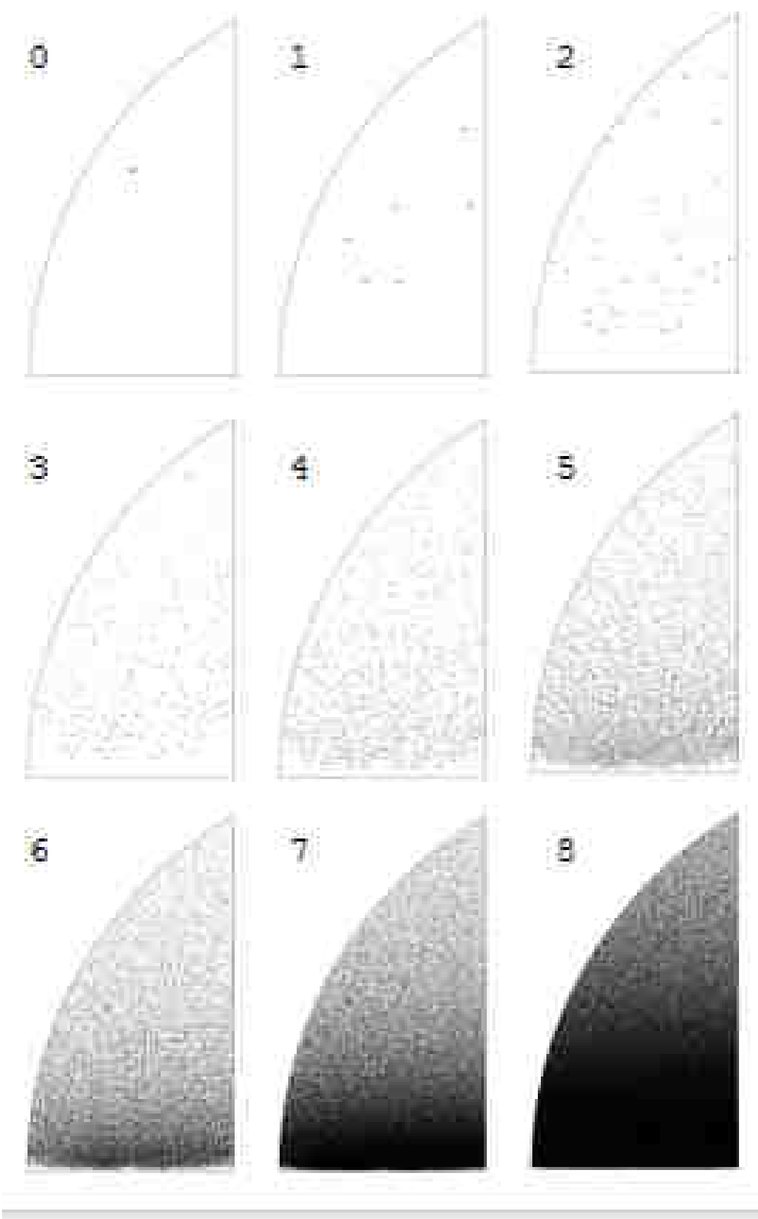
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 256 – Maggio 2020 – Anno Ventiduesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM255 ha diffuso 3'303 copie e il 03/05/2020 per Google eravamo in 45'300 pagine.

Tutto quanto pubblicato dalla rivista è soggetto al diritto d'autore e in base a tale diritto *concediamo il permesso di libera pubblicazione e ridistribuzione* alle condizioni indicate alla pagina diraut.html del sito. In particolare, tutto quanto pubblicato sulla rivista è scritto compiendo ogni ragionevole sforzo per dare le informazioni corrette; tuttavia queste informazioni non vengono fornite con alcuna garanzia legale e quindi la loro ripubblicazione da parte vostra è sotto la vostra responsabilità. La pubblicazione delle informazioni da parte vostra costituisce accettazione di questa condizione.

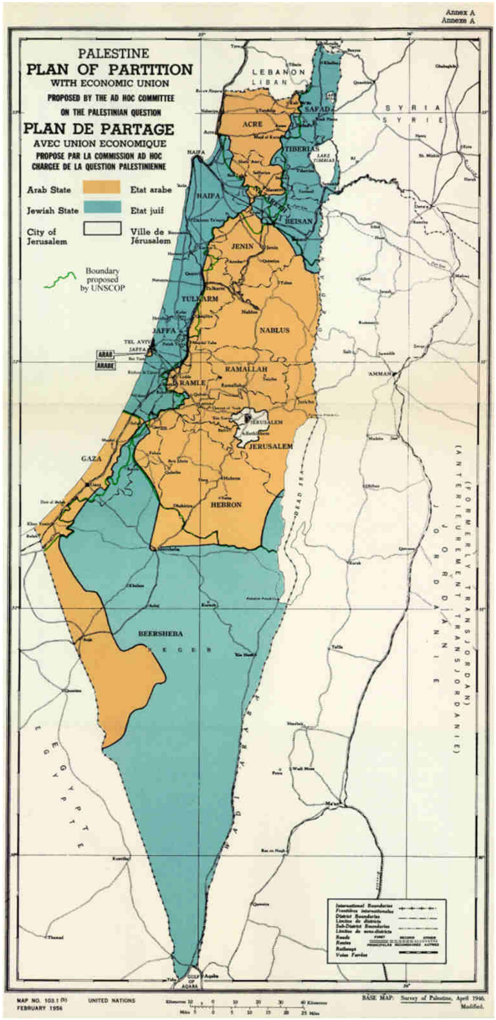
...siccome la copertina la vedono tutti ma il PM non lo legge nessuno, mettiamo qui una figura piuttosto importante che là occuperebbe troppo spazio. Nella speranza di spingervi a vedere di cosa stiamo parlando.

1. Il burbero

"Mi divertiva invero non poco pensare gli intercettatori della polizia alle prese con centinaia di metri di nastri registratori pieni di misteriose espressioni matematiche."

(citato nella commemorazione di Gaetano Fichera nei "Rendiconti" dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Maggio 1979)

"*Sono profondamente preoccupato per l'impatto sui bambini, in particolare i neonati, dell'uso di boom sonici*". La frase è quella più significativa di una lettera spedita nell'autunno del 2005: il mittente è Alvaro De Soto, commissario delle Nazioni Unite per il Medio Oriente, mentre il destinatario è l'Alto Comando Militare di Israele. Il conflitto arabo-israeliano è così persistente e antico che è davvero difficile provare a ricostruirne le tappe fondamentali; anche solo a voler ricordare le principali campagne militari – e in un conflitto come questo le cosiddette "guerre" sono solo una parte della storia, e non necessariamente la più significativa – si finisce facilmente con il risalire al 1947, anno di fondazione dello stato d'Israele; fondazione che è impossibile ricostruire senza parlare della Seconda Guerra Mondiale e delle sue più tragiche sfaccettature, e così via all'indietro nel tempo, fino ad arrivare alla diaspora del 70 d.C. sotto l'impero Romano di Tito, e volendo ancora più indietro, fino alla cattività babilonese. Anche a volersi limitare ai tempi recenti, quelli del messaggio di De Soto, nel 2005 il clima politico è ancora quello della Seconda Intifada, la rivolta palestinese iniziata cinque anni prima. Un clima insomma tutt'altro che pacifico, anche se la fase più acuta dei contrasti era ormai scemata; anzi, forse è proprio questa situazione particolare, quella di una fase critica che va lentamente spegnendosi ma che è ancora non del tutto risolta, a far venire in mente a qualcuno l'utilizzo di un'arma forse impropria, certo insolita, come quella dei boom sonici. Del resto, le guerre moderne sembrano distanziarsi sempre più dalle tecniche militari tradizionali: attentati, tecniche di guerriglia, rapimenti, ghettizzazioni, bersagli civili, droni ipertecnologici, attacchi informatici, lanciarazzi portatili sembrano essere le pratiche più alla moda in queste lente guerre moderne, in cui i veloci massacri di eserciti schierati sui campi di battaglia non paiono più convenienti. Non che si possa giudicare questo un progresso etico; al più è solo la registrazione della prontissima capacità di evoluzione delle strategie e tattiche delle reciproche carneficine.



1 *Piano di partizione della Palestina,1947.*

Ad esempio, quale che sia stata la ragione per cui ad un certo punto l'aviazione israeliana abbia cominciato a far volare a bassa quota dei jet militari sulla Striscia di Gaza a velocità superiori a quelle del suono, è certo che il giudizio morale dell'opinione pubblica internazionale sull'azione sia stato quantomeno di perplesso imbarazzo. Certo, dal punto di vista ufficiale – come mostra la presa di posizione dell'ONU tramite la lettera del delegato De Soto – c'è stata una condanna ferma e decisa; del resto, ogni atto di guerra che non sia originato da reale e dimostrata autodifesa non può non essere condannato dalla comunità internazionale: ma è altrettanto vero che gran parte delle persone degli stati non direttamente coinvolti nel conflitto avranno pensato che disturbare delle città nemiche con del rumore, per quanto gesto aggressivo e poco nobile, sia di gran lunga migliore che bombardarle con bombe esplosive, altrettanto rumorose e di gran lunga più distruttive. E questo è certamente vero: meglio il rumore di una bomba che l'esplosione di una bomba; ma un'equazione ancora più facilmente verificabile è quella, del tutto ovvia, che è meglio niente del tutto a qualsiasi imitazione di bomba.

La stampa internazionale riporta che tra il settembre e l'ottobre 2005 l'aviazione israeliana ha prodotto circa sessanta boom sonici a bassa quota, prevalentemente in ore notturne: i palestinesi dichiarano che questo ha provocato gravi danni psicologici nella popolazione, specie più giovane, con un raddoppio dei casi di soccorso cardiologico, e anche diversi aborti spontanei. Israele risponde che la tattica ha l'intenzione di attuare una pressione psicologica sulla popolazione di Gaza affinché cessi di dare aiuto e supporto ai gruppi terroristici, e che i danni dichiarati dalle autorità palestinesi sono in gran parte ingigantiti, se non del tutto falsi. Come sempre, la guerra è guerra anche nelle dichiarazioni.


2 *I boom sonici non si sentono soltanto: si vedono, anche.*

Il punto indiscusso è che un boom sonico è assai più impressionante[1] nella realtà di quanto possa sembrare leggendo la notizia sui giornali e standosene tranquillamente seduti in poltrona in tempo di pace; a margine, è forse uno degli eventi che meglio ci ricorda di essere costantemente immersi in un fluido: l'aria. Sotto molti punti di vista, il nostro ambiente non è molto diverso da quello delle creature che vivono sui fondali marini: non sono abbastanza brave da "volare" come i pesci – che ai loro occhi forse sembrano esseri non diversi da come noi consideriamo gli uccelli – ma ciò non di meno sono così abituate all'acqua in cui vivono che forse la considerano a malapena, così come noi consideriamo l'aria. Al pari dell'acqua, anche l'aria si muove, come ci ricordano facilmente le giornate ventose, e in essa si generano onde, che noi siamo abituati a chiamare "sonore", che si muovono a grande velocità.

A prima vista, potrebbe sembrare curioso che ai giorni nostri sia diventato noto anche ai non specialisti il dato della velocità della luce, mentre non è altrettanto conosciuto quello sulla velocità del suono, ma in realtà ci sono molte ragioni, non tutte di natura scientifica, in grado di spiegarlo. Conta certo il puro dato numerico, che nel caso della luce è facilmente memorizzabile: i leggendari "*300'000 km al secondo*" sono un bel numero

[1] Un articolo del "Guardian" dell'epoca (https://www.theguardian.com/world/2005/nov/03/israel) racconta che uno dei boom sonici, per errore, fu udito a centinaia di chilometri all'interno di Israele, suscitando panico diffuso al punto che i centralini dei pompieri e della polizia finirono in tilt.

tondo[2] e impressionantemente grande, rispetto alle poche centinaia di m/s del suono; poi, la velocità della luce ha un ruolo cruciale nella Teoria della Relatività e in molti film di fantascienza; e, certo non meno intrigante, ha la graziosa caratteristica di essere un limite invalicabile, un record imbattuto e imbattibile, con la sole possibili eccezioni dei tachioni e di Superman. La velocità del suono non può competere, dal punto di vista del fascino: e un ulteriore elemento che gioca a suo sfavore è la sua stretta dipendenza dal mezzo in cui il suono si propaga. Certo, anche la velocità della luce dipende dal mezzo in cui le onde luminose si muovono, ma il suo asso nella manica consiste proprio nel fatto che si propaga – e al suo meglio – proprio nel vuoto: tant'è vero che i citatissimi "trecentomila" sono quasi sempre menzionati senza la cruciale aggiunta "nel vuoto".

3 *A sinistra, Chuck Yaeger in una celebrazione del primo volo supersonico con il suo X-1. A destra, un prototipo supersonico della NASA che dovrebbe riuscire a superare il muro del suono senza (quasi) produrre il caratteristico boato.*

A differenza della velocità della luce, la precisione con cui è nota quella del suono nel vuoto è assoluta: zero. Così, per memorizzare un dato significativo non si hanno scorciatoie come nel caso della luce: la velocità del suono dipende in maniera strettissima dal materiale in cui si propagano le onde sonore, con variazioni esorbitanti: nell'aria vale circa 340 metri al secondo, ma nell'acqua il suono corre quattro volte più veloce, e nell'alluminio addirittura diciotto volte. Anche a voler limitare l'attenzione al mezzo per noi più comune, appunto l'aria, non possiamo gingillarci troppo con quel "340 m/s" citato poco sopra: da che mondo è mondo i gas sono dotati di caratteristiche variabili e interdipendenti come la pressione e la temperatura, e la trasmissione delle onde sonore degli uni dipende fortemente dai valori delle altre. Diventa così inevitabile aspettarsi delle variazioni della velocità del suono al variare di queste grandezze: abbastanza curiosamente, quella che più conta per le variazioni di velocità del suono non è la pressione, ma la temperatura[3].

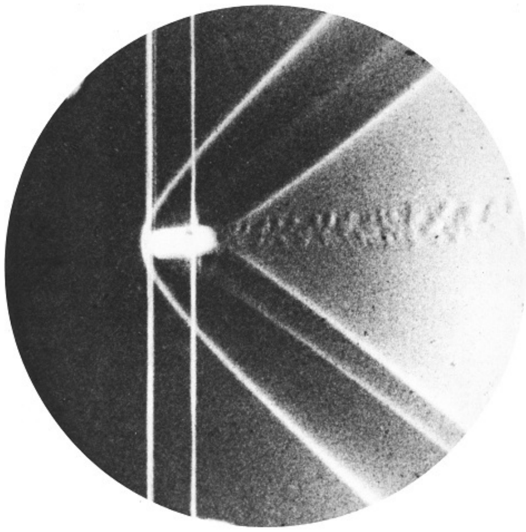
All'atto pratico, questo comporta che per superare il cosiddetto "muro del suono" volando quando la temperatura esterna è attorno ai –57° centigradi (che è quella ordinaria per i normali voli commerciali, in quota di crociera) è sufficiente toccare i 295 m/s, ovvero circa 1060 km/h; ben inferiore ai 340 m/s (1225 km/h) che occorre raggiungere se ci si vuol togliere lo sfizio di farlo a livello del mare in una normale giornata di primavera. Il punto è che il "muro del suono", pur non essendo fatto di mattoni e cemento, è un limite fisico davvero significativo, soprattutto se a superarlo è un essere umano dentro una macchina volante e non un proiettile sparato da un'arma o la punta di una frusta che schiocca[4]:

[2] Ovviamente, è un numero "tondo" solo fino a un certo punto: il valore esatto è circa 299792,458 km/s. Certo è che un errore dello 0.07% è un grande successo, ancorché solo mnemonico e del tutto fortuito, del sistema metrico decimale.

[3] Per essere un po' più precisi (ma solo un po'): nell'aria, la velocità del suono varia in ragione della radice quadrata della temperatura assoluta T.

[4] Probabilmente lo sapete già, ma il "botto" di un arma da fuoco è principalmente causato dal boom sonico del proiettile. Che lo sia anche lo schiocco di una frusta lo si è capito solo in tempi abbastanza recenti, e qualcuno lo ha subito etichettato, probabilmente a ragione, come "primo boom sonico generato artificialmente dall'uomo". Per emulare a dovere Indiana Jones e Zorro, però, è necessario che la frusta sia fatta a dovere, insomma abbastanza spessa in prossimità dell'impugnatura e abbastanza sottile all'estremità; così, mentre l'eroe di turno

durante l'accelerazione in velocità subsonica il corpo in moto genera onde di pressione sempre maggiori con l'avvicinarsi alla velocità del suono, onde che generano grandi sollecitazioni meccaniche, che cessano poi improvvisamente quando la velocità del corpo supera quella del suono: in compenso, è proprio questo superamento che genera il grande boato rumoroso. L'intensità del boom dipende naturalmente dalla massa del corpo, e – fatte le dovute proporzioni – non dovrebbe essere difficile quanto possa essere sonoro il boom generato da un aereo da guerra.



4 *Ombrogramma*[5] *realizzato da Ernst Mach nel 1887, in cui è visibile il "cono" delle onde d'urto che prende il suo nome.*

Il primo a ipotizzare e dimostrare (anzi, addirittura a fotografare) l'esistenza di un sistema di onde di pressione generate da un corpo in moto nell'aria ad alta velocità è stato Ernst Mach, fisico austriaco le cui idee scientifiche e filosofiche colpirono così tanto Robert Musil[6] da indurlo a dedicare ad esse la sua tesi di laurea. Il corpo in veloce movimento nell'aria genera un cono di onde, che prende proprio il nome di "cono di Mach", il cui vertice è posizionato proprio di fronte al corpo, in direzione del moto del corpo stesso. Il momento critico in cui il corpo raggiunge la velocità del suono è quello in cui le onde sonore compresse sono così dense che sostanzialmente sono tutte compresse in un unico fronte d'onda, e il corpo vi entra in contatto. L'espressione "muro del suono", per molti versi, è perfino più aderente alla realtà di quanto si immagini; quando il corpo accelera ulteriormente "buca" il fronte d'onda e si libera dalla loro influenza, per la semplice ragione che esse non sono più veloci a sufficienza per raggiungerlo. La velocità del suono nelle specifiche condizioni di volo è quindi una grandezza così importante, nell'aerodinamica, che gli esperti del campo hanno rinunciato serenamente ad esprimere le velocità del velivolo nella solita maniera "spazio/tempo" passando alla più significativa misura adimensionale v/c, con v che rappresenta la velocità dell'aviogetto e c la (locale) velocità del suono[7]. Del resto, per un pilota che sfreccia a velocità attorno ai mille km/h è assai più utile capire se è prossimo a sfondare il muro del suono piuttosto che lo sterile dato espresso in chilometri orari che, come si è visto, è del tutto inaffidabile a questo proposito. L'unità di misura scelta per misurare il rapporto v/c è il "numero di Mach", più confidenzialmente chiamato semplicemente "Mach", e ovviamente il nome è stato scelto in onore del fisico austriaco.

trasmette una buona quantità di moto alla parte più massiva, questa verrà trasmessa alla parte più sottile e meno massiva. La cara vecchia *mv* però si conserva, e di conseguenza la punta della frusta riesce a raggiungere velocità tali da superare quella del suono.

[5] L'ombrografia è una tecnica fotografica che si basa sulla registrazione di ombre nei mezzi trasparenti: l'esempio classico – di cui si può fare facilmente esperienza diretta – è l'osservazione del riscaldamento di una pentola piena d'acqua: è assai difficile notare qualcosa nell'osservazione diretta della zona al di sopra della pentola, ma se se ne osserva l'ombra sul muro, il riscaldamento dell'aria è facilmente visibile.

[6] Tesi di ingegneria, poiché l'autore de "L'Uomo senza Qualità", prima di diventare famoso come scrittore, era ingegnere. Mach, comunque, non appassionava soltanto letterati: assai interessato alle sue teorie, soprattutto di filosofia della scienza, era il giovane Albert Einstein.

[7] I simboli qui usati sono stati scelti in maniera del tutto arbitraria: del resto, il lavoro che i simboli devono svolgere è sempre indipendente dalla forma grafica utilizzata. Dovrebbe essere evidente che la c usata in questo contesto non è la solita *c* che indica la velocità della luce – che è peraltro costante universale, a differenza della grandezza locale che qui rappresenta – ma semplicemente un simbolo che, come la sua parente più famosa, ricorda il concetto di velocità attraverso il lemma latino *celeritas*.

Il primo a sfondare il muro del suono, raggiungendo pertanto Mach1, è stato Chuck Yaeger, a bordo di un Bell XS-1, il 14 ottobre 1947; tra gli aerei sui quali era possibile imbarcarsi semplicemente acquistando un biglietto in aeroporto, il record di velocità è detenuto dal Tupolev TU-144, che poteva dare ai suoi passeggeri l'ebbrezza di Mach 2,5[8]. Se si escludono alcuni aerei sperimentali (che in condizioni particolari hanno addirittura sfiorato Mach 10), l'aereo propriamente detto – ovvero con dentro un pilota, e in grado di decollare e atterrare in autonomia – con il record di velocità attuale[9] è il Blackbird della Lockheed, che ha toccato Mach 3,35.

Più che ad aumentare la velocità, al giorno d'oggi gli studi delle grandi imprese aeronautiche sembrano mirare alla riduzione dei boom sonici: la geometria del velivolo può aiutare molto, e i prototipi sperimentali hanno delle forme abbastanza insolite. Già dal primo volo supersonico di Yaeger – realizzato con un aereo dalla forma assai classica, con le ali perfettamente perpendicolari alla fusoliera – si era capito che una forma delle ali "a punta di freccia" è assai più adatta per voli oltre il muro del suono; per la riduzione del boom, sembra funzionare una forma assai allungata della parte anteriore dell'aereo, con il risultato che quei prototipi assomigliano a dei giganteschi insetti con un lungo e acuminato pungiglione sul naso.


5 *Francesco Giacomo Tricomi*[10]

Come è facile intuire, i problemi teorici e applicativi connessi alla realizzazione di voli a velocità prossime o superiori a quella del suono sono davvero enormi, e lo sono stati fin dall'inizio. Il contributo iniziale di Ernst Mach è stato certo fondamentale, ma ben lungi dall'essere esaustivo: la matematica necessaria per affrontare le difficoltà del moto nei fluidi è estremamente complicata[11]. Se non fosse che è abbastanza disonorevole che non sia ricordato a sufficienza, potrebbe essere motivo di orgoglio nazionale ricordare che uno dei maggiori avanzamenti nella teoria è dovuto agli studi di un grande matematico napoletano.

Francesco Giacomo Tricomi nasce a Napoli il 5 maggio 1897. È l'unico figlio di un ingegnere passato all'insegnamento accademico, Arturo, che insegna prima all'Università di Cagliari e poi, appunto, in quella di Napoli. Irrequieto fin dalla più giovane età, Francesco frequenta l'Istituto Tecnico, e non sembra mostrare un precoce interesse per la matematica: si racconta che si sia deciso a studiare la trigonometria solo quando si rese conto – verosimilmente grazie al suo bravo professore, Alfredo Perna – che questa poteva tornare utile per predire l'ora del tramonto del sole e le eclissi. Irrequieto, ma certo brillante: il diploma lo ottiene a soli sedici anni, e subito dopo si predispone a viaggiare; decide di iscriversi all'Università di Bologna, e sceglie la facoltà di Chimica. Sembra che furono alcune lezioni di Federigo Enriques[12], peraltro seguite da Tricomi in maniera del tutto occasionale, a convincerlo a passare prima alla facoltà di Fisica, e poi – dopo essere ritornato a Napoli – direttamente al terzo anno di Matematica.

[8] Oltre al TU-144, l'unico altro aereo commerciale supersonico era il Concorde.

[9] Record abbastanza longevo, peraltro, visto che è stato stabilito nel lontano 1976.

[10] La foto (e diverse informazioni) le abbiamo rubate dall'articolo di Erika Luciano e Luisa Rosso "*L'archivio e la biblioteca di Francesco G. Tricomi*", pubblicate nella "Rivista di Storia dell'Università di Torino, VII 2018.1". Peraltro, abbiamo saccheggiato anche la già citata Commemorazione dell'Accademia dei Lincei di G. Fichera.

[11] A ribadire il concetto può essere sufficiente ricordare che uno dei problemi matematici ancora aperti più difficili – uno dei famosi "problemi del millennio" – sono le equazioni di Navier-Stokes, ancora prive di una teorizzazione completa.

[12] Di lui parliamo più diffusamente nel suo compleanno "*Mente minuta*", RM084, gennaio 2006.

Siamo già nel 1916, e Francesco deve ripartire verso nord, con destinazione Torino; a chiamarlo non è la città che in seguito diventerà in maniera indiscussa la sua stabile residenza, ma la guerra: nel capoluogo piemontese segue un corso per ufficiali di complemento, e subito dopo è mobilitato verso le zone di guerra del Carso, del Monte Grappa e del Piave. A ulteriore dimostrazione sia della sua brillantezza che della sua determinazione, il terribile sfacelo della Prima Guerra Mondiale non è sufficiente a distoglierlo dai suoi studi e impegni: riesce comunque a laurearsi nella primavera del 1918, a Napoli, durante una licenza.

Finita la guerra, può cominciare la sua carriera accademica. I suoi insegnanti non hanno fatto particolare fatica a capirne le doti, e il suo nome comincia a circolare tra gli ambienti accademici: prima Fubini, poi lo stesso Amaldi lo propongono a Severi come assistente a Padova, ma già pochi mesi dopo è in grado di ottenere una cattedra a Roma, dove lavorano molti nomi prestigiosi della matematica italiana, che in quegli anni era forse la terza del mondo: Castelnuovo, Volterra[13], Levi-Civita[14], lo stesso Enriques, e altri. Da Roma a Firenze, nel 1925; da Firenze a Torino, nel 1932, ad occupare quella cattedra di Analisi Infinitesimale che aveva appena lasciato libera Giuseppe Peano[15]. Se si esclude un periodo di tre anni trascorsi negli Stati Uniti d'America per partecipare al grandioso, e purtroppo incompiuto, progetto di catalogazione di tutte le funzioni speciali[16], Tricomi resterà a Torino per tutto il resto della sua vita, fino al 1978.

Dal punto di vista della sua produzione matematica, è davvero difficile non restare impressionati dalla quantità di lavori prodotti, prima ancora che dalla loro altissima qualità: presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino sono conservati sia l'*Archivio Tricomi* che la *Biblioteca Tricomi*. Come raccontano Erika Luciano e Luisa Russo nell'articolo citato[17] l'enorme quantità di libri, memorie, articoli, tesi di laurea costituiscono l'eredità scientifica che Francesco Tricomi ha lasciato al suo allievo e amico Gaetano Fichera[18]; nell'Archivio sono presenti più di settecento documenti autografi, mentre nella Biblioteca i titoli superano quota undicimila, tutti catalogati da Tricomi su schede che compilava personalmente. Dal punto di vista della qualità, basterà ricordare quanto accennato poco sopra: già da giovane, nel periodo romano della sua carriera, Tricomi ha portato avanti studi fondamentali sulle equazioni differenziali parziali, il suo lavoro più importante[19] aveva come oggetto le equazioni di tipo

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

che oggi sono universalmente conosciute con il nome "Equazioni di Tricomi". Sono le equazioni che hanno governato la ricerca teorica del volo a velocità prossime a quello del suono.

Dal punto di vista della vita privata, il meno che si può dire è che non è stata facile, come proverbialmente non era facile il suo carattere; non era affatto disponibile a piegarsi all'autorità, specie se non riconosceva il diritto di esercitarla; era dichiaratamente antifascista, cosa che non rendeva semplice la vita a un docente che esercitava durante il Ventennio. Durante la guerra si trasferisce con moglie, madre e zia (tutta la famiglia che gli restava) a Torre Pellice[20]; forse per intimo convincimento, forse anche solo perché era tra le confessioni religiose più invise al fascismo, già da tempo Tricomi aveva abbracciato

[13] "*Sublimato all'un per mille*", RM136, maggio 2010.

[14] "*Tolleranza Zero*", RM098, marzo 2007.

[15] "*Sineddochi*", RM067, agosto 2004.

[16] "The Bateman Project": nato inizialmente per raccogliere le opere del matematico americano Harry Bateman da poco scomparso, si trasformò presto in un grande progetto generale di studio e catalogazione delle funzioni.

[17] Vedi nota 10.

[18] Vedi nota 10.

[19] "*Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto*", Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Memorie Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, (5) 14, 1923, pp. 133-247.

[20] Per quanto piccola, con neanche cinquemila abitanti, Torre Pellice è da quasi mille anni il principale centro italiano dei Valdesi, che vi trovarono rifugio dalle persecuzioni francesi nel XII secolo.

la fede valdese, e la scelta di rifugiarsi a Torre Pellice era pertanto quasi inevitabile. Lascia comunque la capitale della sua fede con l'avvento della Repubblica Sociale di Salò, perché la sua fama di oppositore al regime ne mette in pericolo immediato la vita: torna allora a Roma, ospite del pastore valdese Paolo Bosio.

Anche a Roma la vita è difficile, nel 1944, e lo è soprattutto per gli ebrei, e Francesco Tricomi si dedica al tentativo di dare aiuto e protezione ai molti colleghi romani di religione ebraica. È significativo il ricordo che di lui ha lasciato Emma Castelnuovo[21]:

> *"Ecco di Tricomi, che aveva un carattere infame ed era noto per questo, devo dire che ci ha aiutato moltissimo. Quando i miei genitori sono venuti via da questo istituto religioso che era diventato pericoloso, Tricomi, che da Torino era venuto a Roma per cercar di attraversare le linee, era entrato in contatto con noi e ricordo che mi ha detto: "avrei una pensioncina tenuta da due signore anziane in via Liguria. Gliene posso parlare. Però non bisogna dirgli perché, perché se no queste si mettono troppa paura. Deve andare col nome Cafiero". Così, mio padre e mia madre hanno passato lunghi mesi in questa pensione e la Liberazione di Roma, il 4 giugno del '44, loro erano ancora lì. Io, che mi trovavo vicino a piazza Istria, corso Trieste, ho visto appunto arrivare gli americani lungo via di Santa Costanza e allora sono andata a piedi a dirglielo e poi eravamo tutti lì. Così dopo, alla fine, l'hanno detto anche a queste signore che si sono salvati in questo modo. Quindi il rapporto con Tricomi è stato veramente eccezionale, anche perché non avevamo nessun rapporto prima."*[22]

Anche Emma Castelnuovo accenna al carattere difficile di Francesco Tricomi, anche se lo fa soprattutto per mettere in risalto come a quel carattere apparentemente scostante facesse riscontro una nobiltà d'animo certamente straordinaria. E se le umane difficoltà della vita certo non contribuirono ad addolcirne l'animo – basti ricordare che perse la compagna di vita, Susanna Fomm, dopo quasi trent'anni di matrimonio – ci piace pensare che in fondo sapesse anche cogliere aspetti divertenti anche nei momenti più difficili. È forse significativo l'episodio del suo contrasto con il matematico austriaco Wilhelm Blaschke, con cui aveva rapporti professionali per corrispondenza. Blaschke, nazista convinto, si scandalizzò per le lodi che Tricomi aveva fatto ad una pubblicazione diretta da un ebreo, e arrivò al punto di denunciarlo come antifascista (non si può certo negare che la denuncia fosse ben indirizzata, del resto). Questo comportò ovviamente che Tricomi entrò nel mirino dell'OVRA, con controlli, pedinamenti e soprattutto con intercettazioni telefoniche. Non appena si rese conto della cosa, Tricomi chiese a Eugenio Frola, che a quel tempo era suo assistente, di utilizzare sempre il telefono per discutere con lui delle questioni matematiche: il suo commento sull'accaduto è quello riportato nella citazione in testa a questo articolo.

Burbero, senza dubbio: ma certo non privo di senso dell'umorismo.

---

[21] C'è un compleanno anche per lei: "*Emmatematica*", RM191, dicembre 2014.

[22] Brano tratto dall'intervista a Emma Castelnuovo curata da Roberto Natalini e Maurizio Mattaliano, nel volume "Lettera Matematica Pristem" n. 52.

2. Problemi

2.1 Riaprono (almeno) le piscine?

...se speravate che tra i grandi impatti del *lockdown* ci fosse anche quello di far uscire RM per tempo, ci spiace disilludervi: anche se Piotr ha migliorato i suoi tempi, adesso è Rudy che, per una serie di impegni, si ritrova ad essere in ritardo.

Comunque, quantomeno questa situazione ha un pregio: ci permette un'ambientazione di un vecchio problema più ragionevole di quella originale. Sempre nella speranza che, in un futuro più o meno prossimo, giustappunto riaprano le piscine.

Ci troviamo a fare da consulenti matematici ad un gruppo di istruttori di nuoto che, appurata una certa proficuità delle lezioni precoronavirus (nel senso che non è annegato nessuno e, a quanto pare, gli allievi hanno imparato a nuotare) ha deciso di organizzare la tradizionale gara di nuoto di fine anno; volendo però mantenere il rispetto delle norme di distanziamento sociale (anche perché una mascherina nei cento farfalla non ci sembra esattamente un prolegomeno al record mondiale), la decisione dell'augusto consesso è di utilizzare *solo tre corsie* della piscina; non solo, ma il formato della gara è piuttosto strano.

Alla *finale* parteciperanno tre allievi, e sin qui tutto bene; abbiamo giustappunto tre corsie. Il difficile arriva nell'organizzare le *eliminatorie*: abbiamo a disposizione sempre e solo tre corsie, inoltre in questa fase (per evitare incresciose scene da parte dei tifosi – giusto i parenti stretti e ben distribuiti sugli spalti, tranquilli) vorremmo che ogni partecipante facesse lo stesso numero di gare, e che due qualsiasi nuotatori non competano mai in più di due gare (sempre solo per le eliminatorie: la finale è un'altra cosa). Non solo, ma la piscina deve essere "sempre piena", nel senso di avere sempre tre e solo tre atleti in gara.

Per semplificarsi la vita e avere una traccia, i nostri validi insegnanti hanno cominciato a cercare di capire come funziona un caso semplice, supponendo di avere *cinque* partecipanti alla gara; questo giusto per capire come funziona la cosa, visto che sanno già che alla gara parteciperanno in *dieci*.

...e per un generico n, come girerebbe la cosa?

Oh, prendetevela pure calma: tanto, anche se riaprono le piscine, i nostri validi sportivi avranno le capacità atletiche di un bradipo catatonico.

2.2 Giusto per passare il tempo...

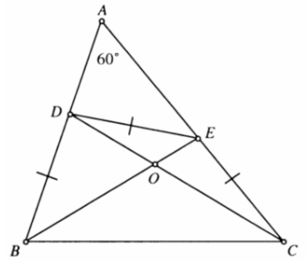
Per una serie di motivi che non andremo ad esplorare (e che probabilmente non vi saranno mai visibili), Rudy si ritrova a fare esperimenti con un mucchio di dadi alla forma strana, non necessariamente in esemplare singolo; recentemente, si chiedeva quanto ci fosse da guadagnare giocando onestamente un paio di giochi, e ha cominciato a fare esperimenti contro sé stesso usando, come capitale iniziale, la sua abnorme collezione di monete da un centesimo.

Il primo gioco consiste nel puntare (contro il banco) due centesimi; questo vi dà il diritto di lanciare due dadi a sei facce per i quali vincerete la *differenza* (il maggiore meno il minore: su, siate seri, che dobbiamo restare chiusi in casa assieme per un mucchio di tempo) in centesimi tra i valori dei due dadi, tranne nel caso vi esca un "doppio sei" nel qual caso vincete un lancio gratuito. Secondo voi, il gioco è onesto? E, se no, quanto dovreste puntare per renderlo tale?

Per il secondo gioco, ci serve un *dado a due facce* (altrimenti noto come "monetina"); questo viene lanciato ripetutamente, e se compare per prima la sequenza *Croce-Croce-Testa* vincete due centesimi, mentre se compare prima la sequenza *Testa-Croce-Croce* ne perdete uno. Questo, secondo voi, è onesto? Oh, nel caso non lo sia, vale la stessa domanda del caso precedente.

Eh? Per quanto possiamo andare avanti? Mah, all'ultimo conteggio erano sei euro e cinquantasette centesimi...

3. Bungee Jumpers



Nel triangolo ABC, sia D su AB e E su AC in modo tale che BD=DE=AC. Dimostrate che, se l'angolo in A è di 60°, BE e CD si intersecano nel circocentro di ABC.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Maggio! Lo sapete, vero, che c'è il compleanno del nostro Doc? fategli gli auguri, anche in ritardo va tutto bene.

Ancora a casa? Anche noi. Sarebbe bello avere meno lavoro, ma si fa un po' quello che si deve. Il mese scorso ci siamo persi qualche soluzione, quindi abbiamo una sezione bella piena, bando alle ciance! Cominciamo dai problemi del mese passato.

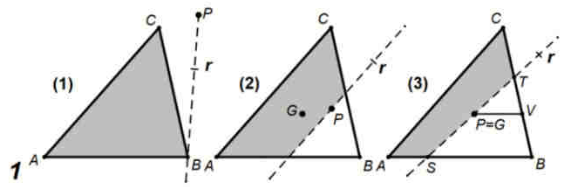
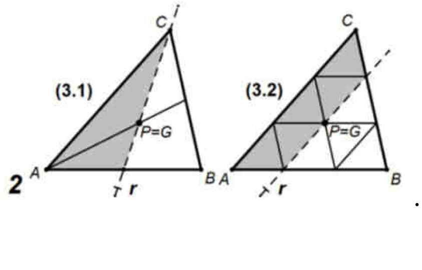
4.1 [254]

4.1.1 Arrivano le feste!

Lo sappiamo, questo problema sembrava chiuso, ma di soluzioni ne sono arrivate ancora di interessanti, che propongono nuovi sviluppi. Ma cominciamo dall'inizio, cioè dal testo:

> *Abbiamo delle torte triangolari di area unitaria tutte diverse tra loro disposte su un tavolo sostanzialmente illimitato e due persone per la procedura di divisione. Il primo definisce un punto X sul tavolo, il secondo effettua un taglio passante per X e sceglie la fetta. Ciascuno dei due vuole fare in modo che la propria fetta sia della massima dimensione possibile, esiste un metodo che permetta ai nostri due eroi di essere, nei limiti della procedura, entrambi convinti di aver ottenuto il meglio?*

Il mese scorso avete letto le soluzioni di ***.mau.***, ***Valter***, ***Luigi*** e ***Salvatore***. Vediamo ora che cosa ne pensava ***trentatre***:

> Siano *T*: un triangolo di forma qualsiasi, di vertici *A*,*B*,*C* e area unitaria – *P* il punto scelto da *Rudy* – *r*: la retta per *P* scelta da Doc – *f*: la dimensione della fetta massima ritagliata da *r* su *T*.
>
> 
>
>
> A seconda della scelta di *P* si hanno i tre casi di fig. 1 (in grigio la fetta)
>
> (1) *P* esterno a *T* – *Doc* sceglie *r* passante per un vertice e la fetta massima è grande come *T* cioè $f = 1$
>
> (2) *P* interno a *T* ma diverso dal baricentro *G*
>
> - la retta *r* si può scegliere in modo da avere $f > 5/9$ (v. caso 3.2 in fig. 2)
>
> (3) *P* coincide con il baricentro *G* – si hanno i due sotto casi (v. fig. 2)
>
> (3.1) $f = 1/2$ se *r* passa per un vertice
>
> (3.2) $f = 5/9$ se *r* è parallela a un lato (*T* si divide in 9 triangoli uguali).
>
> 
>
> .

La scelta migliore corrisponde al caso (3.2) perché *Rudy* minimizza il danno con la fetta che non supera $f = 5/9$, cosa che invece avviene per qualsiasi scelta diversa di *P*, mentre *Doc* ha, dato *P*, il massimo vantaggio.

Nel caso (3) si può ricavare dai due triangoli simili *STB* e *GVT* che l'area del triangolo *BST*, con il parametro $x = SB/AB$, vale

$$g(x) = x^2/(3x-1)$$

- da cui i valori limite previsti in fig. 2

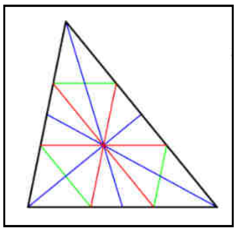
$$g(1/2) = 1/2,\ g(2/3) = 4/9$$

- derivando la funzione si ha un minimo in $x = 2/3$ e quindi la fetta massima è effettivamente $f = 1 - 4/9 = 5/9$.

Effettivamente ***trentatre*** ha mandato questa soluzione ben *tre volte*, preoccupato dei nostri problemi postali ma anche dei risultati proposti il mese scorso. Peschiamo la parte meno sarcastica del suo commento:

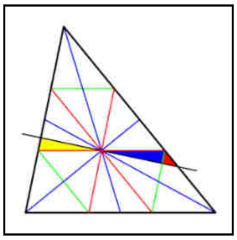
(…) Penso abbia influito anche il copia e incolla da internet: la definizione di baricentro in Wikipedia – ripetuta in altri siti – è del tutto insensata (mentre è corretta, nella stessa voce, l'importante informazione che i *Baricentro* sono stati un gruppo musicale progressive rock, originario di Monopoli).

Importante dettaglio…. ma come, le fette non sono uguali? Ma non avevano detto tutti… Aspettate, leggiamo prima la versione di ***Rethi***:

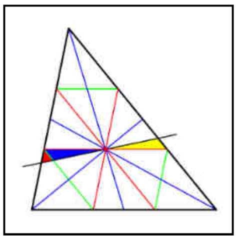


Rudy sceglie il baricentro della torta triangolare, assicurandosi almeno otto diciottesimi della torta, quindi Doc taglia la torta parallelamente ad uno qualsiasi dei suoi lati e sceglie la fetta che comprende quel lato, prendendone dieci diciottesimi, il massimo che poteva ottenere.

Diciottesimi! non noni. Prendiamo un triangolo qualsiasi e tracciamo in blu le tre mediane: abbiamo trovato il baricentro (il punto X). Quindi disegniamo in rosso i tre tagli che potrà fare Doc, linee parallele ai lati che passano per il baricentro. Questi tagli sono posti esattamente ad un terzo delle relative altezze. Infine, questa volta in verde, aggiungiamo anche linee parallele ai lati poste a due terzi delle altezze. Otteniamo così diciotto triangoli più piccoli, tutti di area uguale.

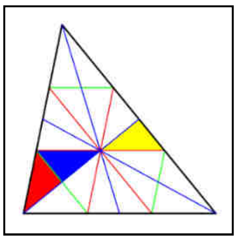


Se contiamo questi piccoli triangoli vediamo che rispetto alle linee blu (mediane) ve ne sono nove da ciascuna parte, mentre tutte le linee rosse (i possibili tagli di doc) ne lasciano dieci da un lato ed otto dall'altro.



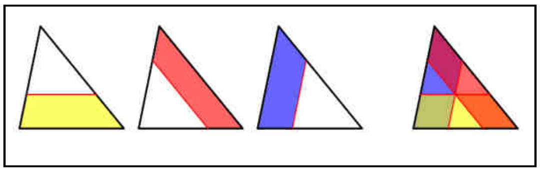
Risolviamo per prima la seconda parte del problema, laddove Doc è vincolato a far passare il suo taglio per il baricentro (punto X scelto da Rudy). Cosa accadrebbe se Doc, rispetto ad uno dei tre tagli paralleli ai lati, ruotasse l'infinito coltello in senso orario o antiorario, facendo perno sul baricentro?

In qualsiasi verso si ruoti il coltello, alla fetta grande (i dieci diciottesimi di prima) si deve aggiungere l'area evidenziata in giallo (nelle figure a fianco) e sottrarre le aree blu e rossa. Ma il triangolo giallo e quello blu sono congruenti, quindi, in totale, si ottiene una perdita di area pari a quella del triangoletto rosso.



Più si ruota il coltello, più il triangoletto rosso diventa grande, più la porzione di Doc si alleggerisce, fino a quando il coltello non incontra un vertice della fetta di torta e si trova dunque allineato con una delle tre mediane. La perdita, a questo punto, è diventata pari ad un intero diciottesimo dell'area totale: da dieci a nove triangoli la fetta grande, da otto a nove la piccola, ora le due fette hanno area uguale. Continuando a girare, una fetta si ingrandisce e l'altra rimpicciolisce fino a ritornare nella situazione di partenza lungo un'altra linea rossa. Da lì, il ciclo si ripete. Fissato X nel baricentro, le linee di taglio parallele ai lati massimizzano la grandezza della fetta di Doc.

Occupiamoci, ora, della prima parte. Si poteva scegliere un punto più conveniente? Tralasciando quelli esterni alla torta (altrimenti a Rudy non restano che le briciole), un punto diverso dal baricentro sarebbe una scelta migliore se e solo se non concedesse a Doc la possibilità di ritagliarsi una fetta di torta più grande dei dieci diciottesimi che si ottengono con la scelta del baricentro. Questa condizione esclude tutti i punti che distano, da un qualsiasi lato, più di un terzo della relativa altezza (distanza delle linee rosse), altrimenti basterebbe tagliare la torta parallelamente al lato medesimo per ottenere una fetta ancor più grande.



Ne derivano tre condizioni da verificare, ognuna relativa ad un lato, ed ognuna soddisfatta dall'area del trapezio compresa tra il lato e la sua parallela passante per un terzo dell'altezza. Ma queste tre aree non hanno punti in comune, all'infuori del baricentro.

A questo punto è chiaro, qualcuno ci può sempre guadagnare. La posizione di ***Alberto R.***:

Nelle soluzioni al problema "Arrivano le feste!", pubblicate sul numero di aprile, si assume che qualunque retta passante per il baricentro di un triangolo lo divide in due parti aventi la stessa area.

Non è vero. Ciò succede solo se la retta passante per il baricentro passa anche per un vertice (cioè contiene una mediana). Diversamente la parte quadrangolare è maggiore della parte triangolare. La differenza diventa massima quando la retta passante per il baricentro è parallela a uno dei lati. In tal caso l'area del trapezio è 5/9 dell'area del triangolo di partenza e al triangolino residuo restano i 4/9

Ciò non toglie che il baricentro sia per Rudy la scelta migliore perché se scegliesse un qualunque altro punto P, Doc potrebbe tracciare una retta per P che ritaglia una fetta maggiore dei 5/9 dell'intera torta. Dunque i solutori sono stati decisamente fortunati perché sono giunti alla conclusione giusta partendo da una premessa sbagliata!

Per inciso osservo che se qualunque retta passante per il baricentro di una superficie la bisecasse, in statistica non avrebbe senso la distinzione tra "media" (ascissa del baricentro dell'area sottesa dalla curva di distribuzione) e "mediana" (ascissa della retta verticale che biseca detta area).

Non ci dilunghiamo, una distrazione è una distrazione, una "mediana" è una "media" con la "na". Ma è così, lo dice anche ***Tommaso***:

Un'osservazione sul bel problema della torta nel numero 254. Il punto scelto per il taglio sarà giustamente il baricentro. Il tagliatore, praticando un taglio passante per i vertici, dividerà la torta in 2 metà uguali. Tuttavia, ruotando il taglio in modo continuo, aumenterà l'area di una parte a scapito dell'altra finché il taglio non arriverà ad essere parallelo ad uno qualsiasi dei lati. In tale configurazione una parte avrà area 4/9 e l'altra 5/9, e ciò si vede contando i 9 triangoli simili tagliati dalle 3 linee parallele ai lati passanti per il baricentro. Si tratta quindi di un gioco in cui chi sceglie il punto parte perdente rispetto a chi taglia e sceglie la parte, contrariamente a ogni galateo.....

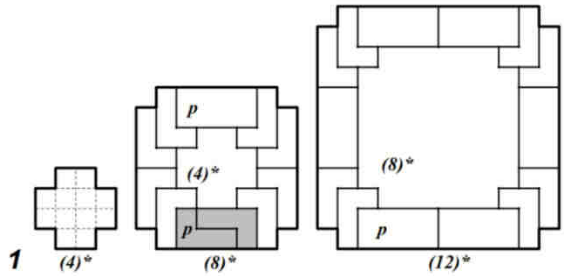
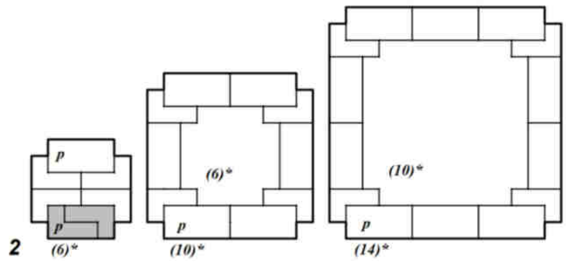
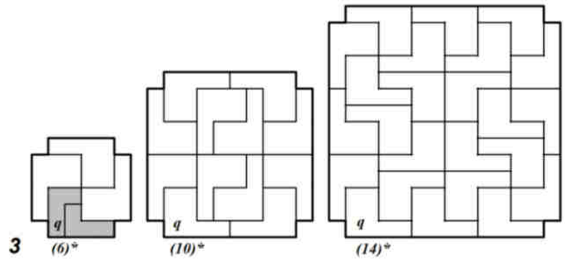
Pazienza. Andiamo avanti.

4.1.2 Tetri(s) avanzi

Ancora una soluzione per questo problema, che sarebbe:

> *Data una scacchiera N×N cui mancano le quattro caselle d'angolo, per quali valori di N potete tassellare la scacchiera con le "L"?*

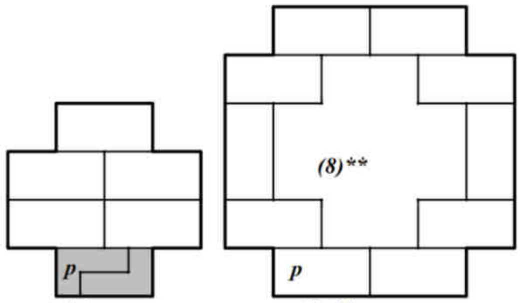
Il mese scorso abbiamo pubblicato la soluzione di ***Valter*** e ***GaS***, ma ci siamo persi quella di ***trentatre***, che era in posta, ma in qualche modo bloccata. Eccola:

> Indico con $\boldsymbol{L}$ il tetramino a forma di L e con $(A)^*$ il quadrato di lato A privato delle 4 caselle angolari. $\boldsymbol{L}$ comprende 4 caselle e in $(A)^*$ il numero m di $\boldsymbol{L}$ è dato da $A^2 - 4 = 4m$. I valori ammessi sono quindi
>
> $$[1]\quad \begin{array}{c|cccccccc} A & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & \ldots \\ m & 3 & 8 & 15 & 24 & 35 & 48 & 63 & \end{array}$$
>
> I casi con m dispari non sono costruibili con solo $\boldsymbol{L}$.
>
> 
>
>
> In fig. 1 i primi casi dove
>
> - ***p*** indica il rettangolo composto da due ***L***
> - (4)* non è costruibile con 3 ***L***
> - (8)* comprende (4)* e (12)* comprende (8)* quindi non sono costruibili
> - si hanno di seguito tutti i casi $(4k)^*$, $k \geq 1$ cioè i valori m dispari di [1].
>
> Sono invece costruibili con soli ***L*** i casi con m pari.
>
> 
>
>
> In fig. 2 i primi casi dove
>
> - (6)* è costruibile con soli ***L***
> - (10)* contiene (6)* e (14)* contiene (10)* quindi sono costruibili
> - si hanno di seguito tutti i casi $(2+4k)^*$, $k \geq 1$ cioè i valori m pari di [1].
>
> 
>
>
> In fig. 3 una diversa soluzione, composta solo di elementi ***q*** (ognuno fatto di due ***L***). La soluzione si estende a tutti i casi con m pari.

Aggiungo il caso con i quadrati privi di 4 caselle in ogni angolo, che indico con (A)** il numero m di $\boldsymbol{L}$ è dato da $A^2 - 16 = 4m$, e i valori ammessi sono

[2]								
A	6	8	10	12	14	16	18	...
m	5	12	21	32	45	60	77	

Anche qui non sono costruibili i casi con m dispari a partire da (6)** e lo sono invece tutti quelli con m pari.



4 *(8)*** *(12)***

In fig. 4 i primi due casi, composti di soli elementi $\boldsymbol{p}$ che si possono estendere a tutte i $(4+4k)**$, $k \geq 1$ cioè i valori m pari di [2].

La limitazione delle figure costruibili è strettamente legata al fatto che $\boldsymbol{L}$ non è simmetrico, e non si applica agli altri tetramini. In generale una figura con <u>perimetro simmetrico</u> (cioè invariante per ribaltamenti o rotazioni) e con m <u>dispari</u> non può essere riempita con soli $\boldsymbol{L}$. Non ho una dimostrazione completa, ma per ogni caso si può seguire lo schema della fig. 1, letta da destra a sinistra. Riducendo la figura a partire dal perimetro, togliendo successivamente coppie di $\boldsymbol{L}$ simmetriche, si arriva a una figura residua centrale, simmetrica per costruzione, con m dispari, e abbastanza piccola da essere nota come non risolubile.

La cosa funziona anche per forme non quadrate e in particolare per i semplici rettangoli di lati A, B, costruibili solo con m pari, cioè con $A \times B = 8k$, $k \geq 1$.

E dopo questo passiamo alle soluzioni del mese scorso.

4.2 [255]

4.2.1 Torta al piquerre

Il nome della torta, ovviamente, dipende dai suoi vertici:

La torta triangolare e scalena di vertici P, Q e R viene divisa come segue:

1. *Doc sceglie un punto X su PQ.*
2. *Rudy sceglie un punto Y su QR.*
3. *Doc sceglie un punto Z su PR.*

Tagliato il triangolo lungo le linee che uniscono i punti X, Y e Z, Doc ottiene l'area XYZ, mentre Rudy il resto: che logica seguono i nostri, per ottenere il massimo?

E se il Doc intendesse massimizzare il perimetro della sua fetta?

L'ultima domanda era un'estensione del problema, ma non perdiamoci in discussioni, partiamo subito con la risposta di ***Lorenzo***:

Doc riesce ad assicurarsi un quarto della torta.

Una volta che Doc ha scelto un punto X su PQ, per minimizzare l'area del triangolo XYZ Rudy deve prendere Y in modo tale che XY sia parallelo a PR (e quindi la successiva scelta di Z sul lato PR è indifferente). Infatti, se prendesse Y più prossimo a Q (risp. a R), allora Doc sceglierebbe Z = R (risp. = P), aggiudicandosi così un'area maggiore.

Per massimizzare il risultato finale, Doc deve allora far coincidere X con il punto di mezzo del lato PQ.

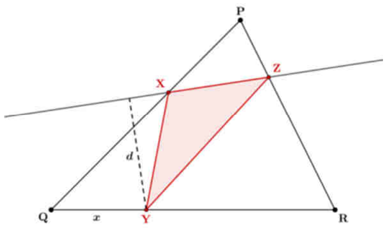
> Per il momento è tutto, all'estensione non ho ancora pensato!

Bene, è già un buon inizio. Vediamo la versione di ***Valter***:

> Doc sa che Rudy, per minimizzare l'area, deve scegliere Y alla stessa altezza, rispetto a PR, di X.
>
> Per quanto segue nella mia esposizione, assumo che Doc scelga come Z il punto centrale del lato PR.
>
> Non si perde di generalità: data la scelta di Rudy, ovunque sia posto Z l'area di XYZ è la stessa.
>
> I triangoli XYZ, XYP e XYR, in questo modo hanno la stessa area avendo base XY e altezza in comune.
>
> Se scegliesse un punto più in alto, Doc, indicando come Z il punto R, otterrebbe un'area più grande.
>
> Il triangolo XYR avrebbe, infatti, stessa altezza rispetto a YR del precedente ma base YR maggiore.
>
> Ragionamento simile se Rudy scegliesse il punto Y più in basso: Doc indicherebbe come Z il punto P.
>
> Il triangolo XYP avrebbe la stessa base XP del precedente ma la sua corrispondente altezza maggiore.
>
> Date queste premesse, Doc deve individuare come collocare il punto X su PQ per massimizzare l'area.
>
> Noto che Doc deve minimizzare e Rudy massimizzare la somma delle aree dei triangoli XYQ, XPZ e YZR.
>
> Indico con H_1 e H_2 le altezze in verticale del triangolo XYQ e dei triangoli XPZ/YZR rispettivamente.
>
> L'altezza H di XYZ è la somma di H_1 e H_2, quindi: $H_1 = H^*\boldsymbol{\eta}$ e $H_2 = H^*(1–\boldsymbol{\eta})$, con $\boldsymbol{\eta}$ compreso fra 0 e 1.
>
> I triangoli XYQ e PQR sono simili quindi hanno i lati e le rispettive altezze sono proporzionali.
>
> Da ciò si ricava che le aree dei triangoli XYQ e XPZ+YZR valgono: $(PR^*H^*\ \boldsymbol{\eta}^2)/2$ e $(PR^*H^*(1–\boldsymbol{\eta}))/2$.
>
> Il minimo della somma delle aree si ha con $\boldsymbol{\eta}$=½; Doc quindi sceglie il punto centrale di PQ come X.
>
> Concludendo di pare quindi che l'area di XYZ dovrebbe valere ¼ dell'area totale del triangolo PQR.
>
> Per l'espansione posso solo contribuire con qualche farneticazione; … sempre che abbiamo un senso.
>
> Penso che le strategie di Doc/Rudy dipendano dal rapporto fra lunghezza della base PR e sua altezza.
>
> Provo a giustificare in qualche modo, non proprio rigoroso, la mia affermazione senza dettagliare:
>
> - se la base è molto piccola rispetto all'altezza Doc come X sceglie un punto molto vicino a Q
>
> - se l'altezza è molto piccola rispetto alla base Doc, invece, sceglie un punto vicino a P o R
>
> - per un triangolo equilatero, da alcuni miei tentativi empirici, mi pare che X sia a metà strada
>
> - da tutto ciò direi che X si sposti da Q verso la base man mano che il rapporto base/altezza sale.

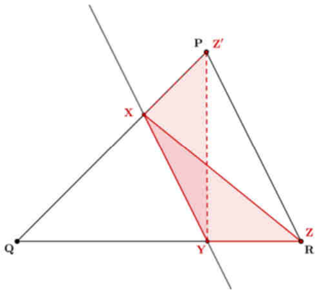
Anche senza figure sembra essersela cavata. Questo è mese di grandi ritorni, per esempio il ***Panurgo***, che ha qualcosa da dire:

Fissati i punti X e Z, l’area del triangolo XYZ è proporzionale alla distanza del punto Y dalla retta passante per X e Z



Se la pendenza della retta è positiva l’area cresce al crescere della distanza x tra Q e Y; viceversa, se la pendenza è negativa, l’area diminuisce al crescere di x.

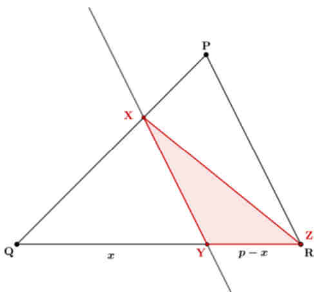
Tracciamo la retta per X parallela a PR e poniamo Y nell’intersezione della retta con QR



quindi consideriamo i triangoli XYZ e XYZ’, con Z uguale a R e Z’ uguale a P: le aree dei due triangoli sono uguali perché hanno la stessa base e il vertice su una retta parallela alla base stessa; la retta per X e Z ha pendenza negativa per cui l’area di XYZ aumenta spostando il punto Y verso Q; viceversa, la retta per X e Z’ ha pendenza positiva e l’area di XYZ’ aumenta spostando il punto Y verso R.

Dato che Doc è libero di posizionare Z come vuole la posizione in figura corrisponde al miglior risultato per Rudy.

La posizione del punto Z è ininfluente cosicché Doc può massimizzare l’area di XYZ (e soddisfare al meglio la sua voracità) solo scegliendo accuratamente la posizione del punto X.



Osserviamo che il triangolo XQY è simile al triangolo PQR per cui la sua altezza (che è uguale a quella del triangolo XYZ) è proporzionale a x: l’area di quest’ultimo è, di conseguenza, proporzionale a $x(p-x)$.

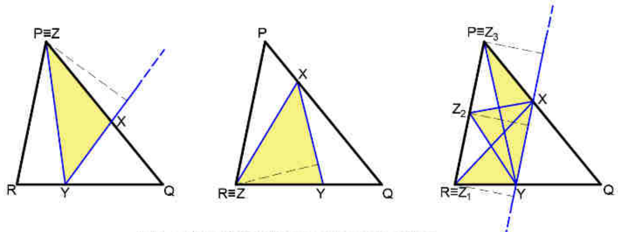
Il prodotto di due numeri a somma costante è massimo quando i due numeri sono uguali quindi Doc sceglierà X nel punto medio di PQ, Rudy sceglierà Y nel punto medio di QR e l’area di XYZ sarà un quarto di quella di PQR.

Aveva ragione il Capo, che l’entusiasmo in *lockdown* nel tagliare torte è al suo picco. Ecco qui la versione di ***Rethi***:

Doc fissa X nel punto medio del lato PQ della torta triangolare, Rudy sceglie Y nel punto medio del lato QR, infine Doc può scegliere uno qualsiasi dei punti sul lato PR, la sua fetta sarà sempre pari ad un quarto della torta intera.

<u>La seconda scelta di Doc.</u>

Doc e Rudy hanno già scelto X e Y, ora Doc deve posizionare Z. La sua scelta è semplice. Poiché il lato XY del triangolo XYZ è già stato fissato, Doc sceglierà il punto Z il più lontano possibile dalla retta che passa per X e per Y, massimizzando l'altezza relativa alla base XY e di conseguenza l'area del triangolo XYZ.



I tre casi possibili per la seconda scelta di Doc.

Vi sono tre possibilità:

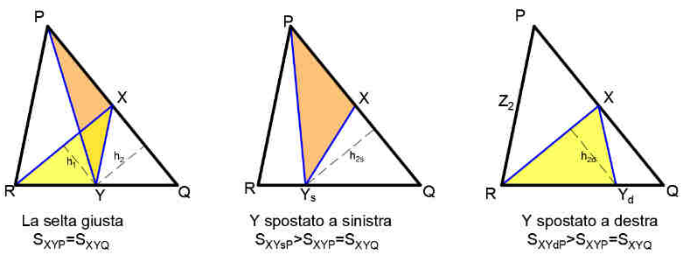
1. il punto più lontano è P
2. il punto più lontano è R
3. P, R e tutti i punti del segmento di cui sono estremi sono equidistanti dalla retta che passa per X e Y (nel caso XY sia parallelo a PR).

In tutti e tre i casi Doc potrà scegliere P o R. (questa considerazione ci servirà per risolvere la seconda parte)

<u>La scelta di Rudy.</u>

Rudy sa che dopo la sua scelta, Doc potrà scegliere P oppure R per massimizzare la sua fetta, quindi il triangolo finale XYZ coinciderà o con XYP oppure con XYR.

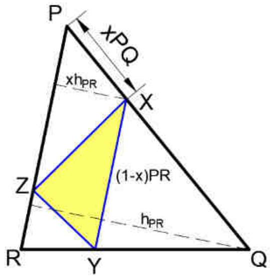
1. Nel caso sarà XYP, il lato XP è fisso, e spostando Y da Q verso R se ne aumenta linearmente la relativa altezza (partendo da un'area pari a 0), aumentando di conseguenza l'area di XYP.
2. Nel caso in cui il triangolo finale sarà XYR, sarà fisso il lato XR, e questa volta l'area aumenterà linearmente (sempre partendo da 0) spostandosi lungo il lato QR in senso inverso al caso precedente, ovvero da R verso Q, poiché così facendo si aumenta l'altezza relativa alla base XR.

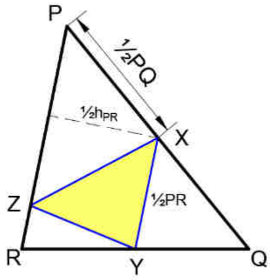


La scelta di Rudy.

Rudy deve difendersi da entrambe le possibilità, se sposta Y verso R l'area di XYP aumenta e quella di XYR diminuisce, se sposta Y verso Q l'area di XYP diminuisce, ma quella di XYR aumenta. La scelta di minimo per Rudy equivale quindi a scegliere Y in modo che le due aree coincidano e di conseguenza sceglierà un punto in cui la scelta successiva di Doc, P o R, sia indifferente, ovvero farà in modo che XY sia parallelo a PR.

<u>La scelta iniziale di Doc.</u>





Doc sa cosa accadrà dopo la sua scelta e quindi può fare i calcoli. Indicata con $x\overline{PQ} = \frac{\overline{PX}}{\overline{PQ}}\overline{PQ}$ la posizione di X su PQ, se h_{PR} è l'altezza del triangolo originario relativa al lato PR, il triangolo XYZ avrà altezza pari a xh_{PR} e base (XY) pari a $(1-x)\overline{PR}$. Possiamo calcolare quindi l'area S_{XYZ}:

$S_{XYZ} = x(1-x)S_{PQR}$.

Poiché $\frac{d}{dx}(x-x^2) = 0$ per $x = \frac{1}{2}$, tale area è massima per $x = \frac{1}{2}$, ovvero X va scelto nel punto medio di PQ. L'area di XYZ sarà:

$S_{XYZ} = \frac{1}{4}S_{PQR}$.

Il risultato sembra essere sempre lo stesso, così la vostra impaginatrice si è un po' stufata ma ci tiene a citare a questo punti i vari solutori: ***Luigi***, ***trentatre***, ***Alberto R.***, ***Tommaso***. Complimenti a tutti, cominciamo a mettere a dieta il Doc proprio nel mese del suo compleanno.

Andiamo avanti, siamo di nuovo in ritardo.

4.2.2 Maschie fatiche postprandiali

Ad una persona di cui non darò i riferimenti, obiettore di coscienza, era stato dato un lavoro d'ufficio. Il primo mese era stato piazzato in una specie di magazzino con una gran quantità di etichette e faldoni, con il compito di catalogare con un certo criterio tutto quello che trovava in uno scaffale e di sistemare il tutto in un certo ordine su un secondo scaffale. Con buona lena e tanta buona volontà, in un paio di settimane il lavoro era completo, e il nostro eroe pronto per un altro lavoro. A questo punto un altro criterio ed un'altra serie di etichette viene fornita al povero malcapitato, per riporre tutti i documenti appena catalogati sullo scaffale di partenza. Il nostro eroe a questo punto decide che il lavoro può essere affrontato diversamente, si organizza con i faldoni un bel lettino e passa le giornate successive a dormirsela. Ecco, il secondo problema del mese mi fa proprio pensare a quella situazione:

> *Avendo a disposizione una collezione infinita di monetine e di più di duemila scatole vuote, i nostri mettono una monetina nella prima scatola, due monetine nella seconda scatola, …, duemilaventi monetine nella duemilaventesima scatola (su ogni scatola c'è scritto quante monetine ci sono dentro).*
>
> *Per svuotare le scatole, per ogni "giro", viene definito un sottoinsieme della totalità delle scatole; da ognuna delle scatole del sottoinsieme viene poi tolto lo stesso numero di monetine; si aggiornano le scritte sulle scatole e si ricomincia da capo. Qual è la strategia migliore per svuotare nel minor tempo possibile?*

A strettissimo giro di posta dopo la distribuzione della nostra newsletter, arriva il commento di ***.mau.***:

> Per il problema 2, io scriverei in binario 2020 ottenendo 11111100100; in undici passaggi dicotomici, togliendo prima 1024 monete da tutte le scatole che ne hanno almeno 1024, poi 512 monete da tutte quelle che ne hanno almeno 512, e così via, riusciamo ad azzerare il tutto. Per dimostrare che è il minimo, basta vedere che a ogni passo dobbiamo cercare di ridurre al minimo il maggior numero di monete in una scatola, e quindi occorre dimezzare il massimo valore presente; se se ne tolgono

di meno una scatola "grande" ne avrà di più, se se ne tolgono di più una scatola "oltre la metà" ne avrà di più.

Con lui è senz'altro d'accordo ***Luigi***:

Premesso che considero la migliore strategia di svuotamento quella che prevede il minor numero di "giri" e che il numero di monetina da togliere da ogni scatola deve essere ≤ al numero minimo di monetine contenuto in ognuna delle scatole del sottoinsieme che viene di volta in volta scelto, si può definire una procedura che impiega $\log_2 n$ "giri" con n pari al numero di scatole.

Nel nostro caso i giri necessari saranno 12.

Indichiamo con p il numero di monetine entro ciascuna scatola

Partendo con n scatole possiamo procedere come segue:

1° giro: si prendono tutte le scatole con $p > (n/2)$ e si tolgono da tutte $n/2 +1$ monetine

Dopo il primo giro tutte le scatole avranno un numero di monetine $p \leq n/2$

2° giro: ponendo $n = n/2$ si ripete la procedura

Si continua così fino ad arrivare ad n=1 giro che svuoterà tutte le scatole.

Dimostrazione: cosa c'è di più efficiente di una ricerca binaria?

La stessa strategia è quella di ***Lorenzo***:

Finché non tutte le scatole sono vuote, sia m (> 0) il massimo numero di monete contenute in qualche scatola, e sia k = ceiling(m/2); da tutte le scatole che contengono almeno k monete, se ne tolgono k.

Se inizialmente le scatole sono n, contenenti da 1 a n monete, rispettivamente, il numero di iterazioni (o "giri") per avere infine tutte le scatole vuote è dato da

floor(log2(n)) + 1

che è uguale al numero massimo di confronti per la ricerca binaria (che sappiamo ottima) di un elemento in un elenco ordinato, e ad accesso diretto, di n elementi.

Nell'istanza del problema qui proposta il numero di "giri" è dunque 11, e in generale, almeno fino al penultimo giro, il numero di scatole che si svuotano è il doppio del numero di quelle che si sono svuotate al giro precedente; e all'ultimo giro si svuotano tutte le scatole che sono rimaste con una sola moneta.

naturalmente, al primo giro si svuota una sola scatola...

A questo punto la strategia ci sembra abbastanza chiara, ma la dimostrazione un po' meno esistente. Vediamo la versione di ***GaS***:

Trovare la strategia migliore è abbastanza "intuitivo", trovare la dimostrazione che sia ottimale non è invece banale (almeno per me). Cominciamo, quindi, dal primo aspetto.

Strategia

Detto N il numero di scatole a disposizione, la strategia è la seguente:

1. Scriviamo tutti i numeri in base 2.

   NOTA: Per scrivere in binario un numero N è necessario un numero di bit n pari al logaritmo in base 2 di N+1, arrotondato per eccesso. I numeri considerati avranno quindi un massimo di n bit

2. Al giro *i-esimo*:

   a. selezioniamo tutti i numeri (scatole) che hanno pari ad "1" la *i-esima* cifra meno significativa (quindi contando a partire da destra)

   b. Eliminiamo un numero di monete pari ad 2^{i-1}

In questo modo, all'i-esimo giro abbiamo reso pari a "0" la cifra i-esima di tutti i numeri (in base 2).

Quindi dopo un numero n di giri abbiamo azzerato tutte le cifre di tutti i numeri → abbiamo svuotato tutte le scatole.

Per scrivere N=2020 abbiamo la necessità di usare 11 cifre binarie e quindi svuotiamo tutte le scatole in n=11 giri (strategia valida fino ad N=2047).

Dimostrazione che sia la strategia migliore

La prima cosa da considerare è che, data una qualunque sequenza di mosse *a, b, c, …, x* possiamo ricavare una sequenza equivalente con qualsiasi permutazione della sequenza data. Non è quindi importante definire l'ordine delle mosse ma esclusivamente le mosse stesse (intese come: quali scatole considerare e quante monete estrarre da ogni scatola).

Consideriamo adesso le sole n scatole 1, 2, 4, 8,.., 2^{n-1} e cerchiamo di svuotare queste ignorando le altre:

- Sicuramente dobbiamo effettuare un giro che tocchi la scatola 1 e la svuoti, facciamo che sia la nostra prima mossa (abbiamo infatti detto che non è importante l'ordine delle mosse). Questa mossa non può ovviamente svuotare altre scatole ma potrebbe diminuirne il numero
- Con la seconda mossa andiamo a svuotare la scatola che originariamente aveva 2 monete: adesso potrebbe averne ancora 2 od una sola se è stata "usata" nel primo giro. In ogni caso, **nessuna altra scatola può essere svuotata in questo giro** in quanto nei primi due giri sono state tolte un massimo di 1+2 monete in ogni scatola e la scatola successiva più piccola ne ha (in origine) 4
- ...
- Con la mossa i-esima andiamo a svuotare la scatola che originariamente aveva 2^{i-1} monete: adesso potrebbe averne ancora 2^{i-1} o, al minimo, una sola se è stata "usata" in tutti i giri precedenti. In ogni caso, **nessuna altra scatola può essere svuotata in questo giro** in quanto nei primi i giri sono state tolte un massimo di $1 + 2 + 4 +... + 2^{i-1} = 2^i - 1$ monete in ogni scatola e la scatola successiva più piccola ne ha (in origine) 2^i

Per svuotare le n scatole considerate dobbiamo quindi effettuare almeno n giri: la strategia illustrata nella prima parte ed ogni sua permutazione sono quindi ottimali.

Bene, ci sono però anche altri metodi, ***Valter*** per esempio suggerisce questo:

Io opterei per una algoritmo/strategia di svuotamento "greedy" o meglio "golosa" come preferiscono chiamarlo i Nostri.

Seleziono il sottoinsieme di scatole che, ad ogni passaggio, mi permette di eliminare il maggior numero di monetine.

Per più sottoinsiemi con stesso numero ne scelgo uno a caso di questi; forse (?) con un esempio riesco a spiegarmi:

- scatole iniziali da 7 a 1

- il sottoinsieme da 7 a 4 è quello che mi permette di eliminare più monetine —> 4*4=16

- scatole con scritte aggiornate —> 3 2 1 0 3 2 1

- il sottoinsieme 3 2 . . 3 2 . . mi permette di eliminare 4 monetine

- scatole con scritte aggiornate —> 1 0 1 0 1 0 1

- togliendo la moneta rimasta nel sottoinsieme 1 . 1 . 1 . 1 ho terminato.

Forse il metodo è lo stesso a dire il vero… allora saltiamo la soluzione di ***Alberto R.*** e riportiamo quella di ***Tommaso***:

Sia N il numero di monetine prescelto. Il numero di scatole contenente N monetine è 2021–N, e N(2021–N) la quantità di monetine svuotata, massimizzata per N=1010. La scatola con etichetta 1010 quindi si svuota completamente.

Rietichettando le scatole, avremo adesso 2 scatole per ogni etichetta da 1 a 1009 ed una da 1010.

Iterando: il numero di scatole contenente N monetine è ora 2(1010–N)+1, e la quantità di monetine da vuotare 2N(1010–N)+N, massimizzata per N=505. Le 2 scatole con etichetta 505 si svuotano completamente. Rietichettando le scatole, avremo adesso 4 scatole per ogni etichetta da 1 a 504 ed una da 505.

Generalizzando: dopo k svuotamenti ciascuna etichetta è ripetuta 2^k volte, tranne al più l'etichetta di valore massimo M. Dato N=M/2 arrotondato all'intero superiore, le k scatole con etichetta N diventano vuote, ed il rietichettamento delle residue dopo il (k+1)esimo svuotamento le rende pronte per il passo successivo.

Perciò in sequenza 11 svuotamenti: partendo da 2020 passiamo a 2019, 2017, 2013, 2005, 1989, 1957, 1893, 1765,1509,997 scatole, quest'ultime contenenti ciascuna 1 moneta prima dell'ultima fatica..

E con questo è tutto. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Un insieme di due milioni di punti è interamente contenuto in un cerchio. Esiste una linea tale da avere un milione di punti da una parte e un milione di punti dall'altra? E, se sì, come possiamo (in teoria) trovarla?

Considerate tutte le rette (infinite) definite da una coppia di punti dell'insieme, poi scegliete un punto qualsiasi, non appartenente a nessuna retta, all'esterno del cerchio e tracciate una retta esterna al cerchio passante per questo punto. Fate ruotare (con fulcro nel punto scelto) la nuova retta. Questa, non appartenendo a nessuna delle rette definite precedentemente, passerà nell'area del cerchio per un punto alla volta. Quando avrete passato un milione di punti, fermatevi: avete trovato la retta cercata.

6. Zugzwang!

Anche questo gioco ci arriva dall'inossidabile Mark Steere.

Anche questo gioco ha l'aria interessante.

Anche questo gioco ha un nome fetente (***Cage***), e quindi

Anche questo gioco cambia nome.

Fermo restando che riconosciamo a Mark ogni diritto a vantarsi del fatto di aver dato un pessimo nome al bel gioco che ha inventato.

6.1 Sal(u)ta la Signora!

Citazione di Stefano Benni, "La Compagnia dei Celestini"; essendo ormai adusi ai nostri giochi di parole, dovreste aver capito che:

1. C'entra la Dama;
2. Si prende saltando;
3. Ogni tanto, dovrete fare "ciao ciao" a un vostro pezzo.

Rispolverate la vostra vecchia ***scacchiera*** da dama internazionale (10×10), e fatevi prestare tutte le pedine del quartiere: ve ne servono, per giocare, ***cinquanta*** di un colore e ***cinquanta*** dell'altro. Questa pletora di pedine va sistemata sulla scacchiera in modo tale che le pedine bianche siano tutte sulle caselle bianche, e quelle nere sulle caselle nere. Mark usa pedine rosse e blu, ma abbiamo già detto che abbiamo grosse riserve sul suo senso estetico.

Il gioco ha diversi tipi di ***mosse***, qualcuna anche piuttosto complessa. È interessante notare che il tipo principale di movimento è spiegato attraverso le sue ***restrizioni***: infatti, la ***prima restrizione*** è che non potete mettere una pedina vicina ortogonalmente ad una pedina dello stesso colore, neanche se la posizione è temporanea durante una mossa multipla (che vedremo dopo, tranquilli); la ***seconda limitazione***, invece, è riferita alle pedine avversarie: non potete spostare una vostra pedina ortogonalmente vicina a una pedina avversaria in una posizione dove *non* sia ortogonalmente vicina ad una pedina avversaria, tranne nel caso di salto (che vediamo dopo, anche lui).

Veniamo alle cose che potete fare: potete ***muovervi verso il centro***, nel senso che potete spostarvi di una casella (ortogonale o diagonale) in modo da *ridurre la distanza* (euclidea: che non vi vengano strane idee) *dal centro* della scacchiera; dovete comunque rispettare le due restrizioni viste sopra.

Potete anche ***raggiungere un avversario***: se la vostra pedina non ha adiacenze ortogonali con pedine avversarie, potete muovervi di una casella in modo tale da averne una (o più).

Potete ***saltare un avversario***, partendo da una posizione di adiacenza ortogonale, e prendete la pedina avversaria, che esce dal gioco; interessante notare che se la pedina avversaria è sul bordo della scacchiera e voi siete nell'adiacenza ortogonale opportuna, potete "saltare fuori" dalla scacchiera, prendere la pedina avversaria e fare "ciao ciao" alla vostra pedina, che va nel mucchio delle prese; tra l'altro, questo ci pare l'unico modo per iniziare una partita...

Contrariamente alla Dama, ***la cattura non è obbligatoria***, a meno che non sia l'unica mossa che potete fare, nel qual caso dovete farla.

Se, dalla casella di atterraggio di una presa, sono possibili per la stessa pedina altre prese, in questo caso ***dovete farle***: se, per un qualche motivo. Avete la scelta tra diversi "cammini di presa", potete scegliere quello che preferite: non siete obbligati a scegliere quello di massima cattura. E ***non potete saltare la stessa pedina più di una volta***.

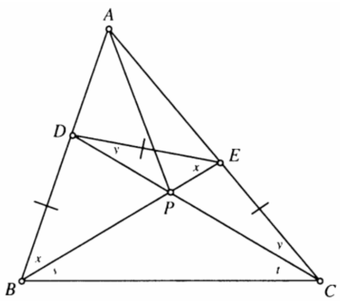
Scopo del gioco è ***catturare tutti i pezzi avversari***: se, con un finale degno di un libro di fantascienza francese (quelli dove muoiono tutti, anche lo scrittore, l'editore e il libraio), la vostra pedina catturando l'ultima pedina avversaria salta fuori dalla scacchiera, avete vinto lo stesso.

Abbiamo tenuto per ultima una regola facile facile, ma che ci fa nascere un dubbio di cui parliamo dopo: se non avete mosse legali da fare, saltate il turno.

Il dubbio è che a quanto pare, secondo Mark, questa situazione non può mai presentarsi per entrambi i giocatori: infatti, secondo lui, il gioco ***non ammette la patta***.

Siamo sempre più convinti che il massimo divertimento di Mark sia vedere la faccia perplessa degli amici quando spiega loro le regole.

7. Pagina 46



Supponiamo BE e DC si intersechino in P e che gli angoli alla base dei triangoli isosceli DBE e DBC siano x e y; siano inoltre PBC = s e PCB = t, come indicato in figura: si vede quindi che l'angolo esterno EPC del triangolo DEP è pari a $x + y$.

Ma l'angolo EPC è anche angolo esterno di PBC, che abbiamo assunto pari a $s + t$. Quindi, essendo:

$$(x + y) + (s + t) = \mathrm{ABC} + \mathrm{ACB},$$

si ha:

$$x + y = s + t = \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{ABC} + \mathrm{ACB}).$$

Se BAC=60°, si ha ABC+ACB=120°, ossia:

$$\mathrm{EPC} = x + y = 60° = \mathrm{BAC},$$

il che rende ADPE un quadrilatero inscrivibile in un cerchio. La condizione DAP = DEP = x rende il triangolo ABP isoscele con AP = BP: nello stesso modo, con PAE = PDE = y si vede che anche il triangolo PAC è isoscele, con AP = CP. Quindi AP = BP = CP, il che dimostra che P è il circocentro di ABC.

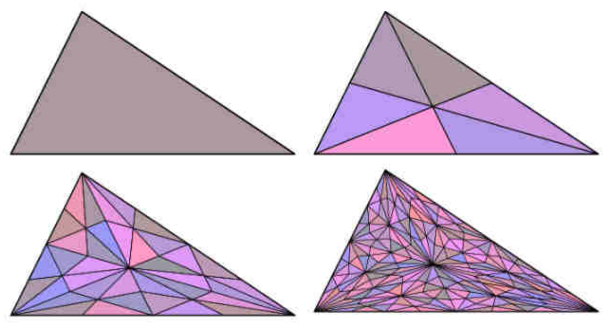
8. Paraphernalia Mathematica

Una volta tanto, il titolo è *quasi* sensato. A quanto pare, in questo campo ci sono ancora un mucchio di cose da scoprire.

8.1 Ai confini della matematica (quelli triangolari)

Costruire il baricentro di un triangolo tracciandone le mediane può portare ad alcune interessanti deduzioni, quali ad esempio che il baricentro divide ogni mediana in due parti, una delle quali di lunghezza doppia dell'altra, ma a meno che dobbiate far stare in equilibrio il vostro triangolo su uno stecchino sembra esserci poco altro; questa volta vorremmo attrarre la vostra attenzione sul concetto "ovvio" (le virgolette sono qui per inserire la citazione preferita di Doc) che le tre mediane dividono il triangolo in sei triangoli più piccoli.

Ciascuno di questi triangoli avrà un baricentro, e quindi sarà passibile di ulteriore divisione attraverso le sue tre mediane in sei triangoli... Bene, ci pare che da questo punto in poi possiate andare avanti da soli; comunque, i primi passaggi (per un triangolo ragionevolmente "generico") sono presentati nella figura.



6 *0, 1, 2, 3 suddivisioni.*

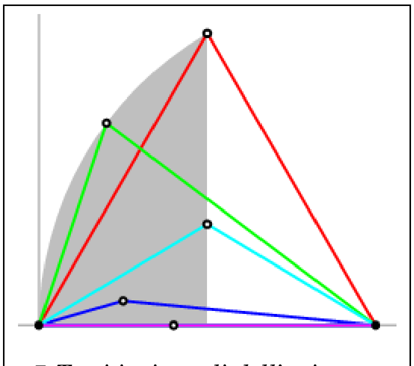
Se guardate l'ultima suddivisione, vi accorgete che c'è una tendenza, per buona parte dei triangoli, a diventare sempre più "smilzi", anche se alcuni sembrano restare piuttosto grassocci; oltre questo punto, a parte apprezzare l'estetica del disegno, sembra non si possa andare.

Il guaio, qui, è la mancanza di un metodo per "descrivere" i triangoli che otteniamo, possibilmente che prescinda dalla loro dimensione, raggruppando in un'unica categoria tutti i triangoli simili: fortunatamente, dopo solo una ventina d'anni che ci occupiamo di matematica ricreativa, qualcuno si è degnato di spiegarcene uno; e anche piuttosto carino, se dobbiamo dire.

Il metodo si basa, sostanzialmente, su due passaggi:

1. Riducete/ingrandite il triangolo in modo tale che il cateto maggiore abbia lunghezza unitaria
2. Ruotate, traslate e/o riflettete specularmente il vostro triangolo in modo tale che:
   a. Il cateto maggiore si trovi sull'asse x
   b. Il cateto minore sia dalla parte delle x negative
   c. Il vertice compreso tra il cateto maggiore e il cateto minore coincida con l'origine degli assi.

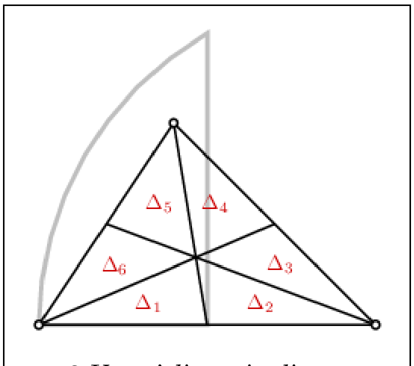
...Insomma, posizionato come quelli nella figura; trattandosi di affinità e isometrie, il nostro triangolo risultante sarà comunque simile al triangolo originale, e lo potremmo definire ***modello standard*** della famiglia di triangoli, e *ogni famiglia potrà essere interamente descritta dalle coordinate del vertice superiore*. Insomma, con un singolo valore possiamo descrivere la "forma" del nostro triangolo.



7 *Tutti i triangoli dell'universo.*

Qualche secondo di meditazione sul concetto vi permette di capire che il "punto descrittore" (in pratica, il vertice in alto del nostro modello standard, d'ora in poi, "triangolo" e basta) si può trovare solo nella zona grigia: e alcuni triangoli particolari si trovano in punti ben precisi. Tutti i triangoli equilateri (che, essendo tutti simili tra loro, sono qui rappresentati da un triangolo unico, quello rosso) hanno il vertice in cima all'area grigia; i triangoli isosceli con l'angolo al vertice minore di 60° sono sull'arco di circonferenza sulla sinistra della figura (uno di questi è il triangolo verde), mentre quelli con l'angolo al vertice maggiore di 60° sono sul lato "dritto" del settore (uno è quello azzurro); sul lato inferiore del settore abbiamo i triangoli degeneri *(SPOILER: siccome il termine non ci piace e diventeranno piuttosto importanti, li chiamiamo "piatti")*.

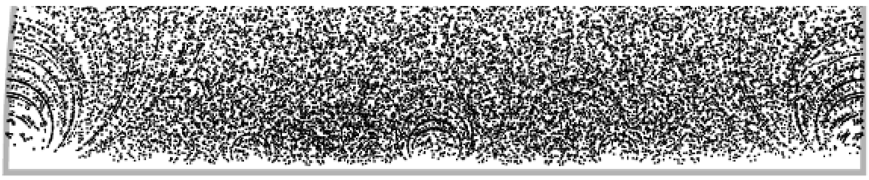
Siccome il nostro scopo è comunque quello di lavorare con le suddivisioni basate sulle mediane, meglio dare un nome ai triangoli: partiamo da quello con un vertice nell'origine e un lato sull'asse delle ascisse e numeriamoli in senso antiorario, come indicato in figura.



8 *Un po' di nominalismo.*

Adesso, prendiamo un triangolo, ad esempio quello identificato da (1/4, 1/2) e dividiamolo nei suoi sei triangoli; "standardizziamo" questi sei triangoli (nel senso che piazziamo il cateto maggiore sull'asse *x* con lunghezza unitaria, il cateto minore verso le *x* negative, eccetera...) e ricominciamo da capo con ognuno di loro. Se avete la pazienza di fare il lavoro per *otto* volte, ottenendo 6^8 = 1'679'616 triangoli (o "punti identificativi", fate voi), nei passaggi indicati dovreste ottenere le immagini in copertina. Che sono, a ben guardare, piuttosto strane.

Per cominciare, soprattutto se guardate l'ultima figura, sembra confermata la nostra ipotesi che i triangoli diventino sempre più "smilzi": questo significa che l'angolo "in cima" diventa sempre più ottuso, quindi il punto identificativo del triangolo si sposta sempre più in basso. Ma succedono anche un paio di altre cose, e qui la cosa si complica: ingrandiamo (per un livello intermedio) la zona in prossimità dell'asse delle ascisse.



Tanto per cominciare, c'è una "zona proibita" in basso, che diventa sempre più sottile; anche se l'avvicinamento ai triangoli piatti sembra piuttosto caotico, la riduzione della zona libera sembra procedere piuttosto regolarmente. È vero o è un'impressione?

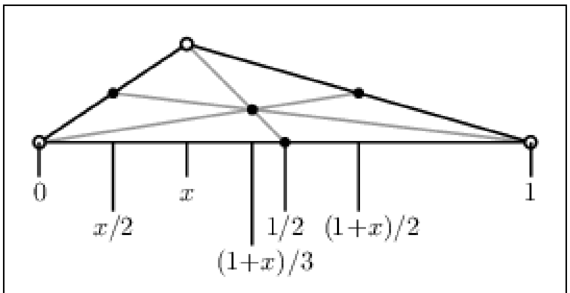
Non solo, ma se guardate bene, vedete delle formazioni ad arco circolare, particolarmente evidenti sui bordi: hanno una ragione o sono soltanto delle pareidolie[23]?

Vedete voi se essere felici o delusi del fatto che nessuno lo sa: queste due domande sono ancora, al momento, senza risposta. E non pensiate che ci si siano applicati solo degli incapaci: se il nome di ***Persi Diaconis*** non vi dice niente, filate a ristudiarvi i fondamentali.

Qualche passo verso la dimostrazione della prima ipotesi, in realtà, è stato fatto: infatti, se partite da un triangolo e lo dividete, scegliendo poi un triangolo a caso tra quelli della divisione e lo dividete di nuovo, e avanti in questo modo, ottenete un cammino casuale nel settore indicato sopra che "...converge *quasi certamente* ["almost certainly"] a un triangolo piatto" (Teorema di ***Barany***). Un altro interessante problema anch'esso irrisolto è se esistano altri modelli che seguono questo flusso probabilistico, convergendo nello stesso modo.

[23] ...e se non sapete cosa vuol dire, andatevelo a cercare, *fainéants*! (Come ama dire Sylvie Coyaud).

L'ambiente dei triangoli piatti sembra un luogo nel quale succedono ben poche cose, ma anche qui c'è della matematica fattibile; per prima cosa, notiamo che possiamo far corrispondere a ogni triangolo un triangolo piatto: per chiarirci bene quali siano gli elementi e come sia possibile lavorarci, ci pare chiarificatrice l'immagine che trovate qui di fianco.



9 *"Appiattimento" di un triangolo.*

Tutti i triangoli che hanno il vertice all'ascissa x sono "imparentati" con il triangolo piatto (0; x; 1), e le ascisse dei punti notevoli (i piedi delle mediane e il baricentro, per intenderci) sono facilmente calcolabili (e uguali a quelle di qualsiasi triangolo identificato da (x, ...)): il nostro triangolo piatto ha quindi coordinate dei vertici pari a (0, 0), (1, 0) e (x, 0), con $0 \leq x \leq 1$.

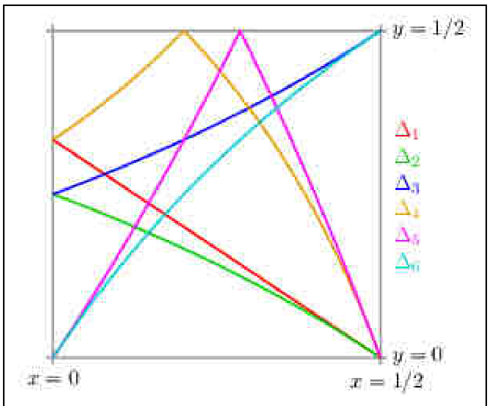
Quindi, ogni volta che dividiamo un triangolo (piatto), otteniamo i sei triangoli (piatti) i cui vertici hanno coordinate:

	Lato maggiore		
Δ_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-\frac{x+1}{3}$	$\frac{x+1}{3}$
Δ_2	$1-\frac{x+1}{3}$	$\frac{1}{2}-\frac{x+1}{3}$	$\frac{1}{2}$
Δ_3	$1-\frac{x+1}{3}$	$1-\frac{x+1}{2}$	$\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{3}$
Δ_4	$\frac{x+1}{2}-x$	$\frac{x+1}{3}-x$	$\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{3}$
Δ_5	$\frac{x+1}{3}-\frac{x}{2}$	$\frac{x+1}{3}-x$	$\frac{x}{2}$
Δ_6	$\frac{x+1}{3}$	$\frac{x+1}{3}-\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$

Non abbiamo indicato il lato medio e quello minore in quanto in due casi (il quarto e il quinto) dipende dal valore di x, come si vede facilmente imponendo una qualsiasi diseguaglianza tra i due termini interessati e risolvendo in x.

In pratica, queste espressioni rappresentano una mappa dell'intervallo [0,1/2] su sé stesso: possiamo quindi definire il comportamento dei singoli triangoli al procedere delle divisioni, e la trovate qui di fianco.

Ma non chiedeteci che cosa significhi.



10 *...qualcuno ha un'idea?*

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms