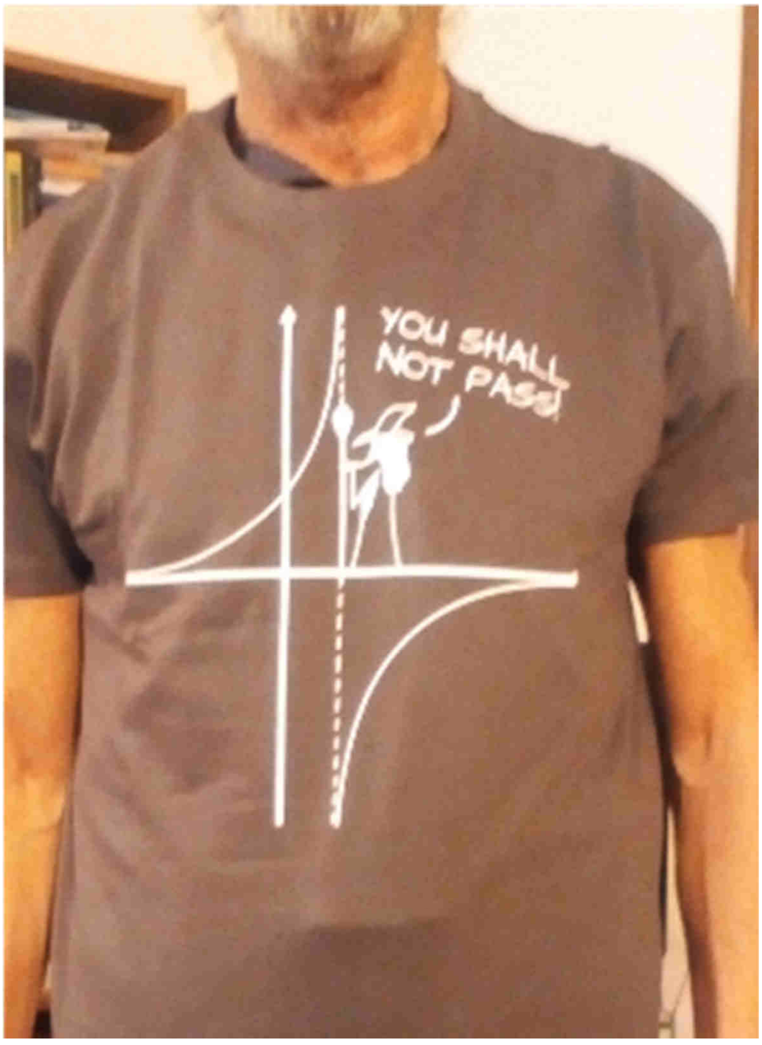
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 257 – Giugno 2020 – Anno Ventiduesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM255 ha diffuso 3'303 copie e il 14/06/2020 per Google eravamo in 52'000 pagine.

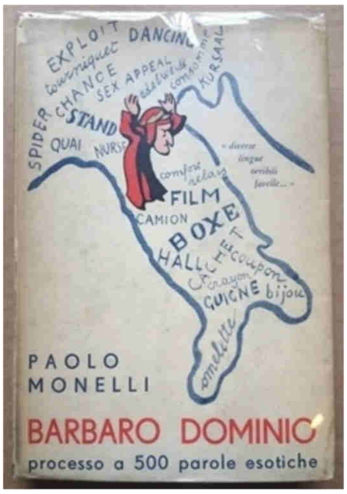
Il bello del compiere gli anni durante un lockdown è che va a finire che ricevete regali sino a maggio inoltrato...

1. Per la tangente

"La scienza araba ha solo riprodotto gli insegnamenti ricevuti dalla scienza greca."
(Pierre Duhem, "Le système du monde" 1913)

"Con l'aiuto di Dio e con la sua preziosa assistenza, io affermo che l'algebra è un'arte scientifica."
(Omar Khayyām, "Sulla dimostrazione dei problemi di Algebra", 1070)

Con buona pace del Duca di Mantova e di Verdi, esistono soggetti assai più mobili della donna[1]: le lingue che parliamo, ad esempio. Almeno in Occidente, è da più di un secolo che la lingua con maggiore influenza sulle altre è l'inglese, influenza che non sembra minimamente in crisi – anzi – in questi nostri tempi, e che cambia continuamente, serenamente, ineluttabilmente il nostro modo di esprimerci. È abbastanza naturale, comprensibile e a dirla tutta anche un po' romantico il tentativo di metter un freno all'eccesso di termini stranieri nei mezzi di comunicazione di massa, nelle informative istituzionali e anche (forse soprattutto) nel quotidiano esercizio colloquiale di tutti noi; ciò non di meno, è abbastanza evidente che si tratta di una battaglia perduta. La lingua è mobile quasi per definizione: ci si può appellare alla tradizione culturale, alla bellezza dell'italico eloquio, ma è impossibile impedire che il linguaggio non segua, marchiandolo, il proprio tempo. La lingua di Dante è indubbiamente più forte, bella, espressiva e coinvolgente di una qualunque email aziendale che comunica qualcosa a qualcuno usando più parole inglesi che italiane; ma non c'è ugualmente reale speranza di conservarne la purezza, come dimostra il fatto che leggere Dante e il suo linguaggio trecentesco è ormai cosa che riesce difficile, e la maggior parte degli studenti non riesce a coglierne più davvero il significato, nonostante l'aiuto disperato dei docenti e la pletora di note a piè di pagina. Per contro, il mittente della mail aziendale di cui sopra potrebbe forse riuscire ad esprimere le stesse informazioni eliminando – o almeno riducendo – i termini non italiani, ma lo farebbe a costo di spendere molto tempo e rischiando di ridurre il grado di comprensione. Alla fin fine, si può certo sostituire alla parola "computer" il termine "calcolatore", ma già trovare un'italica alternativa a "server"[2] non è questione risolvibile in una frazione di secondo.



1 *Vecchie battaglie in difesa dell'italiano*

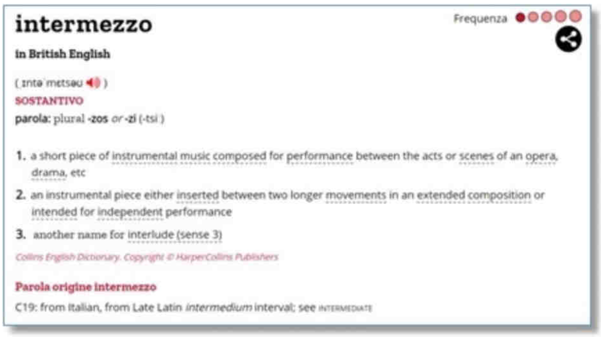
Così, la lingua cambia, e continuerà imperterrita a farlo. In qualche modo, è una sorta di arrogante eredità dei vincitori dei grandi conflitti della storia: non solo dei conflitti militari e guerreschi, forse, ma in gran parte proprio di quelli, inutile nasconderselo. Se la

[1] "*La donna è mobile – qual piuma al vento – muta d'accento – e di pensier*"; Rigoletto, Atto Terzo. Ad essere onesti, più che puntare il dito contro Giuseppe Verdi, che si è limitato a scrivere la musica, bisognerebbe chiamare in causa Francesco Maria Piave, autore del libretto dell'opera; ma in fondo anche lui è da assolvere, visto che mette quei versi in bocca al Duca soprattutto per disegnarne la grettezza e povertà d'animo.

[2] Come sanno tutti coloro che hanno qualche familiarità con l'informatica, il "server" è un particolare – e diffusissimo – tipo di computer. Tra i tecnici informatici, la parola "calcolatore" è virtualmente in disuso non solo perché ampiamente inglobata nell'equivalente inglese "computer", ma anche perché il termine stesso "computer" non è poi troppo usato, visto che è troppo generico. Si tratta solo di un esempio di gergo professionale, se ne trovano facilmente centinaia di altri: il punto è che la lingua si adatta costantemente all'uso che se ne fa e, nel bene e nel male, sono proprio i "gerghi" il motore principale del cambiamento (insieme alla moda e alla vanità di coloro che vogliono mostrarsi internazionalmente aggiornati).

ventennale guerra franco-inglese d'inizio Ottocento avesse visto trionfare Napoleone, probabilmente il francese terrebbe testa all'inglese ancora oggi, come *lingua franca*[3]; o, quanto meno, sarebbero assai di più gli americani in grado di parlarla, non fosse altro che per ragioni commerciali. L'Egitto dimenticò la lingua dei faraoni in favore del greco per la conquista di Alessandro Magno e per la successiva dinastia dei Tolomei inaugurata proprio da uno dei generali eredi del grande macedone; qualche secolo dopo, diventò la terra dove si parla l'arabo più forbito, a detta di molti, sull'esito dei trionfi militari dei seguaci di Maometto.

Lungi dal voler associare in maniera troppo stretta e causale la relazione tra l'aggressività degli eserciti e l'orgoglio nazionale linguistico, è comunque inevitabile ricordare che l'italica penisola, che è stata a lungo origine e sede di un impero spaventosamente potente, lascia ancora il segno su tutto il globo terracqueo, visto che molte lingue moderne hanno grossi debiti con il latino e – soprattutto – è proprio tramite l'alfabeto canonizzato in terra d'Italia lo strumento con cui si esprimono. E anche in seguito, tramontate le glorie di Roma, la lingua italiana non ha certo smesso di influenzare a lungo le consorelle europee; ma con il passare del tempo il bilancio è andato rapidamente in rosso, con le importazioni che superavano le esportazioni. C'è comunque un ambito importante in cui l'italiano resta la lingua principale, ed è quello della musica. Non c'è musicista professionista – sia esso rocker d'assalto o soprano di coloratura, e coreana o ucraina o keniota che sia la sua origine – che possa permettersi di non conoscere la differenza tra un "adagio" e un "allegretto". E il linguaggio della musica è un po' troppo importante per poter essere declassato a mero gergo tecnico professionale. E così può succedere, come sempre succede, che le parole possano proliferare, cambiare un po' di significato, muoversi da un ambito a un altro.



2 *Controcorrente: dall'italiano all'inglese.*

Non c'è dizionario inglese, ad esempio, che non riporti il termine "*intermezzo*", ormai considerato a tutti gli effetti lemma con dignità albionica; e gli orecchi italiani sono perfino un po' divertiti nell'ascoltare la pronuncia[4] che propongono per cotanta parola: suona più o meno "*intemètso*". Ad "intermezzo" vengono solitamente attribuiti almeno tre significati, ma tutti strettamente legati all'ambito musicale: nell'esempio riportato in figura, solo il terzo significato lascia un po' aperta la possibilità di qualche sviluppo extra-musicale, ma solo a patto di andare a cercare la connessione con il termine "*interlude*", a cui quel significato, appunto, rimanda. L'*interlude* inglese infatti, pur restando con le definizioni principali sempre legatissime alla musica, apre a significati di maggior ambito, quale il laconico ma indicativo "*anything that fills time between two events*", insomma qualunque cosa che faccia da riempitivo temporale tra due eventi (presumibilmente considerati di maggiore importanza).

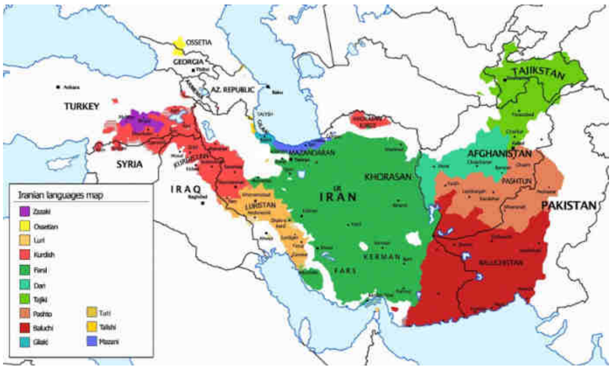
È così presumibile che gli storici di Oxford abbiano deciso di utilizzare in questo senso derivato l'espressione "*Iranian Intermezzo*" per denominare il periodo storico tra il nono e l'undicesimo secolo, in terra di Persia. Gli eventi che delimitano quest'interludio sono la fine del dominio arabo della Persia, che declinò con la salita al potere della dinastia

[3] Lo abbiamo scritto in corsivo perché anche "*lingua franca*" è un termine inglese: o meglio, è riconosciuto come tale dai dizionari di Albione, anche se, ovviamente, è un esempio (tra molti altri) di "debito" inglese nei confronti del latino.

[4] Parliamo, ovviamente, dei dizionari online, assai meno affascinanti di quelli di carta come presenza fisica, ma con l'indubbio vantaggio di poter far ascoltare, e non solo traslitterare, il suono delle parole ricercate. Quello usato per il lemma nella figura è il Collins (collinsdictionary.com/it/dizionario/inglese/intermezzo).

iraniana dei Tahiridi nell'anno 821, e l'inizio della dominazione dei Turchi Selgiuchidi nel 1090. I 270 anni in cui l'Iran recuperò (seppur temporaneamente) l'indipendenza dai domini stranieri sono denominati appunto "Intermezzo Iraniano" o, in forma ancora più evocativa, "Rinascimento Persiano".

L'aspetto forse più evidente della rinascita è proprio la rivendicazione dell'elemento più caratteristico e identificativo di una comunità: la lingua. La Persia è popolo antichissimo, come ricordano bene i primi storici greci che hanno raccontato in dettaglio come la culla d'Europa si fosse trovata subito a dover far i conti con il potentissimo vicino orientale: ed è proprio da quell'impero Achemenide che si scontrò con gli spartani di Leonida e con gli ateniesi di Temistocle che ha origine la prima forma del *farsi*, la lingua persiana, così chiamata perché originaria della regione sudoccidentale del Fars. I glottologi chiamano quella lingua "Persiano Antico", e la sua continuazione[5] "Persiano Medio", che era la lingua religiosa e letteraria che tornò in auge sotto l'impero Sasanide, che riprese il controllo della regione persiana dopo quasi sei secoli di tempeste greco-romane. Nel settimo secolo, una tempesta ancora più coinvolgente coglie il territorio dell'altopiano iranico, insieme a molte altre terre del mondo conosciuto: quella portata dagli arabi che combattono in nome dell'Islam. La lingua persiana torna in ombra, e tornerà nuovamente a farlo anche all'alba dell'1100, quando il popolo dominatore sarà quello dei Turchi: ma durante l'Intermezzo il rifiorire della lingua iranica sarà il primo sintomo della rinascita. E la lingua persiana ha un ruolo cruciale per tutto il continente euroasiatico, perché completa lo strano puzzle dato dalla geopolitica del pianeta: le prime civiltà, prima agricole e poi urbane, fanno fatica a svilupparsi negli altri continenti un po' perché raggiunti più tardi dalle migrazioni degli esseri umani, un po' per il clima e le difficoltà di comunicazione e commercio; ma l'Eurasia, verso il primo secolo, ha già civiltà evolute in tutta la fascia temperata, dal bacino mediterraneo dei Romani alla Cina degli Han. Spetta alla Persia il ruolo di mettere in connessione l'Oriente e l'Occidente, il Mediterraneo con i grandi imperi indiano e cinese: e il farsi è la lingua franca che ogni viaggiatore e commerciante deve padroneggiare, se vuole partecipare a questa grandiosa opera di connessione. E, in ultima analisi, anche la ragione per cui le lingue iraniche coprono ancora oggi una grandissima parte dei territori tra l'Indo e il Mediterraneo.



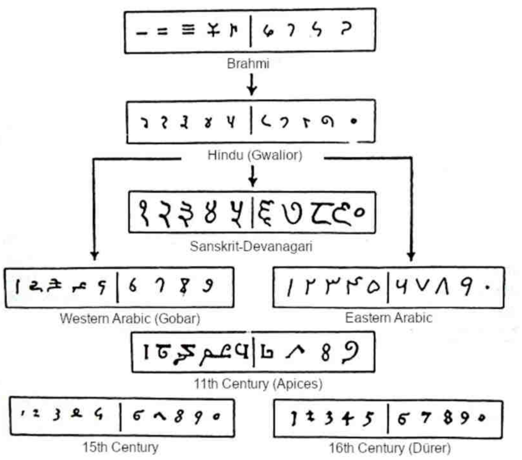
3 *Le lingue iraniche, oggi.*

Per questa ragione il recupero del farsi durante l'Intermezzo Iraniano è il primo sintomo di rinascita per la cultura dell'intera regione: primo, e forse anche il più significativo: ma certo non l'unico. È anche il periodo in cui tutta la cosiddetta "matematica araba" vive il suo massimo splendore.

Per molto tempo – e per molti versi ancora oggi – l'opinione più diffusa storicamente è che lo sviluppo delle scienze matematiche abbia subito una stagnazione profonda per più di un millennio: iniziata con lo spegnersi della creatività classica greca, la stasi sarebbe

[5] "Continuazione", in senso linguistico, non significa che la lingua si mantenga immutata, anzi. L'italiano e le altre lingue romanze sono considerate *continuazioni* del latino, pur avendo tutte una "dignità di lingua" indipendente. Questo ribadisce un po' l'inanità di voler "conservare intatta" una lingua; per contro, si può obiettare che la lingua ha comunque un valore simbolico e identitario fortissimo, ed è comprensibile che gli amanti dell'idea nazionale siano motivati a conservarla pura, e il più possibile priva di barbarismi. A margine: persino il termine "barbarismo" per indicare una parola straniera entrata nell'uso comune non sembra essere molto *politically correct*. Del resto, noi abbiamo appena usato l'espressione "politically correct" che, essendo inglese… oh, va bene: la piantiamo qui.

durata fino al sedicesimo secolo, quando gli europei avrebbero lentamente ripreso virtualmente la fiaccola della conoscenza. La prima citazione riportata in testa a quest'articolo, dell'ottocentesco storico della scienza Pierre Duhem, ben sintetizza il punto di vista europeo che per molto tempo ha tenuto banco anche negli ambienti accademici. Certo, si riconosceva alla cosiddetta "matematica musulmana" il merito di aver gettato le basi dell'algebra con l'opera di al-Khwārizmī, ma tutto sommato sembrava quasi una concessione lasciata con un po' di condiscendenza, quasi concessa con benigna tolleranza. Paradossalmente, la traccia più importante lasciata nella storia della matematica dagli islamici sembrava essere quella più immeritata, ovvero quelle che ancora oggi sono chiamate "cifre arabe", pur essendo chiaro da tempo che l'origine culturale della moderna notazione numerica è indiana, e non araba.



4 *Il sistema numerale indiano e i suoi discendenti*[6].

A voler essere intellettualmente corretti, l'introduzione dei concetti algebrici e quella della notazione posizionale decimale (anche se solo come vettori dall'India verso l'"Europa) sono innovazioni così potenti e fruttifere che già sarebbero dovute bastare a far riconoscere ai matematici d'Oriente un rispetto e una stima ben maggiore di quella che gli è stata concessa. In tempi più recenti, peraltro, molti studiosi sono concordi nel cambiare radicalmente punto di vista, giungendo alla conclusione che lo "stile" della matematica moderna è assai probabilmente più figlio della matematica islamica che dell'approccio degli antichi Greci. È un'affermazione che immancabilmente suona strana ad orecchie occidentali, ma basta liberarsi un po' dai consolidati bias della storia della matematica occidentale e dare uno sguardo ai testi di riferimento per rendersi conto che è un'ipotesi tutt'altro che priva di senso.

Si può concedere sia alla citata semplificazione attuata da Pierre Duhem, sia all'altra – forse ancora più brutale – scorciatoia che denomina come "araba" tutta la matematica sviluppata in quel territorio e in quel tempo, che effettivamente i primi vagiti dei contributi mediorientali e medievali alla matematica consistono nella traduzione (e quindi nel salvataggio) di testi classici greci: è sotto il califfato arabo Abbaside che al-Hajjaj traduce gli "*Elementi*" di Euclide. I califfi Harun al-Rashid e suo figlio al-Ma'mun dettero vita alla "Casa della Saggezza[7]", un'istituzione destinata alla traduzione delle opere antiche e alla ricerca scientifica. Oltre ad Euclide venero tradotte opere di Archimede, Apollonio, Diofanto, Pappo, Tolomeo e altri. È però opportuno precisare subito che il termine "traduzione" può facilmente trarre in inganno, per l'abitudine di associarla a una attività operata da persone esperte unicamente di linguaggi: non era così (e, di fatto, non lo è mai, neppure ai giorni nostri), perché la traduzione delle opere matematiche richiedeva non solo persone in grado di leggere e scrivere in greco, ma veri esperti nel campo matematico, che si dedicavano anche alla ricerca e allo sviluppo. E i contributi originali di questi studiosi per troppo tempo non sono stati valutati in maniera degna.

[6] Schema preso, al solito, da Wikipedia [Tobus / CC BY-SA (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0)]

[7] O forse, più correttamente, "Casa della Sapienza". Ancora più precisamente, evitando traduzioni, *Bayt al-Ḥikma*.

Abu Ja'far Muhammad ibn Mūsā al-Ḵwārizmī ha circa quarant'anni quando inizia l'Intermezzo Iraniano, ed è proprio nei vent'anni a cavallo del fatidico anno 820 che regala al mondo intero il "*Compendio del calcolo per reintegrazione e comparazione*"[8]; nasce l'algebra, che tratta gli oggetti matematici in maniera del tutto diversa da quanto hanno fatto i Greci. E se agli innovatori è giusto tributare tutti gli onori possibili, è anche opportuno rammentare che i pionieri non possono far altro che aprire la nuova strada, certo non svilupparne tutti i grandi temi che la loro innovazione renderà disponibile nel futuro. È anche possibile che lo stesso al-Khwārizmī non si rendesse conto della potenza della scienza che aveva portato alla luce: sarà compito dei suoi successori espanderla e svilupparla, fino al punto di trasformare la natura stessa della ricerca matematica.

5 *Frontespizio de "Al-kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa'l-muqābala". (Non siamo proprio sicurissimi, ma siamo fiduciosi).*

Al-Mahani (*Abu Abd Allah Muhammad ibn Isa Al-Mahani*) è il primo a capire che l'algebra è uno strumento potentissimo non solo per identificare delle incognite numeriche, ma anche per affrontare problemi geometrici; stabilisce la connessione cruciale tra algebra e geometria, scrivendo l'equazione corrispondente al problema classico della duplicazione del cubo. Abu Kamil (*Abu Kamil Shuja ibn Aslam ibn Muhammad ibn Shuja*) comprende la regola che sottende la moltiplicazione tra potenze con la medesima base; Al-Karaji (*Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn Al-Karaji*) chiude il cerchio aperto da al-Mahani: scopre che l'algebra può trattare i problemi geometrici senza per questo essere vincolata ad essa, rimpiazzando tutte le regole geometriche con regole aritmetiche. Se sapete trattare le potenze di un'incognita e i loro inversi, è merito suo. Più in generale, si può quasi immaginare che forse, proprio perché tutti tristemente abituati all'uso di così tante lettere per poter scrivere il loro stessi nomi, sono proprio i matematici islamici ad avere l'idea – semplice, ma cruciale – di cominciare ad usare dei simboli anziché le parole estese nelle enunciazioni matematiche.

E non solo algebra. È il tempo in cui si sviluppa al meglio la scienza dei triangoli, la trigonometria; il tempo in cui la Persia è il ricettacolo dei maggiori astronomi del pianeta, come al-Biruni[9], e continuerà ad esserlo anche dopo l'invasione mongola[10], convertendo alla scienza le menti migliori degli invasori, come Ulugh Beg[11].

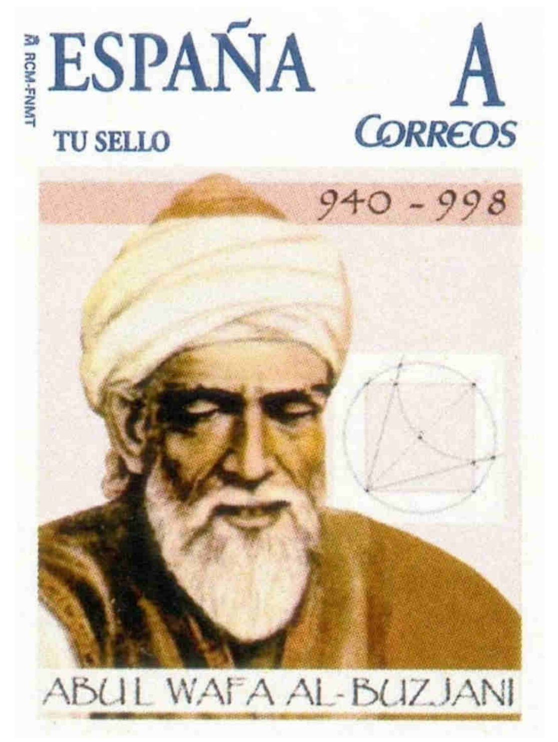
[8] Il titolo originale suona come "*Al-kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa'l-muqābala",* ed è quella magica quarta parola (*al-ğabr,* tenendo presente che la *"ğ"* ha pronuncia dolce e non gutturale) che battezza il termine "algebra".

[9] Uno dei (colpevolmente) pochi islamici a cui abbiamo già dedicato un "compleanno": è "Isole e Laghi", RM164, Settembre 2012.

[10] A rischio di risultare pedanti, ci corre l'obbligo di ricordare che non è un errore parlare di fine dell'Intermezzo Iraniano causato da invasione mongola, anche se poco sopra parliamo del dominio dei Turchi Selgiuchidi: gli è che i Turchi in questione sono appunto i discendenti delle popolazioni mongole che dall'Asia Centrale arrivarono fino in Anatolia, e oltre.

[11] Abbiamo parlato anche di lui, in "La tenda nera", RM206, Marzo 2016. Discendente com'era di Tamerlano, non lo si può certo definire puramente persiano, anche se indubbiamente islamico. Perfettamente persiano, musulmano e matematico era invece Omar Khayyām, sommo poeta del Rinascimento Persiano. A lui non abbiamo dedicato alcun compleanno, ma speriamo di esserci fatti perdonare mettendolo come protagonista del racconto di apertura nel nostro libro "Storie che contano", Codice Edizioni, 2017.

Celebrarli tutti è impossibile: un po' per il lor numero, un po' per la difficoltà di reperire la loro esatta data di nascita, in modo di ricordarli in maniera canonica, secondo lo stile di questi articoli. Ma di qualcuno di loro, il compleanno è noto con ragionevole certezza.



6 *Abu'l-Wafa, così come è stato celebrato in un francobollo delle poste spagnole.*

Abu'l-Wafa (Mohammad Abu'l-Wafa Al-Buzjani) nasce il 10 Giugno 940 a Buzjan (o Buzhgan), nella regione iraniana del Khorasan. Ai giorni nostri, Buzjan è a malapena un villaggio, ma ha un grande passato; quando Abu'l-Wafa vi nasce era la sede del governo della provincia imperiale di Jam. È forse il periodo più splendente dell'Intermezzo Iraniano: la dinastia regnante è quella dei Buwayhidi, e il califfo 'Adud ad-Dawlah tiene in gran conto la scienza. Ha intenzione di costruire un grande osservatorio astronomico nel giardino del suo palazzo reale a Bagdad.

Abu'l-Wafa è tra i sapienti che accorrono nella capitale dell'impero per arricchire di conoscenza la corte del califfo; l'ambiente è fecondo per la ricerca scientifica, e continuerà ad esserlo anche quando lo scettro del comando passerà da 'Adud a suo figlio Sharaf-ad-Dawlah.

Per molti versi, la biografia scientifica di Abu'l-Wafa è un esempio canonico, seppur ai massimi livelli, di quella che doveva essere la carriera di uno studioso islamico di quei tempi. È uno dei traduttori delle opere di Euclide e Archimede; oltre a tradurre, scriveva commentari con il palese intento di istruire coloro che avevano bisogno di strumenti matematici: la sua opera più famosa è il "Libro necessario agli scribi" (*Kitab fi ma yahtaj ilayh al-kuttab wa'l-ummal min 'ilm al-hisab*) che nell'introduzione destina agli amministratori pubblici e più in generale agli uomini d'affari. Proprio per questa ragione, secondo la maggior parte degli esperti, il suo testo evita di utilizzare le cifre arabe/indiane ripiegando sul simbolismo proprio della numerazione con le dita. È certo che egli padroneggiasse con maestria il calcolo con la notazione decimale, ma a quei tempi era uno strumento ancora riservato ai sapienti esperti, e poco diffuso tra il popolo. Era un periodo in cui esistevano di fatto due tipi di testi matematici, e quelli più divulgativi evitavano la notazione posizionale, ritenuta troppo oscura. I sette capitoli in cui il suo "*Libro*" è suddiviso ribadiscono l'intenzione didattica e divulgativa; parlano di frazioni, di operazioni aritmetiche come la moltiplicazione e divisione, della geometria necessaria al calcolo delle aree, per poi entrare in dettagli di utilizzo più pragmatico quali il calcolo delle tasse, il valore delle merci, le unità monetarie e persino delle concessioni e dei diritti dei commercianti. Curiosamente, è forse proprio per questo spirito pratico e divulgativo che Abu'l-Wafa è probabilmente il primo matematico ad aver scritto dei numeri negativi, usati ovviamente come rappresentativi dei debiti commerciali.

Un altro testo sembra seguire lo stesso spirito pragmatico, ma in realtà consente al matematico persiano di indagare questioni più strettamente teoriche e geometriche: è il suo "Libro sulle costruzione geometriche indispensabili all'artigiano" (*Fī mā yaḥtāğu al-ṣāni' min al-a'māl al-handasiyya*), in cui Abu'l cerca di gettare un ponte tra geometri e artigiani, al fine di rimediare ai difetti caratteristici delle due categorie, la mancanza di senso pratico da parte dei geometri e l'assenza di una base teorica per gli artigiani. Tutto si innesta, naturalmente, anche sull'importanza che la decorazione geometrica ha nella tradizione religiosa islamica, che vieta la rappresentazione figurativa di uomini e animali.

Nel testo si ritrovano costruzioni classiche, compresa una dimostrazione originale del Teorema di Pitagora, ma anche lavori originali, mai affrontati dai greci. L'influenza greca è comunque onnipresente, riconoscibile anche nella perseveranza del persiano nel voler affrontare tutte le costruzioni con riga e compasso, risolvendosi ad utilizzare metodi di approssimazione solo quando gli strumenti classici non risultano sufficienti allo scopo.

7 *Nella moschea di Isfahan è riprodotta, a scopi decorativi, la dissezione del quadrato di Abu'l-Wafa*[12].

Come matematico, era necessariamente anche astronomo, che a quei tempi la distinzione fra i due ruoli era virtualmente inesistente. E gli astronomi lavorano con gli angoli, e lavorare con gli angoli significa sviluppare, se non proprio inventare, la trigonometria. Abu'l-Wafa è il padre della "tangente", la funzione così familiare agli studenti dei licei; fu il primo ad usarla. Ma non trascurò certo le altre funzioni trigonometriche principali: trovò un metodo nuovo per il calcolo delle tavole dei seni; ai suoi tempi venivano usate quelle stilate da Tolomeo, che raggiungevano una precisione di tre cifre decimali; con il suo metodo, la precisione salì a otto decimali.

Morì non ancora sessantenne, due anni prima dello scoccare di quello che, secondo il calendario cristiano, è l'Anno Mille. Per il suo computo del tempo, era un anno caratterizzato da un numero molto inferiore; di certo, era anche un anno in cui la sua matematica non era inferiore a nessuna, in nessun angolo del mondo.

[12] Da "The heart is a Dust Board", di Jennifer Lorraine Nielsen.

2. Problemi

Due problemi con un'aria di similitudine che potrebbe anche ingannare...

2.1 Tempo di esami

Pare che gli esami di qualsiasi ordine e grado, in questa situazione di coronaviri di andata e di ritorno, non siano cosa semplice, dal punto di vista dell'organizzazione; le complicazioni implicite ci hanno riportato alla mente un vecchio problema piuttosto interessante, di quando gli esami si davano su tutto il programma e su tutte le materie (non vorremmo sbagliarci, ma l'ultima volta che ci è successa una cosa del genere è stato in terza media, più anni fa di quanto noi si abbia voglia di calcolare).

Abbiamo un esame composto di sette test (se preferite materie, non stiamo a concionare di scritto o orale, buttiamo tutto nello stesso calderone), nel quale, in base a oscuri metodi valutativi adottati dal corpo insegnante, non sono possibili *ex-aequo*; siccome si vuol dare un incentivo alla popolazione esaminanda, la commissione ha deciso di dare un premio ai migliori: nella fattispecie, riceveranno un premio i primi classificati in uno dei test o chi riesce ad essere tra i primi sei per quattro test. Per evitare che il solito secchione si porti a casa un intero TIR di premi, lasciando gli altri a bocca asciutta, si stabilisce che una persona possa ritirare al più un premio (tanto sono tutti uguali); fieri di questa pensata, i commissari delegano la prenotazione dei premi al "socio giovine", esperto di tecnologie[13]. Il quale, per prima cosa, verifica che all'esame sono iscritti *cento* studenti e, dopo essersi perso in alcuni conti, reinterpella il collegio docenti su, in base a queste bislacche regole, *quanti possano essere, al massimo, i premi distribuiti.* Come ciascuno di voi si aspetta, ogni docente dà un risultato diverso (tranne quello di Matematica, che ne dà due: sì, diversi).

Risolvete l'ambascia del giovine! Quanti premi potranno essere distribuiti, al massimo?

...tanto lo sappiamo benissimo che, dati i tempi con i quali facciamo uscire RM, ben che vada tutto questo potrà applicarsi agli esami di riparazione...

2.2 ...ma si vota o non si vota?

Per chiudere le scuole (causa operazioni elettorali), prima bisognerebbe aprirle (come manovra di "Fase N" postcoronavirus), quindi il dubbio espresso dal titolo è legittimo: per mantenerci comunque in forma e pronti a questo sano esercizio di democrazia, questa volta affrontiamo il conteggio dei voti, in un sistema (quello che ammette preferenze multiple) di moda quando Rudy era giovane e di cui ancora oggi sente un po' la mancanza.

Nella nostra elezione, abbiamo N votanti, che devono eleggere k candidati esprimendo m preferenze, con $m \leq k < N$, visto che volete fare i formali. Ogni votante è anch'esso candidato e (di questo ne parliamo dopo: "seguirà dibattito", come si diceva nei cineforum) hanno tutti un'età diversa uno dall'altro; i candidati vengono ordinati per numero di voti ricevuti, e i primi k vengono eletti: nel caso ci si ritrovi in una situazione di parità a fondo classifica degli eletti, passa (o passano: dipende da quanti posti avete) il più vecchio (o i più vecchi).

Quello che ci stiamo chiedendo è quanti voti sia necessario ricevere per avere la certezza di essere eletti. Chi ci ha proposto il problema ci ha anche dato il consiglio di fare attenzione a non fossilizzarsi sui casi "estremi", ma cercare di fornire una risposta generale: trattandosi di un consiglio, siete liberi di ignorarlo.

E fin qui il problema, ma dicevamo che avremmo aperto un dibattito. Ammetterete che la regola del "più anziano" non è esattamente un preclaro esempio di democrazia e uguaglianza dei diritti, ma Rudy ha la ragionevole certezza che, almeno dalle parti degli

[13] Non ci ricordiamo se ve l'abbiamo già raccontata: io e Doc abbiamo (tempo fa) tenuto una conferenza presso un'augusta associazione con magnifica sede; del Wi-Fi se ne occupava il "socio giovane", che aveva settantun anni. Messo alle strette (il Wi-Fi funzionava benissimo), ha confessato che si faceva aiutare dal nipote... Ecco, una situazione del genere.

anni Sessanta (millenovecentosessanta: su, siate seri), quantomeno per le elezioni della Camera dei Deputati (nelle quali era possibile esprimere tre preferenze), nell'estremamente improbabile caso di perfetta uguaglianza in una posizione critica "eletto/non eletto", fosse utilizzato appunto un metodo basato sull'età. Interpellato il suo assistente legale preferito durante una pausa caffè (in tempi di home-working non è difficile, trattandosi di sua moglie che lavora nell'ufficio a fianco, ex stanza dei VAdLdRM[14]), questa (previe alcune considerazioni di probabile incostituzionalità del metodo dell'età) non ha saputo dire che metodo venga utilizzato in questi casi. Giusto per il dibattito, ignoriamo pure metodo d'Hondt, conto dei resti, presenze in diversi collegi e amenità di questo genere: collegio uninominale, ne passa uno, due candidati che non sono candidati altrove prendono esattamente lo stesso numero di voti (e sono quelli che ne prendono di più). Come si risolve il caso, nell'attuale ordinamento?

3. Bungee Jumpers

Trovate tutti gli n interi positivi per cui

$$\frac{10^n}{n^3+n^2+n+1}$$

è un intero..

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Giugno!

4.1 [256]

4.1.1 Riaprono (almeno) le piscine?

Cominciamo con un problema combinatorio, nel senso che bisogna combinare un certo numero di combinazioni coronarie:

> *Partendo dal principio che si possono utilizzare solo tre corsie della piscina per ogni gara e la finale comprende tre finalisti, occorre organizzare le gare eliminatorie, in modo che ogni partecipante faccia lo stesso numero di gare, e che due qualsiasi nuotatori non competano mai in più di due gare e con sempre tre e solo tre atleti in gara. Come funziona con* 5, 10, *o n partecipanti?*

Patiamo subito con la soluzione proposta da ***Alberto R.***:

> Se G è il numero delle gare di eliminatoria, a ciascuna delle quali partecipano 3 nuotatori, affinché ogni atleta scenda in acqua lo stesso numero di volte occorre che il numero A degli atleti partecipanti sia un divisore di $3G$.
>
> Se A=10 deve essere, come minimo, G=10 e la turnazione delle gare può essere ottenuta con il metodo della "terna mobile":

1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	6
5	6	7
6	7	8
7	8	9
8	9	10

[14] Siccome sappiamo che la curiosità di ognuno di voi è superata solo dalla curiosità di ogni altro di voi, non vi teniamo in ambasce: hanno passato l'intero lockdown altrove.

9	10	1
10	1	2

Come si vede le 3 corsie sono sempre tutte occupate, ogni atleta partecipa a 3 gare e incontra al massimo 2 volte lo stesso avversario.

Osservo però che le 10 gare sono state elencate nell'ordine che rende evidente il meccanismo di formazione delle terne mobili, ma questo non è l'ordine temporale più opportuno perché costringe agli atleti a gare consecutive senza il tempo di riprendere fiato. Molto meglio far gareggiare i terzetti nel seguente ordine: 1°, 4°, 7°, 10°, 3°, 6°, 9°, 2°, 5°, 8° che si ottiene da quello dato, reso circolare, e riordinato con il criterio "prendo uno, salto due, prendo uno, salto due…"

Se invece A è divisibile per 3 il numero di gare occorrenti si riduce. Ad esempio con A = 12 bastano 4 gare, banalmente:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

Le 3 corsie sono sempre tutte occupate, ogni atleta partecipa a 1 sola gara e incontra al massimo 1 volta lo stesso avversario.

Ci sembra particolarmente opportuno il commento di ***Tommaso***:

Un saluto alla redazione, che dopo grandi mangiate di torte ha deciso giustamente di dedicarsi all'attività sportiva...

Provo la soluzione per un n generico, senza passare da 5 e 10.

Scartiamo il caso n multiplo di 3, che è banale. Altrimenti: sia b il numero totale di batterie da disputare, e g il numero di partecipazioni a batterie di ognuno degli n partecipanti:

$$b*3=g*n$$

Poiché n è primo rispetto a 3, g deve essere multiplo di 3, e siccome non vogliamo affaticare eccessivamente i partecipanti facendo disputare troppe batterie, g sarà proprio uguale a 3 (e conseguentemente il numero di batterie uguale al numero dei partecipanti).

Come possiamo far disputare le batterie, evitando che 2 contendenti si incontrino 3 volte? Sia b il numero della batteria da disputare, i 3 concorrenti che prenderanno parte saranno il b, $(b+1) \bmod n$, $(b+2) \bmod n$. In questo modo ciascun concorrente disputerà 3 batterie consecutive, incontrando due avversari una sola volta, e due avversari per due volte.

Il problema arduo da risolvere in realtà è: chi passa le eliminatorie? Non è possibile decidere in base ai posizionamenti. Ogni concorrente potrebbe arrivare primo, secondo e terzo nelle 3 batterie che gli competono, determinando una situazione di parità assoluta.

Fortunatamente esiste il cronometro, e quindi saranno qualificati alla finale i 3 migliori tempi :-)

Ovviamente lo sapete, che i nostri problemi sono appositamente mal posti per evitare che ne escano soluzioni coerenti e al tempo stesso permettere a voi tutti di inventare nuovi problemi. Proprio per questo ogni approccio in cui ci vengono fatti notare gli elementi mancanti ci piacciono da morire. ***Valter*** ci scrive:

Indico con "g" il numero di gare e con "p" a quante partecipa ogni allievo; si ha che: $3*g = p*n$.

Noto che $p/2$ mostra anche quante volte mediamente ogni partecipante compete con i suoi avversari.

Ho quindi che: $p/2 \leq 2$, altrimenti almeno un nuotatore compete più di due volte con un avversario.

Da ciò, ed essendo p un intero, so che: per $n \equiv 0$ mod3 p vale 1 oppure 2 altrimenti deve valere 3.

Fornisco ora una strategia per organizzare le eliminatorie, che possa valere per qualsiasi $n > 2$:

- per $n \equiv 0$ mod3 e $p = 1$ formo con i partecipanti $n/3$ gruppi da tre per altrettante eliminatorie

- negli altri casi numero da 1 a n i partecipanti facendoli gareggiare alternati di 1 per n gare.

Elenco come organizzerei le gare con numero crescente di partecipanti per provare a farmi capire:

- con n=3 e p=1 1 gara: 1-2-3

- con n=4 e p=3 4 gare: 1-2-3, 2-3-4, 3-4-1, 4-1-2

- con n=5 e p=3 5 gare: 1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, 4-5-1, 5-1-2

- con n=8 e p=3 8 gare: 1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, 4-5-6, 5-6-7, 6-7-8, 7-8-1, 8-1-2

- con n=9 e p=1 3 gare: 1-2-3, 4-5-6, 7-8-9

- con n=9 e p=2 6 gare: 1-2-3, 4-5-6, 7-8-9 e p.e. 2-3-4, 5-6-7, 8-9-1.

- con n=10 e p=3 10 gare: 1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, 4-5-6, 5-6-7, 6-7-8, 7-8-9, 8-9-0, 9-0-1, 0-1-2.

Tento (forse) di motivare il discorso precedente riguardo $p/2$, servendomi dell'esempio con n=4:

- ogni partecipante gareggia due volte con due dei suoi avversari e una volta con gli altri due

- mediamente, quindi, ciascuno gareggia con (2+2+1+1)/4 avversari = 6/4, che mi dà p=(6/4)*2=3

- sapendo che 3*g=p*n e che n=4 ≡ 1 mod3, ho che p è ≡ 0 mod3 perché possa valere l'uguaglianza

- solo p=3 con g=n è ammesso altrimenti qualche allievo gareggia più di tre volte con lo stesso.

Ci siamo, abbiamo un buon metodo generale, vediamo adesso come ***trentatre*** mette tutto in ordine formalmente:

Suppongo che le gare *eliminatorie* servano a stabilire i tempi per classificare gli atleti e solo alla fine vengano *eliminati* i peggiori lasciandone tre per la finale.

Indico con N il numero di atleti, G il numero totale di gare, S il numero di gare disputate da ogni atleta.

In fig. 1 le soluzioni per N uguale a 5, 6, 10 in forma di tabella. Ogni riga rappresenta una gara, ogni colonna uno degli atleti e ogni **1** indica che quell'atleta ha partecipato a quella gara.

N = 5

G\N	1	2	3	4	5
1	1	1			1
2	1	1	1		
3		1	1	1	
4			1	1	1
5	1			1	1

N = 6

G\N	1	2	3	4	5	6
1	1	1				1
2	1	1	1			
3		1	1	1		
4			1	1	1	
5				1	1	1
6	1				1	1

...

N = 10

G\N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1								1
2	1	1	1							
3		1	1	1						
4			1	1	1					
5				1	1	1				
6					1	1	1			
7						1	1	1		
8							1	1	1	
9								1	1	1
10	1								1	1

1

In ogni tabella, cioè per ogni N, sono rispettate le condizioni del problema

a) in ogni riga ci sono 3 caselle con **1** – cioè in ogni gara 3 atleti

b) per ogni colonna lo stesso numero di **1** – cioè ogni atleta gareggia lo stesso numero S di volte di ogni altro

c) ogni coppia di atleti gareggia insieme al massimo 2 volte – cioè in due colonne qualsiasi ci sono al massimo due **1** nella stessa riga.

La struttura delle tabelle è evidente ed è la stessa per ogni N maggiore di 4.

Vista la premessa, il risultato non cambia eseguendo le gare in altro ordine o numerando diversamente gli atleti, cioè <u>tutte le proprietà continuano a valere per qualsiasi permutazione delle righe o delle colonne</u>. Inversamente ogni distribuzione degli **1** che rispetta le condizioni si può trasformare nello schema standard di figura, particolarmente semplice, in cui la verifica delle condizioni è immediata.

Dato N, il numero totale di **1** nella tabella è $S \cdot N = 3G$.

Vanno distinti due casi

I. N non è multiplo di 3 e quindi deve esserlo S, cioè $S = 3m$, $G = m \cdot N$

- se m=1, G=N e le soluzioni sono quelle standard in fig. 1

- queste sono le <u>uniche soluzioni possibili</u> perché se m>1 il gruppo di G righe si ripete m volte e non vale più la condizione **c**)

- le tabelle sono di fatto matrici di incidenza (senza gli **0**) quadrate e simmetriche.

II. N è multiplo di 3 cioè $N = 3n$ e $G = nS$

- le <u>uniche soluzioni possibili</u> sono S = 1, 2, 3, G = n, $2n$, $3n$; infatti

- S = 1, 2 danno due soluzioni ridotte, che rispettano le condizioni

- la prima, con una sola gara per ogni atleta, è sufficiente per stabilire i tre migliori per la finale, la struttura della seconda richiama quella standard

- in fig. 2 queste soluzioni per N = 6

N = 6

G\N	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1			
2				1	1	1

2

N = 6

G\N	1	2	3	4	5	6
1	1	1				1
2		1	1	1		
3			1	1	1	
4	1				1	1

- S = 3, $G = 3n = N$ e si torna al caso **I**.

- S>3 si aggiungono n righe e come nel caso **I**. non vale più **c**).

Il procedimento si può applicare a una piscina con un numero di vasche diverso da 3, salvo modificare la condizione **c**), che è imposta solo per limitare il numero di gare a $G \leq N$.

Prima di chiudere con questo problema, vediamo ancora la soluzione di ***Silvano***:

Considero i nuotatori come numeri da 1 a N.

Se prendiamo 3 numeri consecutivi (1, 2, 3) e poi shiftiamo ogni volta di 1, alla fine, ricominciando dall'inizio modello pacman siamo sicuri che:

1. Ogni nuotatore non incontrerà qualcuno per più di 2 volte, essendo la finestra mobile di 3 elementi, essa potrà selezionare una coppia solo 2 volte.
2. Ogni nuotatore farà esattamente lo stesso numero di gare essendo la finestra mobile ciclica

Pertanto con 5 nuotatori avremmo 5 batterie:

1, 2, 3 – 2, 3, 4 – 3, 4, 5 – 4, 5, 1 – 5, 1, 2

Con 10 nuotatori ovviamente:

1, 2, 3   2, 3, 4   3, 4, 5   4, 5, 6   5, 6, 7   6, 7, 8   7, 8, 9   8, 9, 10 9, 10, 1 10, 1, 2

In generale con n nuotatori basteranno n batterie:

1, 2, 3   2, 3, 4   …. N, 1, 2

Per le gare con nuotatori multipli delle corsie (3, 6, 9, …, 3*n*) ovviamente esiste una soluzione migliore con ancor minore numero di gare, baste infatti divere i nuotatori in gruppi da 3 persone, infatti tra i requisiti del non c'è l'obbligo di fare 2 gare ognuno ma AL MASSIMO 2 gare.

Pertanto con 9 nuotatori una soluzione banale sarebbe:

1, 2, 3 4, 5, 6 7, 8, 9

Benissimo, ma adesso passiamo al secondo problema che c'è ancora tanto da pubblicare.

4.1.2 Giusto per passare il tempo

Il lockdown sta riportando il Capo alle sue vecchie passioni di giochi con dadi e monetine:

Il primo gioco consiste nel puntare (contro il banco) due centesimi; questo vi dà il diritto di lanciare due dadi a sei facce per i quali vincerete la differenza in centesimi tra i valori dei due dadi, tranne nel caso vi esca un "doppio sei" nel qual caso vincete un lancio gratuito. Secondo voi, il gioco è onesto? E, se no, quanto dovreste puntare per renderlo tale?

Per il secondo gioco, viene lanciata ripetutamente una moneta, e se compare per prima la sequenza Croce-Croce-Testa vincete due centesimi, mentre se compare prima la sequenza Testa-Croce-Croce ne perdete uno. Questo, secondo voi, è onesto?

Come sapete chi compone queste soluzioni non è appassionata di questo genere, quindi niente ciance e direttamente la soluzione del primo che si è lanciato nella mischia, ***Alberto R.***:

Gioco coi dadi.

Le 36 possibili – ed equiprobabili – differenze tra i risultati di due dadi sommano 70.

"nel caso vi esca un doppio sei vincete un lancio gratuito" significa semplicemente che il doppio sei non va considerato e si lancia di nuovo. Ciò non altera la somma 70, ma riduce da 36 a 35 il numero dei casi possibili. E siccome 70 diviso 35 fa 2 il gioco è equo.

Gioco con le monete

CCT precede TCC 1 volta su 4 e avviene il contrario 3 volte su 4

Quindi, per rendere equo il gioco, occorre che chi punta su CCT riceva un premio pari a tre volte la posta.

Dimostrazione: Le successioni che danno la vittoria a CCT sono solo le seguenti, la cui probabilità cumulata vale 1/4

CCT prob 2^{-3}

CCCT prob 2^{-4}

CCCCT prob 2^{-5}

CCCCCT prob 2^{-6}

etc, etc…

Infatti non è possibile sostituire con T una qualunque delle C precedenti la terzultima uscita perché ciò genererebbe un TCC con interruzione del gioco prima che si raggiunga il desiderato CCT.

Per ulteriori informazioni googlare "paradosso di Penney".

Niente Google con la probabilità ed i paradossi, per quanto mi riguarda paradosso e probabilità vanno sempre accompagnati. Ma vediamo che cosa ci scrive ***Valter***:

Primo gioco (ma ho qualche dubbio):

- se si escludesse il "doppio sei", le combinazioni in tutto sarebbero 35 con totale vincite = 70

- il gioco, con questa ipotetica esclusione, dovrebbe, a mio giudizio, essere considerato onesto

- assumo che valga, in cascata, la condizione del "doppio sei" anche sui possibili lanci gratuiti

- si riduce, con potenze successive, e "a crescere", di un 1/36, il caso speciale di "doppio sei"

- tende a zero, quindi, il verificarsi di tale caso con vincita media, per altri eventi, di due ¢

- dato ciò, se non ho commesso qualche errore nel mio ragionamento, direi che il gioco è onesto.

Secondo gioco:

- se con i primi due lanci si ha C-C, per quanti C possano uscire dopo alla fine si avrà C-C-T

- negli altri 3 casi: C-T/T-C/T-T, ad un certo punto la sequenza vincente dovrà iniziare con T

- affinché il gioco sia onesto, quindi, si deve guadagnare il triplo da C-C-T rispetto a T-C-C.

Come mi capita a volte, per mia distrazione cronica, interpreto diversamente da quando scritto. Per qualche motivo, ho pensato che le due sequenze non fossero C-C-T e T-C-C ma C-C-T e C-T-T. Mi ero detto: dopo l'uscita del secondo C in serie per sequenza vincente basta attendere il T. Vince quindi C-C-T, dopo il primo C sia con C-C sia con C-T mentre per C-T-T può essere solo T-T.

Detta in altro modo: quando esce un C, sia che risulti seguito C-C o da C-T, vince sempre C-C-T. Affinché possa vincere C-T-T, sempre dopo l'uscita di una C, può seguire soltanto la coppia T-T.

Siccome non ero per nulla sicuro, mi sono scritto un programmino di conferma che simula il gioco. L'ho eseguito ripetutamente lanciando la moneta 12.800.000 volte, con sempre il risultato atteso. Se non ho commesso errori nel codice, una cosa interessante è la lunghezza media della sequenza.

Vincendo con C-C-T tale lunghezza mi risulta di circa 11/3 mentre nel caso di C-T-T è circa 8/3. Sarebbe interessante capirne il perché ma è troppo per me; forse qualche solutore più scaltro …. A tal riguardo trovo intriganti due cose:

- dove la probabilità di vincere è doppia, cioè con C-C-T, la sequenza media è più lunga: 11/3

- il valore medio multiplo di 1/3 e con differenza fra i due: 11/3 – 8/3 = 3/3 (c'è 3 ovunque).

Come vedete le nostre prime due soluzioni danno risultati coerenti, incredibile. Vediamo il prossimo, ***Tommaso***:

Per il primo gioco,queste sono le diverse possibilità di vincita, tenendo conto delle 36 possibili combinazioni equiprobabili risultanti dal lancio di 2 dadi:

differenza 0, 5 combinazioni su 36

differenza 1, 10 combinazioni su 36

differenza 2, 8 combinazioni

differenza 3, 6 combinazioni

differenza 4, 4 combinazioni

differenza 5, 2 combinazioni

Sia x la vincita media, avremo allora:

$$x=(5*0+10*1+8*2+6*3+4*4+2*5+1*x)/36$$

L'ultimo termine tiene conto di una combinazione su 36 che, dando diritto ad un ritiro, produrrà a sua volta una vincita media x. Risolvendo, otteniamo x=2, ovvero la vincita media è uguale al costo di iscrizione, rendendo il gioco equilibrato tra banco e scommettitore.

Secondo gioco

Osservazione preliminare: se esce Testa dopo un numero k di lanci, l'obiettivo di ottenere due Croci, con ulteriori i lanci, è esattamente equivalente all'obiettivo di ottenere 2 croci con i lanci quando ancora non è stato effettuato nessun tiro (questo perché una volta ottenuta testa, per qualsiasi risultato dei lanci successivi, potremo solo avanzare nella sequenza o ritornare allo stato attuale, ma non alla situazione iniziale in cui non era ancora stato effettuato nessun lancio).Ovvero:

$$p(TCC, \text{dopo } k \text{ lanci} \mid T, \text{dopo } i \text{ lanci}) = p(CC, \text{dopo } k\text{-}i \text{ lanci})$$

Equivalentemente, se sono state ottenute due Croci dopo un numero k di lanci, l'obiettivo di ottenere una testa, con ulteriori i lanci, è esattamente equivalente all'obiettivo di ottenere una testa con i lanci quando ancora non è stato effettuato nessun tiro (questo perché una volta ottenute due croci, i successivi lanci potranno produrre una testa, completando la sequenza, od una croce, che mantiene invariata la situazione). Contraendo la notazione:

$$p(CCT, k \mid CC, i) = p(T, k\text{-}i)$$

Pertanto

$$p(TCC, k) = \sum p(TCC, k \mid T, i) * p(T, i) = \sum p(CC, k\text{-}i) * p(T, i)$$

e analogamente

$$p(CCT, k) = \sum p(CCT, k \mid CC, i) * p(CC, i) = \sum p(T, k\text{-}i) * p(CC, i)$$

Quindi per commutatività $p(TCC, k) = p(CCT, k)$, qualunque sia k

In definitiva: affinché il gioco sia onesto, la somma vinta quando compare CCT deve coincidere con la somma persa quando compare TTC.

Dovremmo essere abbastanza sicuri almeno della risposta ai due quesiti, ma vediamo adesso la soluzione di ***Franco57***:

Primo gioco

Nel primo gioco ci sono 10 casi nei quali la coppia di dadi dà differenza 1 (1-2,2-3,3-4,4-5,5-6 e gli inversi 2-1,3-2,4-3,5-4,6-5), 8 casi nei quali dà differenza 2 (1-3,2-4,3-5,4-6 e gli inversi), 6 casi ne quali dà differenza 3 (1-4,2-5,3-6 e gli inversi), 4 casi nei la differenza è 4 (1-5,2-6 e gli inversi) e 2 casi a differenza 5 (1-6 e 6-1). Rimangono solo i 6 casi nei quali i due dadi danno lo stesso punteggio, di cui uno di questi (6-6) dà diritto ad un altro lancio, gli altri 5 danno 0. Abbiamo catalogato tutti i 36 equiprobabili risultati di un lancio, perciò si può calcolare la vincita media V con la semplice equazione di 1° grado:

$$V = \frac{10}{36} \cdot 1 + \frac{8}{36} \cdot 2 + \frac{6}{36} \cdot 3 + \frac{4}{36} \cdot 4 + \frac{2}{36} \cdot 5 + \frac{5}{36} \cdot 0 + \frac{1}{36} \cdot V$$

che ci dà V=2, proprio quanto chiede il banco, perciò il gioco è equo.

Estensione del primo gioco

Volendo generalizzare ad una coppia di dadi a n facce dove si vince un lancio gratuito se escono entrambi n, abbiamo che la differenza di punteggio tra i dadi in media vale

$$D = \sum_{d=1}^{n-1} d \cdot \frac{2 \cdot (n-d)}{n^2}$$

essendoci $2(n-d)$ casi a differenza $d \geq 1$ sui possibili n^2 risultati.

Usando la formuletta

$$\sum_{d=1}^{n-1} d \cdot (n-d) = \frac{n \cdot (n^2-1)}{6},$$

ricavabile facilmente dalle più note

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$$

oppure dimostrabile per induzione, abbiamo

$$D = \frac{2}{n^2}\frac{n\cdot(n^2-1)}{6} = \frac{n^2-1}{3\cdot n}$$

e quindi per il punteggio medio V vale l'equazione $V = \frac{n^2-1}{3\cdot n} + \frac{1}{n^2}\cdot V$ che fornisce il risultato *pulito* $V=n/3$ e ci dice che ad esempio con due dadi a dodecaedro regolare occorre puntare 4 centesimi contro il banco e non più 2 per avere un gioco equo.

Secondo gioco

Nel secondo gioco la sequenza CCT (Croce-Croce-Testa) compare prima della TCC, in media, in un quarto dei casi, perciò in un gioco onesto dovrebbe essere pagata tre centesimi e non due, se TCC ne fa perdere 1, a conferma che la vincita media ¼ · 3 – ¾· 1 sarebbe nulla.

Il modo più semplice per calcolare queste probabilità è osservare che la sequenza di lanci può cominciare solo con una di queste tre sequenze:

- T a probabilità ½ che conduce prima a TCC, infatti la prima sequenza di CC che genererà dovrà essere preceduta da T ma la sequenza CCT non si sarà ancora potuta formare;

- CT a probabilità ¼ che per le stesse ragioni del caso precedente conduce anch'essa prima a TCC;

- CC a probabilità ¼ che invece conduce sempre prima a CCT, appena la sequenza dei C termina.

Estensione del secondo gioco

Esplorando altri casi ho trovato che, di norma, vedere quanto è probabile che una data sequenza si formi prima di un'altra è più laborioso.

Ho pensato ad un metodo generale per questa classe di problemi (immagino un sorrisino di compatimento di Markov, se potesse vederlo).

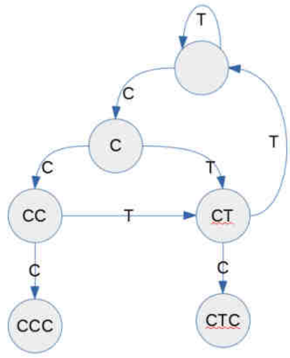
Il contesto è il seguente. Effettuiamo una serie di estrazioni (ad esempio lanci consecutivi di moneta o lanci di dadi). L'esito di ogni estrazione può essere un insieme finito di possibili valori (ad esempio Testa o Croce) ognuno dei quali, in ogni estrazione, ha sempre la stessa probabilità (ad esempio 50% Testa e 50% Croce, ma potrebbe essere una moneta truccata che dà 60% Testa e 40% Croce). Fissate un certo numero di sequenze che chiamo sequenze finali (ad esempio le due sequenze CCC e CTT) vogliamo calcolare per ognuna di esse la probabilità che occorra prima delle altre in una serie di estrazioni consecutive.

Rappresento tutte le possibili sequenze di estrazione che ancora non abbiano generato le sequenze finali come stringhe nell'alfabeto dei possibili esiti (ad esempio C e T).

Se ci si chiede quando due sequenze di estrazione, quindi due stringhe, sono sicuramente equivalenti per il calcolo che vogliamo fare, scopriamo che ricadono in un numero finito di classi di equivalenza, che identifico come stati, e che corrispondono alle possibili sotto-stringhe a partire dall'inizio delle sequenze (o stringhe) da confrontare (ad esempio per confrontare CCC con CTT, ho come stati la stringa vuota e poi C,CC,CCC,CT,CTT).

Ad ogni sequenza di estrazioni x, vista come stringa nell'alfabeto, assegno lo stato s pari alla più lunga stringa tra quelle che definiscono gli stati che sia contenuta in coda alla mia stringa (ad esempio CCT avrà stato CT). La presenza della stringa vuota vuota negli stati garantisce che uno stato è sempre assegnato. Che sia univoco è ovvio. Dovrebbe anche essere evidente che se alla mia stringa x accodo un elemento e dell'alfabeto ottengo lo stato che avrei ottenuto partendo da s invece che da x, cioè *stato(xe)=stato(se)*. Inoltre il passaggio dallo *stato(s)* allo *stato(se)* a fronte di una estrazione ha naturalmente la probabilità dell'evento e.

Tutto ciò ci consente di definire un diagramma di transizione di stato con le probabilità di passaggio tra uno stato e l'altro, altrimenti detto catena di Markov, come nella figura a fianco, che rappresenta l'esempio portato avanti, dove nella freccia ho indicato l'evento e non la probabilità che comunque è del 50% in tutti i casi.



Indicando con P_s la probabilità che partendo dallo stato s si formi per prima una determinata sequenza (nell'esempio CCC prima di CTT) ricavo un sistema di equazioni lineare con le condizioni iniziali P_s = 1 per lo stato finale di cui voglio calcolare la probabilità che esca per primo e P_s = 0per gli altri stati finali s. Questi sistemi sono a matrice sparsa e si risolvono agevolmente per sostituzione.

Nell'esempio le condizioni iniziali sono quindi P_{CCC} = 1e P_{CTT} = 0 e il sistema di equazioni lineari è dunque:

$$P=\frac{1}{2}\cdot P_C+\frac{1}{2}\cdot P \quad , \quad P_C=\frac{1}{2}\cdot P_{CC}+\frac{1}{2}\cdot P_{CT} \quad , \quad P_{CC}=\frac{1}{2}\cdot P_{CCC}+\frac{1}{2}\cdot P_{CT} \quad ,$$

$$P_{CT}=\frac{1}{2}\cdot P+\frac{1}{2}\cdot P_{CTT} \quad .$$

La soluzione P = 2/5 fornisce la probabilità a inizio gioco che la sequenza CCC si formi prima della CTT.

Con questo metodo – quando non ho trovato scorciatoie – ho calcolato la probabilità che ogni tripletta Testa/Croce compaia prima di un'altra, cercando (ahimè invano) una qualche regolarità. Riporto nella tabella i risultati, comunque suscettibili di errori di calcolo, data la mia sbadataggine.

	CCC	CCT	CTC	CTT	TCC	TCT	TTC	TTT
CCC		1/2	2/5	2/5	1/3	2/3	3/10	1/2
CCT	1/2		2/3	2/5	1/4	5/8	1/2	7/10
CTC	3/5	1/3		1/2	1/4	1/2	3/8	1/3
CTT	3/5	3/5	1/2		1/2	3/4	3/4	7/8
TCC	7/8	3/4	3/4	1/2		1/2	3/5	3/5
TCT	1/3	3/8	1/2	1/4	1/2		1/3	3/5
TTC	7/10	1/2	5/8	1/4	2/5	2/3		1/2
TTT	1/2	3/10	2/3	1/8	2/5	2/5	1/2	

All'incrocio ho posto la probabilità che la sequenza della riga arrivi prima di quella della colonna.

> Ho ordinato alfabeticamente le triplette cosicché le due diagonali disegnate hanno evidentemente una proprietà che definirei antisimmetrica, cioè la coppia di valori corrispondenti è a somma 1.

È sempre un piacere ricevere le soluzioni di ***Franco***, il Doc apprezzerà soprattutto la proprietà "antisimmetrica", e noi ci fermiamo qui. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Parafrasando leggermente le immortali parole di Baez, *"build, borrow or steal a [regular truncated] icosahedron..."*. Che poi sarebbe un pallone da calcio, formato da dodici pentagoni regolari e venti esagoni regolari.

Abbiamo scritto dei numeri interi positivi sulle facce (uno per faccia), e sappiamo che la somma di tutti i numeri sugli esagoni vale 39 mentre la somma di tutti i numeri sui pentagoni vale 25: siamo particolarmente fieri dell'opera, in quanto ci pare che non esistano due facce concorrenti nello stesso vertice con lo stesso numero.

Secondo voi, abbiamo ragione?

6. Pagina 46

Il fatto che il denominatore divida il numeratore implica che $2^n 5^n$ sia un divisore di $(n+1)(n^2+1)$, e quindi sia $n+1$ che n^2+1 devono essere prodotti di potenze di 5 e di 2.

Se $n+1 \equiv 0(\mathrm{mod}5)$, allora $n \equiv -1$ implica che $n^2+1 \equiv 2\ (\mathrm{mod}5)$, e quindi n^2+1 non contiene potenze di 5 e quindi deve essere una potenza di 2: sia $n^2+1 = 2^t$, con t numero naturale. Essendo $n^2 \equiv 0$ o $1(\mathrm{mod}4)$, abbiamo:

$$n^2+1 \neq (\mathrm{mod}4) \Rightarrow t = 1 \Rightarrow n^2+1 = 2 \Rightarrow n = 1,$$

che non soddisfa la condizione richiesta, e quindi deve essere $n+1 = 2^a$ per un qualche naturale $a \geq 2$; quindi,

$$n^2+1 = (2^a - 1)^2 + 1 = 2^{2a} - 2^{a+1} = 2(2^{2a-1} - 2^a + 1)$$

e quindi $2^{2a-1} - 2^a + 1 = 5^b$ per un qualche naturale b. E quindi, $2^a(2^{a-1} - 1) = 5^b - 1$.

Sia ora $b=2^c d$, con $c, d \in \mathrm{Z}$, $c \geq 0$, $d>0$ dispari. In questo caso, possiamo affermare che $5^b - 1 = (5 - 1)\ \mathrm{P} \cdot \mathrm{S}$, dove:

$$P=\prod_{j=0}^{c-1}\left(5^{2^j}+1\right),$$

$$S=\sum_{k=1}^{d} 5^{b-2^c \cdot k}$$

Se $c=0$, allora definiamo $P=0$.

Si noti che:

$$\begin{aligned}(5-1)P &= (5-1)(5+1)(5^2+1)\ldots\left(5^{2^{c-1}}+1\right)\\ &= (5^2-1)(5^2+1)\ldots\left(5^{2^{c-1}}+1\right)\\ &= \ldots=5^{2^{c-1}}-1\end{aligned}$$

e che, essendo $b = 2^c d$,

$$\begin{aligned}S &= 5^{b-2^c}+5^{b-2^{c+1}}\ldots\left(5^{2^{c-1}}+1\right)\\ &= \left(5^{2c}\right)^{d-1}+\left(5^{2c}\right)^{d-2}+\ldots+\left(5^{2c}\right)^0\\ &= \left(5^{2c}\right)^d-1\end{aligned}$$

Da cui:

$$2^a\left(2^{a-1}-1\right)=5^b-1=(5-1)\cdot\left(\prod_{j=0}^{c-1}\left(5^{2^j}+1\right)\right)\cdot\sum_{k=1}^{d}5^{b-2^c\cdot k} \qquad [1]$$

Essendo $5^{2^j}+1\equiv 2 \pmod 4$ per qualsiasi j ed essendo la sommatoria in [1] dispari (il che implica sia dispari anche d), confrontando i coefficienti delle potenze di 2 per entrambi i membri della [1] si vede che $a = c + 2$. Noto questo, sempre da [1] si ha:

$$2^{c+1}-1=\left(\prod_{j=0}^{c-1}\frac{5^{2^j}+1}{2}\right)\sum_{k=1}^{d}5^{b-2^c\cdot k}\geqslant\frac{5^{2^{c-1}}+1}{2}>\frac{\left(2^2\right)^{2^{c-1}}}{2}=2^{2^c-1} \qquad [2]$$

Ma è facile vedere che, per $c\geq 2$, $2^c-1\geq c+1$, il che implica

$$2^{2^c-1}\geqslant 2^{c+1}>2^{c+1}-1$$

e quindi la [2] può valere solo se c vale zero o uno.

Se $c=0$, allora $a = c + 2 = 2$, ossia $n = 2^2 - 1 = 3$.

Se $c=1$, allora $a = c + 2 = 3$, ossia $n = 2^3 - 1 = 7$.

Quindi solo $n=3$ e $n=7$ soddisfano la condizione richiesta dal problema.

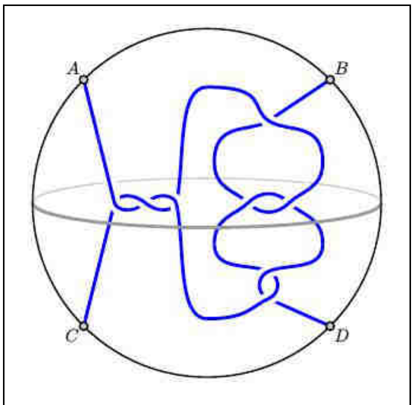
7. Paraphernalia Mathematica

Nella preistoria di questa rivista[15] abbiamo parlato di un metodo per trattare i nodi, definendoli da un punto di vista strettamente matematico (come dovreste ricordare, il "nodo di cravatta" *non* è un nodo) e abbiamo cercato di capire come sia possibile descriverli; questa volta, trattiamo degli oggetti che somigliano clamorosamente a dei nodi (spoiler: no, non lo sono), e vediamo come fanno i matematici a lavorarci sopra senza restare strangolati dai loro esperimenti. Anche se, data la quantità di disegni che dovremo inserire, è abbastanza probabile che noi si finisca strangolati da Alice.

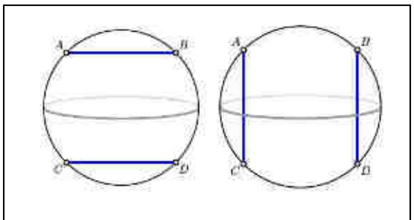
7.1 Garbuglio all'Euclide

Se riuscite a trovare una traduzione matematicamente più accettabile del termine "tangle", fatecelo sapere e sostituite il termine qui sopra con il vostro. A noi piace questo, quindi continuiamo ad usarlo.

Matematicamente, un *garbuglio* è definito come l'intrecciarsi di alcuni pezzi di corda all'interno di una sfera in modo tale che gli estremi delle corde stiano tutti sulla sfera: di solito si specifica, attraverso un apposito prefisso, qante corde stiate usando, ma se il numero è sempre lo stesso si preferisce ignorarlo: nella figura a fianco, comunque, vedete un esempio di 2-garbuglio (o "bigarbuglio").



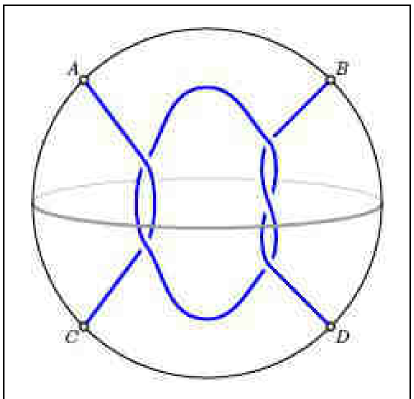
8 *Un esempio di garbuglio.*



9 *Bigarbugli triviali.*

Cominciamo ad esplorare l'ambiente: esistono due bigarbugli elementari, e li vedete nella seconda figura, sono formati semplicemente da due corde verticali o orizzontali.

Si definisce ***garbuglio razionale*** un bigarbuglio che, per opportune rotazioni a coppie dei punti, possa essere ridotto ad uno dei garbugli triviali: ad esempio, il garbuglio della prima figura può essere sgarbugliato ruotando[16] C attorno ad A (e in questo modo sgarbugliate il lato sinistro), indi ruotando D attorno a C sgarbugliate la parte in basso a destra e a questo punto, scambiando i due punti sopra (o i due punti sotto) *dovrebbe* (condizionale d'obbligo, abbiamo le capacità di visualizzazione tridimensionali di un abitante di Flatlandia) restarvi in mano il bigarbuglio triviale di seconda specie (quello sulla destra). Più facile a farsi che a dirsi, una volta tanto.



10 *Un garbuglio irrazionale.*

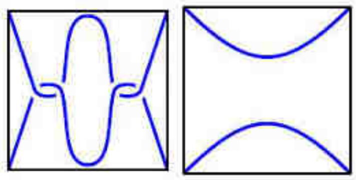
Se, a questo punto, vi pare che tutto stia diventando troppo semplice, provate a sgarbugliare quello della figura qui di fianco. Già, esistono anche i garbugli irrazionali.

Semplifichiamoci la vita: al posto della sfera, limitiamoci a disegnare un quadrato; all'interno del quadrato vi sono consentite una serie di "manovre": l'importante è che

[15] RM026, marzo 2001. Paraphernalia Mathematica: "I polinomi di Jones".

[16] Il nostro testo non lo dice, ma ci pare il caso di aggiungere, almeno per ora, un "nell'opportuna direzione": altrimenti ingarbugliate ulteriormente la cosa.

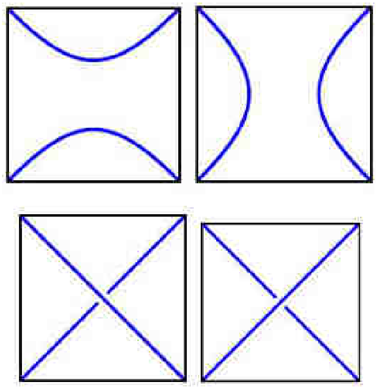
siano eseguibili senza le forbici; se due garbugli possono essere trasformati uno nell'altro in questo modo, come per esempio per i due della prossima figura, allora si dice che i due garbugli sono ***isotopici*** e si scrive $G_1 \sim G_2$.



11 *Bigarbugli isotopici.*

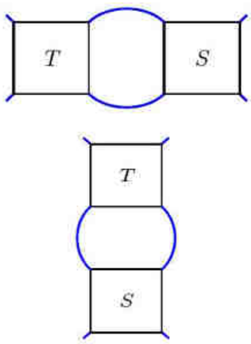
Speriamo che sin qui sia tutto chiaro, perché adesso arriva un tipo tosto e le cose si complicano.

John Horton Conway si è accorto che i garbugli razionali possono servire come mattoni per la costruzione dei nodi (quelli *veri*, anche secondo i matematici), e li ha utilizzati per costruire una notazione descrittiva dei nodi e per sviluppare la *Lista di Tutti i Nodi* (con al più undici intersezioni). Cerchiamo di capire come funziona la cosa.



12 *In alto, "zero" (sx) e "infinito" (dx), in basso, "uno" (sx) e "meno uno" (dx).*

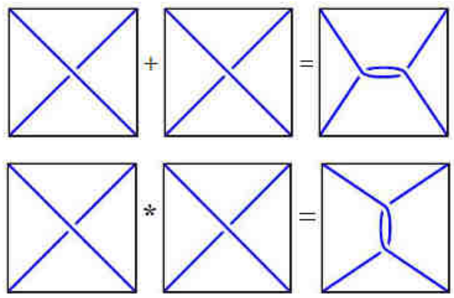
Tanto per cominciare, ci servono l'inizio e la fine: infatti, chiamiamo i due nodi della figura qui di fianco [0] e [∞]; il motivo delle parentesi (almeno per ora) è che sono simboli, non entità numeriche vere e proprie. I due incroci più semplici li chiamiamo invece [1] e [–1]: attenzione al filo che passa sopra, per distinguerli.



13 *Somma (sopra) e prodotto (sotto).*

Definiamo anche qualche operazione: dati due garbugli generici *T* e *S, definiamo come* somma *T+S* il garbuglio ottenuto unendo *T* e *S* con uno "zero", mentre definiamo "prodotto" *T*S* il garbuglio ottenuto unendo *T* e *S* con un "infinito".

C'è una coerenza, in questa notazione: infatti, [1]+[–1]=[0], ossia se mettete assieme i due nodi in basso della figura qui sopra, ottenete un garbuglio riconducibile al bigarbuglio zero.



14 *Uno più uno uguale due, ma uno per uno uguale un mezzo.*

A questo punto, sembra ovvio che [1]+[1]=[2]; quello che è un po' meno ovvio è il fatto che [1]*[1]=1/[2]; il risultato di questa seconda operazione però, secondo noi, se confrontato con quello della prima permette di chiarire (almeno intuitivamente) cosa significhi "reciproco" da queste parti.

Adesso, facciamo pubblica ammenda: in inglese si chiama *twist form*, ma non resistiamo all'idea di scegliere una traduzione in tema.

Esiste un teorema in base al quale ogni garbuglio razionale può essere espresso in una ***forma contorta*** del tipo:

$$\frac{1}{[a_k]}\cdot\left(\dots\cdot\left([b_3]+\left(\frac{1}{[a_1]}\cdot\left([b_1]+\frac{1}{[a_0]}+[b_2]\right)\cdot\frac{1}{[a_2]}\right)+[b_4]\right)\cdot\dots\right)\cdot\frac{1}{[a_{k+1}]}$$

...che a noi sembra quel giorno che Horner ha litigato con le frazioni egizie: comunque, esiste un modo "abbastanza intuitivo" per trovare il garbuglio equivalente: ci pare basti un esempio, che mettiamo per chiarezza in una figura unica: la trovate "da qualche parte".

Se speravate di aver finito con le operazioni, siamo qui per disilludervi.

Per prima cosa, potete prendere tutti gli incroci e trasformare i “sottopassaggi” in “soprapassaggi”: questo *cambia segno* al nostro garbuglio.

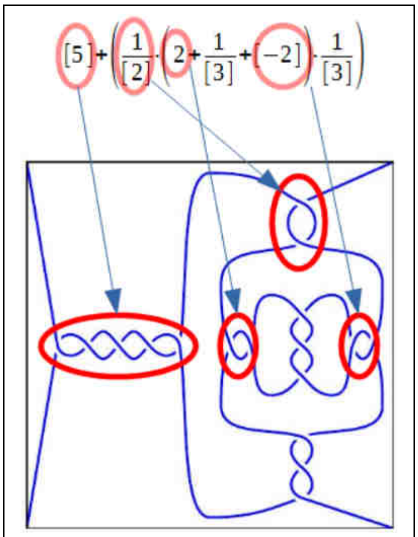
Non solo, ma avete altri due operatori “di rotazione”: potete ruotare il vostro intero garbuglio T rispetto all’asse orizzontale (ottenendo T^h) o rispetto all’asse verticale (ottenendo T^v): si vede facilmente che valgono un paio di interessanti regole:

$$[\pm 1]+T \sim T^h + [\pm 1]$$

$$[\pm 1]\cdot T \sim T^v \cdot [\pm 1]$$

Il che porta ai risultati abbastanza sorprendenti (beh, parliamo di nodi!)

$$T^h \sim T$$
$$T^v \sim T$$



15 *...è un po’ più chiaro come funziona, adesso?*

E quindi l’obbrobrio che abbiamo usato per spiegare la *forma contorta* si riduce ad un decisamente più pacifico $[5]+\frac{1}{[8]}$, che anche come garbuglio diventa molto più trattabile.

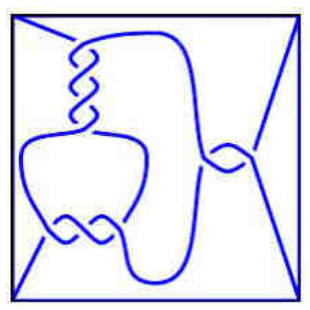
Un’altra operazione che potremmo fare è prendere tutto il nostro bigarbuglio e ruotarlo sul piano (di 90°, in senso antiorario, giusto per definire uno standard), “riattaccando” poi opportunamente i quattro punti. Se fate un po’ di esperimenti, vi accorgete che vale la regola:

$$T\cdot[-1]=\left(T^r+[1]\right)^r .$$

Sorvolando quindi su quelle inutili, abbiamo quindi ***due operazioni***: la somma di [1] e la rotazione. Formalmente:

$$\boxed{\begin{aligned} A &: T \to T+[1] \\ R &: T \to T^r \end{aligned}}$$

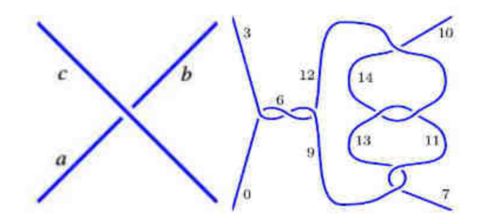
E, partendo da “zero”, possiamo generare qualsiasi garbuglio: se volete provare a sbrogliare la logica, vi diamo un esempio nella figura a fianco e “cosa sembra a noi” che tutto questo voglia dire (sono “deduzioni nostre”, quindi se a voi non sembra ditecelo).



16 *AAARAAAARAA.*

Le prime tre “A” le associamo al garbuglio in basso a sinistra (che ha tre incroci); poi, siccome troviamo una “R”, da orizzontale passiamo a verticale e troviamo quattro “A” (e il garbuglio in alto a sinistra ha quattro incroci); altra R (che agisce su “tutto il garbuglio precedente”) e attacchiamo il garbuglio di destra (che ha due incroci, visto che abbiamo due “A”). Come dicevamo, tutte deduzioni nostre, visto che non abbiamo trovato una spiegazione chiara di come funzioni questo aggeggio.

...ma siccome lavorare con i *garbugli razionali monocromatici* sta diventando noioso, complichiamoci la vita secondo ***Kauffmann*** e ***Lambropoulou***, che hanno riformulato in senso (si spera) più chiaro quanto aveva dedotto Conway.



17 *Metodo di colorazione e garbuglio colorato.*

Dato un garbuglio, si definisce ***colorazione*** l'etichettare ogni arco in modo tale che $a + b = 2c$, secondo lo schema a sinistra della figura a fianco; come potete controllare, nella parte a destra avete una colorazione del nostro solito nodo.

Un modo per "portarsi dietro" la colorazione di un garbuglio è quello di organizzarla in una matrice 2×2, nella quale vengano indicati i colori (OK, i numeri...) degli estremi liberi: in questo modo, il nostro garbuglio della figura sopra sulla destra viene indicato come $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$; se partiamo dalla matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, possiamo assocare ad ogni garbuglio il numero $f(T) = \frac{b-a}{b-d}$ il che (secondo Conway) caratterizza completamente il garbuglio. Quindi il nostro amico vale 7/3.

Esistono un paio di teoremi, in merito:

> *Data la colorazione di un garbuglio T, qualsiasi altro diagramma di T ha la stessa matrice di colorazione.*

Questo in quanto attraverso le ***mosse di Rademeister*** potete trasformare un diagramma in un altro, e queste non alterano la colorazione del garbuglio.

> *Se una colorazione di T è associata alla matrice* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, *allora qualsiasi altra colorazione di T è associata alla matrice* $\begin{bmatrix} ma+n & mb+n \\ mc+n & md+n \end{bmatrix}$.

Questo in quanto applichiamo, alla nostra colorazione originale, una *trasformazione affine* che ci lascia con il medesimo garbuglio.

Si verifica, lavorando opportunamente sui diagrammi, che (la notazione non è una meraviglia):

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T + [1] = \begin{bmatrix} a & 2b-d \\ c & d \end{bmatrix} \\ T^r = \begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix} \end{cases}$$

E, se preferite trattare con i numeri,

$$f(T+[1]) = f(T)+1$$
$$f(T^r) = -\frac{1}{f(T)}$$

Conway ha dimostrato che *esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei bigarbugli razionali e l'insieme dei numeri razionali* cui va aggiunto l'infinito.

Conway descrive un "gioco" nel quale ci viene dato un garbuglio e, usando le due operazioni A e R, dobbiamo ottenere [0]: forti dei teoremi qui sopra e delle due formule appena ottenute, lasciamo perdere i garbugli e lavoriamo con i numeri: proviamo, ad esempio, a sgarbugliare [2].

Via R otteniamo [–1/2], Via A otteniamo [1/2], via R otteniamo [–2], via A otteniamo [–1] e infine, applicando nuovamente A, otteniamo [0]; quindi, *RARAA* sgarbuglia [2].

Proviamo con un "razionale vero"? Ad esempio –17/7? Solo per ragioni grafiche, consideriamolo come se fossero due numeri, "p" (=17) e "q" (=7), e andiamo avanti: trovate il calcolo nella tabella a fianco.

Operazione	p	q
	-17	7
A	-10	7
A	-3	7
A	4	7
R	-7	4
A	-3	4
A	1	4
R	-4	1
A	-3	1
A	-2	1
A	-1	1
A	0	1

18 *Sgarbuglio.*

Se ricordate, l'algoritmo euclideo per calcolare il Massimo Comun Divisore di due numeri a e b si basa sul fatto che:

$$\mathrm{MCD}(a, b) = \mathrm{MCD}(a-b, b)$$

e quindi, se $b>0$:

- Se $a>0$, sostituite a con $a-b$.
- Se $a<0$, sostituite a con b e b con $-a$.
- Se $a=0$, b è il Massimo Comun Divisore.

Che è un altro modo per presentare il nostro sgarbugliatore.

In realtà, Conway ha descritto un'ulteriore operazione, data dalla combinazione di una rotazione di 90° in senso antiorario e uno scambio dei passaggi superiori con gli inferiori e viceversa: questo i permette di passare dal garbuglio T al garbuglio $1/T$ in modo diretto; utilizzando questa sola operazione, diventa possibile esprimere qualsiasi garbuglio *razionale* nella forma (*finita*):

$$T \sim [a_1] + \cfrac{1}{[a_2] + \ldots \cfrac{1}{[a_{n-1}] + \cfrac{1}{[a_n]}}}$$

e, in questo caso, il numero razionale associato al garbuglio è:

$$f(T) = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Il che ha permesso di ricatalogare (correggendo alcuni errori) tutti i nodi sino all'undicesimo grado catalogati da Little. Piccola differenza tra i due lavori: Little ha impiegato sei anni per completare la lista, leggenda vuole che a Conway sia bastato un pomeriggio.

Per finire, un *caveat*: tenete a portata un paio di forbici. Matematicamente saranno inutili, ma in caso di emergenza possono dare un improvviso sollievo alla respirazione.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms