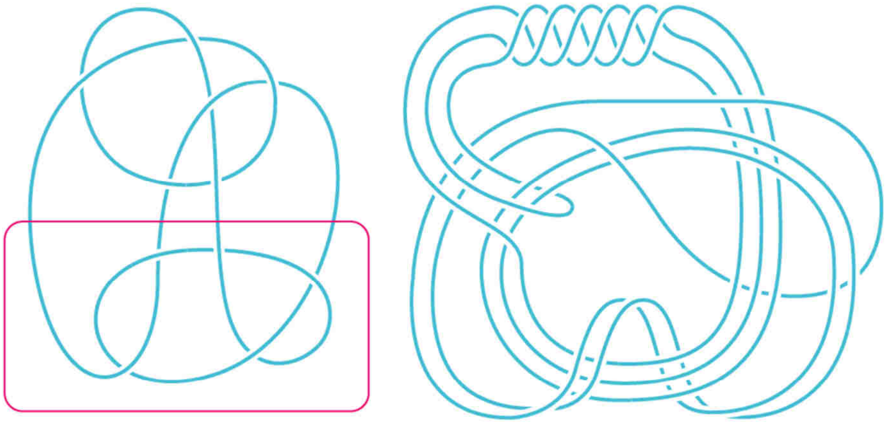
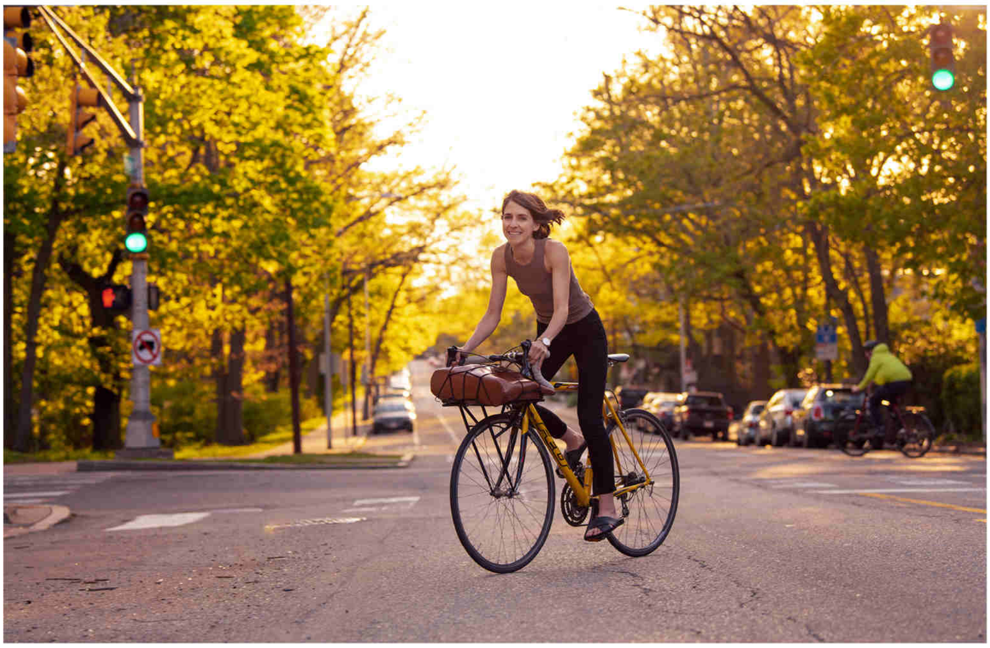
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 260 – Settembre 2020 – Anno Ventiduesimo





Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM257 ha diffuso 3'303 copie e il 29/09/2020 per Google eravamo in 107'000 pagine.

Tutti i nodi sino al livello 11 catalogati da Conway possono essere descritti come un taglio tridimensionale di un oggetto quadridimensionale, tranne uno, diventato famoso come ***Nodo di Conway***. ***Lisa Piccirillo*** lo ha dimostrato essere associabile al ***Nodo di Piccirillo***, che non è ricavabile come sezione: quindi, niente da fare. A giudicare dallo stile di guida evidente dalla terza immagine, diremmo che Lisa sta cercando di tracciarlo in bicicletta. Ulteriori dettagli, https://www.quantamagazine.org/graduate-student-solves-decades-old-conway-knot-problem-20200519/.

1. Foeminae universales

Our whole universe was in a hot dense state,
Then nearly fourteen billion years ago expansion started. Wait…
The Earth began to cool,
The autotrophs began to drool,
Neanderthals developed tools,
We built a wall (we built the pyramids),
Math, science, history, unraveling the mysteries,
That all started with the big bang!"
Since the dawn of man" is really not that long,
As every galaxy was formed in less time than it takes to sing this song.
A fraction of a second and the elements were made.
The bipeds stood up straight,
The dinosaurs all met their fate,
They tried to leap but they were late
And they all died (they froze their asses off)
The oceans and Pangaea
See ya, wouldn't wanna be ya
Set in motion by the same big bang!
It all started with the big bang!
It's expanding ever outward but one day
It will cause the stars to go the other way,
Collapsing ever inward, we won't be here, it won't be hurt
Our best and brightest figure that it'll make an even bigger bang!
Australopithecus would really have been sick of us
Debating out while here they're catching deer (we're catching viruses)
Religion or astronomy, Descartes, Deuteronomy
It all started with the big bang!
Music and mythology, Einstein and astrology
It all started with the big bang!
It all started with the big bang!

(Barenaked Ladies[1], "History of Everything")

Martedì 8 ottobre 2019, Stoccolma: la stampa di tutto il mondo, per non parlare di tutti gli scienziati professionisti, sono in attesa dell'annuncio dei vincitori del Nobel per Fisica 2019. Entro pochi minuti non ci sarà agenzia di stampa che non annuncerà febbrilmente che il più ambito dei premi scientifici è andato per metà a James Peebles, per le sue scoperte nel campo della cosmologia, e l'altra metà condivisa tra Michel Mayor e Didier Queloz per la loro scoperta di un esoplaneta orbitante intorno ad una stella simile al nostro sole. Il Nobel va insomma a quella branca della fisica più antica e nobile, l'indagine del cielo e dell'universo: e forse a qualcuno dei presenti all'annuncio ufficiale può essere sfuggito che le prime parole pronunciate dal membro della Reale Accademia Svedese Ulf Danielsson non erano solo un'introduzione di natura cosmologica, ma contenevano una palese strizzatina d'occhio: "*Il nostro intero universo si trovava in uno stato denso e caldo quando, circa quattordici miliardi di anni fa, cominciò l'espansione…*". Il signor Danielsson ha evitato di canticchiare la sua frase d'apertura, ma tra gli astanti devono essere stati ben pochi quelli che non hanno represso un sorriso: la maggior parte ha certo riconosciuto il testo della canzone "*History of Everything*" del gruppo canadese dei Barenaked Ladies. Il complesso è moderatamente famoso in Nord America, ma quella

[1] Nonostante il nome, la band (già, perché la citazione è il testo di una canzone) è composta solo da uomini.

canzone specifica è conosciutissima in gran parte del mondo, essendo la sigla della sitcom "*The Big Bang Theory*".

1 *I vincitori del Nobel per la Fisica 2019: James Peebles, Michel Mayor e Didier Queloz*

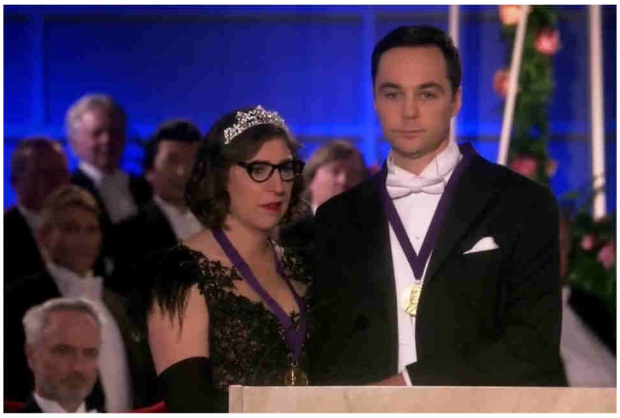
In un ambiente così rigorosamente formale come quello dei premi Nobel, si è trattato verosimilmente di una cosa senza precedenti. Ma non si può neppure pensare, peraltro, che l'accademico Danielsson si sia preso una libertà eccessiva, e che per questo sia stato magari persino ripreso per la sua implicita citazione di un popolare programma televisivo; lo conferma il fatto che, in seguito, è stato lo stesso Goran Hansson, il Segretario Generale della Reale Accademia delle Scienze di Svezia in persona, a tessere le lodi di TBBT[2]: "*il riferimento alla sigla della fiction mi sembra fosse adatto all'annuncio: The Big Bang Theory è stata un'impresa straordinaria che è riuscita a portare il mondo della scienza sugli schermi e nelle case di tutto il mondo*", ha detto, per poi concludere: "*mi auguro che i fan dello show siano soddisfatti di come sia andata la premiazione quest'anno, e che Amy e Sheldon non siano troppo delusi, oggi.*"

La sitcom che si è meritata tanta attenzione in quel di Stoccolma aveva raggiunto la sua definitiva conclusione appena qualche mese prima, a Maggio, con la messa in onda dell'ultima puntata della dodicesima (e definitivamente conclusiva) stagione: in quell'occasione, il personaggio più caratteristico della serie, il fisico teorico Sheldon Cooper (interpretato dall'attore Jim Parsons) e sua moglie Amy Farrah Fowler (Mayim Bialik) vincono congiuntamente proprio il Premio Nobel per la Fisica per la scoperta della "super-Asimmetria", qualunque cosa essa possa essere. Almeno per Sheldon, si tratta del traguardo che inseguiva disperatamente fin dalla prima stagione: tutta la sitcom, infatti, è basata su vita, vizi e virtù di un piccolo gruppo di giovani scienziati.

È probabile che, almeno all'inizio, il progetto di creazione di una vera e propria "situation comedy" – ovvero di un programma breve e con spudorate intenzioni comiche – sulle manie dei nerd intendesse coprire un pubblico di nicchia[3], e segnatamente i nerd stessi: la cosa realmente stupefacente è invece il grande successo di pubblico che ha riscosso in gran parte del globo. Dal 2007 al 2019, *The Big Bang Theory* ha collezionato una quantità di Emmy Award, Golden Globe e altri premi destinati a trasmissioni televisive: ma forse l'indice più evidente del successo è la quantità e qualità delle "guest star", i personaggi ospiti che sono comparsi nella serie, quasi sempre interpretando sé stessi. Ancora più significativa è forse la tipologia delle personalità ospitate: come in tutte le sitcom statunitensi di successo, hanno fatto dei cameo diversi attori e celebrità televisive del mondo dello spettacolo USA, e questo non è particolarmente sorprendente; più specifico è invece il gran numero di protagonisti di film e telefilm di fantascienza, fantasy, fumetti e supereroi, che sono i mantra canonici dei nerd. Nei 279 episodi andati in onda compaiono quasi per intero i cast di Star Wars (Luke Skywalker officia il matrimonio tra Sheldon e Amy, Darth Vader fa un giro al luna park con Sheldon, e la principessa Leila li caccia entrambi furibonda da casa sua), di Star Trek (il comandante Kirk compare in più episodi, come il signor Sulu, mentre Spock partecipa solo con la voce) e una pletora di volti della Marvel, primo fra tutti Stan Lee.

[2] Riferirsi a "The Big Bang Theory" con l'acronimo TBBT non è una libertà che ci prendiamo senza ragione: è facile constatare, con una diretta ricerca in rete, quanto sia noto e quanto si dia per scontato che "TBBT" sia un preciso riferimento univoco alla sitcom.

[3] È abbastanza curioso notare che il periodo in cui TBBT è andata in onda è quello "critico" per la cosiddetta "TV generalista", e forse lo show era stato pensato anche – o forse soprattutto – per i canali tematici con indirizzo specifico, una sorta di intrattenimento "scientifico". È solo un'ipotesi niente affatto verificata, sia chiaro: certo che è curioso notare come sia invece diventata la serie multicamera più longeva della televisione, e uno dei più grandi successi proprio di quella TV generalista ormai morente.



2 *Amy e Sheldon mentre "vincono" il Premio Nobel per la Fisica.*

Ciò che è più straordinario, comunque, è la partecipazione più o meno estesa alla sitcom di veri scienziati e personalità della mondo tecnologico: Bill Gates, Steve Wozniak ed Elon Musk interpretano loro stessi in lunghi cameo, al pari di astronauti come Buzz Aldrin e Mike Massimino. Sul fronte della scienza pura, prestano volti e voci diversi premi Nobel, come Kip Thorne, George Smoot e Frances Arnold; e personaggi noti anche per l'impegno nella divulgazione scientifica come Neil deGrasse Tyson. La comparsa più significativa, dal punto di vista scientifico, è probabilmente quella di Stephen Hawking, che appare così tante volte da poter essere classificato, nel sito ufficiale della sitcom, non come "*guest appearance*" ma come "*minor character*".

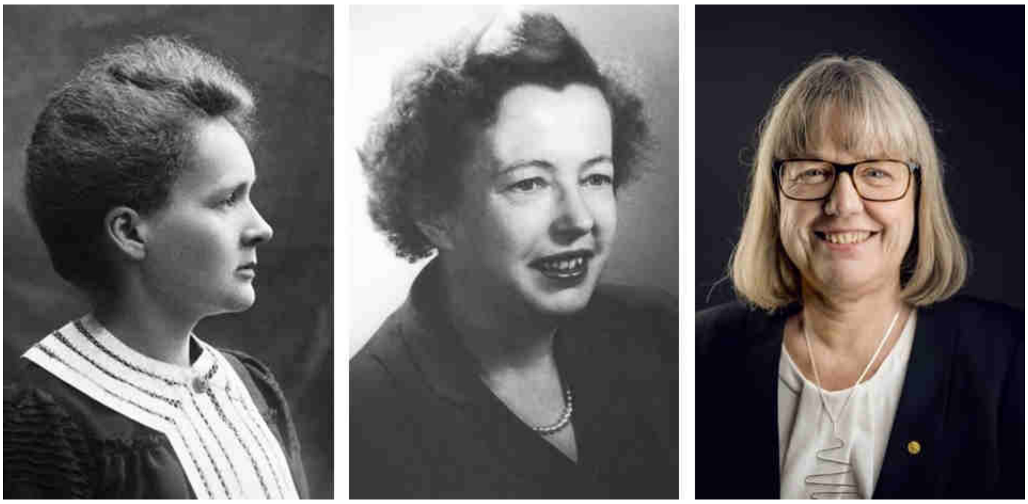
La scienza è sempre stata un ingrediente fondamentale, se non proprio il principale, di tutta la serie di *The Big Bang Theory*; anche se il suo ruolo è certo cambiato nell'evoluzione delle dodici stagioni. Nelle primissime comparivano meno celebrità, ma in compenso c'era un florilegio di battute per iniziati, difficili da cogliere per un pubblico non sufficientemente informato sulle teorie scientifiche[4]. Un po' per il grande successo (forse inaspettato) presso il pubblico generalista, un po' anche per esaurimento dei temi propriamente scientifici, la sitcom si è sviluppata nelle ultime stagioni seguendo più gli sviluppi della vita quotidiana dei personaggi come gruppo di amici – pur mantenendo intatte le manie e i tic propri di ognuno – piuttosto che il filone strettamente scientifico. In fondo, tutto è ben riassunto proprio nelle parole finali della serie, ovvero i discorsi che Amy e Sheldon pronunciano al momento della consegna del Nobel: se infatti il discorso di Sheldon è totalmente dedicato all'esaltazione dei suoi amici, e quindi all'aspetto più tradizionale e convenzionale della sitcom, al personaggio di Amy spetta il non semplice compito di affrontare un vero e attuale tema scientifico.

Se i fan della serie saranno rimasti verosimilmente commossi dal discorso di Sheldon, c'è da augurarsi che anche il messaggio di Amy raggiunga al meglio le orecchie e i cuori dei telespettatori: dal virtuale podio di una Stoccolma hollywoodiana, la fittizia vincitrice del Nobel per la Fisica ricorda l'indiscutibile realtà che solo tre donne (reali) l'hanno preceduta nella lista delle fisiche premiate con il Nobel, ed esorta le ragazze a dedicarsi allo studio della scienza, e ovviamente non solo loro; anche e soprattutto le istituzioni che possono fare qualcosa di tangibile per avvicinare le giovani donne alla scienza, e tutti, nessuno escluso, a far sì che si smetta di considerare la fisica e le altre scienze pure come poco adatte al genere femminile.

Le tre scienziate che sono state insignite del Nobel per la fisica sono la polacca Maria Sklodowska (nel 1903), più nota come Madame Curie (nome che, in un colpo solo, la qualifica come francese d'adozione e coniugata a Pierre Curie), e che peraltro di Nobel ne ha vinto anche un altro, per la Chimica, nel 1911; Maria Goeppert Mayer (nel 1963), che con la più celebre Sklodowska condivide, oltre al Nobel, anche il nome di battesimo e il sangue polacco (anche se nel 1906, suo anno di nascita, la natale Katowice era città

[4] Questa è una delle ragioni, anche se non la sola, che ha generato severe critiche alla traduzione italiana dei primi episodi della prima stagione, al punto che sono stati successivamente ridoppiati.

tedesca); e infine la canadese Donna[5] Strickland, che ha riportato il genere femminile sul palco fisico di Stoccolma nel recente 2018.



3 *I Nobel per la Fisica femminili: Maria Sklodowska, Maria Goeppert Mayer, Donna Strickland.*

Se tre soli premi sembrano pochi, è perché siamo propensi a trarre giudizi troppo frettolosi; la realtà è in verità ancora più triste perché, tecnicamente parlando, il genere femminile di premi Nobel per la Fisica non ne ha ancora vinto neppure uno. Anche se può sembrare una contraddizione con quanto appena scritto poco sopra, a ben vedere è proprio così: anche se nessuno può negare che le tre signore siano tutte "laureate" con il Premio Nobel, è opportuno ricordare qualche fastidioso dettaglio del processo di assegnazione del prestigioso riconoscimento.

Servono un po' di dati statistici: il Nobel per la Fisica è stato assegnato finora (dal 1901 al 2019) per 113 volte a 213 "laureati". Tenendo conto della doppietta di John Bardeen, che si è preso il lusso di vincerlo per due volte – la prima nel 1956 e la seconda nel 1972 – le persone che hanno piazzato la prestigiosa medaglia in bella vista sul proprio caminetto sono una in meno del totale. Di conseguenza, dal punto di vista del conteggio dei laureati con il Nobel per la Fisica, abbiamo un totale di 212 persone premiate. Volendo determinare la "percentuale femminile" del premio, abbiamo diverse possibilità: il metodo più ottimista è quello dato dal rapporto 3/113, che insomma conta il numero delle presenze femminili nel totale delle cerimonie di premiazione, e questo fornisce un misero 2,65%. Sembra però più corretto e significativo pesare il peso femminile rispetto al totale dei premiati, e questo dimezza brutalmente la già piccola percentuale: 3/212 fornisce infatti a malapena un 1,41%. Esiste però un terzo metodo, che è probabilmente quello più corretto: occorre ricordare che esistono regole ben precise per l'assegnazione, e soprattutto la ripartizione, dei Premi Nobel, che è bene ricordare veicolano anche una ragguardevole quantità di denaro, oltre che di indiscusso prestigio. Una delle regole è che il premio, ad ogni sessione annuale, può essere attribuito a un massimo di tre persone: se il vincitore è unico, non ci sono ovviamente problemi di ripartizione; se i vincitori sono due, collaboratori o meno che siano, è facile immaginare che la naturale ripartizione sia un'equa divisione a mezzo; ma quando la suddivisione è tra tre persone, questa può sia essere equa, con i tre vincitori che acquisiscono un terzo della quota, o meno, con uno dei vincitori che acquisisce la metà del premio e gli altri due un quarto a testa[6].

[5] Mai nome proprio fu più adatto, se si parla di parità di genere. E comunque, a giudicare dalla foto sembra assai spiritosa: il ciondolo della sua collana ha verosimilmente qualche riferimento al lavoro che le ha fatto vincere il premio: "*per il metodo di generazione di impulsi ottici ultracorti ad alta intensità*".

[6] Non è mai accaduto che, quando i vincitori sono due, la suddivisione sia stata in rapporti diversi dal 50% a testa, sia nel caso che i premiati fossero collaboratori a uno stesso progetto, sia che avessero lavorato a scoperte diverse. La suddivisione tra tre vincitori è invece spesso modulata sulle due possibilità (1/3, 1/3, 1/3) e (1/2, 1/4, 1/4): la logica sottostante è quasi sempre legata proprio ai "progetti" o "scoperte" premiati: non è mai accaduto (almeno così ci sembra) che siano stati premiate tre scoperte in una stessa sessione, quindi la ripartizione è

Con queste rigorose premesse, il peso femminile sui Premi Nobel per la Fisica è facilmente (e, appunto, rigorosamente) determinabile: è sufficiente sommare le tre quote dei premi andati alle donne e rapportarlo ai 113 premi assegnati. Il risultato è un desolante 0,66%, dato dal rapporto (3/4)/113, dacché, come preannunciato, la somma delle quote femminili non raggiunge neppure l'unità: tutte e tre hanno infatti ricevuto una quota di premio pari a ¼. Nel 1903 metà del premio andò a Becquerel, e Maria Sklodowska divise l'altra metà con il marito Pierre Curie; nel 1963 fu Wigner a vincere la fetta più grossa del Nobel, mentre Maria Goeppert Mayer fece a mezzo del resto con Hans Jensen; più o meno come Donna Strickland, che nel 2018 fu premiata con la stessa motivazione di Gérard Mourou, mentre l'altra metà del premio andò a Arthur Ashkin[7].

4 *Mayim Bialik truccata da Amy Farrah Fowler (a sinistra) e truccata da Mayim Bialik (a destra).*

In qualsiasi modo la si voglia vedere, l'appello di Amy dal palco del fittizio Nobel di *The Big Bang Theory* è comunque pregnante, forse addirittura impellente: e se sono le esigenze narrative della fiction televisiva a portare l'attrice Mayim Bialik ad accalorarsi nell'appello, bisogna riconoscere che il caso ha voluto che il compito finisse alla persona verosimilmente più adatta. Gli attori protagonisti della fiction sono – appunto – attori; seri professionisti che riescono bene a rivestire il ruolo richiesto, ma che nella realtà hanno generalmente vite ed interessi ben diversi dai loro personaggi. Interpretano brillanti ricercatori, docenti universitari, vincitori di premi prestigiosi, ma in realtà nessuno ha un titolo accademico di massimo livello; nessuno, a parte proprio la Bialik, che possiede invece un autentico Ph.D.

E, a ben vedere, non è del tutto vero che il suo ingresso nel cast di TBBT sia stato davvero un caso: la futura moglie di Sheldon entra nel cast solo alla quarta stagione, eppure Mayim Bialik viene nominata in un episodio della prima serie quando, mentre i personaggi erano alla ricerca di un elemento ben preparato per una sfida a quiz tra ricercatori, uno di loro propone di chiamare l'attrice protagonista di un'altra serie televisiva che era effettivamente anche in possesso di un dottorato; e si trattava proprio della futura interprete di Amy Farrah Fowler. Sia nella realtà che nella finzione narrativa, la specializzazione della compagna di Sheldon non è però la fisica, ma le neuroscienze. Si potrebbe pertanto pensare che gli sceneggiatori abbiano dovuto tirare un po' la corda, per poter in qualche modo arrivare a giustificare l'assegnazione di un Nobel per la Fisica a una neuroscienziata, e in effetti allo spettatore è richiesto (come sempre, del resto, in quasi tutti gli show) un certo grado di "sospensione dell'incredulità". Ma, come spesso accade, la realtà è quasi altrettanto incredibile della finzione, ed esiste un personaggio che, pur non essendo arrivato al Nobel, ha indubbiamente più di una somiglianza con Amy.

guidata da due sole possibilità: o i tre premiati hanno collaborato a una sola scoperta, o uno dei tre ha lavorato da solo a un progetto e gli altri due, in coppia, ad un altro. In quest'ultimo caso la ripartizione sarà del tipo (1/2, 1/4, 1/4), di fatto equivalente a un 50% "per scoperta"; nel caso di unica scoperta con tre collaboratori, la suddivisione è solitamente di tipo (1/3, 1/3, 1/3). Questa ultima "regola" (equa suddivisione per tre vincitori con la stessa motivazione) è però stata violata tre volte, tutte in anni recenti (2011, 2016, 2017), con uno dei tre che ha avuto quota doppia rispetto agli altri due.

[7] È inutile ripetere che, sotto quasi tutti i punti di vista, il prestigio derivato dall'essere un "vincitore di Nobel" oscura di gran lunga gli aspetti strettamente economici e forse persino un po' burocratici di questo mero conteggio delle quote di ripartizione; ciò nondimeno, è innegabile che un certo grado di informazione questo dettaglio lo dia. Ad esempio, è se non altro curioso che John Bardeen, il duplice vincitore, ha comunque un "peso" pari solo a 2/3, avendo vinto 1/3 del premio sia nel 1956 che nel 1972, e quindi, in un certo senso, la sua doppia premiazione è comunque inferiore ai molti premiati singoli; o che M.me Curie, da sola, abbia un peso maggiore nella Chimica, dove vinse il premio in solitaria, di tutte le donne premiate (lei compresa) nella Fisica.

5 *Dorothy Maud Wrinch*

Dorothy Maud Wrinch nasce il 12 Settembre 1894 a Rosario, in Argentina. Nonostante la nascita a sud dell'equatore, Dorothy è figlia di genitori inglesi, Ada e Hugh, che rientrano nel Regno Unito quando Dorothy è ancora assai giovane. Cresce a Surbiton – che all'inizio del XX secolo era ancora un villaggio poco distante dalla capitale, ma che ormai è considerato a tutti gli effetti un quartiere di Londra – e verso i vent'anni di età si iscrive al Girton College di Cambridge; l'indirizzo dei suoi studi sono matematica e filosofia.

A questo punto la deduzione è facile quasi quanto fare due più due: siamo a Cambridge nel 1913, l'interesse è per la matematica e la filosofia; non è certo difficile immaginare quale possa essere la personalità del corpo docente a impressionare maggiormente Dorothy Wrinch: il quarantenne Bertrand Russell, all'apice della sua carriera e con i tre tomi dei suoi (e di Whitehead) *Principia Mathematica* ancora freschi di stampa. Durante tutto il periodo passata come studente, avrà *de facto* il tutoraggio di Bertrand Russell[8], che naturalmente influenzerà e dirigerà fortemente la sua formazione; è comunque difficile stabilire se in questo Wrinch sia stata molto fortunata o meno, visto che il tutor *de iure* era un altro mostro sacro, G.H. Hardy[9].

In breve, Dorothy Wrinch comincia a pubblicare: le sue prime memorie escono già nel 1917[10], non troppo oltre la laurea in matematica ottenuta con somma distinzione nel 1916; e il 1919 è anche l'anno in cui lascia Cambridge per entrare al collegio universitario di Londra. Qui ottiene un master e un dottorato. Si sposa – ma non sarà un matrimonio felice e fortunato – e dà alla luce Pamela, la figlia nata nel 1927. Per seguire il marito William, che insegnava matematica e fisica a Oxford, Dorothy si trasferisce nella stessa università e comincia ad insegnare in diversi collegi femminili. Già che c'era, pur avendo già sia un master che un dottorato presi a Londra, studia per prenderne altrettanti anche qui: stabilisce così anche un record, perché il suo sarà il primo dottorato di ricerca che Oxford rilascia a una donna.

Per molti versi, tutto questo è solo l'inizio: nonostante il suo matrimonio finisca in una separazione nel 1930 e debba perciò anche arrangiarsi a tirar su da sola una figlia di appena tre anni, Dorothy sembra animata da un'energia vitale che solo poche persone sembrano possedere. Riceve l'affiliazione da un gran numero di atenei europei, e pur non tralasciando certo la sua amata matematica, si dedica allo studio anche della chimica, della fisica e della biologia; viaggia in mezza Europa, soprattutto a Parigi, Vienna, Praga e Leida. Come risultato di questi studi, comincia a pubblicare diversi articoli di matematica applicata, e in particolare, matematica applicata alla biochimica.

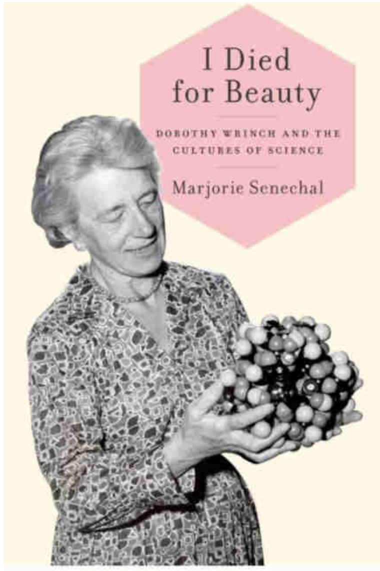
È in questa fase che Dorothy Wrinch definisce al meglio le sue caratteristiche più peculiari: fin dall'inizio ha mostrato interesse verso discipline diverse, quali la filosofia, la logica, e ovviamente la matematica; la sua apertura ulteriore verso la fisica, la chimica e soprattutto le scienze della vita la qualificano definitivamente come una scienziata

[8] "*Nemesi*", RM052, Maggio 2003

[9] "*Stanlio e Ollio*", RM049, Marzo 2003.

[10] La prima è una difesa della filosofia di Russell, che a quei tempi, contrastando l'entrata in guerra del Regno Unito, passava dei momenti burrascosi con il governo di sua maestà il Re d'Inghilterra.

interdisciplinare. Il termine è però forse troppo riduttivo, o quantomeno troppo poco affascinante: è certo più adatto quello che si usava nei secoli passati, quando gli uomini che riuscivano a padroneggiare gran parte dello scibile erano particolarmente ammirati. Erano gli "*homines universales*", e venivano tenuti in altissima considerazione in tempi in cui la visione della conoscenza era molto più indirizzata verso la generalità piuttosto che verso l'estrema specializzazione. Dorothy è certamente più vicina a questa visione della scienza: a voler rispettare le sue caratteristiche di genere – che nei primi decenni del Novecento erano ancor più limitanti di quanto continuino ad esserlo ancora oggi – si meriterebbe certo il titolo di "*foemina universalis*", insieme a non molte altre colleghe[11].



6 *Dorothy nella copertina del libro a lei dedicato di Marjorie Senechal (Oxford University Press)*

È tra i fondatori del "Club della Biologia Teorica" il Theoretical Biology Club, insieme a J.H. Woodger, C.H. Waddington, Joseph Needham[12] e un'altra Dorothy, la moglie di Needham. È il club che auspica una nuova via, un diverso approccio alla scienza tutta: una sorta di manifesto in nome dell'interdisciplinarietà. Nel caso della biologia, questo si esplicava nel cosiddetto approccio "organico", alternativo alle altre scuole di pensiero che primeggiavano a quei tempi: e la maggiore interprete di questa posizione è proprio Dorothy Maud Wrinch. Basandosi su idee traslate dalla simmetria matematica, Dorothy costruisce il primo serio modello strutturale di proteina: il *cyclol*. È un modello originale e bello, che nasce sia dall'idea di fondo dell'interdisciplinarietà, sia da un evidente passione estetica: purtroppo, è un modello sbagliato, almeno per le proteine.

Così, anche Dorothy, come Amy, può solo sognare di salire i gradini del podio di Stoccolma. Il suo modello le darà comunque delle buone soddisfazioni su altri composti alcaloidi, e poi una mente come la sua non ha certo difficoltà ad applicarsi a problemi sempre nuovi. Negli Stati Uniti, dove alla fine emigrò, si dedica alla cristallografia a raggi X, facendo largo uso delle serie di Fourier, e sintetizzando il suoi risultati in un libro che è un testo fondamentale ancora oggi.

Dicono che le donne siano meno competitive degli uomini, e chissà, forse può essere anche vero. Quello che ci pare più probabile è piuttosto che, con un cervello e una visione del mondo come quella quelli che doveva avere Dorothy Maud Wrinch, la conquista o meno di un premio, per quanto prestigioso, deve avere un'importanza assai inferiore a quella che gli attribuiamo noi, comuni mortali.

[11] Per evitare di perpetrare l'ennesimo delitto ai danni delle signore, ci corre l'obbligo di precisare che questo concetto lo abbiamo rubato di sana pianta da un articolo di Valerie Bentivegna pubblicato su Medium.com: "*On giant's shoulders: On Dorothy Maud Wrinch and getting things wrong*".

[12] Si tratta proprio dell'autore della monumentale "*Science and Civilisation in China*", nonché proponente della celebre "Needham's Question", che si interroga sulle ragioni per cui lo sviluppo della scienza indiana e cinese sia stato infine superato da quello della scienza occidentale nonostante, agli inizi, fosse chiaramente più avanzato.

2. Problemi

2.1 Lavori (teorici) in giardino...

...che, in questa stagione, sono piuttosto noiosi e ripetitivi; quindi, per evitare di mandare il cervello in letargo, niente di meglio che cominciare a pensare alla pianificazione delle aiuole per il prossimo anno.

Vi abbiamo già detto che il nostro giardino è, al momento, composto da un'enormità di aiuole triangolari, tutte diverse tra loro; quello che vorremmo fare, il prossimo anno (almeno, sin quando non ce lo impediscono le consorti; o sin quando non ci stufiamo), è appunto di sottolineare questa diversità aiuolare (si dice? Beh, facciamo che si dice); ma siccome abbiamo dei dubbi sul fatto che funzioni, giriamo il problema a voi.

L'idea era di scegliere, per ogni aiuola, un punto P al suo interno (e di piantarci, per riconoscerlo, un qualche fiore pregiato); indi, tracciate le perpendicolari ai tre lati passanti per P, individuare un nuovo triangolo formato dai piedi delle perpendicolari.

E poi, iterare il procedimento, mantenendo lo stesso punto P; perpendicolari, triangolo dei piedi, perpendicolari, eccetera.

"Vi fermate prima del livello atomico o intendete continuare?"

Beh, appunto, qui sta il problema: la nostra idea era di fermarci nel momento stesso nel quale si fosse ottenuto un triangolo *simile* (dal punto di vista geometrico) a quello originale, secondo voi, è sempre possibile? O ci vogliono dei triangoli o un P "speciali"?

Come al solito, con calma: scoprirete quando abbiamo cambiato idea al prossimo problema sul giardino...

2.2 Giardino "armonioso"

Visto? Abbiamo già cambiato idea.

No, non è vero: in realtà parliamo dell'altro giardino (il "backyard", che nel nostro caso mostra tutta la sua assonanza non solo linguistica con il termine "junkyard"); recentemente (avendo finalmente verificato che il "junk" non arriva sino al centro della Terra, ma sotto c'è del terreno suppergiù coltivabile), siamo riusciti a capire che ha (suppergiù: vedi dopo) le proporzioni di un rettangolo aureo.

Colti da teorico entusiasmo, abbiamo cominciato ad ipotizzare decorazioni basate sulle sequenze di "quadrati a spirale" al suo interno, quando...

Colti da pratica pigrizia, l'idea più semplice ci è sembrata quella di limitarci a piantare degli alberi nel centro di ogni quadrato. Pronti? Via.

Quadrato 1, quadrato 1 (il secondo), quadrato 2, quadrato 3, quadrato 5, quadrato 8...

FermaFermaFerma, che qui sta succedendo qualcosa di strano. Va bene che, come dice il pratico teorema, "per tre punti passa una sola retta (se la matita è abbastanza spessa)", ma qui stiamo cercando di essere seri. È solo un'impressione o i centri sono allineati su due rette?

3. Bungee Jumpers

Tra la totalità dei quadrilateri di lati dati a, b, c e d, individuare quelli di area massima.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Settembre!

In ritardo, e tanto, e con due mesi di soluzioni da recuperare. Vediamo se riusciamo a non perdere niente… anche se ci sembra impossibile.

4.1 [257]

4.1.1 Tempo di esami

Partiamo da un problema di giugno:

> *Abbiamo un esame composto di sette test, nel quale non sono possibili ex-aequo. I primi classificati in uno dei test o chi riesce ad essere tra i primi sei per quattro test riceve un premio, ma una persona può ritirare al più un premio. All'esame sono iscritti cento studenti . Quanti premi potranno essere distribuiti, al massimo?*

In RM258 abbiamo riportato la soluzione di ***Alberto R.*** e ***trentatre***, qui la versione di ***Silvano***:

> Per trovare il massimo faccio questo "ragionamento" ipotizzando però che tutti gli studenti facciano tutti i test, ovviamente. Definisco:
>
> - "vincitore" chi arriva primo al test
> - "piazzato" chi arriva dal 2° al 6° posto
> - "premiato" un qualsiasi "vincitore" o chi si è "piazzato" per almeno 4 volte.
>
> Per massimizzare le vincite, ovviamente, i "premiati" è bene vincano una sola volta, quindi per massimizzare i "vincitori" devono essere tutti diversi e poi non classificarsi tra i primi 6 negli altri testi.
>
> Essi sono ovviamente 7, pari al numero dei test.
>
> Ci restano le posizioni da 2 a 6 per ogni esame.
>
> I piazzamenti totali sono quindi: 7×5=35 piazzamenti.
>
> Per massimizzare i premiati "piazzati" posso ipotizzare di avere 4 soli piazzamenti per "premiato" e quindi al massimo ho:
>
> $$Premi_{Max} = Premiati_{vincenti} + Premiati_{Piazzati} = 7 + \left. \frac{35}{4} \right\rfloor = 7 + 8 = 15$$
>
> La soluzione è pertanto 15 premi.
>
> Ci sarebbero in teoria ulteriori 3 piazzamenti che non danno diritto a un premio, infatti, anche raggiunti da uno dei 7 "Premiati-Vincitori" tale premio sarebbe annullato, perché ogni vincitore ha già il suo premio.
>
> Stessi dicasi se i 3 piazzamenti vanno ad uno dei "Premiati-Piazzati" in quanto per regolamento ogni vincitore può essere premiato una volta sola.
>
> Abbiamo quindi la possibilità di una Medaglia di legno.
>
> Questa la combinazione massima

	V	P	P	P	P	P
TEST	**1°**	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**
N.1	1	8	9	11	13	15
N.2	2	8	10	11	13	15
N.3	3	8	10	12	13	15
N.4	4	8	10	12	14	15
N.5	5	9	10	12	14	16
N.6	6	9	11	12	14	16
N.7	7	9	11	13	14	16

Che ne dite? A proposito della soluzione di ***trentatre***, ***Massimo*** ci scrive:

> Non trovo corretto da parte di 33 prendere, tra le 10! permutazioni quelle che ha preso, infatti non massimizzano. Ad esempio ci sono studenti (94-97) che rispettano tutte e due le condizioni, per cui se li separiamo diventano 8 persone non 4. E siamo arrivati a 13. Inoltre qualcuno ha condizioni sovrabbondanti (ad esempio il 93 è arrivato tra i primi 6 5 volte ed ha levato un posto a qualcun altro. Il 94 è arrivato tra i primi 6 5 volte altro posto tolto.
>
> il 97 prende il premio perché arriva primo ma non perché arriva da 2 a 6.
>
> Quindi per ogni permutazione bisognerebbe fare i conti non si può prendere una permutazione "quasi casuale" e fare i conti solo su quella.

Una permutazione "buona" (che poi ricalca quella manuale della soluzione precedente) è la seguente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	100							99	98		97		96		95	
2		100						99		98	97		96		95	
3			100					99		98		97	96		95	
4				100				99		98		97		96	95	
5					100				99	98		97		96		95
6						100			99		98	97		96		95
7							100		99		98		97	96		95

Le caselle vuote potete mettere qualunque punteggio minore di 94 (ad esempio il numero dello studente).

È vero che questa soluzione prevede che se una persona arriva primo ad un test poi miracolosamente non capisce niente sugli altri e qualcuno che è molto bravo è però sfortunato e trova sempre qualcuno che lo batte sul filo di lana però l'esercizio è fatto così.

Non so se c'è una soluzione più "algoritmica" o matematicamente valida però ritengo che se trovo una soluzione empirica adeguata non vedo perché approfondire più di tanto.

Ovviamente lasciamo a voi considerare la situazione. Noi ci limitiamo ad aggiungere la soluzione di ***Zupo***, che ci scrive forse per la prima volta e si dichiara insicuro dei risultati:

- 7 premi sono da assegnare ai primi classificati di ogni test/materia.

- esistono 7 possibili combinazioni di 4 tests/materie

$$\binom{n}{k}=\binom{7}{4}=\frac{7!}{(7-4)!\,4!}=7$$

- studenti con voto nei primi 6 per 4 tests/materia 6*7=42 (Questa parte non sono sicuro)

Totale dei premi da distribuire 7 + 42 = **49**

Molto bene, benvenuto a ***Zupo*** tra i solutori, complimenti per la gestione del formula editor. Andiamo avanti.

4.1.2 ...ma si vota o non si vota?

Il secondo problema di giugno era sulle strategie di votazione:

Abbiamo N votanti, che devono eleggere k candidati esprimendo m preferenze, con m≤k<N. Ogni votante è anch'esso candidato e hanno tutti un'età diversa uno dall'altro; i candidati vengono ordinati per numero di voti ricevuti, e i primi k vengono eletti: nel caso ci si ritrovi in una situazione di parità a fondo classifica degli eletti, passa il più vecchio. Quanti voti è necessario ricevere per avere la certezza di essere eletti?

E per un collegio uninominale, ne passa uno, due candidati che non sono candidati altrove prendono esattamente lo stesso numero di voti (e sono quelli che ne prendono di più). Come si risolve il caso, nell'attuale ordinamento?

Anche qui in RM258 trovate una soluzione di ***Alberto R.***, ***GaS*** e ***Valter***. Qui sotto la versione di ***Franco57***:

I voti di preferenza sono in totale $N{\cdot}m$. Se il candidato C_0 riceve v_0 preferenze, ne restano $R = N{\cdot}m - v_0$. Egli ha la sicurezza di essere eletto se queste R sono relative a meno di k candidati oppure se tra k altri candidati votati, comunque si scelgano, almeno uno abbia meno di v_0 voti, visto che la parità con il meno votato non garantisce l'elezione. Intuitivamente ciò accade quando $k{\cdot}v_0 > R$, ma proviamolo per assurdo: siano v_1, v_2, …, v_k le preferenze ottenute da altri k candidati, allora se fosse $v_1 \geq v_0$, $v_2 \geq v_0$, …, $v_k \geq v_0$ otterremmo $v_1 + v_2 + \ldots + v_k \geq k{\cdot}v_0 > R$, mentre per ipotesi $v_1 + v_2 + \ldots + v_k \leq R$. D'altra parte se $k{\cdot}v_0 \leq R$, una situazione con $v_1=v_0$, $v_2=v_0$, …, $v_k=v_0$ è possibile e non garantisce la vittoria a C_0.

In conclusione $k{\cdot}v_0 > R$ è condizione necessaria e sufficiente e si può riscrivere come $v_0 > \frac{Nm}{k+1}$, quindi $\left\lfloor\frac{Nm}{k+1}\right\rfloor + 1$ sono i voti che è necessario ricevere per essere sicuri di essere eletti.

Una osservazione: il quesito sembra riferirsi ad un candidato generico, ma nel caso particolare nel quale C_0 sappia di essere tra i primi k più vecchi tra tutti gli N, per avere la sicurezza di essere eletto gli basterebbe ricevere tante preferenze *quante* il meno votato di altri possibili k e non *più* del meno votato. Il minimo di voti richiesti che gli garantirebbe l'elezione scenderebbe perciò di 1 in questo caso.

Sul dibattito riguardo all'attuale ordinamento in caso di parità, occorrerebbe avere la determinazione, la pazienza e molti caffè per addentrarsi nella coltre burocratica delle norme attuali, rintracciarle e affrontarne l'interpretazione. Troppo per le mie forze. Ma posso invece rincarare la dose di dubbi: visto che il numero di preferenze da esprimere è inferiore al numero di candidati da eleggere, cosa succede se i candidati che hanno ricevuto almeno una preferenza sono meno di k?

No, non vi aspettate un nostro commento, a voi la risposta.

4.2 [258]

4.2.1 Che strada seguite?

I problemi di luglio cominciano con un giochino combinatorio:

> *I due giocatori hanno davanti dieci pile di dieci monete ciascuna; il primo può prendere una, due o tre monete da una e una sola pila; il secondo giocatore prende a sua scelta una, due o tre monete ma non più di una per ogni pila. Quali sono le strategie migliori di gioco?*

La prima soluzione è quella di ***Valter*** nel suo classico stile:

> Come ci invitano a fare i Nostri propongo un po' di analisi e un metodo per affrontare il giochino.
>
> Mi pare che le regole richieste ai due giocatori, in fin dei conti, siano poi del tutto simmetriche. S'intuisce facilmente pensando alle 10 pile di monete come ad una tabella con 10 righe e 10 colonne. Le pile sono le 10 colonne della tabella; scambiando righe con colonne inverto le regole del gioco. Il metodo ottimale per chi "lavora" sulle colonne dovrebbe coincidere con quello del suo avversario. Scambiando "riga"/"colonna" nella descrizione del metodo di un giocatore ottengo quella dell'altro.
>
> Analizzo la mia strategia, cioè del primo giocatore, che può prendere sino a tre monete da una pila. Il mio obiettivo è giungere ad avere un'unica pila con almeno 2 monete; così sono certo di vincere. Per quanto detto, chi si ritrova con due pile da due monete o una con una e l'altra con due, vince.
>
> Occupandomi di pile/colonne vinco certamente se mi restano due pile con, in una, al più tre monete. Devo, quindi, cercare di eliminare più monete e al contempo più pile possibili a ogni mia "mossa". Contemporaneamente ho la necessità facendo ciò di non aiutare il sodale eliminandogli delle righe. Riassumendo, devo tentare, durante il gioco, di giungere ad avere più colonne di righe dell'altro.
>
> Siccome ogni colonna/pila ha 10 monete, mi ci vogliono, almeno, quattro "mosse" per eliminarne una.
>
> Al mio avversario, invece, avendogli eliminato almeno una moneta da una riga, ne bastano solo tre.
>
> Da quel momento in poi non sono più in grado di recuperare il "gap" di svantaggio con l'avversario. Mi pare, quindi, che, giocando entrambi nel modo ottimale, il secondo a iniziare dovrebbe vincere.

Ho eseguito alcuni tentativi pratici usando una tabella 4×4 assimilabile ma più facile da gestire. Propongo un esempio indicando con: M le monete e V/O le verticali/orizzontali scelte a ogni turno. Dopo ogni mossa riordino la tabella eliminando le monete che sono state selezionate in precedenza:

VMMM

VMMM

VMMM

MMMM

OOOM - elimina una riga lasciando, nello stesso tempo, quattro pile.

MMM

MMM

MMM

VMMM – elimina una pila

VMM

VMM

OOM – elimina una riga mantenendo le tre pile.

MM

MM

MMM – qualsiasi scelta di V è perdente: O, il secondo a giocare, vince.

MM

Vogliamo proseguire?

4.2.2 Venghino venghino che talvolta si vince...

Per il secondo problema Rudy lancia in aria monete… dovreste già avere un certo numero di sospetti:

> *Avete dieci monete con un lato bianco e, dall'altro lato, i numeri da 1 a 10: le lanciate tutte assieme in aria e poi sommate i numeri visibili: se la somma vale almeno 45, vincete voi, altrimenti vinco io. Se giocate un centesimo a lancio, quanto dovrei pagarvi per ogni vincita, perché il gioco sia onesto?*

Partiamo subito con la soluzione di ***Alberto R.***:

> Lanciando le 10 monete (distinte perché ciascuna ha il suo numero) i risultati possibili sono 2^{10}. I casi favorevoli (quando la somma dei numeri sulle facce superiori vale almeno 45) sono 43, quindi perché il gioco sia equo la vincita deve essere 1024/43 della posta.
>
> Confesso però che il 43 non è tutta farina del mio sacco, ma anche merito del mio computer cui ho chiesto:
>
> - Per favore scrivi il vettore A formato dai numeri da 1 a 10
> - Adesso, gentilmente, preparati a scrivere il vettore $B(n)$ formato dalle cifre di n in base 2, se del caso con zeri a sinistra per arrivare a 10 cifre
> - Abbi pazienza che ora mi devi fare un lavoretto un po' noioso: per tutti gli n da 0 a 1023 conta quante volte $A \cdot B(n) \geq 45$
> - Hai detto 43 volte? Bene, grazie. Abbiamo finito, torna pure a dormire.

Grazie pc di ***Alberto***, vediamo la versione di ***Valter***:

> Avendo 10 monete, con due valori equiprobabili su ognuna, il numero dei casi possibili risultano 2^{10}.
>
> Essendo pochi, ho contato "manualmente" i casi favorevoli basandomi sui numeri che non sono sommati:
>
> - 1 caso in cui tutti i numeri sono conteggiati
>
> - 10 casi con uno, dei 10 numeri, escluso: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

- 20 con due numeri: 1-2,1-3,1-4,1-5,1-6,1-7,1-8,1-9,2-3,2-4,2-5,2-6,2-7,2-8,3-4,3-5,3-6,3-7,4-5,4-6

- 11 con tre: 1-2-3,1-2-4,1-2-5,1-2-6,1-2-7,1-3-4,1-3-5,1-3-6,1-4-5,2-3-4,2-3-5

- e, infine, uno con quattro: 1-2-3-4.

Le 43 volte che mediamente vinco ogni 2^{10} devo incassare $2^{10}/43$ centesimi comprendendo quello giocato.

Mi ritrovo, così, con 2^{10}–43 centesimi in più che dovrò pagare le restanti 2^{10}–43 volte in cui perdo. Il gioco, così, mi pare onesto poiché le vincite mie e del banco tendono, alla lunga, a compensarsi. Risolvendo l'equazione: (2^{10}:43=100:X) ho la mia probabilità in % di vincere, che è quasi del 4,2%.

Siccome non ero certo dei miei calcoli, ho scritto un programma di verifica che me li ha confermati. Sempre se non mi sono sbagliato entrambe le volte probabilmente con lo stesso errore d'impostazione.

L'ho poi modificato in modo che se compare il numero su ogni moneta sia casuale compreso fra 1 e 10. Con la modifica, la probabilità di vincere è salita a quasi il 6,56%, però, non ne capito il motivo. Chissà se un solutore più bravo di me riesce a darne una spiegazione; ci ho pensato molto ma niente.

Come vedete l'approccio corrisponde fino a qui. Vediamo il nostro ***trentatre***:

Ogni moneta presenta due facce equiprobabili e lanciando insieme le 10 monete il numero di casi possibili è 2^{10} = 1024, ognuno con la stessa probabilità di 1/1024. Il numero a_n di casi con la stessa somma n di numeri visibili è il numero di partizioni di n in parti distinte scelte in (1, 2, ... 10). P.es. n=9 comprende gli 8 casi (9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4).

- quindi $a_9 = 8$, e la probabilità che in un lancio esca 9 è 8/1024.

Le monete possono essere tutte nascoste o tutte visibili, e n varia fra 0 e 55 (1+2+ ... +10). Tutti i numeri a_n sono dati dalla funzione

$$f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^{10}) = \sum_{n=0}^{55} a_n x^n$$

- infatti ogni x^n a destra è il prodotto dei fattori di sinistra con somma degli esponenti pari a n, e il coefficiente a_n conta il numero di partizioni diverse

- con $x=1$ si ha la somma dei coefficienti, che naturalmente è

$$\sum_{n=0}^{55} a_n = f(1) = 2^{10} = 1024$$

- $f(x)$ si può sviluppare con un programma di calcolo simbolico in

$$\begin{aligned}&1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + 11x^{11} + 13x^{12} + 15x^{13} +\\ &17x^{14} + 20x^{15} + 22x^{16} + 24x^{17} + 27x^{18} + 29x^{19} + 31x^{20} + 33x^{21} + 35x^{22} + 36x^{23} +\\ &38x^{24} + 39x^{25} + 39x^{26} + 40x^{27} + 40x^{28} + 39x^{29} + 39x^{30} + 38x^{31} + 36x^{32} + 35x^{33} +\\ &33x^{34} + 31x^{35} + 29x^{36} + 27x^{37} + 24x^{38} + 22x^{39} + 20x^{40} + 17x^{41} + 15x^{42} + 13x^{43} +\\ &11x^{44} + 10x^{45} + 8x^{46} + 6x^{47} + 5x^{48} + 4x^{49} + 3x^{50} + 2x^{51} + 2x^{52} + x^{53} + x^{54} + x^{55}\end{aligned}$$

- p.es. il coefficiente di x^9 è il valore già trovato $a_9 = 8$

- dalla identità $f(x) = x^{55} f(1/x)$ si ricava $a_n = a_{55-n}$, cioè l' andamento degli a_n è simmetrico.

La probabilità che esca n è a_n/1024. Nel problema si dice "vincete voi se la somma vale almeno 45", cioè se la probabilità è $1/1024 \cdot \sum_{n=45}^{55} a_n = 43/1024$ (circa il 4%). Dubito che questo si possa considerare un gioco equo, mentre lo sarebbe partendo da “almeno 28” – cioè contando metà dei coefficienti – con probabilità esattamente pari a 1/2.

Le soluzioni sono continuate ad arrivare anche in agosto, per cui possiamo aggiungere questa di ***Lorenzo***:

I casi in cui la somma è maggiore o uguale a 45 sono 43 su 1024 (probabilità del 4,2%), vale a dire un caso su (quasi) 24, per cui il banco deve pagare (circa) 23 centesimi a ciascuna vincita, affinché il gioco sia equo.

Infatti, per ottenere come somma 0, 1, 2, ..., 27, vi sono rispettivamente 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13 15, 17, 20, 22, 24, 27, 29, 31, 33, 35, 36, 38, 39, 39, 40 modi diversi, e simmetricamente per ottenere come somma 55, 54, 53, ..., 28.

E ancora la soluzione di ***Franco57***:

Con n monete ogni combinazione risultato di un lancio ha la stessa probabilità $1/2^n$ di uscire. Se rappresento una combinazione X con X_1, X_2, …, X_n dove X_i è il risultato della moneta i, e in particolare $X_i=0$ se è uscito il lato bianco, $X_i=i$ altrimenti, posso associarvi una combinazione coniugata Y che presenta il lato bianco esattamente nei casi opposti, cioè $Y_i=i$ se $X_i=0$ e $Y_i=0$ se $X_i=i$. I punteggi

$$P(X)=\sum X_i \text{ e } P(Y)=\sum Y_i$$

evidentemente sono complementari cioè

$$P(X)+P(Y)=1+2+\cdots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\binom{n+1}{2}$$

che è anche il massimo che è possibile ottenere con un lancio. La media

$$\frac{1}{2}\cdot\binom{n+1}{2}$$

di una combinazione e della sua coniugata è quindi costante e ciò significa che la distribuzione di probabilità dei punteggi è simmetrica rispetto a questo valore, che è quindi sia la mediana che la media.

Poiché per n=10 monete questa mediana vale 27.5, la scommessa è equa se la somma vale almeno 28, valore ben lontano dai 45 proposto da Rudy!

Per sapere quanto Rudy dovrebbe pagare se la somma vale almeno 45 dobbiamo calcolare la probabilità di questo evento. Anche in questo caso può essere comodo passare alle combinazioni coniugate, per il quale il problema equivalente diventa calcolare la probabilità ottenere al massimo 55−45=10. Il calcolo può essere fatto abbastanza agilmente anche a mano elencando tutte le combinazioni possibili, ad esempio per ottenere il punteggio 10, che è il caso più corposo, abbiamo 10 combinazioni: 1+2+3+4; 1+2+7; 1+3+6; 1+4+5; 2+3+5; 1+9; 2+8; 3+7; 4+6; 10. Per ottenete 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 il calcolo è via via sempre più semplice. In tutto ottengo 43 combinazioni.

In casi più complessi è possibile anche servirsi di una definizione ricorsiva per il numero di combinazioni $U_{n,k}$ che totalizzano non più di k con n monete:

- $U_{n,k} = U_{n-1,k} + U_{n-1,k-n}$ per $n>0$; $k\geq n$, dove infatti $U_{n-1,k}$ sono quelle le combinazioni che non contengono n, mentre $U_{n-1,k-n}$ sono quelle che lo contengono
- $U_{n,k} = U_{n-1,k}$ per $n>0$; $k<n$, infatti in questo caso possiamo escludere n
- $U_{0,k} = 1$ per $k\geq 0$, infatti c'è un solo risultato senza monete e totalizza 0 quindi non più di k.

A conferma del calcolo fatto a mano, anche il calcolo con la formula ricorsiva mi dà sempre 43:

$U_{n,k}$		k										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	2	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4
	3	1	2	3	5	6	7	8	8	8	8	8
	4	1	2	3	5	7	9	11	13	14	15	16
n	5	1	2	3	5	7	10	13	16	19	22	25
	6	1	2	3	5	7	10	14	18	22	27	32
	7	1	2	3	5	7	10	14	19	24	30	37
	8	1	2	3	5	7	10	14	19	25	32	40
	9	1	2	3	5	7	10	14	19	25	33	42
	10	1	2	3	5	7	10	14	19	25	33	43

In conclusione la probabilità p di totalizzare almeno 45 o, il che è lo stesso, non più di 10, vale $43/2^{10}$ quindi dovrebbe essere pagata $x = 1/p = 2^{10}/43$ centesimi (da $-1 + x{\cdot}p = 0$), ma essendo questo numero tra 23 e 24 centesimi, in entrambi i casi pratici non sarebbe perfettamente equo.

Tanto lo sapevamo, che con il Capo c'è sempre il trucco… Ma basta passato, andiamo alle soluzioni dello scorso numero!

4.3 [259]

4.3.1 I problemi di agosto

Data la calura il Capo ha deciso di proporre ben sei problemi, ma sporchi e veloci (secondo lui), li listiamo brevemente:

1. Abbiamo una serie di righelli consunti: quello da sei centimetri ha ormai visibili solo lo zero, l'uno, il quattro e il sei. Secondo voi, che numeri devono restare sul righello da undici per poterlo utilizzare con soddisfazione? Esiste un modo per calcolare "velocemente" l'insieme con il minimo numero di numeri, per un dato n?

2. I tre paesini di Rerio, Serio e Terio hanno un'unica caserma dei pompieri, situata al di fuori dei rispettivi confini comunali; mentre i pompieri sono normali, gli abitanti dei paesi sono un po' fuori di testa: infatti, gli abitanti di Rerio dicono sempre la verità, gli abitanti di Serio iniziano ogni conversazione con una verità, seguita invariabilmente da una sequenza ininterrotta di bugie; infine, gli abitanti di Terio iniziano con una verità e quindi alternano bugie e verità. Un giorno, il centralino dei pompieri riceve questa chiamata:

"Va a fuoco il villaggio!"

"Quale?"

"Il mio!"

"...che sarebbe?"

"Terio!"

...e poi è caduta la linea. Quale villaggio andava a fuoco?

Se questa storia, invece di un pompiere l'avesse raccontata un indigeno (contando per "affermazione" ogni andata a capo), sarebbe cambiato qualcosa?

3. Avete sei numeri (tutti diversi tra loro); è vero che nel vostro insieme potete sempre trovarne due tali che la somma o la differenza sia divisibile per dieci?

4. Si tratta di scrivere un numero di dodici cifre, alternandosi nella scrittura delle cifre. Se il numero risultante è divisibile per tre, vince chi ha cominciato a scrivere il numero; altrimenti, vince l'altro. Le regole sono: (a) La prima cifra non può essere zero. (b) Qualsiasi cifra diversa da 9 può essere seguita solo da una cifra maggiore (c) La cifra 9 può essere seguita da qualsiasi cifra. Avete una strategia per qualcuno?

5. Rudy ha una scatola con 48 fiammiferi e sfida Doc a un gioco: da una scatola togliere uno, due o cinque fiammiferi (a scelta e a turno) sin quando la scatola non è

> *vuota. Esiste una strategia per Rudy? E se i fiammiferi fossero "magri", e nella scatola ce ne stessero 49?*
>
> *6. Sprezzante della calura, Alice si è lanciata nel disegnare una striscia formata da tredici quadratini, ciascuno grande come mezza tessera da domino: il gioco che ha inventato consiste nel posizionare giustappunto una tessera sulla striscia, in modo tale che copra due caselle contigue precedentemente vuote. Perde chi non riesce a mettere un domino sulla striscia. Esiste una strategia per il primo giocatore? E se Alice avesse disegnato 14 quadratini?*

Dopo tantissimo tempo abbiamo ricevuto una soluzione di ***Martino***, che vi proponiamo per prima:

> Proviamo con la 3.
>
> 10, 11, 12, 13, 14, 15
>
> Né le somme né le differenze di due numeri dell'insieme sono divisibili per dieci.
>
> Come controesempio dovrebbe bastare ed è valido anche se ci si restringe all'insieme dei numeri naturali positivi.
>
> [Se si vuole che il risultato della sottrazione sia un naturale positivo si può stabilire che 11 – 15 non è nemmeno da verificare se sia divisibile per 10. O, come disse mio figlio subito prima di scoprire che si poteva andare "di là", non puoi togliere quello grosso da quello piccolo!]
>
> Per i numeri naturali basta
>
> 0, 1, 2, 3, 4, 5
>
> [Con considerazione analoga alla precedente]
>
> Mentre per i numeri interi relativi si vede (con sei numeri potete dare per effettivamente eseguita una prova esaustiva) che anche cambiando di segno (ove possibile) a uno o più degli elementi dell'esempio precedente le cose non cambiano.
>
> Per i numeri reali, beh, gli interi relativi sono di esso un sottoinsieme e quindi la prova ottenuta per un insieme è valida anche al livello superiore.
>
> Vorrei provare con qualche strano condensato di Bose-Einstein ma non li conosco abbastanza.
>
> E, comunque, non avete esplicitato che il risultato debba essere un intero (di qualsiasi tipo esso sia) altrimenti anche $p - e$ è divisibile per 10 ☺.

A questo punto possiamo anche pubblicare l'addendo, che è da attribuire al figlio di ***Martino*** alias ***DragoCamelotBlu*** (***Matteo***):

> Ho appena posto a Matteo, che sta mangiando corn flakes sul divano, il quesito 3 ed esattamente dopo il tempo di vuotare la bocca mi ha risposto "la tabellina dell'undici".

Dopo questa bella espressione di orgoglio paterno, vediamo le soluzioni di ***Alberto R.***:

> 1)
>
> Sul righello da 11 riesco a cancellare 6 tacche: quelle indicate tra parentesi con relativa sostituzione:
>
> 0 1 (3-1) 3 (5-1) 5 (11-5) (10-3) (11-3) (10-1) 10 11
>
> Si può fare di meglio? Non credo, ma non so dimostrarlo.
>
> 2)
>
> Correggiamo le informazioni ricevute per telefono applicando la negazione NON alle affermazioni che sappiamo essere false, in modo da trasformarle in affermazioni vere. Il complesso che ne risulta non deve presentare incongruenze.
>
> Supponiamo che al telefono ci sia un reniano:
>
> "*Il paese sta bruciando; è il mio; è Terio*".
>
> Non va: "il mio" e "Terio" sono incompatibili

Supponiamo che al telefono ci sia un teriano:

"*Il paese sta bruciano; NON è il mio; è Terio*"

Non va: "NON è il mio" e "Terio" sono incompatibili

Supponiamo che al telefono ci sia un Seriano: "*Il paese sta bruciano; NON è il mio; NON è Terio*" Possibile, non ci sono incongruenze. Il paese che brucia è Renio

3)

Falso: dall'insieme {0, 1, 2, 3, 4, 5} non si possono estrarre due numeri tali che la loro somma o la loro differenza sia divisibile per 10

4)

Le strane regole del gioco comportano che l'8 possa essere seguito solo da un 9, pertanto il primo vince giocando sempre 8, così costringendo l'avversario a rispondere sempre col 9. Il numero che ne risulta è divisibile per 3 perché contiene 6 (multiplo di 3) volte la cifra 8 e non importa quante volte la cifra 9.

5)

Vi siete dimenticati di precisare l'obiettivo del gioco! Penitenza: dieci Ave, Pater e Gloria.

Con 48 fiammiferi, se l'obiettivo è di prenderne il maggior numero, allora vince chi gioca per primo con almeno un 26 a 22, come facilmente si calcola.

Se invece l'obiettivo è prendere l'ultimo fiammifero allora vince Doc che gioca per secondo. Egli prende ogni volta un numero di fiammiferi che sommato alla precedente presa dell'avversario dia un multiplo di 3, cioè a 1 risponde con 2 o con 5, a 2 e a 5 risponde con 1. In questo modo, partendo da 48 che è multiplo di 3, Rudy si troverà, ogni volta, a dover pescare da una scatola contenente un numero di fiammiferi decrescente ma sempre multiplo di 3 e, purtroppo per lui, 0 è multiplo di 3.

Se i fiammiferi sono 49, e sempre nell'ipotesi di caccia all'ultimo, allora vince Rudy che gioca per primo. Con la prima mossa egli prende un solo fiammifero così facendo è come se la partita cominciasse adesso, con 48 fiammiferi e Rudy che gioca per secondo. Ci siamo ricondotti al caso precedente.

6)

Con una striscia di 13 caselle non riesco a trovare la soluzione, invece la variante con 14 caselle è semplicissima. Se gioco per primo vinco: Posiziono la prima tessera al centro della striscia ottenendo 6 caselle libere a sinistra, 2 occupate al centro, 6 libere a destra. In questa situazione di simmetria, qualunque mossa faccia il mio avversario su un lato, rompendo la simmetria, io posso ripristinarla eseguendo la mossa speculare sull'altro lato, il che, ovviamente, è sempre possibile. Il metodo si estende a un numero pari qualunque di caselle.

A questo punto le soluzioni di ***Valter***… occhio che la sesta ci è arrivata parecchie volte e potremmo averla riportata sbagliata:

1.

La butto lì come mi è venuta senza pensarci troppo e abbozzo un modo per calcolare "velocemente". Non è per pigrizia, solo perché non sono riuscito a fare di più; nel caso potesse essere utile. A mio avviso, per righelli da undici il minimo numero di numeri è sei: 0 1 2 3 - - - 7 - - - 11.

Alcune considerazioni che potrebbero servire come traccia per ottenere un modo veloce di calcolo:

- chiaramente 0 e n devono essere, in ogni caso, sempre presenti per poter ottenere il numero "*n*"

- di seguito il calcolo veloce che ho sfruttato per 11 numeri e che può essere utile in generale:

-- se tengo l'1, poi posso eliminarne uno ogni due (12-2) / 2 = 5: 0 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11

-- se tengo anche il 2 ne elimino poi due ogni tre ((12-3) / 3) * 2 = 6: 0 1 2 - - 5 - - 8 - - 11

-- se tengo pure 3 ne elimino poi tre ogni quattro ((12-4) / 4) * 3 = 6: 0 1 2 3 - - - 7 - - - 11

-- di meglio mi pare non si possa fare almeno in questo modo e non sono riuscito a trovarne altri

- … solo così però non “funziona” con il righello da sei; forse devo “arricchire” il procedimento

- ripresento i conteggi con questo righello, tenendo però presente anche i resti delle divisioni:

-- tengo l’1, (7-2) / 2 = 2 resto 1; il 5 non può essere eliminato: 0 1 - 3 - 5 6

-- tengo anche il 2, (7-2) / 3 = 1 resto 2, da 4 5 e 6 elimino 5: 0 1 2 - - 4 – 6

-- ma un momento, il 2 lo posso ottenere anche da 6-4; siccome non mi serve ad altro lo elimino.

- indicando con k i numeri rimasti, n, chiaramente, non può essere inferiore a k su due binomiale

- tale valore, infatti, è il numero massimo di sottrazioni che si possano fare fra quelli rimasti

- per un righello da sei, 4 su 2 binomiale vale esattamente sei; quindi, è la soluzione ottimale

- per un righello da undici, 5 su 2 binomiale vale dieci, perciò, posso eliminare al più 6 numeri.

2.

Non ha telefonato un abitante di:

- Rerio, se è vero che è il suo villaggio a bruciare non può rispondere “Terio!” … o viceversa

- Terio, dicendo il vero che è Terio villaggio a bruciare, dovrebbe perciò mentire a “Quale?”.

È stato, quindi, un abitante di Serio a fare la telefonata; da cui si deduce che brucia Rerio.

Riguardo all’estensione, se l’ho compresa, mi pare che il ragionamento da fare sia assimilabile.

Non è di Rerio poiché, se dice il vero a “Quale?, non può poi rispondere “Terio!” … o viceversa.

Non può essere neppure un abitante di Terio in quanto:

- rispondendo il falso alla seconda domanda non dovrebbe essere il suo il villaggio a bruciare

- questo contrasta con la risposta alla terza domanda in cui dice il vero, ma risponde “Terio!”.

Rimane l’indigeno di Serio che risponde il falso alle ultime due domande e quindi:

- non è il suo il villaggio a bruciare poiché risponde che è il suo che sta andando a fuoco

- non è nemmeno quello di “Terio” che è la sua risposta, ma falsa, alla terza domanda

- rimane, quindi, solamente Rerio come villaggio che può bruciare.

3.

Se almeno due dei numeri sono ≡ mod10 la loro differenza risulta, chiaramente, divisibile per dieci.

Se tutti e sei i numeri sono diversi mod10 si può mostrare che la somma di due di loro vale 0 mod10.

Prima e dopo 5 mod10, in questo caso, si ha, almeno, una di queste combinazioni: 1/4, 4/1, 2/3, 3/2.

Ciò mi assicura che esistono almeno due numeri, uno prima e uno dopo 5 mod10 la cui somma è 0 mod10.

4.

Se chi inizia a scrivere sceglie sempre 8, il numero 898989898989 che risulta è divisibile per tre.

5.

Poiché non è stato precisato, considero entrambi i casi riguardo a chi svuota la scatola; vince chi:

- costringe l'altro a svuotare la scatola riuscendo a lasciargli l'ultimo fiammifero da togliere
- può svuotare lui la scatola poiché l'avversario deve lasciargli uno, due oppure cinque fiammiferi.

Prima ipotesi:

- aggiungendo tre fiammiferi all'ultimo ho quanti devo lasciargliene la mossa prima per costringerlo
- aggiungendo altri tre ai quattro ho quanti servono alla mossa ancora precedente; e così di seguito
- riassumendo: chi inizia con un numero di fiammiferi ≡ 1 mod3 perde, in tutti gli altri casi vince.

Seconda ipotesi:

- chi si ritrova con gli ultimi tre fiammiferi perde, poiché deve lasciare all'altro l'ultima mossa
- aggiungendo tre fiammiferi ai precedenti ho quanti servono per far perdere l'altro la mossa prima
- con fiammiferi ≡ 0 mod3 chi inizia perde, diversamente vince lasciando all'altro tale situazione.

Essendo lui a iniziare il gioco ed elencando nell'ordine come si conclude con le due ipotesi, Rudy:

- vince se nella scatola ci sono 48 fiammiferi e perde con 49
- perde se nella scatola ci sono 48 fiammiferi e vince con 49.

6.

Indico con n il numero di celle, cioè i quadratini, che compongono la striscia all'inizio del gioco. Con "mossa" intendo l'inserimento di una tessera, con "**1**" il primo giocatore e con "**2**" l'avversario. Con 14 celle, come per tutti gli n pari, c'è per **1** una strategia vincente che può sempre utilizzare.

Alla prima mossa **1** mette la tessera in posizione centrale, nel caso di 14 nelle caselle sei / sette. Da lì in avanti, duplica le mosse di **2** nelle posizioni simmetriche dell'altra metà della striscia.

Per capirci, se per esempio il secondo occupa le caselle terza e quarta, lui la decima e undicesima.

Siccome le mosse sono simmetriche, il primo a giocare sarà sempre in grado di farle sino alla fine.

Nel caso di tredici quadratini il primo a giocare vince disponendo la tessera nelle caselle 4 e 5.

Per motivare tale scelta elenco le possibili mosse successive e i blocchi di celle libere restanti. Spiego la notazione che uso tramite una possibile mossa del secondo con replica vincente del primo.

La mossa iniziale è 4_5 lasciando due blocchi separati di celle 3|8, poi le due: 1_2 1|8 → 9_{10} 1|3|3|.

Evito di esaminare mosse che sono identiche se s'invertono inizio e fine della striscia iniziale. Lo sono ad esempio per n=13: 4_5 3|8 = 9_{10} 8|3; quindi superata metà striscia iniziale si è terminato.

Durante lo svolgersi del gioco si possono formare più blocchi separati di celle libere da tessere. Posizioni in cui blocchi si abbinano come numero di celle, sono identiche per gli scopi dell'esame. Se ad esempio si è già esaminato 3|1|5 non è più necessario farlo per 3|1|5 in quanto equivalente.

Ecco tutte le possibili mosse del secondo giocatore a 4_5 e la relativa replica vincente del primo:

- 1_2 1|8 → 9_{10} 1|3|3, vince alla sua prossima mossa

- … qui termina l'esame del primo blocco con tre celle, coincide, infatti, con: 2_3 1|8, 9_{10} 1|3|3

- 6_7 3|6 → 9_{10} 3|1|3, disposizione già esaminata

- 7_8 3|1|5 → 9_{10} 3|1|3, come al punto precedente

- 8_9 3|2|4 → 11_{12} 3|2|1|1, vince alla prossima tessera che colloca

- 9_{10} 3|3|3 → comunque i due mettano le tessere ce ne stanno comunque tre, perciò **1** riesce a vincere

- … termina l'esame del secondo blocco con otto celle, ad esempio: 10_{11} 3|4|2 equivale a 8_9 3|2|4.

Tento di individuare una strategia utile per esaminare il caso generale per un qualsiasi n dispari. Premetto un breve glossario di notazioni che mi aiuteranno di esporre meglio le mie farneticazioni.

"TT" rappresenta una tessera inserita da uno dei giocatori, "11" se è stata messa da **1** e "22" da **2**. L'unico modo per mantenere una sola striscia è inserire le "TT" sempre a inizio o fine della stessa.

Chiamo "libera" una cella che è non ancora occupata da una tessera durante lo svolgimento del gioco.

"S"="solitaria" è una cella libera isolata, cioè non affiancata da altre né a destra che a sinistra.

All'immediata sinistra, e/o destra, di una S possono essere presenti solo celle occupate da tessere.

Solo con n=2 si ha la certezza, ovviamente, che al termine del gioco non potranno essere presenti S. Tutte le S che si originano durante le mosse dei due contendenti rimarranno libere sino al termine. Le libere a ogni mossa decrescono di due unità e, al termine, se presenti, possono rimanere solo S.

Per n pari, le S restanti alla conclusione del gioco sono in numero pari che può variare da 0 a $n/3$. Discorso analogo per n dispari, solo che il loro numero, ovviamente, è dispari e va da 1 sino a $n/3$.

Se $n\not\equiv 0$ mod3, $n/3$ è, ovviamente, arrotondato all'intero pari/dispari corrispondente alla parità di n. L'arrotondamento, al valore pari o dispari di $n/3$, è per eccesso se $n\equiv 1$ mod3 e difetto per $n\equiv 2$ mod3. Il numero totale di mosse può variare, quindi, da: (n meno $n/3$ arrotondato) diviso due sino a $\lfloor n/2 \rfloor$.

1 vince, cioè fa lui l'ultima mossa, nelle combinazioni che ne prevedono un numero totale dispari.

Elenco come sono distribuiti gli S, se presenti nel loro numero massimo possibile, per i casi mod3:

- $n\equiv 0$ mod3, almeno a uno degli estremi della striscia iniziale deve essere posizionato uno degli S (il motivo è che per $n\equiv 0$ mod3 il numero blocchi di tessere e degli S che li separano, coincide)

- $n\equiv 1$ mod3, per avere il massimo possibile di S, due di essi devono essere a inizio e fine striscia (essendoci, in questo caso, più S che blocchi separati di tessere due S devono rimanere esterni)

- $n\equiv 2$ mod3, possono essere presenti S, oppure non esserlo, sia all'inizio sia a fine della striscia (non essendoci necessità che un S sia a inizio o fine striscia, sono fattibili tutte le opzioni).

"Blocchi"=B_x sono celle contigue libere, in numero maggiore a uno, che si formano durante il gioco. Il primo che muove su un B_x, per brevità di esposizione, lo individuo con **I**=inizia, l'altro con **A**.

Ho terminato le notazioni pensate per aiutarmi nell'esposizione, parto ad analizzare le strategie.

Come già detto per tutti i casi di n pari, **1** vince mettendo la prima tessera in posizione centrale. Mi rimangono, quindi, da analizzare solamente i casi con n dispari; ne tratto in tutto quanto segue. E' utile, allo scopo, elencare le proprietà di alcuni B_x, che permettono di agevolare tale compito. Per i seguenti blocchi, compresa la striscia iniziale, <u>alternandosi</u> **I** e **A** nell'inserire le tessere:

- B_2 e B_3, l'ultimo è ovviamente **I**, chiamo questo tipo "V"=vincente per **1** con B_x striscia iniziale

- B_5, comunque muovano, è **A** che mette l'ultima tessera, lo chiamo quindi "P"=perdente per chi inizia

- B_4 e B_6, **I** può decidere se è lui oppure **A** a terminare, questi blocchi li rappresento con una "X"

- B_7 e B_8, anche se a **I** convenisse, dati i B_x presenti, farvi terminare **A**, questi può impedirglielo

-- questa proprietà viene utile, per esempio, nel determinare che, per n=13, **1** ha modo per vincere

-- non tutti gli $_x$ pari hanno tale proprietà; p.e. con B_{10}, dividendo in B_4B_4, **1** può far terminare **2**

-- chiamo "W" questi B_x a indicare che permettono a **I** di terminare, ma lo possono anche obbligare

- con "v" e "p" indico i vincenti e perdenti con $_x > 8$; non approfondisco se siano pure V, P, X o W.

Si possono inoltre rappresentare tutte le combinazioni possibili di mosse tramite un grafo a albero:

- alla radice dell'albero c'è la striscia iniziale

- da essa partono $n-1$ archi per tutte le possibili mosse che può fare **1**

- sui rispettivi nodi sostituisco le due celle occupate con il simbolo "TT" più l'eventuale "S"

- poi itero sui nodi sino a giungere a tutte le foglie finali dove sono presenti solo "TT" e "S"

- le foglie a profondità dispari sono quelle dove **1** ha mosso per ultimo e, a profondità pari, **2**

- se la radice è un blocco V, tutte le foglie sono a profondità dispari, se è un P a profondità pari

- nel caso di un X, gli archi che partono dalla radice, originano solo sottoalberi V e sottoalberi P

- **1** per capire se può vincere comincia eliminando le foglie a profondità pari, dove terminerebbe **2**
- elimina poi l'arco che vi conduceva più il nodo da cui partiva con i suoi, eventuali, sottoalberi
- se, dopo le eliminazioni, qualche nodo a profondità pari, cioè mosse di **1**, diventa foglia, itera
- esaurite le foglie a profondità pari, se ne restano a dispari, indicano i cammini vincenti per **1**.

Elenco alcune note sulle considerazioni che **1** deve fare per decidere dove mettere la sua prima "11":

- metterla nella prima metà equivale alla stessa posizione dal fondo invertendo l'ordine delle celle
- per questo motivo, l'analisi di tutte le combinazioni possibili, termina a metà striscia iniziale
- non è possibile il pareggio, se ne ha la possibilità quindi, vincere può dipendere da dove la pone
- è perdente per **1** inserire la prima "11" in posizione 2_3, in quanto lascia a **2** un solo blocco pari
- è anche perdente per **1** iniziare con "11" in 1_2 se la striscia n–2 restante risultasse vincente a **2**
- **1** verifica subito se può vincere in conformità a quanto detto sinora, o perdere senza altre scelte
- se la sua striscia iniziale non rientra in queste casistiche, deve elencare i possibili B_x finali
- può aiutarsi individuando quante o dove potrebbero essere distribuite le eventuali S a suo favore
- con $n \equiv 1$ mod4 vince **1** se il numero di S a fine gioco è ≡3 mod4, vince **2** se ≡1 mod4; opposto per $n \equiv 3$
- il motivo è che, alternandosi nel porre le TT, chi è l'ultimo dipende dalla parità del loro numero
- p.e. per n=9, **1** vince se il gioco termina con: 'TT S TT S TT S', poiché le TT messe sono dispari
- sempre per n=9, **1** perde, invece, se le mosse sono "11 22 11 22 S", in quanto n e S sono ≡1 mod4
- deve poi verificare se, per tutte le combinazioni successive di mosse, riesce sempre lui a finirlo
- le configurazioni possibili in cui restano presenti solo V, P e X ci dicono chi sicuramente vince
- se non vi sono X, e il numero di V è dispari, vince **I**; con V in numero pari, **I** non può che perdere
- si capisce contando il numero complessivo di mosse; nel primo caso è dispari e, nel secondo, pari
- i P non influiscono nel conteggio; avendo un numero di mosse pari non modificano la parità totale
- i blocchi W valgono come i V nel conteggio, cioè per avere la certezza di chi sia vincere, **1** o **2**:
  - se la somma V più W è dispari, **1** vince se si alterna con **2** sul bocco su cui questi man mano muove
  - se il numero di V e W è dispari, è invece **2** a vincere alternandosi con **1** e con le mosse opportune

- se il numero totale dei V più gli X è dispari, vince **1**, in caso contrario **2** riesce a farlo perdere

- lo mostro con due esempi: con V pari e X dispari e viceversa; da essi si può dedurre la strategia:

-- parto con la posizione di **1** indicando in grassetto dove muove per poi mostrare cosa si ritrova **2**…

-- **1**:VV**X**→ **2**:VVP→ **1**:**V**PP→ **2**:PPP; **1**:**V**XX→ **2**:P**X**X→ poi **1**:PP**X**→ **2**:PPP oppure **1**:PV**X**→**2**:PVV **1**:PP**V** →**2**:PPP

-- per cercare di spiegare, con: **1**:VV**X**→ **2**:VVP indico che **1** mette la tessera in **X** lasciando a **2** VVP.

-- riassumendo: con V pari **1** deve iniziare con un X altrimenti con V e poi agire di conseguenza a **2.**

Dopo la prima mossa restano due blocchi, uno con celle in numero pari, compreso lo 0, e una dispari.

Il secondo a giocare può, quindi, sfruttare, con il blocco pari, la strategia vincente di cui sopra (se le mosse per quello dispari possono essere soltanto in numero pari, come p.e. con il blocco B_5).

Il primo, se con $n - 2$ quadratini perderebbe, scegliendo le caselle 1_2, vince lasciandoli all'altro (p.e. con n=11 il primo può lasciare 9 quadratini in serie, poiché chi parte con 9 caselle perde).

Provo ora a verificare chi vince, servendomi di quanto detto, su alcune strisce con n>6 e dispari:

- n=7 iniziando con 1_2 **1** lascia a **2** un solo P=B_5 e, quindi, vince; si può mostrare che è di tipo W

- n=9 siccome 9≡1 mod4, vince **1** se il numero di S a fine gioco è ≡3 mod4 altrimenti vince **2**

-- i casi possibili si riducono a uno, al netto di permutazioni ininfluenti: "11 S 22 S 11 S"

-- se sceglie 1_2, **2** muove in 3_4 lasciando a **1** un solo P=B_5

-- se sceglie 4_5, **2** muove in 6_7 lasciando a **1** VV=B_3B_2 che sappiano far perdere chi se le ritrova

-- se infine optasse per 7_8, **2** metterebbe la tessera in 3_4 e **1** si ritroverebbe pure qui con VV=B_2B_3

-- in tutti questi casi sappiamo che **1** perde; non essendoci altre possibilità B_9 è perdente per **1**

- n=11 iniziando con 1_2, **1** lascia a **2** un solo P=B_9 che, abbiamo ora visto, perdente, quindi, **1** vince

- n=13 è uno dei casi del problema che ho mostrato vincente; **1** muovendo in 4_5 divide in B_3B_8 cioè VW

- n=15 perdente per **1**, lo si può mostrare analizzato tutte le coppie di blocchi dopo la prima mossa:

-- B_{13} e SB_{12} lasciano un solo blocco di tipo v a **2** che, quindi, vince

-- se **1** parte con B_2B_{11}, **2** risponde $B_2B_4B_5$ che passa a **1** tre Bx di tipo 'V X P' come visto perdenti

-- per B_3B_{10} **2** replica $B_3B_3B_5$ cioè 'V V P' anche qui perdenti per **1**

-- **1**:B_4B_9 → **2**:B_4SB_6 cioè 'X X'

-- **1**:B_5B_8 → **2**:B_5SB_5 cioè 'P P'

-- **1**:B_6B_7 → **2**:B_6SB_4 cioè 'X X'

-- e ho finito l'esame avendo raggiunto metà striscia iniziale; tutte le scelte sono perdenti per **2**.

- n=17 vale la stessa considerazione fatta in n=13, muovendo in 8_9, lascia i blocchi B_7B_8 entrambi W.

- mi fermo poiché, se non mi sono sbagliato, o se non c'è un modo più semplice, la cosa si complica.

La cosa si è complicata anche per la redattrice di queste note, ma andiamo avanti con ***Franco57***:

Quesito 1 (righelli consunti)

Se sul righello sono rimaste l lineette, si possono ottenere al massimo $\binom{l}{2} = \frac{l(l-1)}{2}$ misure perché tante sono le coppie di lineette. Con 5 lineette possiamo ottenere quindi al massimo 10 misure, insufficienti per tutte le misure da 1 a 11 centimetri, quindi ne occorrono almeno 6. Se troviamo una soluzione con 6 lineette sappiamo perciò che è ottimale. Io ne ho trovate un paio, a meno di simmetrie, che qui rappresento indicando la differenza in cm tra una lineetta e la successiva a cominciare dalla lineetta 0 che come l'ultima, la 11, deve evidentemente sempre essere presente (per misurare 11 cm).

Le soluzioni sono: (1, 2, 3, 4, 1), (1, 1, 5, 1, 3).

Quindi ad esempio la prima (1, 2, 3, 4,1) indica che le lineette ancora visibili sono quelle ai cm 0,1, 3, 6, 10, 11.

Questa rappresentazione per differenze risulta più comoda da maneggiare, infatti basta mostrare che sommando differenze contigue nella sequenza si ottengono tutte le misure tra 1 e 11:

misura	1,2,3,4,1	1,1,5,1,3
1	1	1
2	2	1+1
3	3	3
4	4	1+3
5	4+1	5
6	1+2+3	1+5
7	3+4	1+1+5
8	3+4+1	1+1+5+1
9	2+3+4	5+1+3
10	1+2+3+4	1+5+1+3
11	1+2+3+4+1	1+1+5+1+3

L'estensione per misurare tutti i cm da 1 a n, con il minimo numero di lineette non sono riuscito a trovarla.

Solo casi particolari: per n=12 una soluzione ottimale è (1, 2, 2, 6, 1), per n=13 una soluzione ottimale è (1, 3, 1, 6, 2), quindi ci bastano ancora con 6 lineette, ma già per n=14 penso che serva una lineetta in più.

Quello che posso affermare sul numero di l lineette per misurare da 1 a n è modesto: da $l(l-1)/2 \geq n$ ricaviamo che sono ne sono necessarie almeno $1+\sqrt{(1+8n)}/2$ e che ne bastano $n/2+1$, infatti ad esempio per misurare da 1 a 100 basta avere banalmente tutte le lineette da 1 a 50 più la lineetta con il 100.

Quesito 2 (pompieri)

Sta andando a fuoco il villaggio di Rerio:

domanda	affermazione	abitante di Rerio	abitante di Serio	abitante di Terio
	Va a fuoco il villaggio!	vero	vero	vero
Quale?	Il mio!	vero	falso	falso
...che sarebbe?	Terio!	vero	falso	vero
conclusione		Impossibile: se la seconda affermazione è vera, è falsa la terza	Possibile solo se va a fuoco Rerio, infatti dalla seconda non è Serio e dalla terza non è Terio	Impossibile: essendo vera terza affermazione la seconda sarebbe vera anche'essa

Ma l'estensione non l'ho capita.

Quesito 3 (sei numeri)

La differenza di due numeri è divisibile per 10 se e solo se hanno la stessa la cifra delle unità; la loro somma è divisibile per 10 se e solo se, a parte il caso 0+0, la somma delle cifre delle unità dà 10, cioè nei casi 1+9, 2+8, 3+7, 4+6, 5+5. Perciò è sufficiente che i 6 numeri abbiano come cifre delle unità ad esempio 0,1,3,5,6,8, perché né la somma né la differenza di due di essi sia divisibile per 10.

Più in generale affinché né la somma né la differenza di due di essi sia divisibile per 10 occorre sceglierne uno con la cifra dell'unità tra 1 e 9, un altro tra 2 e 8, e ancora tra 3 e 7, e ancora un quarto che termina con 4 o 6, rimangono due numeri che devono necessariamente terminare la rappresentazione decimale per 0 e per 5.

Quesito 4 (numero di dodici cifre)

Come è ben noto un numero è divisibile per 3 se lo è la somma delle sue cifre, quindi conviene concentrarsi su queste. In effetti il secondo giocatore sembra avere maggiori possibilità perché la sua scelta può riportare il modulo 3 della somma delle cifre finora scritte al valore più conveniente per sé. Il primo giocatore può sperare di batterlo solo forzando le possibili scelte dell'avversario, ad esempio se scrive sempre 8 l'avversario non potrà che rispondere con 9 e alla fine vi saranno nel numero 6 cifre 8 e 6 cifre 9 (898989898989). Poiché 9 modulo 3 vale 0 conteranno solo le 6 cifre 8, quindi 6*8, ma essendo 6 divisibile per 3 anche queste daranno 0 modulo 3, quindi otterremo un numero divisibile per 3 e il primo giocatore vincerà.

Quesito 5 (fiammiferi)

Con n fiammiferi la strategia ottimale ce la ha il primo giocatore se e solo se n non è divisibile per 3. Infatti con 1 o 2 fiammiferi ovviamente vince, con 3 perde perché ne lascia 1 o 2. Per induzione per $n>3$, se il modulo 3 di n vale 1 o 2 basta togliere rispettivamente 1 o 2 fiammiferi per condurre l'avversario in una situazione di perdita, se invece vale 0, in ogni caso, togliendo 1, 2 o 5 fiammiferi il modulo 3 della nuova situazione vale rispettivamente 2, 1 o 1 e perciò è comunque di vincita per il suo avversario.

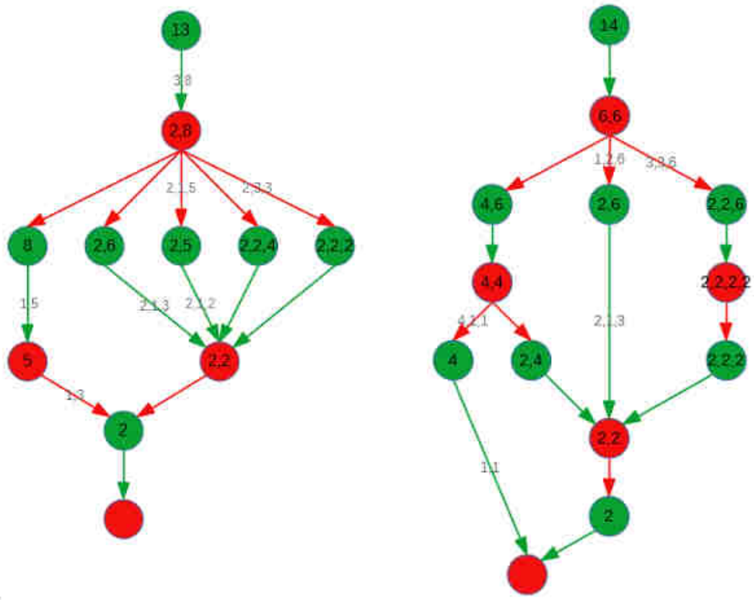
Perciò, se Doc gioca bene, con 48 fiammiferi vince, ma potrebbe dare a Rudy la rivincita con 49.

Quesito 6 (domino)

Giocando, in generale ci si trova a muovere con uno o più gruppi di caselle contigue. Naturalmente non conta l'ordine dei gruppi, visto che sono staccati. I gruppi di un solo elemento possono essere totalmente ignorati perché su questi non ci si porrà più intervenire. Inoltre i gruppi di 3 caselle sono equivalenti ai gruppi di 2 caselle, perché evidentemente l'unica mossa possibile su di essi è far sparire il gruppo o ridurlo ad un solo elemento, che come ho appena notato sono situazioni equivalenti.

Posso quindi rappresentare una situazione di gioco come una sequenza di numeri che rappresentano la lunghezza di un gruppo di caselle contigue, con la semplificazione che adotterò la convezione di scrivere 2 per 2 o 3 ed ometterò i gruppi di 1. Quindi ad esempio dalla situazione (2,8) mettendo la tessera al centro del gruppo di 8 passo a (2,3,3) che però rappresento convenzionalmente come (2,2,2) visto che è equivalente. Ciò mi consente di ridurre un po' il numero delle situazioni. Altro esempio: dalla (2,6) con una mossa posso passare a (2,1,3) che convenzionalmente rappresento come (2,2) ancora una volta perché è equivalente.

Per ogni situazione c'è sempre una strategia di vittoria per il giocatore che muove da quella o per il suo avversario. Nel primo caso la rappresento in verde e inserisco una freccia verso una situazione di perdita del suo avversario, nel secondo caso la rappresento in rosso e inserisco le frecce di tutte le possibili giocate, mostrando che sono tutte di vincita per il suo avversario. Per maggior chiarezza nella freccia inserisco i gruppi realmente rimasti quando non coincidono con la rappresentazione convenzionale della situazione. Riprendendo un esempio precedente da (2,6) si può passare a (2,2) ma sulla freccia scrivo (2,1,3). Questa rappresentazione applicata a una situazione iniziale, nel nostro caso un gruppo di 13 o 14 caselle contigue, è quindi sia una dimostrazione che esista o meno una strategia di vincita, sia l'indicazione di quale sia questa strategia (dalla situazione di arrivo si capisce la mossa):



Nei grafi lo stato finale di perdita è rappresentato da un cerchio vuoto.

Lo studio mi è costato diverse ore di indagine ed essendomi perso in una marea di situazioni di gioco, non avrei mai detto che si sarebbero potuti produrre dei grafici così sorprendentemente semplici.

La parte matematicamente molto più interessante è però una regola generale per ogni situazione, che naturalmente ho cercato, ma ahimè invano.

Il primo problema ha generato un commento critico di ***trentatre***:

Il problema mi è sembrato il più interessante e originale, e non "facilmente" risolubile come affermato. Da brava formichina matematica ho ricavato il numero minimo di segni necessari per una serie di righelli, da questa ho trovato su *OEIS* la sequenza *A046693* che mi ha mandato alla voce *Sparse ruler*, ampiamente presente su internet – sei pagine solo su Wikipedia – con risultati dovuti negli anni a molti matematici, anche famosi, e corredati da mostruosi calcoli numerici.

A fronte di un problema a me sconosciuto, ma evidentemente ben noto, ho ovviamente cestinato i miei modesti ma sudati sforzi.

Mi auguro che nessun altro vostro affezionato lettore abbia scelto di penare sul *problema 1* nell'agosto più caldo degli ultimi anni.

Ci rendiamo conto delle possibili sudate, ma qui adesso fa freddo, settembre è quasi finito e le vostre soluzioni non finiscono mai, così sappiamo che il caldo non scoraggia i nostri accaniti solutori. Date un'occhiata alle soluzioni di ***Lorenzo***:

1. Nel caso del righello da 6 cm, oltre all'insieme {0, 1, 4, 6}, ci sono anche {0, 1, 3, 6} e i rispettivi simmetrici {0, 2, 5, 6} e {0, 3, 5, 6}, comprendenti quattro numeri. Per i righelli da 7, 8 o 9 cm, sono necessari cinque numeri; modulo simmetria, il righello da 9 cm ammette due sole soluzioni minime: {0, 1, 2, 6, 9} e {0, 1, 4, 7, 9}. Ma, per i righelli da 10 o 11 cm, occorre avere un numero in più. In particolare, nel caso proposto, da 11 cm, le soluzioni minime sono ben 14 (più le altrettante simmetriche):

{0, 1, 2, 3, 7, 11}, {0, 1, 2, 5, 8, 11}, {0, 1, 2, 6, 8, 11}, {0, 1, 2, 6, 9, 11}, {0, 1, 2, 7, 10, 11},

{0, 1, 3, 4, 9, 11}, {0, 1, 3, 5, 10, 11}, {0, 1, 3, 6, 10, 11}, {0, 1, 3, 7, 9, 11},

{0, 1, 4, 5, 9, 11}, {0, 1, 4, 6, 9, 11}, {0, 1, 4, 7, 9, 11},

{0, 1, 5, 7, 9, 11}, {0, 1, 5, 8, 9, 11}.

Dato n, ad ogni insieme minimo devono appartenere 0, n e 1 (o $n - 1$), per poter misurare lunghezze di n o $n - 1$ cm. Non sono riuscito a esplicitare una funzione di n che dia la cardinalità di un insieme minimo, né un algoritmo efficiente per trovare un insieme minimo.

Ho fatto tuttavia qualche tentativo, che ha portato alle seguenti considerazioni. Iniziando con 0 e 1, e poi andando di due in due, si trova certamente un insieme minimo per i righelli da 3, 5 o 7 cm, ma non più per il righello da 9 cm, in cui i numeri 3 e 5 possono essere rimpiazzati dal 4. Partendo invece con 0, 1 e 2, e poi andando di tre in tre, si trova un insieme minimo per i righelli da 5, 8, 11 (il secondo tra quelli sopra elencati), 14 o 17 cm, ma non più per il righello da 19 cm, che ammette una soluzione con un numero in meno: {0, 1, 2, 3, 7, 11, 15, 19}. Tuttavia, anche iniziare con 0, 1, 2 e 3, e poi procedere di quattro in quattro, funziona sino a un certo punto: va certamente bene per il righello da 11 cm (porta al primo tra gli insiemi sopra elencati), ma altrettanto sicuramente non per il righello da 39 cm, che ammette una soluzione con un numero in meno: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 15, 23, 31, 39}.

Ancora un'osservazione, a margine. Iniziare con 0, 1, $n - 2$ e n, e poi andare di tre in tre tra 1 e $n - 2$, funziona per $n = 6$, 9 e 12; con $n = 12$, si trova così l'insieme {0, 1, 4, 7, 10, 12}, di cardinalità 6, mentre un'altra soluzione minima per questo caso è {0, 1, 3, 7, 11, 12}. Scendendo a $n = 11$ o 10, e restringendo l'intervallo centrale, si ottengono gli insiemi minimi {0, 1, 4, 6, 9, 11} e {0, 1, 4, 5, 8, 10}.

2. Da qualsiasi paese provenga la chiamata, la prima affermazione è vera: c'è dunque un villaggio che sta bruciando. Si pone però una riflessione: la seconda domanda, "… che sarebbe?", e la relativa risposta, "Terio!", sono riferite al "mio" villaggio o a quello che va a fuoco (o entrambe le cose, seguendo la logica della "gente normale", com'è il pompiere)?

Comunque sia, la chiamata non può giungere da Rerio, i cui abitanti dicono sempre il vero, poiché vi sarebbe una contraddizione tra la seconda e la terza risposta.

Supponiamo che a telefonare sia un abitante di Serio: dalla seconda risposta, si deduce che il villaggio che sta andando a fuoco non è Serio, poiché "il mio" è una bugia. Se l'ultima risposta si riferisce al villaggio che sta bruciando (ed eventualmente *anche* al villaggio di chi sta telefonando), allora la sola conclusione ammissibile è che il villaggio che sta bruciando è Rerio. Tuttavia, se la domanda "… che sarebbe?" è intesa riferita soltanto al villaggio di chi sta chiamando, allora non si può decidere tra Rerio e Terio…

Supponiamo ora che a telefonare sia un abitante di Terio: dalla seconda risposta, si deduce che il villaggio che sta andando a fuoco non è Terio, poiché "il mio" è ancora una bugia. Ma allora l'ultima risposta può essere una verità soltanto se la domanda che la precede è intesa riferita soltanto al villaggio di chi sta telefonando, e rimane il dubbio se l'incendio riguardi Rerio o Serio…

In base a questi ragionamenti, come possono i pompieri decidere con certezza quale sia il villaggio che sta andando a fuoco?

Se la storia fosse raccontata da un abitante di Terio, le cose cambierebbero, poiché la seconda risposta (in *terza* riga o "affermazione") sarebbe vera, e così ancora l'ultima risposta (in *quinta* riga o "affermazione"), sicché a bruciare sarebbe il villaggio di Terio.

Tuttavia, se la storia fosse raccontata da un abitante degli altri due villaggi, niente cambierebbe rispetto ai dubbi precedenti…

3. È falso. Un controesempio è l'insieme {5, 7, 9, 10, 12, 14}; un altro è {0, 1, 2, 3, 4, 5}, poiché non è detto che debbano essere numeri interi positivi. All'insieme non devono appartenere due numeri che terminano con la stessa cifra, né un numero che finisce con 1 (o 2 o 3 o 4) e un altro con 9 (o 8 o 7 o 6, rispettivamente).

4. Ha una strategia vincente chi comincia: scrive 8, l'altro è obbligato a scrivere 9, il primo continua con 8, e così via. Alla fine, il numero scritto è 898989898989, che è divisibile per 3.

5. In effetti, con 48 fiammiferi non ha una strategia vincente chi comincia, bensì chi gioca per secondo. Infatti:

- se c'è un solo fiammifero o ce ne sono due, vince il primo (non lascia alcun fiammifero);

- se ci sono 3 fiammiferi, vince il secondo (il primo deve prenderne o uno o due, ricadendo nel caso precedente);

- se ci sono 4 o 5 fiammiferi, vince il primo (rispettivamente: ne prende uno, lasciandone 3, oppure li prende tutti e 5);

- la sequenza si ripete: se ci sono 6 fiammiferi, chi prende lascia 5 fiammiferi o 4 o uno soltanto, e in ogni caso l'altro giocatore può vincere; se ce ne sono 7 il primo ne prende uno, mentre se ce ne sono 8 ne prende 2 o 5, e così va a vincere.

Continuando la sequenza, si constata che, con 48 fiammiferi, chi deve prendere lascia comunque una situazione vincente per l'altro giocatore; invece, con 49 fiammiferi, il primo può vincere, purché prenda un solo fiammifero.

Indicando convenzionalmente con N il giocatore che deve prendere (il prossimo, "next") e con P l'altro (ossia il precedente, "previous"), si ottiene la seguente tabella:

fiammiferi		0	1	2	3	4	5	6	7	8	…	42	43	44	45	46	47	48	49
chi vince		P	N	N	P	N	N	P	N	N	…	P	N	N	P	N	N	P	N

6. Analizziamo dapprima il caso – più facile – con 14 quadratini. Chi inizia ha una strategia vincente: con una tessera del domino copre i due quadratini centrali, lasciando così due strisce separate di sei quadratini ciascuna; successivamente, il primo giocatore dovrà "copiare" la mossa del secondo sull'altra striscia, assicurandosi l'ultima possibilità di piazzare una tessera. (Si confronti col gioco combinatorio imparziale denominato *Kayles*.)

Anche nel caso con 13 quadratini (numeriamoli in sequenza da 1 a 13) vince il primo giocatore, *purché* inizialmente occupi i quadratini 4 e 5 (o, simmetricamente, 9 e 10). Infatti:

- se il secondo colloca una tessera tra 1 e 3, o tra 6 e 8, o tra 11 e 13, allora il primo occupa 9 e 10, lasciando ancora una mossa all'avversario e l'ultima per sé;

- se il secondo mette una tessera su 8 e 9, il primo occupa 11 e 12;

- se il secondo mette una tessera su 10 e 11, il primo occupa 7 e 8;

- infine, se il secondo mette una tessera su 9 e 10, rimangono ancora tre mosse, l'ultima delle quali spetterà al primo.

Per giustificare la nostra affermazione, proviamo che qualsiasi altra mossa iniziale del primo giocatore conduce alla vittoria del secondo:

- se il primo giocatore occupa i quadratini 6 e 7, il secondo occupa 10 e 11 e vince perché restano due mosse a testa;
- se il primo gioca 5 e 6, il secondo occupa 1 e 2 (o 3 e 4); a questo punto, se il primo gioca 3 e 4 (o, rispettivamente, 1 e 2) allora il secondo occupa 9 e 10 (oppure 10 e 11), mentre se il primo colloca una tessera tra 7 e 13 il secondo occupa due quadratini adiacenti a questa tessera;
- se il primo gioca 3 e 4, il secondo occupa 7 e 8, e rimangono due mosse a testa;
- se il primo gioca 2 e 3, il secondo occupa 8 e 9, lasciando due strisce di quattro quadratini ciascuna, e quindi riapplica la strategia del caso con 14 quadratini;
- infine, se il primo gioca 1 e 2, il secondo occupa 5 e 6; a questo punto, se il primo gioca 3 e 4 allora il secondo occupa 9 e 10 (oppure 10 e 11), mentre se il primo colloca una tessera tra 7 e 13 il secondo occupa due quadratini adiacenti a questa tessera.

Ci ha scritto anche un altro ***Alberto***, solo alcuni problemi selezionati:

<u>Pompieri</u>

Il chiamante non può essere di Rerio, poiché, dovendo dire sempre la verità, non avrebbe mai detto che il villaggio è il suo ed è Terio.

Rimangono solo abitanti che alla seconda affermazione mentono sempre, pertanto il villaggio in fiamme sicuramente non è quello dove risiede chi telefona.

Non potrà nemmeno essere stato un abitante di Terio, poiché dicendo che l'incendio è al suo paese (che sappiamo sicuramente essere una bugia), alla terza domanda non avrebbe mai potuto rispondere Terio.

Pertanto colui che ha chiamato abita a Serio, e sapendo che le ultime sue risposte sono entrambe false, quindi che l'incendio non è né al suo paese né a Terio, esso dovrà per forza essersi verificato a Rerio.

<u>Sei numeri</u>

L'insieme di 6 numeri diversi più semplice che possa venire in mente {0, 1, 2, 3, 4, 5} non ha nessuna coppia che sommata o sottratta dà un multiplo di 10, quindi l'affermazione quindi è falsa.

<u>Dodici cifre</u>

La strategia che può adottare per vincere il primo giocatore è di scegliere la cifra 8 ogni volta, in modo che l'avversario sia obbligato a mettere il 9. Così facendo si verrà quindi a creare il numero 898989898989, che è multiplo di 3.

Alcune versioni cominciano a ripetersi, ma lo stesso è interessante vedere una diversa dialettica. Per esempio ***trentatre***, che si riprende dal calore del commento precedente ed affronta il terzo quesito:

Suppongo che per numeri si intendano interi positivi.

La risposta al problema è **no** se fra i 6 numeri uno è multiplo di 10 : infatti per 6 numeri che terminano con le cifre (0, 1, 2, 3, 4, 5) non è possibile per somma/differenza di due di essi ottenere un multiplo di 10. Sarebbe **sì** se non ci fossero multipli di 10, ma non vedo la ragione di escluderli. Se sono ammessi tutti i numeri, ne occorrono 7 e non 6.

La divisibilità per 10 di un numero, o della somma/differenza di due numeri, dipende solo dalle loro cifre finali e il calcolo si può ridurre a queste.

Siano i 7 numeri

[1] (A, B, C, D, E, F, G)

- con le cifre finali

[2] (a,b,c,d,e,f,g).

<u>differenza</u> : se due cifre [2] sono uguali la differenza dei numeri corrispondenti è un multiplo di 10, e [1] è una soluzione

<u>somma</u> : a parte il caso precedente, siano le cifre [2] tutte diverse; [1] è una soluzione se fra queste esiste una coppia di cifre con somma 10, cioè del tipo

[3] $(1,9)(2,8)(3,7)(4,6)$

- sono escluse 0 e 5 che sottratte da 10 danno rispettivamente 10 (che non è una cifra) e 5 (che non può essere ripetuta) - le cifre in [3] sono tutte diverse.

Ma qualsiasi gruppo [2] contiene una coppia di tipo [3], infatti il totale delle cifre in [2] e [3] è 7+8=15 ma ne esistono solo 10, quindi sono in comune fra i due insiemi almeno 5 cifre, cioè almeno una delle coppie [3] è presente anche in [2].

Si può generalizzare: L numeri bastano perché la somma o la differenza di due di loro sia divisibile per N se

N pari : $L=(N+4)/2$, N dispari : $L=(N+3)/2$ - che si riassumono in

[4] $L=\lfloor (N+4)/2 \rfloor$.

Si può dimostrarlo come sopra, ma basta la sequenza delle cifre minime $(0,1,2,\dots n)$ che va estesa fino a quando compare una coppia con somma N, e si ottiene $L=n+1$. Notare che per ogni N le *cifre* vanno intese <u>in base N</u>, cioè scelte in $(0\dots N-1)$

- p.es. $N=20, L=12$, la soluzione minima è $(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11)$ dove compare 20=9+11.

Ancora una? Ma sì, ecco la versione di ***Silvano***:

<u>Problema N.1</u>

Per poter utilizzare il righello con soddisfazione è necessario poter misuare tutte distanze da 1 all'infinito. Io però mi limito a dire che se misuro "1" posso misurare qualsiasi distanza per iterazione. Quindi le possibili soluzioni sono (ipotizzando anche 0 e 11 cancellabili):

1. Bastano 2 numeri purché consecutivi (es. 0-1 o 1-2, ecc.)
2. 3 numeri però purché tra essi ci siano almeno due distanze prime tra di loro.

La spiegazione è questa. Se due numeri a e b sono primi tra di loro e $a > b$ allora considerando l'algoritmo di Euclide posso misurare il MCD, ossia 1.

Se misuro 1, allora misuro qualsiasi numero.

Ovviamente l'estensione è automatica, perché se misuro "1" misuro qualsiasi cosa.

Es. righello da 11, numeri visibili 0, 3, 8

8-3=4

4-3=1 (MCD di 3 e 8)

<u>Problema N.2</u>

Rerio. Infatti al telefono non può essere un abitante di TERIO, perché:

A: Vera – C'è un incendio

B: Falsa – Il Mio

C: Vera – Terio

B dovrebbe essere falsa, ma non lo è.

Non può essere un abitante di RERIO perché:

A: Vera – C'è un incendio

B: Vera – Il Mio

C: Vera – Terio

La C è falsa se fosse Rerio, e non è possibile.

Quindi è un abitante di Serio.

Pertanto:

Vera – C'è un incendio

Falsa – Il Mio

Falsa – Terio

Non è Serio e non è Terio, quindi in fiamme c'è Rerio.

<u>Problema 3:</u>

Suppongo che i numeri non siano 0, 1, 2, 3, 4, 5 perché in tal caso la divisibilità di 0 per qualcosa è "ai limiti" considero solo numeri >1 e che NON possa utilizzare 2 volte lo stesso numero dell'insieme. In tal caso ad esempio numeri 20, 21, 22, 23, 24, 25 non soddisfano i requisiti. Infatti la somma ha come ultima cifra numeri da 1 a 9 e le differenze numeri da 1 a 9 sempre, quindi non sono divisibili per 10.

<u>Problema 4:</u>

Basta che il primo scriva 8 e l'altro scrive 9 obbligatoriamente. La somma fa 17 che ripetuto 6 volte fa 102 che è multiplo di 3 ed il primo vince sempre.

Uscirà sempre il numero 898989898989

<u>Problema 5:</u>

Boh, non si capisce chi vince !! l'ultimo che prende un fiammifero o il penultimo ? Nel dubbio ho passato :D

<u>Problema 6:</u>

Considero 12 caselle, A vince sempre con questo schema:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	A1	A1	B1	B1			A2	A2			
	A1	A1		B1	B1			A2	A2		
	A1	A1			B1	B1		A2	A2		
	A1	A1				B1	B1	A2	A2		
A<n> Mossa n di A, B<n> Mossa n di B											
Altre opzioni di B sono simmetriche											

Con 23 caselle A vince sempre con questo schema:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B1	B1		A1	A1				A2	A2			
	B1	B1	A1	A1				A2	A2			
			A1	A1	B1	B1		A2	A2			
			A1	A1		B1	B1	A2	A2			
			A1	A1			B1	B1		A2	A2	
A2	A2		A1	A1				B1	B1			
			A1	A1		A3	A3		B1	B1		
			A1	A1				A2	A2	B1	B1	
			A1	A1				A2	A2		B1	B1
A<n> Mossa n di A, B<n> Mossa n di B												
Altre opzioni di B sono simmetriche												

La logica (dedotta da questo sporchissimo programmino VBA in excel lo ammetto che da tutte le combinazioni in modo ricorsivo) è dividere in 3 le 13 colonne corrispondenti lasciando al giocatore B solo mosse obbligate dopo la seconda mossa di A.

No, il programmino non ve lo passiamo. Adesso basta, il mese è finito e ne abbiamo un altro da recuperare. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Una lastra di metallo quadrata ha tre lati alla temperatura di 0°C e il quarto lato alla temperatura di 100°C. Qual è la temperatura al centro della lastra?

Sovrapponiamo quattro lastre di questo tipo in modo tale che ci sia un lato "a cento gradi" su ognuno dei quattro lati dell'oggetto ottenuto. La temperatura media di ogni lato dell'oggetto sarà allora di 25°C. Quindi il centro avrà una temperatura di 25°C.

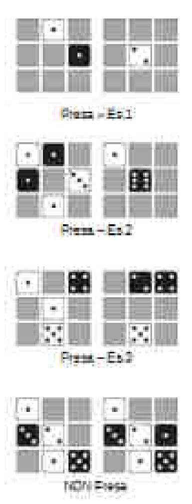
6. Zugzwang!

Ci è capitato, in passato, di ricevere la critica "...e certo, prendete roba in inglese, la traducete in italiano alla bell'e meglio… Facile, fare matematica in questo modo…". Bene, possiamo finalmente smentire questa calunnia: abbiamo trovato la nostra *mission*. È quella di trovare dei nomi decenti ai bellissimi giochi di ***Mark Steere***. Questo ha un nome talmente terribile che ve lo diciamo alla fine, altrimenti scappate.

6.1 Amebe Vampire

Bruttino (il nome, non il gioco), ma ci pare renda bene l'idea di un qualcosa che ruba qualcosa di vitale agli altri per sopravvivere; e poi gli altri tornano.

Come ***materiale*** vi serve un mucchio di roba: nella fattispecie, una scacchiera 5×5 (e sin qui, niente di grave) e due set di dadi cubici, uno bianco e uno nero: il guaio è che ve ne servono ***ventiquattro*** per tipo (scafati come siete, avrete intuito dove vada a parare il gioco e vi starete chiedendo: "...e perché non venticinque?". Guardate le regole, pensateci un attimo e consideratelo un "Quick & Dirty"), di dimensioni pari alle caselle della scacchiera: un set del genere, o siete azionisti de "I Giochi dei Grandi" o vi costa 'na cifra. Per i primi tentativi, un buon numero di pezzetti di carta (bianchi) e una biro possono bastare. O anche un foglio di calcolo.



7 *Prese e non.*

L'***inizio del gioco*** è a scacchiera vuota: il primo giocatore (Bianco? Bianco) mette un dado del suo colore indicante "1" nella casella che preferisce; la stessa cosa fa il secondo giocatore... E avanti così, almeno sin quando non c'è la possibilità di prendere. E qui le cose diventano piacevolmente complesse, tant'è che come esempi usiamo gli stessi di Mark.

La ***presa*** è possibile quando mettete il vostro dado in modo tale che abbia adiacenti (orizzontali e/o verticali: niente diagonale) almeno due dadi la cui somma sia *minore o uguale a 6*: nell'esempio 1, il bianco ha piazzato un dado nella casella centrale (del pezzetto di scacchiera) e ha preso i due dadi che indicano "1"; siccome 1+1=2, il dado indica "2". Si noti che *si prendono anche i propri dadi*: i dadi presi vengono restituiti al legittimo proprietario e, se giocando in quella casella è possibile, *è obbligatorio prendere*: se non volete prendere, però, potete sempre giocare da un'altra parte.

Se la somma dei dadi adiacenti eccede il sei, *si prende sino al sei* (ma si veda il prossimo paragrafo): nell'esempio 2, con un dado nella casella centrale, questo indica "6" perché 1(nero) + 1(nero) + 1(bianco) + 3(bianco) = 6. L'uno bianco non lo tocco perché è in diagonale.

Con l'esempio 3, succede una cosa interessante: Mark non è molto chiaro, ma si direbbe che chi gioca possa *decidere quanto prendere*: qui, con il "2" in posizione centrale della prima riga, ha preso i due "1", ma avrebbe potuto prendere anche il proprio "4", mettendo un "6".

L'ultimo esempio indica una "non-presa": 5+2=7, quindi niente da fare. E quindi in riga di mezzo, ultima colonna compare un "1". Insomma, la presa sembra obbligatoria ma "decido io cosa prendere", e non necessariamente prendere il più possibile è una buona strategia, sembra pensare Mark. Qui, secondo noi, c'è spazio per un po' di analisi.

Il gioco ***finisce*** quando la scacchiera è colma (...adesso avete capito, perché ventiquattro?) e ***vince*** chi ha il maggior punteggio sommando i propri dadi sulla scacchiera.

Bene, se ci avete seguito sin qui, meritate una punizione. Mark ha inventato questo gioco il 25 febbraio 2006 mentre al ristorante aspettava il piatto di totani: l'ultima è una nostra ipotesi, ma ci pare l'unico motivo sensato per chiamare un gioco del genere *Cephalopod*.

7. Pagina 46

Ogni quadrilatero *ABCD* può essere diviso in due triangoli da una delle sue diagonali, ad esempio *AC*. L'area *S* del quadrilatero vale allora:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\beta+\frac{1}{2}cd\sin\delta$$

con β, δ<180°.

AC può essere calcolato in due modi, applicando la regola del coseno ai triangoli *ABC* e *ACD*:

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta$$
$$AC^2=c^2+d^2-2cd\cos\delta$$

Da cui:

$$a^2+b^{-c^2}-d^2=2ab\cos\beta-2dc\cos\delta$$

E, combinando con questa l'espressione per la superficie,

$$(4S)^2+a^2+b^2-c^2-d^2=(2ab\sin\beta+2cd\sin\delta)^2+(2ab\cos\beta-2cd\cos\delta)^2 \; .$$

Dato che $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, posiamo semplificare il secondo membro:

$$16S^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd(\cos\beta\cos\delta-\sin\beta\sin\delta) \; ,$$

ossia

$$16S^2=4a^{¿}+4c^{¿}-(a^2+b^2-c^2-d^2)-8abcd\cos(\beta+\delta)$$

Essendo *a*, *b*, *c* e *d* dati, l'area sarà massima quando sarà massimo cos(β+δ); quindi, *il quadrilatero ha area massima quando la somma degli angoli opposti vale* 180°[13].

[13] Questo equivale a dire che *il quadrilatero è ciclico*, ossia che è inscrivibile in una circonferenza.

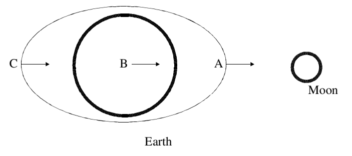
8. Paraphernalia Mathematica

Deducete, dalla citazione che segue, dove è andato in ferie Rudy.

8.1 Spingi e tira

"Il vostro pianeta non ha lune"
"Non potete provarlo"
"Mi avete fatto guidare un'astronave in grado di resistere all'attrazione di un buco nero, ma non in grado di sopportare le forze di marea di due nane bianche. Qualsiasi abitante di un pianeta con delle lune ci avrebbe pensato"
"Quanto volete per stare zitto?"
Larry NIVEN, "Reliquia dell'Impero"

Anche se nel Mediterraneo siamo abituati a maree piuttosto limitate, sappiamo tutti che esistono posti dove il fenomeno è impressionante: senza andare a scomodare la Baia di Fundy e restando in Europa, una gita a Mont Saint-Michel (o a Saint-Malo[14]) permette di assistere all'evento giornaliero in tutta la sua maestosità. Alla domanda "da cosa sono causate le maree?", la risposta classica è "l'attrazione lunare"; se data con l'opportuno tono di sufficienza, sicuramente impedirà all'interlocutore di passare alla domanda: "OK, ma allora perché ci sono ogni (circa) *dodici* ore?".



8 *Qualcosa di troppo.*

Già. Posto che spieghi qualcosa (spoiler: no), la risposta ottenuta giustificherebbe *metà* delle maree: infatti, il ciclo di marea è, approssimativamente[15], della durata di *dodici* ore. Va detto che qualche dubbio avrebbe dovuto farvelo venire già il disegno sui libri di scuola (sicuramente quelli delle medie, ma in alcuni casi lo abbiamo visto alle elementari: ne trovate, a imperitura memoria, uno qui di fianco. Cosa ci fa quella "bolla" verso l'esterno, nel punto *C*?

Semplifichiamoci la vita: la Terra orbita attorno al Sole, la Luna orbita attorno alla Terra, e sono tutti sullo stesso piano. Non solo, ma le orbite sono tutte circolari.

Newton ci ha spiegato che la gravitazione universale è governata dalla legge:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2},$$

dove m_1 e m_2 sono le masse dei due corpi che interagiscono, R la distanza che li separa (OK, i loro "centri di massa") e G una costante (6.674×10^{-11} m^{-3} kg^{-1} s^{-2} , posto che non ve lo ricordiate); quindi, possiamo calcolare l'attrazione gravitazionale da parte della Terra su un corpo posto sulla sua superficie (sempre per chi non se lo ricorda: R = 6371 km, m_1 = $5.97237\ \times10^{24}$ kg) e ottenere il suo "peso". Nello stesso modo, possiamo calcolare l'attrazione della Luna sullo stesso corpo: essendo la distanza di un oggetto sulla superficie della Terra dal centro della Luna 60.3 volte il raggio della Terra ed essendo la massa della Terra 81.5 volte quella della Luna, l'attrazione della Luna risulta 0.0000034 volte quella della Terra: anche nelle migliori condizioni (Luna piena allo zenith), questa forza è risibile: non riuscite a convincere una bilancia che pesate meno, figurarsi spostare una massa d'acqua oceanica[16].

---

[14] Già.

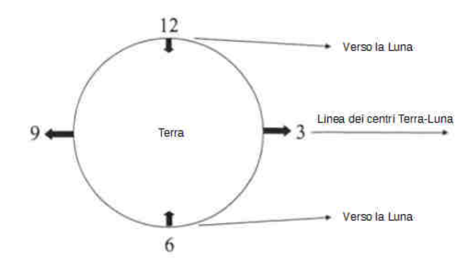
[15] Chiariamo una volta per tutte che i "circa" e gli "approssimativamente" nascono dal fatto che la Luna ha un moto apparente (retrogrado): domani sera, la trovate nella stessa posizione di stasera "un po' dopo".

[16] La spiegazione delle maree attraverso l'attrazione lunare è stata utilizzata da Gaileo nei Dialoghi come punto a favore della rotazione della Terra attorno al Sole.

Ma allora, da dove nascono le maree? Riesaminiamo una delle affermazioni fatte sopra modificandole leggermente: la Terra e la Luna orbitano *attorno al centro di massa comune*, che si trova all'interno della Terra, ma non nel suo centro (a 4641 km di distanza da questo, posto che siate interessati). Questo implica che venga generata una *forza centrifuga* per contrastare la caduta dei due corpi verso il loro baricentro; non solo, ma implica anche che per un corpo esattamente nel centro della Terra la forza centrifuga equivalga esattamente alla forza attrattiva (della Luna).

Abituati a semplificare a punti materiali i corpi estesi, potremmo pensare che questo sia vero per qualsiasi punto, ma un veloce passaggio sulla bilancia dovrebbe convincervi rapidamente del contrario. Cerchiamo di costruire un modello "sensato".

Sempre basandoci sulla legge di gravitazione universale, se dal centro della Terra ci spostiamo alla sua superficie nel punto dove la Luna è allo zenith, abbiamo ridotto la distanza dalla Luna di un raggio terrestre; essendo la Terra un corpo rigido, la forza centrifuga non cambia, ma la forza attrattiva della Luna sì: misurandola in g, passiamo da $0.0000034g$ a $0.0000035g$. Se invece ci spostiamo sempre alla superficie della Terra ma "dall'altra parte" (dove la Luna è al nadir), abbiamo *aumentato* la distanza dalla Luna di un raggio terrestre, e quindi la forza attrattiva della Luna *diminuisce* sino a $0.0000033g$: insomma, anche se si tratta di forze infinitesime, la differenza tra un punto e l'altro è circa del 3%. Insomma, abbiamo una forza che in punti diversi della Terra cambia di intensità (e direzione): forze di questo tipo vengono dette *differenziali*.

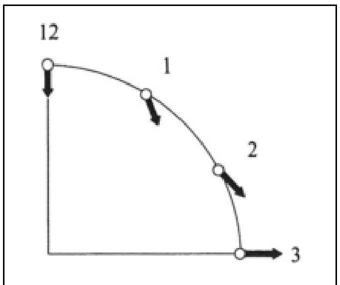


9 *Forze differenziali.*

Nella figura a fianco vedete uno schema di "come vanno" queste forze, nel caso in esame. Torna tutto? Beh, non dovrebbe.

Infatti, ci si aspetterebbe che nei punti "12" e "6", le frecce fossero leggermente inclinate verso la Luna (puntando al centro di massa), mentre qui sono perfettamente verticali.

La cosa si risolve (e si vede che "è giusto così") considerando che quei due punti sono (circa… non stiamo a sottilizzare) alla stessa distanza dalla Luna *del centro della Terra*: quindi, l'attrazione lunare è perfettamente bilanciata dalla forza centrifuga; ma *non essendo al centro della Terra*, dobbiamo tenere conto dell'attrazione gravitazionale terrestre, diretta verso il suo centro! E tutto torna. Soddisfatti, adesso? Ecco, il fatto che abbiano direzione e grandezza diverse è il motivo per cui vengono chiamate *differenziali*.



10 *Forze trattive.*

Per piccole che siano queste forze differenziali, hanno comunque un effetto sulle acque oceaniche, essendo queste libere di muoversi sulla superficie terrestre; minimo quanto si vuole, ma esistente: soprattutto considerato che, rispetto ai numeri che abbiamo dato precedentemente, oltre all'acqua alle 9 e alle 3 che cerca di scappare, abbiamo anche quella alle 12 e alle 6 che "la spinge" (non molto scientifica, come spiegazione, ma saremo più chiari nel prossimo paragrafo).

Per mantenere la similitudine con l'orologio, consideriamo le "altre ore", nel primo quadrante: le forze differenziali assumono suppergiù la forma che vedete nella figura qui a fianco: nei punti 1 e 2, la nostra forza differenziale ha una componente (detta *forza trattiva*) parallela (localmente) alla superficie della Terra (in 1 e 3, essendo lì la forza perpendicolare alla superficie terrestre, non abbiamo componenti trattive), e alle ore 10 e 11 *funziona esattamente nello stesso modo*, spingendo verso il punto 9! (no, non è un fattoriale).

Insomma, siamo riusciti a spiegare come mai le maree (alte e basse) sono *due* al giorno; non solo, ma abbiamo anche spiegato il motivo per il quale "ritardano".

Il discorso dovrebbe finire qui, ma qualcuno potrebbe far notare che ci siamo dimenticati un pezzo piuttosto grosso e appariscente: il Sole.

Se rifacciamo i calcoli con la massa e la distanza del Sole, ci accorgiamo che la sua forza attrattiva è quasi 180 volte quella lunare; quindi, ci si aspetterebbe un'influenza molto maggiore sulle maree; peccato che, nel dire questo, si sia perso di vista il secondo passaggio.

Se andate a rivedervi il disegno relativo alle forze differenziali, vi accorgete che le forze attrattive verso la Luna della figura (nelle posizioni "12" e "6") non sono parallele, ma convergono (nel centro della Luna); la stessa cosa faranno quelle relative al Sole, ma con una convergenza *molto più lontana*, e quindi saranno sostanzialmente parallele; anche alle "9", la forza "differenziale" (che in realtà non lo è più) è sostanzialmente uguale alla forza centrifuga, e quindi in ogni punto si raggiunge (quasi) l'equilibrio; i calcoli non sono complessi (basta la trigonometria piana, almeno se vi fermate alle orbite circolari), ma piuttosto lunghi e noiosi: ci limitiamo a dare il risultato finale secondo il quale, per confrontare due forze di marea, basta prendere la legge di gravitazione universale e usare, al posto del quadrato della distanza, il cubo[17]. Questo ci permette di confrontare le forze di marea generate dalla Luna e dal Sole, e il risultato finale è che il Sole conta circa *la metà* della Luna.

A questo punto, potreste accorgervi che sin qua abbiamo parlato sostanzialmente di maree sigiziali (quelle di Luna Piena e di Luna Nuova); almeno visivamente, però, considerato quanto appena detto, non dovreste avere problemi a capire cosa succede durante le quadrature.

Adesso, possiamo provare a spiegare tutti i "circa": ci sono una serie di fenomeni di cui non abbiamo tenuto conto:

1. Le orbite sono ellittiche, non circolari
    a. A gennaio la Terra è al perielio
    b. Ci sono dei momenti nei quali la Luna è più vicina (quando capita con la Luna Piena, i giornali le chiamano "superlune")
2. L'asse di rotazione della Terra è inclinato rispetto al suo asse di rivoluzione.
    a. L'asse di rivoluzione della Luna è inclinato rispetto a tutti e due i precedenti.

Per fortuna, ogni Anno Metonico (19 anni), Terra Luna e Sole tornano nello stesso posto, e la situazione si ripete: quindi sono tutti fenomeni *periodici*, passibili quindi di trasformazione in serie di Fourier[18]; ma questa (e gli attriti, visto che si tratta di acqua che si muove) ve li calcolate voi.

Se vi state chiedendo come mai vi si parli di tutto questo a vacanze finite: è stato per il bene dei vostri vicini di ombrellone.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[17] Per questo, nella citazione iniziale, l'astronave dei Burattinai si spaccava...

[18] Secondo ***Jean Souchay***, dovreste cavarvela con una trentina di termini, tra Luna e Sole: no, non abbiamo controllato i conti.