei desideri di una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa – è che nessuna delle lauree presidenziali è di tipo scientifico o tecnologico. La più vicina, o almeno quella con più corsi di matematica al suo interno, è la laurea in Economia, ma per certi versi anche questa, sul "colle", riserva qualche sorpresa: tra i presidenti della repubblica figurano

[1] Una data notevole, almeno nel formato più diffuso: 2/2/22.

[2] Non ne abbiamo cercato conferma, ma restiamo convinti che i padri costituzionali abbiano scelto il numero 7 anche perché primo, insomma per rendere il più possibile difficile la concomitanza tra l'elezione del Presidente – simbolo di unità e continuità nazionale – e le altre elezioni, in particolare quelle politiche.

[3] In funzione del fatto che nel settennato cadano uno o due anni bisestili, e supponendo che il giorno del giuramento sia il primo del nuovo settennato ma non l'ultimo del settennato precedente.

infatti due economisti di levatura internazionale, Luigi Einaudi e Carlo Azeglio Ciampi, eppure entrambi non hanno intrapreso studi economici. Ciampi, per quanto riguarda la laurea in Economia, può ben dire di averne una *honoris causa*, che come è noto ha in tutto e per tutto gli stessi poteri legali di una ordinaria (e, ovviamente, un maggiore prestigio di immagine), ma resta il fatto che non è stata la sua prima scelta universitaria, e neppure la seconda.

N°	Presidente della Repubblica	Mandato		Giorni di mandato	Regione di origine	Istituto superiore	Laurea
		Inizio	Fine				
1°	Enrico De Nicola (1877-1959)	1° gennaio 1948	12 maggio 1948	132	Campania	Liceo classico	Giurisprudenza
2°	Luigi Einaudi (1874-1961)	12 maggio 1948	11 maggio 1955	2555	Piemonte	Liceo classico	Giurisprudenza
3°	Giovanni Gronchi (1887-1978)	11 maggio 1955	11 maggio 1962	2557	Toscana	Liceo classico	Lettere
4°	Antonio Segni (1891-1972)	11 maggio 1962	6 dicembre 1964	940	Sardegna	Liceo classico	Giurisprudenza
5°	Giuseppe Saragat (1898-1988)	29 dicembre 1964	29 dicembre 1971	2556	Piemonte	Ragioneria	Economia
6°	Giovanni Leone (1908-2001)	29 dicembre 1971	15 giugno 1978	2360	Campania	Liceo classico (?)	Giurisprudenza, Scienze Politiche
7°	Sandro Pertini (1896-1990)	9 luglio 1978	29 giugno 1985	2547	Liguria	Liceo classico	Giurisprudenza, Scienze Politiche
8°	Francesco Cossiga (1928-2010)	3 luglio 1985	28 aprile 1992	2491	Sardegna	Liceo classico	Giurisprudenza
9°	Oscar Luigi Scalfaro (1918-2012)	28 maggio 1992	15 maggio 1999	2543	Piemonte	Liceo classico	Giurisprudenza
10°	Carlo Azeglio Ciampi (1920-2016)	18 maggio 1999	15 maggio 2006	2554	Toscana	Liceo classico	Lettere, Giurisprudenza
11°	Giorgio Napolitano 1925	15 maggio 2006 *22 aprile 2013*	*22 aprile 2013* 14 gennaio 2015	3166	Campania	Liceo classico	Giurisprudenza
12°	Sergio Mattarella 1941	3 febbraio 2015	*in carica*	>2000	Sicilia	Liceo classico	Giurisprudenza

Il giovane Carlo Azeglio ha infatti ottenuto innanzitutto la laurea in Lettere alla Normale di Pisa, poi ha pensato bene di prendere anche quella in Giurisprudenza; la stessa che vanta anche Einaudi. La laurea in Lettere alla Normale è anche il titolo accademico di Giovanni Gronchi; e forse può stupire che questa facoltà sia così ben rappresentata nell'elenco presidenziale; come numero è alla pari con Scienze Politiche, che fa parte dei titoli accademici sia di Giovanni Leone che di Sandro Pertini, ma che sembra essere presidenzialmente meno considerata; Gronchi e Ciampi si sono laureati in Lettere come prima scelta e nell'Università probabilmente più prestigiosa; Leone e Pertini hanno colto l'alloro di Scienze Politiche entrambi solo come "seconda laurea". A parte queste particolarità, e non considerando le lauree *ad honorem*[4], la dozzina è quasi monocorde: tutti (tranne uno o due[5]) hanno frequentato il Liceo Classico e tutti (tranne due) hanno la laurea in Giurisprudenza. Gli unici che non possono vantare la laurea in Legge sono il già citato Gronchi e Giuseppe Saragat che – oltre ad essere anche l' "eccezione liceale", avendo preso il diploma di ragioniere – è appunto l'unico che vanti una laurea ordinaria in Economia.

Anche se la formazione superiore e universitaria sfiora l'unanimità, le poche eccezioni trovate bastano ad eliminarla dalla caratteristica che è invece pienamente comune a tutti i dodici presidenti italiani e che potrebbe essere violata dal prossimo: cosa che accadrà se

[4] A prima vista e con mero beneficio di inventario: Einaudi ne dovrebbe aver collezionate quattro, Pertini una, Cossiga quattro, Ciampi una e Napolitano sette.

[5] L'incertezza è data da Giovanni Leone: non siamo riusciti a scoprire molto sulla sua formazione pre-universitaria, e gli indizi raccolti sembrano propendere per una istruzione di carattere strettamente privato. È indubbio però che fosse una formazione già indirizzata verso gli studi giuridici, e quindi verosimilmente simile a quella del Liceo-Ginnasio; altrettanto indubbio è che nel campo giuridico Leone è stato una sorta di enfant-prodige, prendendo la prima laurea all'età di ventuno anni.

il tredicesimo Presidente della Repubblica Italiana sarà il primo presidente ad essere nato nella Repubblica Italiana.

2 *Dodici presidenti, dodici foto ufficiali: sei in bianco e nero, sei a colori.*

È abbastanza curioso, in fondo: istintivamente si tende ad attribuire agli stati una longevità di gran lunga superiore a quella degli esseri umani; anzi, quasi una sorta di immortalità, ed è quindi sorprendente vedere che assai spesso uno stato ha vita più breve di una persona. Non abbiamo una casistica completa da esporre, ma è sufficiente sfogliare rapidamente un atlante storico per convincersi della volatilità delle organizzazioni statali. Ci sono certo delle eccezioni: fra sei anni gli Stati Uniti d'America celebreranno – probabilmente con gran sfarzo e pompa magna – il compimento del loro primo quarto di millennio di vita; gli inglesi potranno ribadire, con qualche buon argomento, che a loro manca meno di mezzo secolo prima di festeggiare un millennio tutto intero, e a voler scavare si trovano facilmente decine di stati che possono rivendicare qualche forma di continuità storica prolungata[6]. Ciò nondimeno, in generale, la vita media degli stati sembra a malapena avere una durata media non troppo diversa da quella degli uomini che lo hanno istituito.

Così, non dovrebbe sorprendere troppo il fatto che tutti i dodici presidenti della Repubblica Italiana siano nati nel Regno d'Italia; e la serie potrebbe continuare. Nell'inverno del 2022 la nostra repubblica non avrà ancora compiuto 76 anni, e non è affatto impossibile che il nuovo presidente possa esserle più anziano. Il campione di riferimento è certamente troppo esiguo per poter aspettarsi una valutazione statistica significativa, ma è comunque indicativo che dei 12 presidenti della repubblica ben quattro (Gronchi, Pertini, Ciampi, Napolitano) avessero più dei fatidici 76 anni al momento dell'elezione. Ha insomma un certo senso stimare in 2/3 la probabilità che il tredicesimo presidente possa finalmente essere un figlio della Repubblica. Come ulteriore indizio si può prendere in considerazione la media delle età dei presidenti al momento dell'elezione, con un campione che spazia dai 57 anni del più giovane (Francesco Cossiga) agli 81 del più anziano (Sandro Pertini)[7]; media che si coagula attorno ad un tondo 72.

In ogni caso, è innegabile che l'Italia, per ragioni storiche e geografiche, abbia una sorta di carattere identitario più forte dello statuto politico che la rappresenta: in qualche modo ha senso parlare di una stessa "nazione Italia" sia nella sua forma monarchica dal 1861 al 1946, sia nella sua forma repubblicana successiva. È una sorta di privilegio che condivide

[6] Gli italiani non devono neanche affaticarsi troppo a cercare, avendo ben due vicini (anzi, vicinissimi) che rivendicano qualche forma di primato: San Marino asserisce di essere la più antica repubblica del mondo, e fa tradizionalmente risalire la propria istituzione al 3 settembre 301. La Città del Vaticano, ammettendo con qualche magnanimità la sua continuità con lo Stato Pontificio, può ragionevolmente rivendicare la sua data di nascita attorno al 723, con la "Donazione di Sutri" (meno ragionevolmente, come dimostrò Lorenzo Valla, nel IV secolo con l'apocrifa "Donazione di Costantino").

[7] Nel caso di Giorgio Napolitano, si è presa in considerazione l'età (80 anni) al momento della sua prima elezione. Altrimenti, ovviamente, la palma del presidente eletto più anziano spetterebbe a lui, perché il 22 aprile 2013, quando fu rieletto, mancavano giusto un paio di mesi al suo 88° compleanno.

con molti altri stati dell'Europa occidentale: la Francia è alla sua Quinta costituzione repubblicana, inframmezzata peraltro da un paio di periodi imperiali e monarchici, eppure è ben identificata come "Francia" fin dal tempo dei Merovingi; e anche Spagna, Portogallo, Inghilterra[8] e moltissimi altri paesi hanno una sorta di "identità stabile" più longeva delle loro carte costituzionali. Altri stati hanno identità meno consolidate, e i concetti – tutti simili, tutti diversi – di popolo-nazione-etnia-lingua-religione-stato si sovrappongono solo molto parzialmente, generando confusioni e conflitti.

Lo si vede ben nel raccontare le biografie dei matematici celebri: l'individuazione del luogo di nascita è di solito abbastanza agevole, ma in compenso è ragionevolmente complicato dedurre la loro cittadinanza, nel senso di appartenenza giuridica a uno stato; soprattutto per quei matematici nati in luoghi e in tempi in cui guerre facevano e disfacevano i territori.

3 *Duplice Impero, duplicemente scomparso.*

Ad esempio Paul Erdős[9] nasce nel 1913 in Ungheria, che alla vigilia della Grande Guerra era una delle due grandi monarchie che confluivano nel mastodontico Impero Austro-Ungarico[10]. L'impero si volatilizza nel 1918, e il cinquenne Paul non è più austroungarico; diventa per un breve periodo ungherese, democratico e repubblicano, subito dopo l'armistizio, quando nell'autunno del 1918 quelle che venivano chiamate "Terre della Corona di Santo Stefano"[11] diventano la Repubblica Democratica Ungherese. Non resta tale per molto, però, perché già nel marzo del 1919, pur restando ungherese e repubblicano, diventa sovietico nella Repubblica Sovietica Ungherese (detta anche Repubblica dei Consigli) di Béla Kun. Anche qui, si tratta di un'identità statale che dura solo qualche mese: arriva Miklós Horthy caccia Kun e si proclama Reggente del Regno d'Ungheria. Ovviamente, la Seconda Guerra Mondiale sparpiglia di nuovo le carte, e il minimo che si possa dire è che Erdős si è sempre dichiarato ungherese, ma certo per ragioni diverse dalla fedeltà ad uno o più statuti; e anche, allo stesso tempo, che è ben comprensibile che abbia passato buona parte della sua vita senza una residenza stabile, e verosimilmente senza neppure il desiderio di averla.

Quel che è successo a Paul Erdős è successo anche a moltissimi altri, ovviamente, a prescindere dal mestiere, dalle abitudini, dai ruoli. E anche a prescindere dalla collocazione geografica, a ben vedere: perché di Imperi, dopo la Grande Guerra, ne sono caduti ben tre. Oltre a quello austro-ungarico, sparirono dalle carte politiche degli atlanti anche l'impero degli zar e quello ottomano.

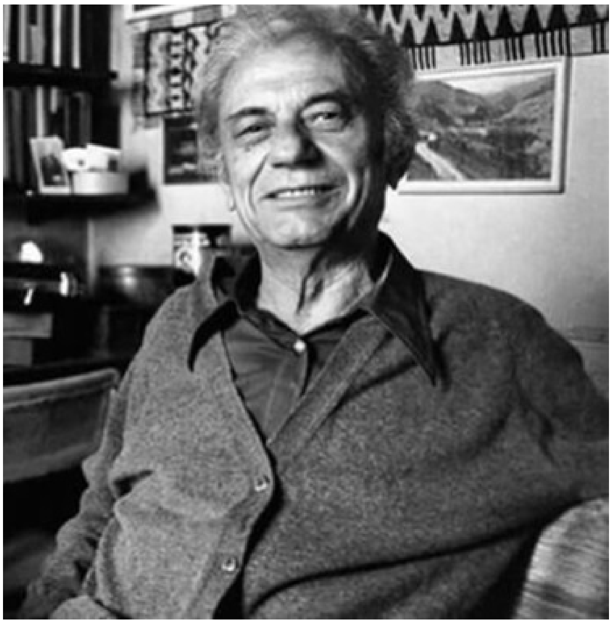
---

[8] Il caso dell'Inghilterra è forse complicato per ragioni di abbondanza, più che di discontinuità: identificare il "*Regno Unito di Gran Bretagna e Irlanda del Nord*" con la sola Inghilterra è ormai una sorta di sineddoche entrata nell'uso di molte lingue, anche se temiamo che agli scozzesi, gallesi e nord-irlandesi la cosa possa non far troppo piacere.

[9] "*Bello e Impossibile*", RM110, Marzo 2008.

[10] Tecnicamente, l'Austria-Ungheria era una *kaiserliche und königliche Doppelmonarchie,* ovvero una "Doppia Monarchia con carattere sia imperiale (immaginiamo per la parte austriaca) che regia (Ungheria).

[11] In pratica, la Transleitania, ovvero la parte ungherese dell'Impero Austroungarico. Come abbiamo scritto altrove, la parte complementare austriaca era la Cisleitania, e i nomi derivavano dalle sponde del fiumiciattolo di confine, il Leitha. Il termine "Terre della Corona di santo Stefano" è il nome medievale dell'insieme di territori che in qualche modo si riconoscevano sotto la corona ungherese: Ungheria, Slovacchia, Croazia, Slavonia, Dalmazia, Bosnia, Serbia, Bulgaria, Valacchia, Moldavia, Transilvania, Galizia e altri ancora.



4 *Cahit Arf.*

Cahit Arf nasce il 10 ottobre 1910 a Selanik, o Salonicco, come la chiamano tuttora gli italiani. Il nome turco – perché nel 1910 Salonicco fa parte dell'Impero Ottomano – adesso è tornato a far posto al greco originale che rinverdisce gli studi della storia antica frequentata nei testi liceali: Tessalonica[12]. Resta il fatto che il giovane Cahit è indubbiamente di etnia turca, mentre Tessalonica è (almeno nella memoria degli studenti liceali e nella tradizione storica) città greca, anzi macedone. Nel 1910 la città è però ancora parte dell'Impero Ottomano, anche se sul punto di cambiare nazione: prima ancora del deflagrare ufficiale della Grande Guerra, nell'ottobre del 1912 i componenti della Lega Balcanica (Serbia, Montenegro, Bulgaria e Grecia) dichiarano guerra all'impero e hanno rapidamente la meglio. La famiglia Arf scappa da Salonicco e si trasferisce a Istanbul (che peraltro non era un posto particolarmente sicuro, visto che l'esercito bulgaro avanzava verso sud nella Tracia), e poi continua a spostarsi di tanto in tanto alla ricerca di una qualche forma di stabilità: Ankara, di nuovo Istanbul, poi ancora a Izmir[13].

Ma la vera stabilità, in quei tempi, era davvero difficile da ottenere: sono ben due le Guerre Balcaniche che si susseguono, e appena queste terminano scoppia la Prima Guerra Mondiale. L'Impero Ottomano si schiera dalla parte sbagliata, e di fatto scompare. Un altro figlio di Tessalonica, Mustafa Kemal – che più tardi verrà chiamato Atatürk, ovvero "padre dei Turchi" – riuscirà a costruire uno stato turco dalle ceneri dell'impero, anche se a caro prezzo. Dopo le due guerre balcaniche e il conflitto mondiale perduto, non passa neppure un anno che la neonata repubblica di Turchia è di nuovo in guerra contro la Grecia. Nel frattempo sì è consumata l'atrocità del genocidio degli Armeni, nel 1915, e il nuovo conflitto del 1919 nasce dalla resistenza turca alla volontà delle potenze vincitrici della Grande Guerra di assegnare Grecia la parte occidentale dell'Anatolia. È solo nel 1923 che Cahit Arf trova una patria stabile, la neonata Repubblica Turca con Atatürk come presidente.

A differenza di Erdős, che a Budapest poteva trovare scuole prestigiose e una università con insegnanti di eccezionale valore, Arf deve viaggiare per studiare in maniera appropriata: nel 1926 suo padre riesce a trovare quanto basta per mandarlo a Parigi, dove Arf si iscrive a liceo Saint Louis, e qui comincia una sorta di oscillazione tra Istanbul e la Francia: restava in Europa finché la sua famiglia riusciva a trovare i soldi per consentirgli il soggiorno, tornava in patria non appena il denaro terminava. Riesce a studiare per due anni nella prestigiosa *École Normale Supérieure*, e infine nel 1932, senza aver completato il dottorato, rientra a Istanbul e trova posto come insegnante in un liceo.

[12] Se il passaggio da "Tessalonica" a "Salonicco" vi sembra ardito, forse è solo perché non prendete in considerazione l'altrettanto curiosa genesi del nome originale: Tessalonica era il nome della sorellastra di Alessandro Magno e moglie di Cassandro I di Macedonia; quest'ultimo, fondatore della città, la battezzò con il nome della sua sposa. La signora in questione, peraltro, porta un nome che non significa altro che "vittoria sui Tessali", perché la futura regina nacque proprio in quel giorno del 352 a. C, in cui suo padre Filippo II di Macedonia (che era il papà anche di Alessandro Magno) sconfisse i Tessali nella Battaglia dei Campi di Croco.

[13] O Smirne, come preferiranno chiamarla i già citati studenti liceali.

5 *Murale per Cahit Arf nella città di Kadiköy – La scritta recita: "Se stai davvero cercando il segreto dell'universo, vieni ai numeri come ho fatto io".*

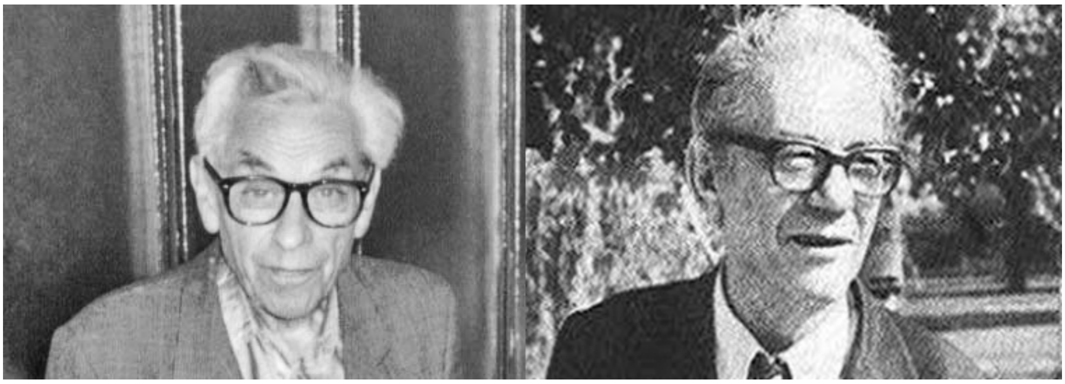
Ma non smette di studiare: pur non avendo testi, pur nelle difficoltà enormi del periodo, si forma in gran parte solo con la forza di volontà, affrontando ogni problema come fosse un progetto a lungo raggio, da pianificare per intero. Nel 1937 riesce finalmente a completare il suo dottorato nell'università forse più prestigiosa del mondo: Göttingen.

Il periodo era nuovamente uno dei peggiori nella storia dell'umanità: la nuova guerra mondiale era alle porte, e la Germania non era certo il posto migliore dove trovarsi. Cahit ha però la fortuna di trovarsi a studiare con Helmut Hasse[14], ed è con lui che raggiunge il suo massimo contributo alla matematica, il Teorema di Arf-Hasse.

Quando Arf ritorna in Turchia, ha davvero trovato una patria: in questo sta forse la sua maggiore differenza con Paul Erdős che, pur restando sempre molto affezionato alla sua Ungheria, condusse gran parte della sua vita come cittadino del mondo (o meglio, come cittadino del "mondo matematico"). Arf si dedica con passione allo sviluppo della matematica turca, anche se certo non si nega viaggi di studio: va ospite all'Università del Maryland, poi all'*Institute for Advanced Studies* di Princeton, e infine anche a Berkeley. Ma è forse lo sviluppo della matematica in patria l'impegno che sente più pressante: è presto eletto presidente del Consiglio Turco per la Ricerca Scientifica e Tecnologica, oltre che – ovviamente – della Società Turca di Matematica.

Teneva alla diffusione della cultura matematica: se Erdős pubblicava memorie e metteva in palio piccole somme di denaro per invogliare i giovani matematici a risolvere problemi e a dedicarsi alla matematica, Arf perseguiva lo stesso obiettivo per vie forse più canoniche, come lunghe discussioni con i dottorandi e una pletora di conferenze pubbliche. Entrambi amavano sopra ogni cosa il poter parlare di matematica, avere la possibilità di trasmettere ad altri la grande passione della loro vita.

[14] È davvero complicato riuscire a capire quali fossero le convinzioni politiche di Helmut Hasse. Nessun dubbio sul suo valore di matematico, ma si ritrovò in una situazione particolare nel 1933, quando i nazisti salirono al potere e tutti i docenti universitari ebrei furono rapidamente cacciati. Il grande Hermann Weyl, che aveva la cattedra di matematica, suggerì a Hasse di accettare l'offerta che i nazisti gli avevano fatto di prendere il suo posto: Hasse accettò, e si mostrò spesso assai deciso nel contrastare le imposizioni che i nazisti volevano attuare a Göttingen. Aveva ottimi rapporti con gli scienziati ebrei (tra i quali Emmy Nöther e Richard Brauer), ciò non di meno chiese l'iscrizione al Partito Nazista. Abbastanza curiosamente, l'iscrizione gli fu negata perché aveva delle ascendenze ebraiche.



6 *Paul Erdős a sinistra, Cahit Arf a destra. O forse è il contrario? Mah, vedete voi…*

Si somigliavano davvero: anche fisicamente, parecchio; al punto che ogni tanto si trova qualche post sui social in cui qualche studente sorpreso sottolinea la cosa mettendo a confronto le loro foto. Ma la sensazione è che la loro somiglianza principale fosse ancora maggiore di quella dei loro connotati fisici.

2. Problemi

2.1 Ebbasta con 'ste somme!

..."ebbasta" anche con i soliti dadi!

OK, vi proponiamo un nuovo gioco: questa volta non si scommette, visto che le probabilità sembrano piuttosto bassine ("sembrano" in quanto il calcolarle sarà vostro compito).

Procuratevi, per prima cosa, un dado onesto a *nove* facce, con le facce numerate da 1 a 9 (ah, non lo avete? Male. Beh, potete provare a generalizzare, con diversi numeri di facce), e poi cominciate a lanciarlo. Lo lanciate n volte e, siccome abbiamo deciso di smetterla con le somme, ad ogni uscita *moltiplicate* il vostro punteggio per l'uscita (...adesso non fate affermazioni sul fatto che all'inizio il vostro punteggio è zero: su, siate seri e cominciate da uno). La cosa vi porta rapidamente a grossi numeri, quindi decidete che dopo n lanci vi fermate; siccome però il vostro spirito di azzardo ce l'ha sempre vinta, scommettete con un amico sul fatto che il vostro punteggio sia *divisibile per* 14 (non vi piace il quattordici? Peccato, era un bellissimo tram. Beh, fate voi, se non vi va il 14 cercate qualcos'altro).

La domanda è, a questo punto, abbastanza evidente: che probabilità avete di vincere?

2.2 Festa al Circolo

L'ingresso di Rudy e Doc all'annuale torneo del circolo scacchistico era stato salutato con manifestazioni di sfrenata gioia, in particolare da quella che era abitualmente la coda della classifica: anche la peggiore schiappa, ora, aveva ragionevoli speranze di arrivare quantomeno terzultimo.

Queste previsioni sono state ampiamente rispettate: infatti, l'inetto duo ha totalizzato in totale otto punti. Ma andiamo con calma. Il torneo era un torneo all'italiana (tutti contro tutti), con, come d'uso, un punto per la vittoria e mezzo punto per la patta. Va detto che i restanti giocatori erano tutti a livello da terzultimo (o da primo: fate voi…) infatti, alla fine ciascuno di loro aveva lo stesso punteggio (maggiore di ciascuno di quelli dei nostri due).

Eliminati quindi i due inetti, i membri "seri" del circolo cominciano a progettare il torneo "vero" (...come mai ci pare le parole tra virgolette trasudino sarcasmo?), vi terremo informati sui risultati, ma per intanto…

Quanti giocatori giocano nel secondo torneo?

3. Bungee Jumpers

Qual è il minimo numero di torri necessarie per governare completamente una scacchiera $n \times n \times n$?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Ottobre!

Siccome il numero di settembre, di cui qui pubblichiamo qui le vostre soluzioni, è uscito nell'ultimo giorno di settembre, questa parte di soluzioni non può che essere limitata… ma vedrete che comunque è arrivato qualcosa.

4.1 [260]

4.1.1 Lavori (teorici) in giardino

Ebbene sì, il Capo ha deciso che il miglior modo di coltivare i nostri vari appezzamenti di terreno è sempre lo stesso: l'approccio teorico. L'inverno è la stagione migliore per immaginare soluzioni a tavolino, vediamo il primo problema:

> *Il nostro giardino è composto da aiuole triangolari, tutte diverse tra loro. Per ogni aiuola scegliamo un punto P al suo interno e, tracciate le perpendicolari ai tre lati passanti per P, individuiamo un nuovo triangolo formato dai piedi delle perpendicolari. Poi iteriamo il procedimento, mantenendo lo stesso punto P: perpendicolari, triangolo dei piedi, perpendicolari, eccetera, finché si ottiene un triangolo simile a quello originale. È sempre possibile?*

Senza indugi cominciamo con la soluzione di ***Pasquale***:

> Detto problema consiste nel determinare le coordinate dei vertici di un triangolo ABC simile al triangolo dato DEF (con lati a, b, c), e D coincidente con l'origine degli assi cartesiani X, Y, dove il lato a risulta collocato sull'asse delle ascisse. I vertici A, B, C, sono collocati rispettivamente sui lati a, b, c.
>
> L'angolo U è quello opposto al lato b, e l'angolo V è quello opposto al lato c.
>
> Posto A(X1, Y1), B(X2, Y2), C(X3, Y3), si possono scrivere le seguenti relazioni:
>
> Y1=0;
>
> Y2=Y3;
>
> Y3=X3tanU;
>
> Y3=(X1 – X3)tanV;
>
> Y2=(X2 – X1)tanU;
>
> Y2=(a – X2)tanV;
>
> (X2 – X3)h = a(h – Y2),
>
> dove h è l'altezza del triangolo DEF, ricavata da S= ah/2; S è la superficie del triangolo DEF.
>
> Operando sulle relazioni suddette, ho ottenuto facilmente che:
>
> X1= a – h/tanV + 2h/(tanU + tanV);
>
> X2= a – htanU/(tanV(tanU+tanV));
>
> X3= h/ (tanU+tanV);
>
> Y2 = htanU/(tanU+tanV);
>
> Y2=Y3;
>
> Y1=0.

I nostri solutori sembrano determinati a non usare figure; la prossima soluzione, di ***Valter***, ha un approccio senza supporti visivi, e senza calcoli:

> Quasi sicuramente la faccio troppo facile, ma non mi viene altro; tanto difficile non sono in grado. A mio avviso il punto deve essere il circocentro; provo a dimostrarlo in modo non proprio rigoroso.
>
> Se fosse il circocentro, il triangolo simile, ovviamente, si ottiene, già, con la prima iterazione.
>
> Per assurdo assumo che ci vogliano più iterazioni; quindi, che gli altri triangoli non siano simili.
>
> Se così fosse però, il triangolo precedente a quello simile lo posso costruire anche sopra al primo. La costruzione è un ingrandimento in scala della precedente, con P nella stessa posizione relativa. Mantenendo fisso P, ruotando e/o riflettendo, è possibile, mi pare, allineare i quattro triangoli.
>
> I vertici del triangolo di partenza e del suo simile dovrebbero essere allineati su tre rette per P.
>
> Stesso si dica per i due triangoli simili che li circoscrivono; ma questo vale se P ne è l'incentro.
>
> Da ciò, adattando in scala, si può costatare che l'incentro di ognuno è pure circocentro dell'altro.

La costruzione a questo punto sarebbe, però, possibile solo se i triangoli fossero tutti equilateri.

Restiamo in attesa di altri pareri, e procediamo con il secondo problema.

4.1.2 Giardino "armonioso"

Ancora teoria, allineando quadrati:

Preso un rettangolo aureo, cominciamo a disegnarne i quadrati a spirale, e ne individuiamo i centri: è vero che i centri sono allineati su due rette?

La soluzione è di ***Valter***:

Le figure in spirale sui rettangoli da cui partono il primo e il secondo quadrato 1 sono simili.

Essendo una la copia in scala dell'altra basta mostrare che i centri sono allineati per il primo. È sufficiente farlo per i centri dei primi tre quadrati poiché, anche qui, poi si ripete in scala. Devo, quindi, mostrare che per i centri del primo quadrato 1 e dei quadrati 2 e 5 passa una retta.

Assumo che il lato del primo valga 1 e, avendo i lati rapporto φ, gli altri due misurano: φ^{-2} e φ^{-4}. Disegno il rettangolo su un piano cartesiano con coordinate del vertice in basso a sinistra (0, 0). Le coordinate dei centri dei quadrati sono a metà lato, partendo dal vertice in basso a sinistra.

Quelle dei centri da dimostrare allineati sono:

(0.5, 0.5)

$(1+0.5\varphi^{-4}, \varphi^{-3}+0.5\varphi^{-4})$

$(1+\varphi^{-3}+0.5\varphi^{-2}, 0.5\varphi^{-2})$.

Devo perciò spostarmi da (0, 0) per i lati dei quadrati inframmezzati e aggiungere metà lunghezza lato. Calcolo il coefficiente angolare delle due rette passanti per i centri dei quadrati 2 e 5 con l'1. Se i due coefficienti sono uguali, le rette coincidono avendo un punto in comune e stessa pendenza. Fornisco tale calcolo ottenuto dal rapporto fra le differenze delle coordinate y e x dei due punti.

Per semplificarmi la vita nei conti sfrutto la proprietà delle potenze consecutive di φ: $\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$.

F_n è il numero di Fibonacci di n; per i miei conteggi mi servono quindi:

$F_{-2}=-1$, $F_{-3}=2$, $F_{-4}=-3$ e $F_{-5}=5$.

<u>Calcolo del coefficiente angolare retta passante per i centri del primo quadrato 1 e del quadrato 2:</u>

- coordinate dei due centri: (0.5, 0.5) e $(1+0.5\varphi^{-4}, \varphi^{-3}+0.5\varphi^{-4})$
- calcolo delle coordinate del quadrato 2 con Fibonacci:
-- $(1+0.5[F_{-5}+F_{-4}\varphi], [F_{-4}+F_{-3}\varphi]+0.5[F_{-5}+F_{-4}\varphi])$
-- $(1+2.5-1.5\varphi, 2\varphi-3+2.5-1.5\varphi)$
-- $(3.5-1.5\varphi, -0.5+0.5\varphi)$
- coefficiente angolare: $(0.5\varphi-0.5-0.5)/(3.5-0.5-1.5\varphi) = (0.5\varphi-1)/(3-1.5\varphi) = -1/3$

<u>Calcolo del Coefficiente angolare retta passante per i centri del primo quadrato 1 e del quadrato 5:</u>

- coordinate dei due centri: (0.5, 0.5) e $(1+\varphi^{-3}+0.5\varphi^{-2}, 0.5\varphi^{-2})$
- calcolo delle coordinate del quadrato 5 con Fibonacci:
-- $(1+[F_{-4}+F_{-3}\varphi]+0.5[F_{-3}+F_{-2}\varphi], 0.5[F_{-3}+F_{-2}\varphi])$
-- $(1+2\varphi-3+1-0.5\varphi, 1-0.5\varphi)$
-- $(1.5\varphi-1, 1-0.5\varphi)$
- coefficiente angolare: $(1-0.5\varphi-0.5)/(1.5\varphi-1-0.5) = (0.5-0.5\varphi)/(1.5\varphi-1.5) = -1/3$.

Le due rette, avendo stessa pendenza = –1/3 e passando entrambe per il punto (0.5, 0.5), coincidono.

… che poi, se si vuole mostrare che i centri sono allineati su una retta, diventa un Quick & Dirty. Basta notare che il quadrato 2 è il primo quadrato 1 del rettangolo aureo di cui il 5 diventa il 2. La retta per i loro centri ha quindi la stessa pendenza di quella che dal primo quadrato 1 va al 2.

Passando, poi, entrambe le rette per il centro del quadrato 2 e avendo stessa pendenza, coincidono. … chissà che non ci sia qualcosa di più "Quick" per mostrare che il coefficiente angolare vale –1/3.

Io ho trovato solo questo: assegno coordinata (0, 0) al centro del quadrato 2 e capovolgo l'asse x. Le coordinate del centro del primo quadrato 1 a questo punto diventano:

$(0.5+\varphi^{-3}+0.5\varphi^{-2}, 0.5–0.5\varphi^{-2})$.

Con Fibonacci semplifico le coordinate in:

$(0.5+2\varphi–3+1–0.5\varphi, 0.5–1+0.5\varphi) = (–1.5+1.5\varphi, –0.5+0.5\varphi)$.

Il rapporto y/x è 1/3 ma, siccome ho capovolto l'asse x, la pendenza effettiva della retta è –1/3. Ho la sensazione che il valore 1/3 sia collegato al numero 3 dei triangoli dal cui centro passare.

Ah, quanto ci piace Fibonacci! Speriamo di ricevere altre soluzioni, ma nel frattempo proviamo a chiudere questo numero ed uscire. Alla prossima!

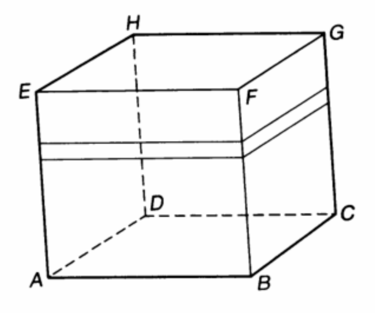
5. Quick & Dirty

L'estate è ormai un ricordo, fisicamente rappresentato dai 100 chilogrammi di angurie che, stregati da un inizio settembre insolitamente caldo, avete acquistato. Trattandosi di angurie strettamente matematiche, sono composte al 99% in peso di acqua. Complice il fatto che non ne avete ancora mangiata nessuna e il calore settembrino, parte dell'acqua è evaporata e la sua percentuale nelle nostre angurie è ora al 98%.

Quanto pesano adesso le angurie?

6. Pagina 46

La scacchiera $n\times n\times n$ $ABCDEFGH$ consiste di n^3 celle; definiamo come *livello* ogni insieme di n^2 celle che formano un cuboide di dimensione $n\times n\times 1$. Sia inoltre R un insieme di r celle che governano tutta la scacchiera.



7 *La scacchiera ed un livello.*

Sia L il livello contenente il minimo numero di torri, e sia m il numero delle torri del livello. Senza perdita di generalità, possiamo per comodità supporre il livello orizzontale, come indicato in figura.

Le torri in L governano un certo numero m_1 di "righe" (parallele ad AB) e un certo numero m_2 di "colonne" (parallele a BC); questo lascia $(m - m_1)(m - m_2)$ celle di L non governate dalle torri in L: ognuna di queste celle deve essere quindi governata da una torre nella direzione "verticale" (parallela ad AE).

Consideriamo ora la distribuzione delle torri in R su tutti i livelli paralleli ad $ABFE$. Questi livelli possono essere di due tipi:

- **Tipo 1**: Livelli che non contengono torri giacenti su $\boldsymbol{L}$: ci sono $(n - m_1)$ livelli di questo tipo, ciascuno dei quali contiene almeno $(n - m_2)$ torri; quindi, l'insieme i tutti i livelli di questo tipo contiene almeno $(n - m_1)(n - m_2)$ torri.
- **Tipo 2**: Questi sono i restanti m_1 livelli paralleli a $ABFE$. Essendo da ipotesi il minimo numero di torri in un livello almeno m, il numero di torri in ognuno di

questi livelli è *almeno* m, quindi l'insieme dei livelli di tipo 2 contiene almeno m_1 m torri.

Quanto visto sopra implica che:

$$r \geqslant (n-m_1)\cdot(n-m_2)+m_1 m$$

Supponendo che $m_1 \geq m_2$, deve essere:

$$r \geqslant (n-m_1)^2+m_1{}^2=\frac{n^2}{2}+\frac{(n-2m_1)^2}{2}.$$

Dovendo r essere un intero, dall'espressione precedente si deduce:

- Se n è *pari*, il minimo valore possibile di r è $n^2/2$;
- Se n è *dispari*, il massimo valore possibile di r è $(n^2+1)/2$.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 O di qua, o di là

Cominciamo alla grande:

As I stood over it facing south it had a strange impact on me that rain falling on my right foot must fall into the Pacific Ocean, while that on my left foot would eventually find its way after uncountable miles to the Atlantic.

The place wasn't impressive enough to carry a stupendous fact like that.

John W. STEINBECK, *Travel with Charley*

In effetti, nonostante il nome altisonante di *The Great Divide*, in molti punti degli Stati Uniti il punto appartenente allo spartiacque è piuttosto difficile da determinare, tant'è che lo *Highway Department* si pregia di indicarlo su tutte le strade che lo attraversano. Steinbeck, nella scena citata, si trovava nel Montana, e, come dice lui stesso, "*...the rise is gradual, and were it not for a painted sign I never would have known when I crossed it. It wasn't very high as elevations go*."

Il punto topico è esattamente l'ultima frase.

Se dovete tracciare una linea altimetrica – quelle che, sulle carte, uniscono i punti ad uguale altezza – vi basta un buon altimetro[15], ma con questo non potete trovare lo spartiacque continentale; forse, se proviamo a partire dal basso (*pun intended*), la cosa si fa più semplice.

Avete presente quella forma di tortura per imenotteri nota nei paesi anglosassoni come *ant farm*? Due lastre di vetro con pochissimo spazio intermedio, opportunamente riempito di sabbia grossa in modo tale che le formiche possano scavare un nido strettamente bidimensionale? Ecco, proprio quella. Qual è, in questo caso, lo spartiacque?

Supponiamo il nostro aggeggio orientato, con le due facce in vetro guardanti a nord e a sud. Se una formica procede nel nostro aggeggio da est verso ovest, tracciando un cammino monodimensionale continuo, prima o poi raggiungerà un punto di massimo; analizzando tutti i cammini possibili, vediamo che ci sarà, per (un)[16] qualche cammino, un punto più in alto di tutti gli altri. E questo *punto* sarà lo spartiacque: in qualsiasi direzione andiate (se la mantenete), da qui in poi è "tutta discesa", nel caso ci siano altre salite, comunque il punto più alto sarà il Divide.

Come spesso in matematica, non è difficile trovare alcune situazioni patologiche che vanno contro la nostra definizione; ad esempio, una serie di picchi tutti alla stessa altezza, o un "altopiano" nel punto di massima; in questo caso, lo spartiacque diventa un insieme di punti (finito o infinito). A parte questi casi, comunque, il metodo per trovare lo spartiacque di un *ant farm* è immediato: cerca il punto più alto, e ci sei.

Se lasciamo in pace le nostre formiche e consideriamo una superficie bidimensionale in uno spazio tridimensionale (altrimenti nota come "*realtà*"), la cosa diventa più complicata: l'esempio classicamente portato ad esempio è americano: il Monte Whitney, in California, è il punto più alto degli Stati Uniti Congiunti[17] ma ogni goccia di pioggia che cada su di lui finirà nell'Oceano Pacifico, non nell'Atlantico.

Pensare a questo fenomeno su larga scala porta facilmente a dubbi relativamente al concetto di spartiacque; a rigor di termini, diventa possibile sostenerne l'inesistenza a

[15] E un barometro fermo in quel punto da molto tempo. Altrimenti non funziona. O un GPS, anche senza barometro.

[16] Data la stretta bidimensionalità del nostro sistema, *un* cammino passerà dal punto di massimo. Se la cosa non vi piace, prendetevela con Weierstrass.

[17] Nel senso che si escludono Hawaii e Alaska, per evidenti motivi di discontinuità fluviale.

livello continentale: una goccia d'acqua potrebbe andare da New York a San Francisco senza mai traversare lo spartiacque, passando per il Capo di Buona Speranza…

Forse, il modo migliore è quello di cominciare a considerare uno spartiacque come un concetto topo*grafico*, più che topo*logico*.

8 …*come una goccia in un mare.*

Comunque, anche non considerando percorsi a dir poco singolari, uno spartiacque può essere piuttosto complesso: nella figura (Wikipedia inglese, anche se non sembra) vedete quello europeo; a parte la "supremazia danubiana", orientarsi non è semplice.

Cominciamo con un modello, non necessariamente realizzabile: tagliamo un rettangolo della crosta terrestre che comprenda tutta l'Europa e mettiamolo in un vaso di dimensioni opportune[18]: in questo modo, uno spartiacque è o una curva chiusa che giace interamente all'interno della nostra scatola[19], o una linea continua che inizia e finisce su uno dei muri. Tutto questo serve per essere sicuri che il nostro continente venga diviso in *regioni*, senza strane sovrapposizioni o punti indecidibili.

Matematicamente possiamo definire una funzione $h(x, y)$, che determini l'altezza di ogni punto all'interno del nostro vaso; se poi diamo una "limata" a burroni e crepacci, in modo tale che la nostra funzione sia derivabile, per trovare i punti di massimo e di minimo è sufficiente verificare dove la derivata si annulla. Teoricamente tutto molto carino e pulito, peccato che per alcune zone (solo per restare dalle nostre parti, l'orrido di Chianocco ne è un preclaro esempio) la funzione "altezza d'Europa" si comporti male.

Un'alternativa più pratica è un modello discreto: una suddivisione a scacchiera, con ogni quadretto considerato connesso solo con i quattro che hanno un lato in comune con lui, in modo tale da far fluire l'acqua solo verso i quattro punti cardinali. Con un modello del genere, si può definire come "appartenente allo spartiacque" il punto che riversa l'acqua in due bacini diversi; se (qualunque sia l'altezza) tutta l'acqua va in un unico bacino, allora non appartiene allo spartiacque (giusto per stare su un esempio vicino a casa, prendete i Colli Euganei: tutto nel bacino padano, non si scappa).

Insomma, dato un punto, basta guardare i vicini, e tutto fatto? Mica tanto. Dato il quadratino centrale, ognuno dei quadratini di fianco può essere sopra, sotto o allo stesso livello; questo significa che potete avere $3^4=81$ diverse configurazioni; quindi, cercare di fare il "conto a mente" diventa sostanzialmente impossibile. Una prima riduzione del numero di casi, potrebbe essere quella di considerare i "vicini" solo "più alti" o "più bassi" del quadrato centrale; la cosa è meno rozza di quanto sembri, visto che basta misurare con precisione *infinita* l'altezza del nostro quadratino; ci vuole una notevole dose di sfortuna, per trovare due quadratini *"infinitamente della stessa altezza"*.

Il che ci porta a sedici diverse combinazioni. Possiamo ridurle ancora, come direbbe Umberto Eco, dando loro dei nomi. Ne bastano sei.

Un *picco* (*peak*) è un punto più alto di tutti i suoi vicini, mentre un *buco* (*pit*) è un punto più basso di tutti i medesimi; un punto con tre (e solo tre) vicini più bassi di lui giace su

[18] Manca la condizione di considerare la Terra piatta. Diamola per opportunamente appiattita.

[19] Il primo caso che ci viene in mente è un lago vulcanico, senza emissario o immissario. O Sottomarina di Chioggia, dove l'altimetro sulla macchina di Doc alcuni anni fa ha sfoggiato un orgoglioso "meno quattro". No, non aveva sbagliato parcheggio al porto.

una cresta (*ridgeline*); il caso contrario è un problema sotto molti punti di vista: infatti, se un punto ha tre e solo tre vicini più alti di lui è un *talweg* (*thalweg*[20]: qualcuno conosce una traduzione italiana che non si limiti a far cascare l'acca?). Il caso nel quale siano solo due i punti più alti di lui si divide in due casi: se, partendo da una direzione data e ruotando di un angolo giro, vedete i vicini nella forma "alto-alto-basso-basso" (o viceversa), allora siete su una pendenza (*slope*); se, invece, facendo il vostro giro, vedete i vicini nella sequenza "alto-basso-alto-basso", allora siete su una sella (*saddle point*). Sin dalla geometria tridimensionale sappiamo che le selle sono cose strane: infatti, appartengono sia a una cresta che a un talweg (che, a questo punto, potremmo anche tradurre "valle", ma la cosa non ci convince).

A questo punto, notiamo una differenza: abbiamo dato dei nomi ai nostri oggetti, ma si tratta sempre di proprietà *locali*, essendo definite unicamente dai vicini e non dalla struttura globale; ma se ricordiamo, nella *ant farm* (monodimensionale) lo spartiacque (puntiforme) era una qualità *globale*, visto che, oltre a dover essere un picco, dipendeva da "quanti erano altri gli altri picchi". E nel caso bidimensionale (ossia la nostra realtà) la cosa va ancora peggio: non solo non riusciamo a identificare lo spartiacque da proprietà *locali*, ma *non esiste una proprietà globale* che ci permetta di definirlo! Anche se la nostra catalogazione ci permette di eliminare molti quadratini dalla nostra mappa, ne restano comunque molti: un *buco* non apparterrà sicuramente allo spartiacque, ma tutti gli altri tipi, in teoria, potrebbero appartenervi. Infatti, per "senso comune" vediamo che *picchi*, *creste* e *selle* possono appartenere allo spartiacque ma, pensandoci un attimo, anche i *talweg* e le *pendenze* possono appartenervi: pensate al delta di un fiume, dove il corso principale si suddivide in una serie di rami; spostatelo adesso in una qualche valle alpina la cui parte superiore si trovi già sullo spartiacque; se i diversi rami poi vanno da parti diverse, l'intera ramificazione (incluse le pendenze e i talweg) deve far parte dello spartiacque. Non solo, ma spesso ci si mette anche l'uomo: il *Canale Reno-Meno-Danubio* dovrebbe essere chiarificante, in merito.

Questo è un campo nel quale, a quanto pare, le "eleganti, luminose idee" falliscono miseramente: se provate a considerare, ad esempio, le file di quadretti come delle *ant farm* e cercate il punto spartiacque per ognuna (come punto più alto), quello che ottenete non è necessariamente lo spartiacque totale, visto che non necessariamente il punto più alto della superficie appartiene allo spartiacque.

Un altro metodo suggerito per trovare lo spartiacque consiste nel procedere "al contrario"; invece di far scendere l'acqua, alziamo i mari, sin quando, in un punto, si uniscono; quel punto appartiene alla linea dello spartiacque. Costruiamo quindi un muro nel punto ottenuto, che faremo salire con il salire del livello dell'acqua; continuiamo a far salire il nostro mare, che ora non deborda più, sin quando non deborda in un altro punto; continuando in questo modo, al termine troveremo la linea dello spartiacque. Se la cosa vi sembra facile dal punto di vista informatico, attenti che, in alcuni casi particolari, *l'ordine* nel quale "alzate i mari" può essere importante: ad esempio, quando avete dei bacini interni che si differenziano nei loro collegamenti verso i mari per molto poco.

...insomma, il metodo migliore sembra essere aspettare che piova, e vedere dove vanno le gocce...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

---

[20] Pur non centrando nulla, abbiamo trovato un concetto che ci pare piuttosto interessante: se un confine tra due entità è definito come il *talweg* di un fiume, va considerato come linea di separazione la linea centrale del canale navigabile; se poi questo si sposta, problemi vostri. Esiste anche il "Principio Talweg", in base al quale se definite il confine semplicemente come "il fiume", senza ulteriori definizioni (quali potrebbero essere, ad esempio, "la riva sinistra del fiume", o "la linea di bassa marea"), allora vale il talweg. "Ma cosa c'entra, questo?" Niente, ma ci sembrava interessante. Anche se non abbiamo capito perché in italiano ha perso la acca.