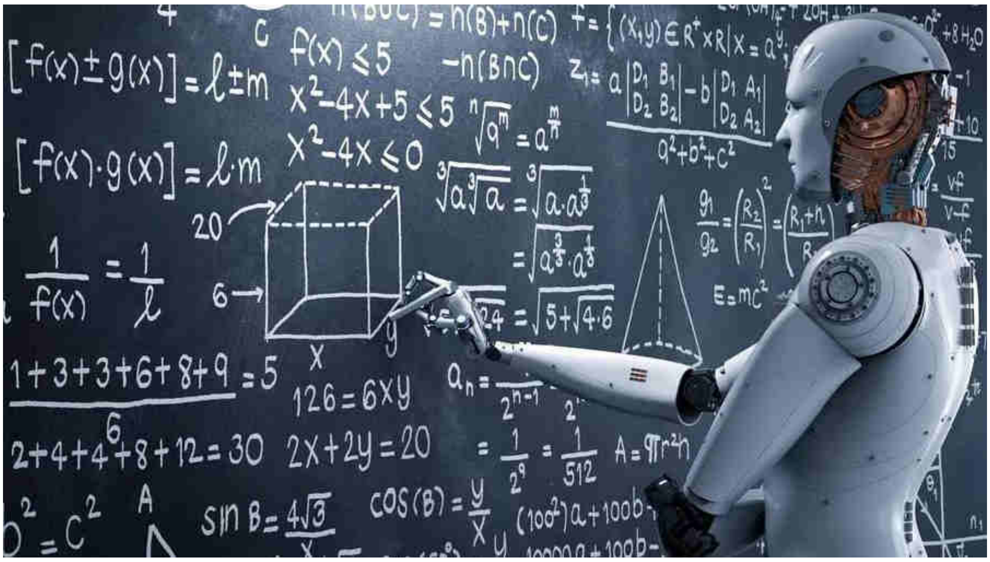
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 255 – Aprile 2020 – Anno Ventiduesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

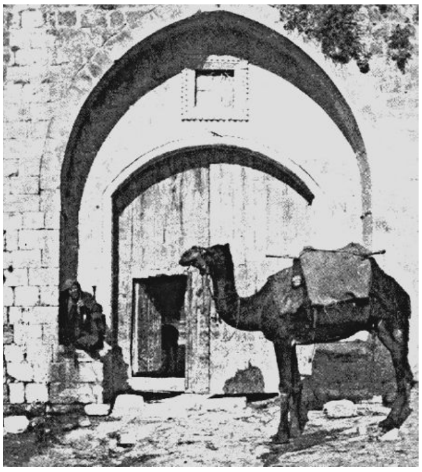
RM253 ha diffuso 3'303 copie e il 05/04/2020 per Google eravamo in 38'900 pagine.

...ma il fatto che un'intelligenza artificiale commetta un errore molto umano, vale per il superamento del Test di Turing? Da LaStampa, 2020-02-25, pag.28 – Accompagnamento fotografico ad articolo relativo alla Carta Etica dell'IA.

1. Fischi per fiaschi

*"Tutti sanno cosa sia una curva,
finché non studiano abbastanza
matematica da rimanere confusi
a causa dell'incredibile numero
delle possibili eccezioni."*

«*E ve lo ripeto: È più facile che un cammello passi per la cruna di un ago, che un ricco entri nel regno di Dio*». La frase riportata dal Vangelo di Matteo (19:24) è tra le più celebri, e si sta parlando di uno dei libri più celebri della storia del mondo. Come se non bastasse, è anche ripetuta, e quindi rafforzata, anche nel Vangelo di Luca (18:25)[1]. Pur essendo un monito pregno di significato etico e dottrinale, la sua fama è dovuta anche alla forma originale e di grande potenza evocativa: un cammello che attraversi la cruna di un ago è immagine del tutto sorprendente, e sono moltissimi coloro che hanno cercato di capirne la genesi.



1 *Cammelli e crune di aghi*

Si trovano pertanto diverse scuole di pensiero: c'è chi afferma che si tratta semplicemente di un modo di dire abbastanza diffuso nella Palestina di due millenni fa, e i modi di dire sono spesso irrazionali e incomprensibili. "Non ci vedo più dalla fame" è locuzione che ogni italiano capisce, anche se non sembra esserci una proporzione diretta tra la crescita dell'appetito e la diminuzione dell'acuità visiva; i londinesi sorpresi da un violento acquazzone si lamenteranno con gli amici del club che "stanno piovendo cani e gatti", e nessuno li guarderà con aria scandalizzata per l'uso dell'insolita metafora[2]. A proposito di metafora: il significato trasmesso dal passo evangelico, fuori di metafora (appunto), sembra comunque abbastanza ineluttabile: la possibilità di raggiungere il paradiso per coloro che hanno abbondanza di beni terrestri appare del tutto negata. Per quanto è dato conoscere sulle dimensioni standard delle crune degli aghi e dei cammelli (che erano peraltro gli animali più grandi comunemente visibili nella zona), l'ammonimento divino non pare disposto a lasciare spazio alla speranza: non c'è nulla da fare, per i ricchi.

[1] «*Perché è più facile che un cammello passi attraverso la cruna di un ago, che un ricco entri nel regno di Dio*».

[2] A favore di questa interpretazione si può annoverare anche un altro caso in cui proprio il cammello viene ulteriormente citato nel vangelo di Matteo come esempio, del tutto esplicito, di animale grande e voluminoso: "*Guai a voi, scribi e farisei ipocriti, perché pagate la decima della menta, dell'aneto e del comino, e trascurate le cose più importanti della legge: il giudizio, la misericordia, e la fede. Queste sono le cose che bisognava fare, senza tralasciare le altre. Guide cieche, che filtrate il moscerino e inghiottite il cammello.*" (Matteo 23:23,24). Passo evangelico che appare curiosamente ammonitore in tempi come questi, quando tutti hanno imparato il significato della parola "zoonosi".

Forse proprio per ammorbidire questa impossibilità categorica, ha riscosso una certa attenzione anche l'ipotesi di una particolare scuola di pensiero, quella che sostiene che, in quei tempi e in quei luoghi, venivano chiamate "cruna dell'ago" delle porticine particolarmente piccole ricavate nel corpo stesso della grandi porte lignee della città. Erano piccole per questioni di sicurezza e robustezza: consentivano comunque il passaggio delle persone tra l'esterno e l'interno della cinta muraria, ma senza bisogno di mobilitare l'intero corpo di guardia solitamente incaricato di aprire, chiudere e controllare le grandi porte propriamente dette. Un cammello non ci passa, a meno che… ecco, tutto starebbe in quel "a meno che": se il cammello non è particolarmente grande, se la porticina non è proprio di quelle piccolissime, se al cammello si toglie tutto il carico che usualmente porta sulla schiena, se l'animale è abbastanza docile e disposto a inginocchiarsi e a superare l'uscio strisciando o quasi, allora forse – assai difficile comunque, ma forse – riesce a passare attraverso la "cruna dell'ago". E la metafora ne esce perfino rafforzata: conquistare il regno dei cieli resta difficile, quasi impossibile, ma se si è disposti a rinunciare ai beni terreni (togliendosi di dosso le ricchezze come si toglie il carico al cammello), a inginocchiarsi, e a fare tutti gli sforzi possibili per superare un varco così angusto, allora, forse una possibilità di salvezza c'è[3].

2 *Sul portale della chiesa di san Bonifacio a Dortmund si illustra la possibilità del cammello di farcela. (Foto di Mathias Bigge, da Wikipedia)*

Come al solito, quando una storia prende piede è difficile poi riuscire a separare bene cause ed effetti; il termine "cruna dell'ago" associato a passaggi stretti si ritrova in diverse situazioni, non solo in Palestina, e la rete abbonda di foto di turisti che si fanno fotografare intenti ad attraversarli. Resta però assai difficile capire se tali passaggi fossero preesistenti o, cosa più probabile, denominati così solo dopo che le scritture cristiane hanno reso celebre la frase in questione; per quanto si è riuscito a ricostruire da parte degli studiosi, sembra che al tempo di Cristo a Gerusalemme non ci fosse alcuna porta denominata "cruna dell'ago".

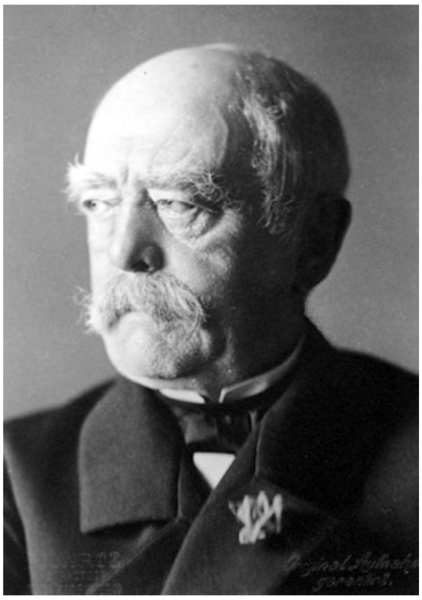
Così, bisogna prendere in considerazione anche l'ipotesi che è forse quella considerata più probabile dagli esegeti, ovvero che alla base del mistero ci sia in fondo solo un errore di traduzione o trascrizione. O magari due. La parola greca "cammello" ("κάμηλος"), normalmente traslitterata nell'alfabeto latino con "*kamelos*" assomiglia molto al termine "*kamilos*"; parola che significa "gomena", "fune", insomma una corda particolarmente grossa buona per tener ferme le navi nei porti[4]. L'idea di far passare una gomena nella cruna di un ago è poco realizzabile, ma quanto meno più ordinaria di quella di farci passare un cammello: in pratica, dal punto di vista grammaticale trasformerebbe la metafora in una più trattabile iperbole. La tesi dell'errore di trascrizione è rafforzata anche dal fatto che, prima ancora di prendere in considerazione la lingua greca, il fraintendimento è possibile anche in aramaico, insomma nella lingua che verosimilmente

[3] Almeno dal punto di vista dottrinale; dal punto di vista logico, a dire il vero, è solo una sorta di tautologia: nel momento in cui il ricco rinuncia ai suoi beni terreni, ovviamente non è più ricco, ergo…

[4] C'è chi sostiene che il termine genovese "*camallo*", che indica i lavoratori dei porti, abbia in questa parola la sua origine etimologica.

parlava Gesù Cristo: il cammello è "*gamla*", la fune "*gamta*", e la possibilità di errore interpretativo rimane.

Ovviamente, risalire con certezza alla frase originale è virtualmente impossibile: può sembrare più logico utilizzare l'esempio di una corda evidentemente troppo spessa per essere usata con un ago – specie se il discorso è diretto a pescatori, che di gomene dovevano intendersi – ma anche l'esagerazione veicolata da una passeggiata di un cammello attraverso una cruna ha ragioni possibili, tant'è che ha suscitato certamente più studi e analisi del passo di quanto ne avrebbe generati l'esempio della gomena. Così, anche se è davvero probabile che qualcuno abbia preso fischi per fiaschi, non è detto che, col senno di poi, i fischi e i fiaschi non abbiano entrambi ragione di essere.


3 *Otto von Bismarck*

Del resto, di fraintendimenti è piena la storia: alcuni persino premeditati, come fu il caso del "dispaccio (o telegramma) di Ems", che fu il pretesto finale per lo scoppio della guerra franco-prussiana del 1870. Erano in corso le trattative per la successione al trono di Spagna, messo in crisi dalla rivoluzione del 1868: la Prussia avanzò la candidatura di Leopoldo di Hohenzollern-Sigmaringen, che fu strenuamente avversata dalla Francia. Anziché adontarsene, Otto von Bismarck – il più celebre tra i politici prussiani, il "cancelliere di ferro" – modificò artatamente il dispaccio francese per farlo sembrare più arrogante di quanto fosse in realtà, causando una levata di scudi in entrambe le nazioni, storicamente mai troppo amiche, fino al punto che Napoleone III si lasciò convincere a dichiarare guerra alla Prussia. Era proprio quel che Bismarck cercava, e a quel punto poteva mettere in moto il suo temibile esercito, e farlo addirittura con lo status di nazione aggredita.

Altri sono più innocenti, come quello capitato al presidente americano Jimmy Carter durante una sua visita ufficiale in Giappone, nel 1977; doveva parlare in una scuola, e aveva deciso di iniziare raccontando una storiella divertente. A detta dello stesso presidente, non era poi una gran barzelletta, ma aveva il pregio di essere breve. Breve, ma non quanto sembrò esserlo a giudicare dalla durata della traduzione simultanea fatta dall'interprete: poche parole in idioma nipponico, seguite da un entusiastico scoppio di risa da parte di tutta la platea. Solo dopo qualche tempo Carter scoprì che la sua storiella venne "tradotta" dall'interprete con la frase: "Il presidente Carter racconta una barzelletta: dovete ridere".

Si potrebbe continuare a lungo: un bel numero di episodi militari sono finiti male a causa di malintesi, dalla carica di Balaklava[5] a casi in cui parti mal collegate della stessa armata hanno combattuto una contro l'altra; una quantità di nomi geografici deriva dalla risposta in idioma locale "*Non ti capisco*" che gli indigeni restituivano agli esploratori occidentali che chiedevano loro – ovviamente nella loro lingua – come si chiamasse la tal terra o quello strano animale[6].

Prima o poi, questi fraintendimenti saranno forse superati: verrà il giorno in cui tutti gli esseri umani parleranno la stessa lingua – forse – riducendo così la possibilità di malintesi; e quella lingua si affinerà – forse – al punto di eliminare del tutto il rischio di fraintendere il significato delle parole che vengono scambiate. Animati da cotanta speranza, viene abbastanza spontaneo pensare che i citati "fischi per fiaschi" siano del

[5] Ne parliamo diffusamente nel compleanno dedicato a James Sylvester e Florence Nightingale, "*La musica della ragione*", RM107, Settembre 2007.

[6] Non possiamo giurare sulla correttezza etimologica, ma abbiamo trovato questa spiegazione per almeno tre termini: "Yucatan", "Canada" e "canguro". Ma saranno verosimilmente decine…

tutto assenti da quella disciplina che, pioniera come è sempre stata, è di gran lunga la più vicina al raggiungimento dell'obiettivo; con la sua cura maniacale delle definizioni e il rigore strettissimo nel tirare conclusioni solo se esattissimamente generate dalle opportune premesse, la matematica brilla come un faro nella notte ancora scura dei fraintendimenti.

O quasi: a dire il vero, anch'essa non è del tutto senza peccato. E, quasi in una sorta di contrappasso legato alla sua maniacale esattezza, il fiasco che ha preso al posto del fischio è stato… beh, proprio un fiasco, in senso letterale.

Da quando è diventata adulta, abbandonando le ali protettrici di Euclide, la geometria si è avventurata in territori assai affascinanti e sorprendenti. All'inizio sembrava giocare solo con rette e angoli, e costruiva poligoni regolari con lo stesso meravigliato stupore di un bambino che costruisce una casetta con i mattoncini delle costruzioni. Quadrati e rettangoli, linee che si incrociano, le perpendicolari che troneggiano tra i segmenti come star di Hollywood, e pochissime curve di contorno, quasi sempre generate solo dal cerchio e dal suo pragmatico segretario, il compasso. Già le coniche incutono un rispetto particolare, con quei raggi di curvatura niente affatto costanti, e lasciano intravedere complicazioni sempre maggiori. Le superfici, poi… sì, finché restano relegate al piano euclideo sono ancora trattabili, assimilabili a mero calcolo di aree, ma è evidente che la loro natura nascosta è quella delle tigri in gabbia. Appena lasciate libere nello spazio, appena svincolate dalla promessa di non annodarsi, rigirarsi, di liberarsi dalla loro promiscuità bidimensionale, mostrano subito una sorta di rivoluzionario irredentismo.

4 *Bottiglia di Klein*

Basta pensare al Nastro di Möbius[7], così semplice da costruire che ci riesce anche un bambino, e infatti i bambini lo costruiscono spesso, e lo colorano, tagliano, e riproducono ogni volta lo stupore di ogni matematico adulto che si rispetti. Il nastro ha una sola superficie, non due come la strisciolina di carta che l'ha generato; ha un solo bordo, lo capisce bene anche il bambino che ci passa sopra il dito percorrendolo tutto senza trovare ostacoli; tagliando l'anello in senso longitudinale non si ottengono due anelli, ma uno solo grande il doppio, e con una mezza torsione in più. Può esserci qualcosa di più strano?

Beh, certo. Dopo tutto il Nastro di Möbius ha un bordo, e uno non è certo il numero più piccolo. Con un po' di fantasia si può costruire anche un oggetto che al pari del nastro abbia una sola superficie, ma che sia del tutto priva di bordi. Un oggetto tridimensionale, maneggevole, che faccia girare la testa nel tentativo di capire come possa un oggetto non avere bordi, come una sfera, ma al tempo stesso non abbia separazione tra interno e esterno. Nella sua rappresentazione più tradizionale assomiglia a una bottiglia – anzi, proprio a un fiasco – ed è forse per questo che poi il termine "bottiglia" le è rimasto cucito addosso. Ma è certo che nasce come esempio di strana superficie, non come candidato agli scaffali delle enoteche: e il fatto che in tedesco "superficie" si dica "Fläche" mentre "bottiglia" si dice "Flasche" ha certamente aiutato a perpetrare l'errore. Sia come sia, contenitore o superficie, resta il fatto che "Bottiglia" è solo il nome di

[7] Di August Ferdinand Möbius parliamo in "Gettare l'anima oltre l'ostacolo", RM118, Novembre 2008.

battesimo del sorprendente oggetto: il cognome di famiglia è Klein, ed è un cognome di alto lignaggio, in matematica.

È anche possibile, a dire il vero, che il fraintendimento basato su Fläche/Flasche non sia il maggiore di quelli legati al nome di Klein: ce ne è forse anche un altro, e di rilevanza maggiore, e cioè proprio quello che, per molti, il nome di Klein sia noto solo per la sua bizzarra bottiglia; ed è convinzione quanto mai punitiva, per il matematico tedesco.


5 *Felix Christian Klein*

Felix Christian Klein nasce a Düsseldorf il $5^2/2^2/43^2$, come lui stesso era solito dire. Le persone normali preferiscono registrare quel giorno come il 25 Aprile 1849, ma un matematico della sua razza non poteva non essere deliziato dal fatto che la sua data di nascita potesse essere scritta come il quadrato di tre numeri primi. Nasce in una notte rivoluzionaria, acconcia al suo carattere: Düsseldorf e tutta la Renania non gradisce l'assegnazione della regione tedesca alla Prussia, e il periodo storico è quello della "primavera dei popoli" scatenata ovunque in Europa appena l'anno prima, il movimentatissimo 1848. Klein nasce in una Renania irredenta, ma è di puro sangue prussiano: suo padre è il segretario del governatore inviato a Düsseldorf da Berlino. La ribellione viene domata dopo pochi mesi, e nel giro di non molti anni la frammentazione degli stati tedeschi verrà risolta una volta per tutte, soprattutto grazie all'opera del già citato Otto von Bismarck.

La rivoluzione che porterà a compimento Felix Klein è di altra natura: certo meno sanguinaria, e altrettanto certamente più duratura. Dopo la formazione liceale a Düsseldorf, all'alba dei sedici anni si iscrive all'università di Bonn per studiare matematica e fisica. È abbastanza brillante da attirare l'attenzione di Julius Plücker, che lo vuole come assistente quando è ancora niente più di uno studente diciassettenne; sotto la sua guida, Klein ottiene il dottorato già nel 1868, e in pratica si ritrova quasi costretto a continuare il lavoro del suo mentore, che proprio nello stesso anno passa a miglior vita. Il percorso accademico di Klein è denominato "matematica e fisica", e lo stesso Plücker è detentore di una cattedra di fisica sperimentale, ma in realtà sia il maestro che l'allievo sono perdutamente presi dalla geometria; anzi, dalla rifondazione della geometria. Così, Felix Klein si ritrova catturato nel mastodontico progetto di ristabilire i fondamenti della sezione più nobile della matematica quando non ha ancora compiuto vent'anni.

Giovane, ma già nel bel mezzo della ricerca matematica di punta, Felix comincia a viaggiare per conoscere colleghi e centri di studio: diventa amico di Alfred Clebsch, che insegna a Göttingen, la storica università che più tardi – proprio grazie agli sforzi di Klein – diventerà il massimo centro matematico tedesco – e poi continuerà a viaggiare verso Berlino e Parigi. Si trova proprio nella capitale francese quando Bismarck maramaldeggia con il "dispaccio di Ems" e fa scoppiare la guerra franco-prussiana del 1870; Felix rientra di corsa in patria, e per un breve periodo finisce anche sotto le armi. Nel 1871 ritorna a Göttingen come lettore, e qui Clebsch si convince sempre di più che il giovanotto ha probabilmente buone chance di diventare il maggior matematico della sua epoca: di conseguenza, fa quanto gli è possibile per accelerarne la carriera, e in breve Klein si ritrova titolare di cattedra all'università di Erlangen. Ha compiuto a malapena ventitré anni.

Erlangen è un luogo che nella storia della matematica è quasi ineluttabilmente legato al nome di Klein, ed è proprio in questo periodo che il nodo tra il matematico e la città bavarese si stringe strettamente: ma Erlangen è città piccola e fuori mano per il grande progetto di Felix, che ha già ben chiara in mente l'idea di fondare una nuova scuola di pensiero per la geometria. Presto ottiene un incarico al Politecnico di Monaco, e la capitale della Baviera esercita su di lui un grande potere di attrazione. Vi si trasferisce nel 1875, e la decisione dovette risultargli fortunata, visto che in quello stesso anno convola a giuste nozze con Anne. Tra l'altro, la novella sposa porta un cognome assai imponente, ricevuto in eredità diretta dal celeberrimo nonno, Georg Friedrich Hegel. Dopo Monaco, Lipsia: vi risiede dal 1880 al 1886, e qui comincia davvero a raccogliere giovani matematici brillanti pronti ad apprendere le sue idee.

Nei primi anni passati ad Erlangen, quando era ancora poco più che un ragazzino, Klein ha maturato le sue idee fondamentali sulla geometria: utilizzando la Teoria dei Gruppi assume che la geometria debba essere considerata come lo studio delle proprietà invarianti dello spazio rispetto ad un determinato insieme di trasformazioni. È un'idea al tempo stesso semplice e rivoluzionaria, è in grado di risolvere – eliminandola – la differenza che al tempo si credeva sostanziale tra geometria euclidea e non-euclidea. È questo il suo "Programma di Erlangen".

Vergleichende Betrachtungen

über

neuere geometrische Forschungen

von

Dr. Felix Klein,

o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen.

Erlangen.

Verlag von Andreas Deichert.

1872.

Vergleichende Betrachtungen

über

neuere geometrische Forschungen

von

Dr. Felix Klein,

o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen.

Programm

zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen.

Erlangen.

Verlag von Andreas Deichert.

1872.

6 *Frontespizio e prima pagina del "Programma di Erlangen" di Felix Christian Klein*[8].

È forse anche il primo ingresso potente della Teoria dei Gruppi nell'applicazione ad altre sezioni della matematica: di quella teoria che, appena nata, venne bollata come bella ma destinata alla più completa inutilità.

Anche il Programma di Erlangen di Klein, per quanto innovativo e rivoluzionario – o forse proprio per questo – non suscita particolari attenzioni al momento della sua pubblicazione. Lo stesso Klein finirà nella tomba convinto che il suo maggior contributo alla matematica fosse il suo lavoro sulla teoria delle funzioni, piuttosto che questo suo nuovo approccio alla geometria. Ciò non di meno, al giorno d'oggi è innegabile l'eleganza, perfino la bellezza del senso di generalità che dà il suo approccio: è evidente anche solo in

[8] L'immagine, oltre a svariati contenuti che seguono, li abbiamo rubati da un articolo di D. Trkovsk´a, facoltà di Matematica e Fisica dell'Università Carlo di Praga: "*Felix Klein and his Erlanger Program*", ISBN 978-80-7378-023-4 © MATFYZPRESS.

questa tabella che riepiloga come mutano (o si conservano) alcune proprietà geometriche in base ai diversi gruppi presi inconsiderazione:

		GRUPPI			
		Gruppo di isometria	Gruppo di similarità	Gruppo di affinità	Gruppo di proiettività
Proprietà	Posizione	variabile	variabile	variabile	variabile
	Lunghezza	invariante	variabile	variabile	variabile
	Area	invariante	variabile	variabile	variabile
	Perpendicolarità	invariante	invariante	variabile	variabile
	Parallelismo	invariante	invariante	invariante	variabile
	Collinearità	invariante	invariante	invariante	invariante
	Concorrenza	invariante	invariante	invariante	invariante

Si riesce quasi immediatamente a vedere cosa comporti una simile classificazione una volta che si mettono in relazione gerarchica i diversi gruppi:

Gruppo di isometria $\subset$ Gruppo di similarità $\subset$ Gruppo di affinità $\subset$ Gruppo di proiettività

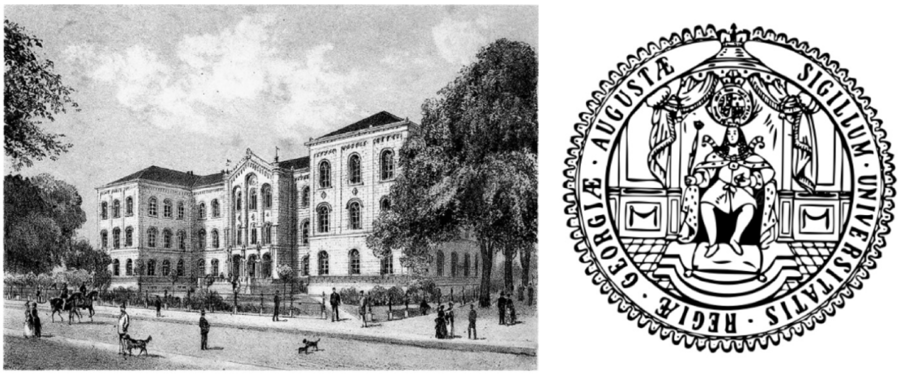
…e, conseguentemente, le diverse relazioni tra le "geometrie"[9]:

Geometria Euclidea $\supset$ Geometria Similare $\supset$ Geometria Affine $\supset$ Geometria Proiettiva

Ma i fondamenti della geometria interessano Klein forse persino di meno dell'altro suo interesse primario: la fondazione di una vera "scuola" di matematica tedesca. Erlangen troppo piccola, Monaco e Lipsia certo più grandi e adatte, ma è proprio durante gli anni passati a Lipsia che Klein sembra perdere fiducia in sé stesso e nei suoi progetti. Perde un po' delle sue caratteristiche migliori: la sublime capacità didattica, l'entusiasmo e la capacità di trasmetterlo ad altri. Alla fine, cade proprio in depressione, e deve ricorrere a cure specifiche.

Forse, chissà, potrebbe essere vero che non tutti i mali vengono per nuocere: se Erlangen era troppo piccola e lui un brillante, creativo matematico fin troppo giovane, adesso il momento poteva essere quello giusto. Anche se ha a malapena trentotto anni, anche se probabilmente sente che la sua capacità di fare ancora ricerca matematica di alto livello è ormai tramontata, forse può trovare la sua realizzazione nel creare finalmente una buona scuola di matematica. Così, nel 1886 accetta la cattedra a Göttingen, dove rimarrà fino al 1913, anno della sua morte; e decide di mettere tutte le sue energie per fare di Göttingen il maggior centro tedesco – e quindi probabilmente mondiale – di matematica. Convince David Hilbert a raggiungerlo, assume la direzione dei *Mathematische Annalen*, la rivista fondata da Clebsch e Neumann, e la trasforma nella più prestigiosa raccolta di memorie matematiche. Senza cadere nella tentazione di ricostituire la scuola di talenti in geometria che aveva impiantato a Lipsia, a Göttingen Klein si dedica alla didattica più ampia, portando avanti un gran numero di corsi sugli argomenti più diversi; cambia gli usi e costumi accademici, istituisce incontri settimanali di ricerca, riserva ambienti dedicati esplicitamente alla ricerca matematica.

[9] Non siamo sicuri che i termini "similarità" e "similare" siano del tutto corretti, in italiano. Dovrebbe essere più corretto scrivere "simile" e "similitudine" ma "Geometria Simile" e "Geometria Similitudinaria" ci fanno impressione, e non riusciamo a usarli. Forse "Geometria delle Similitudini" potrebbe essere la soluzione giusta, ma c'era già Fermat che aveva problema coi margini, figuratevi quali possano essere i nostri con lo spazio dentro le caselle…



7 *Göttingen.*

È difficile trovare nella storia della matematica un personaggio altrettanto portato sia alla ricerca che alla didattica: fino alla soglia dei quarant'anni, le sue idee e le sue ricerche spaziarono su una quantità di campi, dalla teoria delle funzioni alla fisica matematica, dalla teoria delle funzioni automorfe alle superfici di Riemann. Nella seconda parte della sua vita, si dedicò all'organizzazione della didattica con non minore impegno, e più invecchiava, più sembrava procedere a ritroso nel dare importanza all'insegnamento più basilare: negli ultimi anni di vita, si mostrò molto interessato all'insegnamento della matematica al livello pre-universitario.

È davvero un fraintendimento grande, ricordarlo solo come il creatore della Bottiglia di Klein; in compenso, ci si può consolare constatando che lui non fraintese mai lo scopo totalizzante della sua vita: era la matematica. Solo la matematica, in tutte le sue forme e aspetti.

2. Problemi

Nel nostro inguaribile ottimismo, siamo riusciti a trovare un lato positivo della pandemia di Coronavirus.

Questo mese, niente problemi di giardini da dividere in parti bislacche.

2.1 Torta al piquerre

Leggevamo, nei giorni passati, che il genere alimentare di cui sono maggiormente cresciute le vendite, con un incredibile aumento del 160%, è la *farina*.

Il primo pensiero di italiche e carboidratodipendenti folle impegnate in un manzoniano assalto ai forni è, fortunatamente, sbagliato: a quanto pare, infatti, gli italici forni casalinghi non sono occupati a sfornare le versioni domestiche di michette e maggiolini, visto anche il fatto che le panetterie (pur con la limitazione degli accessi) continuano a lavorare. Sono impegnati allo stremo nella preparazione di *torte*.

...e chi siamo noi, per ignorare questa nuova tendenza dell'italico genio? E, infatti, abbiamo deciso di impegnarci nel campo, con (come per gli scacchi, il bridge e il tiro con l'arco) più entusiasmo che abilità.

Il nostro primo esperimento, nonostante l'aspetto appetitoso, manca di una delle caratteristiche principali di una torta: infatti, non è rotonda, ma triangolare (...e anche scalena, a ben vedere); almeno due di noi sono fermamente convinti sia commestibile, e procedono quindi a dividersi la torta, con un metodo piuttosto originale, cercando ognuno di massimizzare la propria parte.

La torta, come avrete sicuramente compreso dal titolo, ha come ingredienti i tre vertici P, Q e R del triangolo e il metodo di divisione consiste dei seguenti passi:

1. Doc sceglie un punto X su PQ.
2. Rudy sceglie un punto Y su QR.
3. Doc sceglie un punto Z su PR.

...e Alice? Pessimista come sempre, sta pronta con la lavanda gastrica. In realtà, ha l'incarico di unire (a coltellate) i punti X, Y e Z: lo scopo di Doc (visto che quella sarà la sua fetta) è quello di massimizzare l'area XYZ, mentre Rudy (che ha ben presente i problemi dietologici di Doc) è intenzionato a lasciargliene il meno possibile: che logica seguono i nostri, per realizzare al meglio i loro diabolici piani?

Espansione? Espansione, con il solito *caveat* che non sappiamo la soluzione e che fonti ben informate ci garantiscono essere molto più complesso della parte vista sopra: in questo caso, per motivi tutti suoi, Doc intende massimizzare il *perimetro* della sua fetta. Come procede il gioco, in questo caso?

Eh? Le feste? Quali feste? Ah, giusto, le feste. Beh, virtuali.

2.2 Maschie fatiche postprandiali

Adesso non mettetela sulla discriminazione di genere: essendosi Alice saggiamente defilata dal problema precedente (e non essendo poi la torta quel preclaro esempio di levità che ci si aspettava), l'arduo compito di digerire le torte (certo, non crederete mica ci si sia fermati alla *prima*?) spetta ai nostri due eroi.

I quali, consci della loro al momento scarsa mobilità, decidono di approfittare della collezione (sostanzialmente infinita) di monetine di Rudy e della sua collezione di più di duemila scatole (vuote) di tabacco da pipa[10].

Con molta calma, il nostro Statico Duo mette una monetina nella prima scatola, due monetine nella seconda scatola, …, duemilaventi monetine nella duemilaventesima

[10] Prima che vi facciate venire strane idee: non tutte uguali. Rudy pensava che aver provato duemila miscele diverse potesse essere un interessante obiettivo nella vita, poi si è accorto che il sito *Tobacco Reviews* ne cataloga *settemilacinquecentodiciotto* (Nota per i curiosi: la sola Cornell&Diehl ne ha prodotte, ad oggi, 324). Aggiorniamo l'obiettivo. 7518 per 12..., diviso 3.5... più 40... OK, ne ho sin verso i centodieci anni.

scatola (sì, su ogni scatola c'è scritto quante monetine ci sono dentro). Poi, nasce il problema.

Volendo svuotare le scatole secondo un metodo logico e ottimizzato, i Nostri decidono che per ogni "giro", viene definito un sottoinsieme della totalità delle scatole (comunque formato: liberi di farlo enorme o minuscolo); da ognuna delle scatole del sottoinsieme viene poi tolto *lo stesso numero di monetine*; si aggiornano le scritte sulle scatole e si ricomincia da capo.

Ora, siccome tra un po' è ora di cena, vorremmo finire questo gioco il più presto possibile; qual è la migliore "strategia di svuotamento" (con *prova* che è la migliore)?

Chi vince? Tutti e due, se riescono a rimettere in ordine tutto prima di cena. E il premio è la cena.

3. Bungee Jumpers

Da un arbitrario punto C sul diametro AB di un cerchio di centro O è tracciata la perpendicolare al diametro che incontra la circonferenza in un punto D. Il cerchio inscritto nel triangolo curvilineo DCB è tangente ad AB in J. Dimostrate che AJ=AD e che DJ biseca l'angolo CDB.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Aprile!

Tutti in quarantena, chiusi in casa più o meno forzatamente, mi aspettavo un numero ridicolo di soluzioni. Invece no. Però sono sempre dell'idea che è meglio poche, ma buone e tutte le vostre soluzioni sono buone, perché sempre interessanti. Quindi procediamo.

4.1 [253]

4.1.1 Discendenze matematiche

Di questo problema fulmine, il mese scorso avevamo pubblicato già due soluzioni:

> *Prendete tutti i numeri da* 101 *sino a* 200 *e trovate il massimo divisore dispari di ognuno. Sommateli tutti e datemi il risultato. E con due limiti generici a e b?*

Le soluzioni pubblicate erano di ***Valter*** e ***Luigi***, quest'ultimo ci ha poi scritto con l'estensione che mancava:

> Mi ricollego alla prima parte della soluzione da me data al problema e pur non avendo trovato una soluzione soddisfacente dal punto di vista matematico ho trovata una procedura risolutiva abbastanza accettabile.
>
> La procedura permette di calcolare in modo abbastanza agevole la somma di tutti i massimi divisori dispari dei numeri da 1 ad n. Avendo a disposizione questa procedura sarà poi facile fare la differenza tra due somme relative a due numeri qualsiasi.
>
> Ricordiamo che per qualsiasi numero pari $2n$ la somma di tutti i massimi divisori dispari da $n+1$ a $2n$ è uguale ad n^2. Faccio ora un esempio numerico.
>
> Prendiamo il numero 37.
>
> 37 è dispari quindi dobbiamo sommarlo da "solo" come massimo divisore di se stesso
>
> Passiamo quindi a 36, sappiamo che $(36/2)^2$ ci dà la somma per tutti i numeri da 19 a 36. Aggiungiamo quindi alla somma 18^2.
>
> Dividiamo per due e passiamo a 18. come sopra sommiamo 9^2 (che ci copre l'intervallo da 10 a 18) ed essendo un numero pari dividiamo ancora per 2
>
> 9 dobbiamo gestirlo come 37. Sommiamo 9 e passiamo ad 8.
>
> sommiamo 4^2 e passiamo a 4
>
> sommiamo 2^2 e passiamo a 2

> sommiamo 1^2 e passiamo ad 1
>
> sommiamo 1.
>
> Totale: $37 + 18^2 + 9^2 + 9 + 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1$
>
> Non è il massimo ma ha l'efficienza di una ricerca binaria.
>
> Inoltre ha attinenza con la rappresentazione binaria del numero stesso! Infatti, partendo dal bit meno significativo, se si incontra uno zero si somma il quadrato della metà del numero e si passa a questo, se si incontra un 1 si sommano il numero e il quadrato della metà del numero immediatamente inferiore e si passa a quest'ultimo
>
> 37 = 100101 => 101001 => $37 + 18^2 + 9^2 + 9 + 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1 + 0^2$
>
> Scusate ma la quarantena fa di questi scherzi al cervello!

Ma no, siamo certi che fa bene, e comunque la promessa fatta di ritornare sull'estensione è stata mantenuta. Andiamo avanti.

4.2 [254]

4.2.1 Arrivano le feste!

Bene, tagliamo le torte, che tre compleanni su quattro li abbiamo già festeggiati:

> *Abbiamo delle torte triangolari di area unitaria tutte diverse tra loro disposte su un tavolo sostanzialmente illimitato e due persone per la procedura di divisione. Il primo definisce un punto X sul tavolo, il secondo effettua un taglio passante per X e sceglie la fetta. Ciascuno dei due vuole fare in modo che la propria fetta sia della massima dimensione possibile, esiste un metodo che permetta ai nostri due eroi di essere, nei limiti della procedura, entrambi convinti di aver ottenuto il meglio?*

A strettissimo giro di posta arriva un commento un po' seccato di ***.mau.***:

> Sarà che è mattina presto, ma non capisco il problema. Rudy non può semplicemente scegliere il baricentro del triangolo?

Dato che Rudy (che era il primo nel problema) ipotizzava anche un tavolo infinito, sarebbe una soluzione che mette bene in evidenza la sua crudeltà. La stessa idea sembra essere venuta a ***Valter***:

> La sparo senza pensarci troppo; quindi probabilmente sbaglio.
>
> Il punto X potrebbe essere il baricentro/centroide del triangolo? Comunque taglio, le due aree, mi pare, dovrebbero coincidere. Altrimenti X non sarebbe il centro di massa del nostro triangolo.
>
> Per capirci: non starebbe in equilibrio "appoggiandosi" su di lui. Se un area fosse maggiore dell'altro "cadrebbe" da quella parte.

In realtà entrambe le soluzioni assumono che i Nostri vogliano avere parti uguali, che non è proprio lo scopo in questo caso. ***Luigi*** è d'accordo:

> Quel volpone di Rudy definirà il punto X esattamente in coincidenza con il baricentro della torta triangolare, ovvero il punto di incontro delle tre mediane del triangolo stesso. A questo punto quale che sia il taglio che farà Doc, dovendo passare per il baricentro del triangolo, dividerà la torta in due parti di eguale peso (ed area).

Il Capo è già disperato, non sembra esserci nessun modo per scamparla. Vediamo la versione di ***Salvatore***:

> Provo a fornire una soluzione di tipo pratico al problema delle torte triangolari pubblicato sul numero 254 (Marzo 2020) di *Rudi Mathematici*, senza alcuna dimostrazione matematica o geometrica, né senza applicare dei rigorosi passaggi logici, ma giusto con una serie di riflessioni e motivazioni, per così dire, di carattere fisico ed intuitivo (più intuitivo che fisico). La soluzione da me fornita dovrebbe essere parimenti conveniente sia per Rudy che per Doc (*Win-Win*). Spero che la mia soluzione sia anche corretta, o che quantomeno fornisca qualche spunto

interessante o divertente (ce n'è bisogno di questi tempi…), anche se magari non è del tutto conforme alle regole della rivista...

Innanzitutto, a Rudy non conviene scegliere un punto X sul piano che sia esterno alla superficie della torta triangolare: infatti, in tal caso, Doc può sempre decidere un taglio della torta con una porzione ad area nulla, facendo opportunamente passare il taglio per uno dei vertici del triangolo. Quindi, Rudy deve far ricadere il punto all'interno della superficie triangolare della torta. Vediamo dove.

Per semplicità, e senza perdere in generalità, proviamo a immaginare di disporre la torta triangolare su un piano cartesiano, con un lato giacente sulle ascisse e con uno dei suoi vertici coincidente con l'origine del piano, questo dovrebbe semplificare la visualizzazione mentale della situazione. Con il punto X disposto all'interno della torta, per Doc ora il problema si traduce quindi in determinare l'angolo con cui va ruotato il coltello per eseguire il taglio passante per il punto scelto da Rudy. Questa ultima osservazione può sembrare ovvia e banale, ma risulterà rilevante tra poco, alla luce del tipo di "dimostrazione" (uso le virgolette, in quanto non è affatto una dimostrazione in senso classico matematico-geometrico) che sto per fornire. Intuitivamente, spostare il punto troppo vicino (troppo in alto o troppo a destra, diciamo) ad uno dei vertici significa fornire a Doc la possibilità di effettuare facilmente un taglio in due porzioni con una sicuramente di area maggiore dell'altra.

A mio parere, in ultima analisi, a Rudy conviene far coincidere il punto X con il **BARICENTRO** del triangolo: fisicamente, per definizione esso rappresenta infatti il punto di equilibrio della distribuzione delle masse. Immaginate infatti di appendere la torta triangolare al muro (facciamo finta che la torta sia invece un bel torrone, così starà su senza problemi e non cadrà spiaccicandosi sul pavimento, visto che dopo Rudy e Doc se lo vogliono mangiare… ☺), con un chiodo piantato sul suo baricentro: posizionando la fetta ruotata di qualsivoglia angolo, essa rimarrà in equilibrio nella posizione scelta, immobile senza dondolare (e qua si scopre l'importanza del concetto di rotazione di cui ho detto sopra: ruotare il coltello per il taglio equivale a decidere l'orientamento della nostra torta inchiodata al muro). Rappresentando il punto di equilibrio delle masse, il baricentro è di conseguenza anche quello delle aree, se si considera (a buona ragione) che la torta abbia densità uniforme. Praticando ora sulla torta un bel taglio passante per il suo baricentro e perpendicolare al terreno, qualsiasi sia il suo orientamento, le due porzioni risultanti dovrebbero essere uguali in termini di massa e quindi di area.

Va bene, dicono tutti la stessa cosa. Capo, mi spiace, parti uguali. Andiamo avanti.

4.2.2 Tetri(s) avanzi

La preoccupazione maggiore del Capo per questo problema era la riduzione della scacchiera, ma l'esposizione è piuttosto breve:

Data una scacchiera N×N cui mancano le quattro caselle d'angolo, per quali valori di N potete tassellare la scacchiera con le "L"?

E anche in questo caso partiamo con la soluzione di ***Valter***:

A me pare per nessun valore di N se si tiene conto che ogni L occupa quattro caselle.

Escludo i casi di N dispari poiché le casella da tassellare sarebbero anch'esse dispari. Numero le caselle partendo da 1 sino a N×N dall'alto in basso e da sinistra a destra. Considero la congruenza modulo quattro del valore numerico presente in ogni casella.

Si verifica che, comunque sia disposta una L, la somma delle sue caselle vale 1 mod4. Per N pari, togliendo le quattro caselle d'angolo, la somma delle restanti vale 2 mod4.

Il numero delle L per tassellare la scacchiera mutilata dovrebbe valere quindi 2 mod4. Dato che la scacchiera manca di quattro caselle, si ha però che tale numero è dispari.

Sembra che il caso sia già chiuso. Un bel ritorno adesso tra le nostre pagine, ***GaS***:

Prendiamo una scacchiera N×N, abbiamo N^2 caselle a cui eliminiamo le caselle 4 d'angolo; in totale $N^2 - 4$ caselle. Per coprirle tutte abbiamo bisogno di nL pezzi ad "L", dove:

$$nL = (N^2 - 4)/4 = (N/2)^2 - 1 \qquad [1]$$

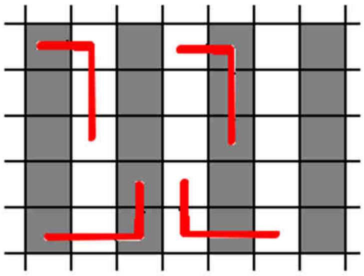
Ricaviamo quindi subito che condizione necessaria per ricoprire la scacchiera mutilata è che N sia un numero pari.

Andiamo quindi ad analizzare cosa succede per N pari. A mano si vede facilmente che già per N=4 è impossibile trovare una soluzione che invece si trova facilmente per N=6 (N=2 è ovviamente un caso degenere, io considero che sia tassellabile con nL=0 pezzi ma sono gusti… :-)

Quindi N pari è condizione necessaria ma non sufficiente.

Consideriamo allora una "coloratura" della scacchiera che non sia a "scacchi" ma a "colonne" colorando le colonne alternativamente bianche e nere. Consideriamo adesso un generico pezzo "L" inserito in tale scacchiera colorata a colonne: sicuramente occuperà 3 caselle di un colore ed una casella dell'altro colore.

Es. di posizionamenti di una L, facile vedere che occupi sempre 3 caselle bianche ed una casella nera, o viceversa:



Ipotizziamo quindi di avere, in una ipotetica soluzione, un certo numero A di "L" che occupano 3 caselle nere ed un numero B di "L" che occupano 3 caselle bianche.

Essendo il totale di caselle bianche e nere lo stesso, ricordiamoci infatti che stiamo lavorando per le sole N pari, si deve avere:

$$\text{Tot(caselle\_nere)} = \text{Tot(caselle\_bianche)}$$

da cui:

$$3° + B = 3B + A$$

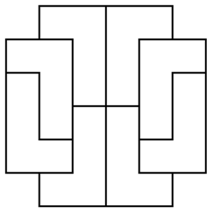
e quindi:

$$A = B$$

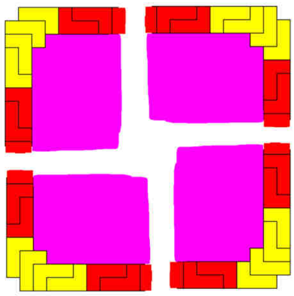
Essendo nL = A + B = 2A si ricava che nL deve essere un numero pari. Dalla [1] si ricava, ancora, che N/2 deve quindi essere un numero dispari: condizione necessaria è quindi che N sia multiplo di 2 ma non di 4. Quindi si hanno soluzioni per N = (2), 6, 10, 14, ..., $4a$+2, ... (con "a" generico)

Ma è anche condizione sufficiente? Sì, vediamo perché.

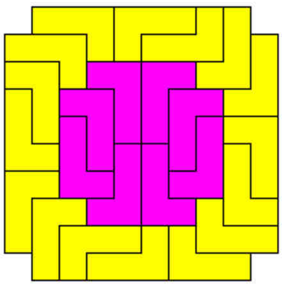
Come scritto sopra è facile trovare a mano una soluzione per N=6, ad es.:



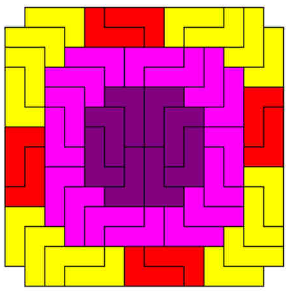
Da questa prima soluzione (abbiamo detto che N=2 è un caso degenere) è possibile trovare soluzioni in maniera "ricorsiva": ogni configurazione con lato N=4a+2 può infatti essere facilmente trovata da quella con lato (N – 4), in viola nella figura seguente, aggiungendo una cornice larga 2 quadrati da tassellare con 4 identiche configurazioni per ogni angolo (in giallo) e a – 2 configurazioni rosse 4×2 su ogni lato



Vediamo ad esempio come ricavare la soluzioni per N=10 (a=2) da quella con N=6



E quella per N=14 (a=3) da quella con N=10



And so on…

Per concludere: condizione **<u>necessaria e sufficiente</u>** affinché una scacchiera N×N mutilata sia tassellabile dalle "L" è che N sia multiplo di 2 ma non di 4.

E con questo è tutto. Alla prossima!

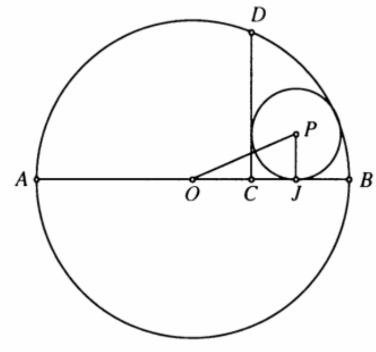
5. Quick & Dirty

Un insieme di due milioni di punti è interamente contenuto in un cerchio. Esiste una linea tale da avere un milione di punti da una parte e un milione di punti dall'altra? E, se sì, come possiamo (in teoria) trovarla?

6. Pagina 46

Sia P il centro del cerchio (P) inscritto in DCB e sia r il suo raggio, e sia R il raggio del cerchio (O) di diametro AB. Essendo (P) tangente internamente a (O), la distanza OP tra i loro centri è pari alla differenza tra i loro raggi e nel triangolo (rettangolo) OPJ abbiamo che:

$$\mathrm{OJ}^2 = \mathrm{OP}^2 - \mathrm{PJ}^2 = (R - r)^2 - r^2 = R^2 - 2Rr$$



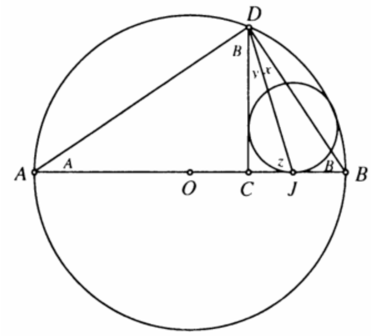
E quindi:

$$\mathrm{AJ}^2 = (\mathrm{AO} + \mathrm{OJ})^2 = (R + \mathrm{OJ})^2 =$$
$$= R^2 + 2R\,\mathrm{OJ} + \mathrm{OJ}^2 = R^2 + 2R\,\mathrm{OJ} + R^2 - 2Rr =$$
$$= 2R^2 + 2R(\mathrm{OJ} - r) = 2R^2 + 2R\,\mathrm{OC}$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che $r = \mathrm{CJ}$.

Ma anche AD^2 è dato da un'espressione di questo tipo, essendo poi DC l'altezza dell'ipotenusa nel triangolo (rettangolo) ADB, si ha:

$$\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB}\,\mathrm{AC} = 2R\,(R + \mathrm{OC}) = 2R^2 + 2R\,\mathrm{OC}$$



Nella figura a fianco, essendo AB un diametro, il triangolo ADB è rettangolo, e quindi l'angolo ADC vale:

$$\mathrm{ADC} = 90° - (x + y) = \mathrm{DBC}$$

Essendo AD=AJ, il triangolo ADJ è isoscele

$$\mathrm{DBC} + y = \mathrm{DJA} = z$$

Ma z è un angolo esterno del triangolo JDB, e $\mathrm{B} + x = z$.

Quindi, x=y, che è la tesi.

7. Paraphernalia Mathematica

Data l'attuale contingenza, il tema ci pareva evidente, quindi abbiamo preso la cosa con relativa calma; salvo poi accorgerci che, da bravi *influencer* (sì, *pun intended*), come al solito avevamo anticipato i tempi. Quindi, per i dettagli relativi alla diffusione di epidemie e pandemie, vi rimandiamo al numero 131 di una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa: il pezzo che come al solito *non* avete letto, si intitolava "Dalli all'untore!". Siccome però ci piace lasciarvi qualcosa da fare, il modello dell'influenza in corso non lo abbiamo trattato: infatti questa segue un modello S.A.I.R., dove la "A" sta per "Asintomatico".

Volendo però restare in argomento e non volendo partire da Newton che, per sfuggire alla peste, ha scoperto la legge di gravitazione universale (e inventato la porta gattaria), vi invitiamo a godervi il periodo di forzata reclusione pensando a come rendere migliore la vostra città. E, come al solito, la prendiamo alla lontana.

7.1 Smart Cities – Cominciamo dal fondo

Ormai, gli esperti di Smart Cities vanno a un soldo la dozzina, ma Rudy ha sempre considerato le definizioni che se ne danno come piuttosto fumose: se andate a vedere, viaggiano a proclami quali *miglioramento di...*, *affidabilità della...* e avanti di questo passo; la cosa, anche se interessante, ha sempre dato a Rudy l'impressione di andare a cercare un'unità di misura della bellezza[11]. Come lo misuro il miglioramento? Deve limitarsi a una *disponibilità* o basta la *possibilità*? Per fare un esempio personale, Rudy ha in casa la fibra, il vicino non ha neanche il telefono ma ogni tanto ruba un accesso WiFi a Rudy: quale dei due è *smart*?

E sin qui, abbiamo introdotto metà del titolo.

Vi è mai capitato un incontro "creativo" nei quali si cerca un modo per rendere appetibile ad un cliente un prodotto che sta per essere lanciato? Di solito si concludono in una pletora di proposte irrealizzabili, ma recentemente ne abbiamo visto uno che ha portato a interessanti risultati. Il facilitatore arriva, ci guarda e dice: "Bene, come possiamo rendere *orribile* questo prodotto?" Insomma, partiamo dal contrario di quello che ci serve.

Ecco, **Brelsford** (e altri) hanno avuto la stessa idea: come possiamo misurare la *dumbness* di una città, o meglio di una sua zona?

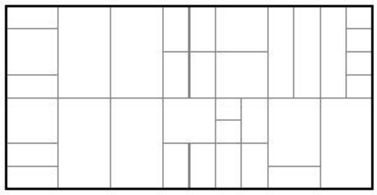
Il metodo scelto è stato tanto semplice quanto geniale (almeno in teoria): definite alcune "vie principali" (sicuramente quelle sui confini della zona e, se esistono, quelle delle vie all'interno), *quanti isolati dobbiamo traversare* da un punto qualsiasi prima di arrivare ad una via principale? In uno *slum*, si presume queste vie siano quelle che hanno una serie di servizi[12] al cittadino o che, quantomeno, facilitano l'uscita dalla zona non servita.

L'analisi effettuata dai Nostri è ormai "anzianotta" (risale al 2015), e i luoghi analizzati sono facilmente identificabili: è interessante andare a controllare su Google Map (mettete su "satellite") se questi luoghi siano stati risanati in questo tempo (SPOILER No).

[11] Per i pochi che non lo sanno ancora: la bellezza (femminile, lasciamo a voi l'estensione del concetto) si misura in *milliHelen*, definito come "la bellezza in grado di muovere una nave". Come il Bel e il deciBel, l'unità utilizzata è un sottomultiplo dell'unità fondamentale: Elena di Troia era definita, nell'Iliade, come "di una bellezza in grado di muovere mille navi".

[12] Intesi in senso lato. Non pensate subito a biblioteche, ristoranti o uffici postali: "acqua/luce/gas" vanno benissimo. O anche "fognature". Già.

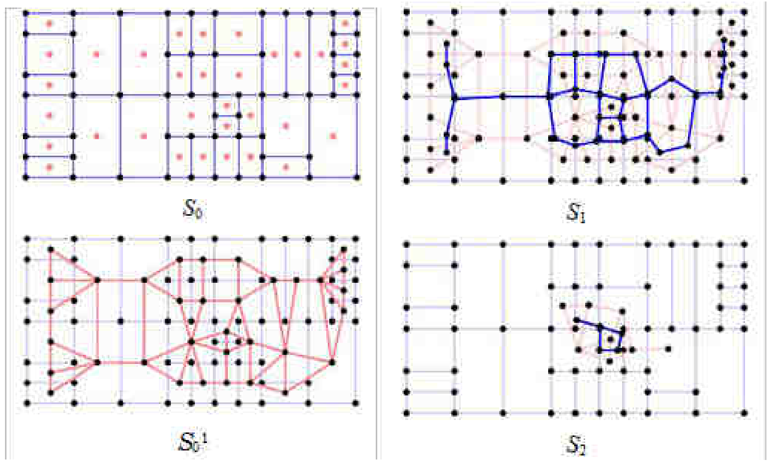
Vediamo comunque il metodo utilizzato, applicandolo ad una zona urbana puramente teorica (in figura) e inventandoci un po' di terminologia: i bordi sono le *Main Street* (le vie principali, quelle che ci permettono di uscire dallo slum), mentre le vie indicate in grigio sono le *Skid Row*, quelle che permettono la connessione interna alla zona: le aree bianche tra questi due tipi di linee sono gli isolati.



8 *Main Streets & Skid Rows.*

Il nostro scopo è quello di identificare i diversi isolati e stabilire, per ognuno di loro, quanto tempo sia necessario per uscire e raggiungere una Main Street: definiamo in un modo elastico il concetto di "tempo", visto come *il numero degli incroci che devo passare*: ignoriamo, in pratica, le dimensioni del singolo isolato.

Per prima cosa possiamo trasformare il nostro disegnino in un *grafo*, nel quale gli incroci sono i *nodi*, le vie sono gli *spigoli* e gli isolati sono le *facce*: il tutto, quando viene rappresentato come grafo (o meglio, come *complesso planare*[13] *bidirezionale*) e indicato con S_0: lo trovate nella prima parte della figura qui sotto: i puntini sugli isolati ci servono per il prossimo passaggio.



9 *Qualche grafico.*

Adesso, dati i puntini sugli isolati, costruiamo il grafo noto come *duale debole* del nostro grafo originale: due nodi sono connessi tra di loro se hanno uno spigolo del primo grafo in comune, questo dà origine al secondo grafo della figura qui sopra, solitamente indicato con S_0^1.

Ora, anche S_0^1 è un complesso planare: quindi, possiamo ricavare il *duale debole* anche di questo grafo, ottenendo S_1, che è il terzo grafo.

Fermiamoci un attimo, e chiediamoci cosa abbiamo ottenuto. Se partite da un punto all'interno di questo grafico, *dovete traversare almeno una Skid Row per arrivare a una Main Street*: in pratica, con il primo passaggio abbiamo trasformato in "bordo" tutti gli isolati che danno su una Main Street, e con il secondo passaggio li abbiamo eliminati dal nostro grafico.

A questo punto, l'unico problema nel ricavare S_2 potrebbe essere il chiedersi cosa farne degli alberi (nel senso di "grafi ad albero") sulla sinistra e sulla destra: semplice, si ignorano: il che ci porta al grafico S_2 che è finalmente l'ultimo, visto che il duale debole è composto dal singolo puntino all'interno.

Adesso, non dovreste avere problemi a comprendere la definizione formale di *complessità del quartiere*: un quartiere ha complessità k se il duale debole S_{k+1} è un *albero*: siccome S_3, nel nostro caso, è un albero (di un punto solo), il nostro quartiere ha complessità 2.

[13] …e qui, senza dare troppo nell'occhio, vi abbiamo fatto passare il concetto che non esistono cavalcavia o sottopassaggi…

Adesso, vi state facendo tutti una domanda. E va bene, soddisferemo la vostra sadica curiosità. Il record negativo sembra essere di un sobborgo di Città del Capo, oggi parzialmente risanato, in grado di raggiungere una complessità *sei*: per vedere se avete capito come funziona il tutto, provate a calcolare i duali deboli...

10 *Il record, S_1 e S_3.*

Contrariamente a quanto succede di solito con la matematica, questo metodo deve tenere conto delle caratteristiche particolari del luogo: vi forniamo un paio di esempi un po' meno esotici di quelli classici e ai quali siamo piuttosto affezionati.

Fiumi, laghi et similia vanno trattati con una certa cautela: a **Venezia**, il Canal Grande è considerato valicabile solo ai ponti di Rialto e dell'Accademia, che rappresentano le nostre Main Street; il ponte degli Scalzi, la trave (in un occhio) di Calatrava e tutti i ponti su Rio Novo (e le relative fondamenta "lato Venezia") vengono considerate Main Street, mentre Fondamenta Nuove e tutte le altre zone "di confine" no; il che potrebbe trasformare alcune zone di Venezia in *Slum*: sconsigliabile usare questo argomento per tirare sul prezzo, se volete comprare Ca' d'Oro[14].

Non ci risulta, in merito, nessun calcolo considerando Main Street le linee di vaporetti e motoscafi: prego...

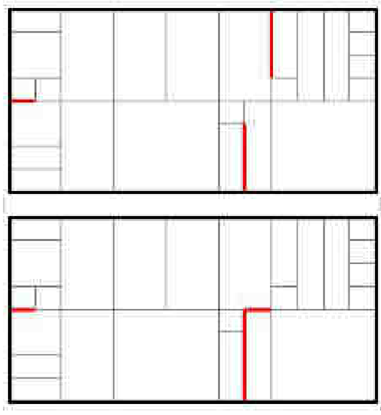
Un altro caveat è quello di non considerare i sensi unici come delle Skid Row: a **Torino**, il quartiere dove abita adesso Rudy raggiungerebbe valori pietosi. Va bene che sino agli anni Settanta comprendeva il macello municipale ed era sede di meretricio, ma oggi è saturo di studi di avvocati *[joke intended]* e Rudy ha reso perplesso più di un londinese definendolo *the Turin Temple* (che, anche lui, dovrebbe avere dei valori piuttosto alti...).

Come si pone rimedio a situazioni di questo tipo? La soluzione principe, in questo caso, è di solito quella di passare (con moderazione) alle ruspe, trasformando qualche Skid Row in Main Street: nessuno infatti ha mai detto che queste non possano essere delle strade chiuse all'interno del nostro quartiere, ma la cosa comunque non è semplice.

Infatti, in un quartiere come quello indicato nella prossima figura, trasformare in Main Street le vie rosse indicate in alto migliora sicuramente la complessità, ma la costruzione indicata in basso non solo connette lo sfortunato isolato ad alta complessità alle Main Street (portando ad un livello di complessità equivalente), ma costa molto meno in asfalto! Il guaio, in questi casi, è che la soluzione ottimale può non essere immediata.

[14] Permetteteci una nota personale (di Rudy): se qualcuno calcola la complessità di Venezia e trova il punto con il valore più alto in Dorsoduro, può dirmelo? Oh, se vi informate anche sui prezzi, grazie: posso sempre sognare.

Inoltre, come è evidente, il fatto che i diversi isolati siano di dimensioni anche molto diverse tra loro può dare origine a complicazioni.

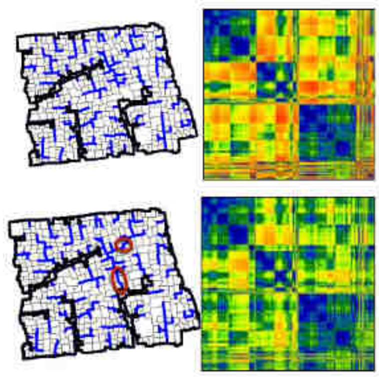


11 *Soluzione subottimale (in alto) e ottimale (in basso).*

Per trovare una soluzione valida, Brelsford e colleghi hanno pensato di utilizzare un metodo *statistico*: per prima cosa, scelto un isolato, si cercano i percorsi più brevi che lo connettano ad un certo numero di altri cammini brevi; se ne troveranno alcuni, e di ciascuno di questi viene calcolata la lunghezza; questa, poi, viene elevata ad una potenza *negativa* (l'ottava, di solito, ma questa è più una tradizione che una scelta motivata) per ottenere la sua probabilità di scelta: questo dà un enorme vantaggio al cammino più breve.

Per fare il conto, si sceglie uno dei percorsi (a caso, ma ricordiamo che il cammino più breve è facilitato) e lo si aggiunge ala rete delle Main Street: questo, non può aumentare la complessità del sistema, al più, avrà la stessa complessità di prima.

...e poi si itera. Nel senso che si sceglie un altro blocco e, con le Main Street ottenute sino a questo momento, si rifà il conto. Il metodo non sembra un fulmine di rapidità (e, in effetti, non lo è), ma almeno porta un po' di computabilità in un campo nel quale si procede principalmente a istinto.



12 *Prima e seconda riprogettazione.*

Un problema completamente diverso è quello di minimizzare i *tempi* di spostamento da un blocco all'altro, trasformando dei tratti di Skid Row in Main Street: spesso, infatti, zone spazialmente vicine (da Fondaco del Megio a Ca' Vendramin Calergi, per stare a Venezia: in mezzo, c'è il Canal Grande, ma se non prendete il vaporetto ci mettete più di mezz'ora a piedi) richiedono tempi lunghi per essere raggiunte; Brelsford ha calcolato, per il sobborgo di Khayelitsha (sempre Cape Town, dovrebbe essere un pezzo di quello visto prima), qualche conto: individuate le Main Street (reali e possibili), ha messo come righe e colonne in una matrice tutti gli isolati[15] e li ha colorati dal blu (tempo minimo di percorrenza) al rosso (massimo tempo di percorrenza); in effetti, le Main Street proposte (quelle in blu nella mappa) sembrano migliorare leggermente la situazione. La bella notizia è che modifiche anche minime possono portare a enormi differenze nella matrice dei tempi: guardate, nella seconda parte della figura, come cambia la matrice dei tempi di percorrenza aggiungendo solo le due strade segnate in rosso. La cattiva notizia è che queste soluzioni sono decisamente complesse da trovare.

Insomma, usare la topologia in luogo della geometria sembra portare a strumenti di analisi particolarmente interessanti, se usati *cum grano salis*. E voi? Quanto distate, dalla Main Street?

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[15] L'ordinamento degli isolati è stato fatto attraverso Cluster Analysis, per questo compaiono grosse zone dello stesso colore: la CA è un argomento che ci teniamo per i giorni di pioggia, abbiate pazienza e ne parleremo.