Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 253 – Febbraio 2020 – Anno Ventiduesimo

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM252 ha diffuso 3'306 copie e il 23/02/2020 per Google eravamo in 49'100 pagine.

Dato il nostro sconfinato amore per i giochi di parole, non potevamo lasciarci sfuggire la *Voronaffe* (Voronoi Giraffe) di ***Froland's***, che trovate a centro immagine; i suoi altri lavori, anche se indubbiamente interessanti, non suscitano in noi la stessa tenerezza. La decorazione per l'albero di Natale, poi, ha tutta l'aria di una istigazione a delinquere per gatti.

1. Cento leghe ad ovest delle Azzorre

"All Science Teachers are Crazy"

Certo, siamo ancora davvero tanto lontani da certe possibilità. E quasi certamente, stavolta non ci basterà scopiazzare il progetto dei pescatori nordafricani.

Siamo lontanissimi: potrebbe anche darsi, a dire il vero, che la distanza tecnologica – e di conseguenza la distanza spaziale, la distanza tout-court – sia semplicemente incolmabile. Ma giocare con l'immaginazione non costa niente, soprattutto quando si è stati preceduti da migliaia di scrittori. Perché c'è ben poco da fare: che piaccia o meno la fantascienza, che vengano brividi d'entusiasmo o conati di raccapriccio al solo sentire nominare saghe come Star Trek o Star Wars, l'idea della scoperta, dell'esplorazione e della colonizzazione di altri pianeti è solo di poco più giovane dell'Homo sapiens.

Certo, dicevamo, un conto è farsi un viaggio interstellare propulsi soltanto da una certa dose di gratuita immaginazione, tutto un altro conto è arrivarci davvero, con tutto l'armamentario di carne, ossa, muscoli, organi e cervello di cui ci ha dotato Madre Natura. Bastano i primi rudimenti di astronomia per rendersi conto di quali siano le distanze in gioco, e di quanto sia complicato anche solo immaginare un viaggetto interplanetario: ci esaltiamo tutti (e sacrosantamente) per le imprese dei nostri astronauti che sulla Stazione Spaziale Internazionale fluttuano in orbita attorno al nostro pianeta, e ci dimentichiamo spesso che, tutto sommato, orbitano giusto tre o quattrocento chilometri sopra le nostre teste. Quattrocento chilometri sono una distanza che è ormai patrimonio dell'esperienza di quasi ogni essere umano: basta una mezz'ora per farli durante un volo aereo, poco più di un'ora su un treno ad alta velocità; persino a piedi non sono una distanza mitologica, come possono raccontare i fanti di tutte le guerre fino all'Ottocento, o le migliaia di pellegrini che oggi si avventurano sul Cammino di Santiago. Ma certo, lo spazio (nel senso di "spazio siderale") è davvero una dimensione diversa: conta poco la distanza dalla superficie terrestre, conta l'essere lassù, in una scatoletta metallica che bilancia con la sua velocità orbitale l'attrazione centripeta del pianeta; che trasporta pochi fortunati uomini e donne in una danza continua tra albe e tramonti, in una caduta continua e innocua, mentre il pianeta madre si mostra a loro in tutta la sua arrogante bellezza.

Però, in fondo, le poche centinaia di chilometri di quota tornano a sembrare davvero poche in seconda battuta, non appena si supera la legittima meraviglia del quasi impossibile; quasi ci si aspettasse di più dagli astronauti e dalle loro "astronavi". E allora bisognerà fare il piccolo sforzo necessario per capire che, una volta nello spazio, la misura delle distanze sembra quasi perdere di linearità, pronta com'è a sconvolgere subito il senso delle proporzioni. Alla fin fine, sono pur sempre gli astronauti quelli che detengono il massimo record di distanza mai percorsa: un paio di dozzine[1] di uomini hanno viaggiato verso la Luna, girandole attorno, e una buona metà[2] di questi hanno provato la

[1] Abbiamo scritto "un paio di dozzine" per lasciare il numero un po' approssimato, ma poi ci siamo presi la briga di verificare. Le missioni Apollo che sono entrate in orbita attorno alla Luna sono state nove (Apollo 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17), ognuna con tre uomini a bordo: il totale però non è 27, perché tre astronauti (Cernan, Lovell e Watts Young) hanno fatto parte degli equipaggi per due volte, riportando il totale a 24, e quindi gratificandoci del fatto che l'approssimativo "due dozzine", in fondo, approssimativo non è affatto.

[2] Anche "una buona metà" è stato inizialmente scritto a memoria, e per cautela. Anche in questo caso, la cautela è stata del tutto inutile, perché il numero di astronauti che hanno effettivamente camminato sulla Luna è davvero esattamente la metà dei 24 che ci sono andati vicino, cioè 12. Può sembrare strano, visto che dei tre membri di ogni equipaggio due erano destinati all'allunaggio e uno solo a restare nel "modulo di comando", ma far tornare i conti non è difficile: bisogna cominciare col ricordare che le missioni Apollo 8 e Apollo 10 prevedevano l'orbita attorno alla luna ma non l'allunaggio, il che implica che i sei astronauti di queste due missioni erano contrattualmente predisposti a non toccare il suolo lunare; a loro vanno aggiunti i tre dell'Apollo 13, che invece allunare dovevano, ma sono invece passati alla storia con la frase "*Houston, abbiamo un problema*" (anzi, a dire il vero, la vera frase è stata "*Uh, Houston… abbiamo avuto un problema, qui…*", ma

sensazione di camminarci sopra. Curiosamente, coloro che detengono il record, tuttora imbattuto, di esseri umani che hanno raggiunto la maggior distanza dal loro luogo di nascita spetta a tre che la Luna non l'hanno toccata, e si sono limitati a girarci attorno: i tre astronauti dell'Apollo 13, quella missione che non si sa bene se definire come la più sfortunata di tutte le spedizioni verso la Luna, perché non raggiunse l'obiettivo, o la più fortunata, perché è comunque finita bene, senza perdita di vite umane, nonostante ad un certo punto le cose si fossero messe così male che solo qualche ardito e inguaribile ottimista si sentiva disposto a scommettere sull'*happy ending*.

1. Fred Haise, Jim Lovell e Jack Swigert, detentori indiscussi, da quasi mezzo secolo esatto, del record del "salto in lungo" universale.

E comunque, i tre dell'Apollo 13 non si sono limitati ai quattrocento chilometri di distanza della ISS: si sono allontanati fino a quattrocentomila[3]. Un fattore mille di differenza: lo stesso che passa tra un debito di dieci euro e uno di diecimila, tra una passeggiata in bicicletta di quaranta chilometri e il giro del mondo, tra l'altezza di uno sgabello e quella del Monte Bianco. Ma restano sempre chilometri, un'unità di misura che quasi non ha dignità di reale esistenza, quando si parla di distanze interstellari. La luce copre il record dell'Apollo 13 in 1,3 secondi circa, e non ci stancheremo di ricordarvi che la velocità della luce su scala cosmica è davvero lenta, anche se insuperabile.

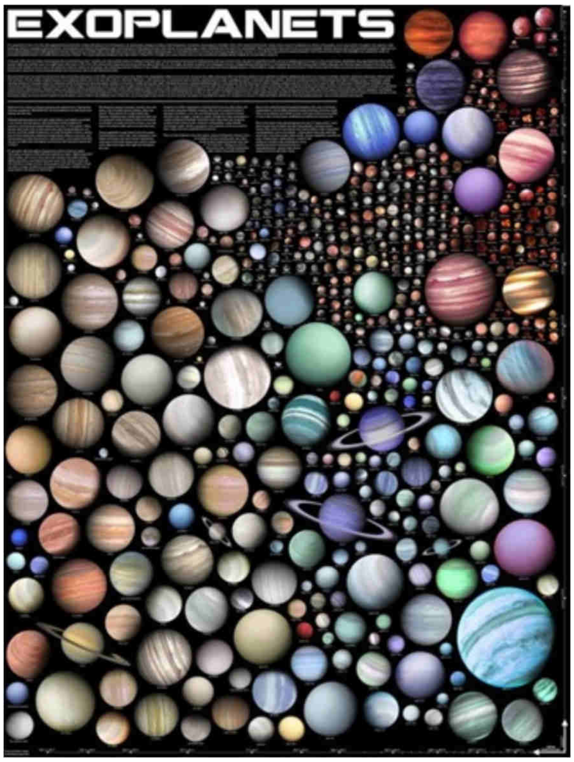
Al giorno d'oggi si comincia a parlare abbastanza seriamente di un possibile viaggio su Marte, e se ne parla in termini di tempo tale da essere una percentuale non proprio trascurabile di vita umana: tra andata e (eventuale) ritorno si è già su un ordine di grandezza superiore all'1%. Oltre Marte, le possibilità di calpestare un suolo planetario diverso da quello della Terra si fanno subito più rare: né Venere né Mercurio sono seriamente candidabili, non fosse altro che per questioni di temperatura; poi c'è la sfilza dei pianeti gassosi, per i quali è difficile immaginare un Tito Stagno o un Ruggero Orlando che annuncino entusiasti "*Ha toccato!*", anche se, a voler essere obiettivi, gli stessi pianeti hanno dense corone di satelliti rocciosi che potrebbero invece essere candidabili. Ma il punto cruciale resta la distanza: se è vero che siamo ancora assai lontani dal conoscere a fondo il nostro stesso sistema solare, questo dipende anche dal fatto che, a seconda delle varie definizioni, lo si può considerare esteso fino a uno o due

ormai la citazione è inamovibile). Il totale del non-allunati sembrerebbe quindi salire a 9, ma in realtà arriva solo ad 8, perché Jim Lovell si è ritrovato ad essere l'unico essere umano a viaggiare per due volte verso la Luna (Apollo 8 e 13) senza mai poterla toccare. Poi ci sono i sei piloti dei moduli di comando delle missioni 11, 12, 14, 15, 16 e 17, che da programma dovevano restare in orbita attorno al satellite senza sperare di toccarlo, e il totale dei non-allunati sembrerebbe così arrivare fino a 14, ma così non è, perché dal numero bisogna eliminare John Watts Young (che non ha toccato la luna con l'Apollo 10 ma si è poi rifatto con l'Apollo 16) ed Eugene Cernan, che Selene l'ha solo vista dall'oblò sull'Apollo 10 (come JWY), ma poi ci è tornato con l'ultima Apollo 17, e alle ore 05:40 UTC del 14 dicembre 1972 è diventato l'ultimo essere umano a toccare la superficie della Luna. Ergo, 12 sì e 12 no: a puro titolo di omaggio e riepilogo, ecco i 24 nomi in ballo: **Aldrin**, Anders, **Armstrong**, **Bean**, Borman, **Cernan**, Collins, **Conrad**, **Duke**, Evans, Gordon, Haise, **Irwin**, Lovell, Mattingly, **Mitchell**, Roosa, **Schmitt**, **Scott**, **Shepard**, Stafford, Swigert, **Watts Young** e Worden (e non dovrebbe essere difficile comprendere il significato del carattere grassetto su dodici cognomi).

[3] Per la precisione, 400'171, secondo le fonti ufficiali: dovuti al fatto che il loro *apocinzio* (se avete dubbi sul significato della parola, dovrebbe essere sufficiente ricordare 1) il significato di "apogeo"; 2) che la terra veniva chiamata Gea dai greci; 3) che un bel nome della Luna, sempre secondo i Greci, era "Cinzia") è stato pari a 254 chilometri, dalla parte del lato oscuro del nostro satellite, raggiunto alle ore 00:21 UTC del 15 aprile 1970. Le altre navicelle Apollo ne raggiunsero solo di inferiori, anche perché loro non avevano bisogno dell' "effetto fionda" per tornare di corsa a casa.

anni luce dal Sole, insomma praticamente inesplorabile anche se si riuscisse a viaggiare a velocità prossime a quella della luce.

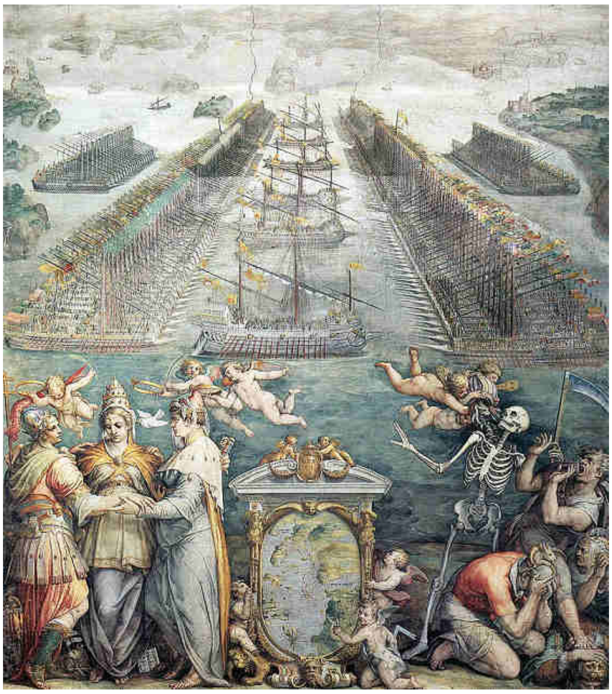
E invece, la gran parte dei pianeti è tutta fuori dal sistema solare. A oggi, ne abbiamo contati già più di quattromila[4], e c'è davvero da chiedersi quante scoperte, quanta conoscenza – prima ancora di quanta ricchezza – potrebbe venire dalla loro esplorazione. Se non fosse proprio per meri problemi tecnici, potremmo quasi ritrovarci in una situazione analoga a quella in cui si ritrovarono i più occidentali degli Europei nel XV secolo: quel che ci manca è solo la capacità tecnologica di viaggiare nello spazio ad una velocità di svariati ordini di grandezza superiore a quella della luce; difficoltà che però ha anche l'aggravante di essere impossibile da risolvere anche sul mero piano teorico, per colpa del principio fondamentale della Teoria della Relatività di Einstein. Ma una volta superata questa, resterebbe, a quel punto, solo da scoprire se i terrestri esploratori superluminali si predisporrebbero a ripetere la spartizione dell'universo conosciuto come fecero Portoghesi e Spagnoli non appena risolte le *loro* difficoltà tecnologiche.



2. Poster raffigurante 500 esopianeti (merita l'immagine in alta risoluzione: si trova facilmente in rete).

La situazione dell'Europa del 1400 era in effetti abbastanza complicata: le vie principali di comunicazione erano come al solito quelle d'acqua, nel Mediterraneo. Francia e Inghilterra erano ancora seriamente impegnate a costruire i primi "stati nazionali" propriamente detti, e a farsi la guerra fra loro: la Germania e l'Italia non esistevano in quanto tali, ma diverse città italiane potevano avocarsi l'appellativo di "grandi potenze" del tempo, grazie alle loro flotte, e contrastare il padrone indiscusso del Mediterraneo orientale, l'Impero Ottomano. La grande posta in palio erano le vie commerciali delle spezie, che rivestivano un po' il ruolo che ai giorni nostri ha il petrolio: e nonostante – assai più spesso di quel che generalmente si crede – cristiani e ottomani intrattenessero ottimi rapporti d'affari all'insegna della moderna logica del "*business is business*", attriti e scontri militari erano comunque assai frequenti. I veneziani vanno conquistando isole e porti negli arcipelaghi della Grecia, imitati e contrastati da genovesi e catalani; i turchi nel 1453 conquistano Costantinopoli, e i pirati saraceni devastano con regolare puntualità le coste dell'Italia meridionale.

[4] Wikipedia (English version) ci assicura che al 20 febbraio 2020 ne sono stati catalogati 4173, allocati in 3096 sistemi stellari.



3. La Battaglia di Lepanto vista dal Vasari (1572)

Il mezzo tecnologico principale con cui condurre esplorazioni, commerci e guerre è, a quel tempo, la galera, o galea che dir si voglia. Derivata senza eccessive variazioni dalle antiche triremi greche e romane, è il metro con cui si misura la potenza di uno stato. Pur dotata di vele, la forza essenziale della galea è data dai galeotti, i rematori che, incatenati al remo, fanno la parte del motore e danno alla nave la giusta manovrabilità in battaglia. Dotata di qualche pezzo d'artiglieria a prua e cariche di soldati del tutto assimilabili ai fanti di terra, la galea in battaglia si comporta con una logica relativamente semplice: si lancia contro la nave avversaria, speronandola, spara con il cannone di prua contro il ponte del vascello speronato per fare il maggior danno possibile agli uomini e agli alberi della nave nemica, e vomita sull'avversario tutti i suoi soldati che vanno all'arrembaggio e combattono con spade e moschetti in maniera non diversa di quanto farebbero sulla terraferma. Questa strategia navale delle galee mediterranee comincia ben prima del XV secolo e continua anche dopo: la più grande e celebre battaglia navale mediterranea è ancora oggi quella di Lepanto, del 1571, quando più di duecento galee spagnole, veneziane, genovesi e pontificie si scontrano con quasi altrettante galee turche. I dipinti che la ricordano mostrano una doppia sfilza di galee contrapposte, non solo per consentire a chi guarda di riconoscere con precisione una nave dall'altra e consentire ai capitani di vantarsi dell'impresa, ma anche perché era proprio così che si svolgeva essenzialmente lo scontro: ogni nave puntava una nemica[5], ci si scontrava e se vinceva la depredava; e se non l'affondava se la rimorchiava via come preda di guerra. Ovviamente, se si era in superiorità numerica più galee attaccavano una sola nemica, e altrettanto ovviamente lo scontro finiva spesso con le due navi alleate vincitrici che litigavano ferocemente per appropriarsi del bottino[6].

Le galee, insomma, erano soprattutto macchine da guerra, e come tutte le macchine da guerra avevano alti costi e alta specializzazione militare; a far grandi Venezia e il Sultano erano le grandi fabbriche degli arsenali, vere e proprie industrie destinate alla costruzione degli scafi, e il problema principale dei governi dei due stati nemici era l'arruolamento – assai spesso forzoso, ma non sempre – dei galeotti, insomma della forza motrice dei vascelli. L'equilibrio commerciale del mercato delle spezie si teneva su questo crinale precario, sulla "guerra fredda", che non ci metteva davvero molto a diventare

[5] Ovviamente, cerando per quanto possibile di colpire con lo sperone di prua una fiancata della nave nemica; ma questo lo facevano tutti, e in conclusione, quando si schieravano per la battaglia, le flotte finivano per fronteggiarsi tutte prua contro prua.

[6] Oltre alle galee, ovviamente, c'erano anche molti altri vascelli di stazza minore, come le fregate, e "variazioni sul tema", come le galee piccole (galeotte) e galee più grandi per i comandanti (galee bastarde). Proprio a Lepanto, però, i veneziani misero alla prova anche sei vascelli oggettivamente speciali, che giocarono un ruolo assai significativo per l'esito finale della battaglia: le galeazze. Grandi, pesanti al punto d'essere quasi goffe, tant'è che dovevano di solito essere rimorchiate dalle galee per prendere posizione nel campo di battaglia, erano però assai alte, e quindi resistenti ai tentativi di speronamento, e soprattutto dotatissime di artiglieria, anche lungo i fianchi, e potevano facilmente far strage dei nemici da tutte le posizioni. L'innovazione dei cannoni posti lungo le fiancate delle navi venne poi stabilizzata nei galeoni (che, peraltro, già esistevano, ma in forme non ancora pienamente standardizzate), come insegnano tutti i film di pirati che si rispettino.

calda, tra turchi e l'Occidente cristiano che trovava difficoltà a raggiungere le lontane terre e gli altrettanto lontani porti asiatici delle spezie a causa del grande presidio ottomano che controllava l'Anatolia, il Nordafrica e buona parte del Medio Oriente.

Ma se le repubbliche marinare italiane giocavano alla pari la grande partita navale mediterranea, se le nazioni dell'Europa del Nord erano ancora in formazione e in altre faccende affaccendate, come se la passavano gli iberici? Gli spagnoli erano bene indaffarati anche loro, attorno al 1450: l'Andalusia era ancora territorio musulmano, e i due principali regni spagnoli, Aragona e Castiglia, non si erano ancora ben messi d'accordo per completare la "*Reconquista*"[7]. Ancora più isolato verso occidente, restava il piccolo regno del Portogallo.

Bisogna forse provare a mettersi nei panni dei portoghesi di quel tempo: sono abitanti di un paese essenzialmente a vocazione marittima, con tutte le coste che la loro geografia gli regala; ciò non di meno, non hanno nessun accesso al Mediterraneo, che resta la principale arteria di comunicazione del mondo antico. Verso est, via terra, sono del tutto bloccati dalla Spagna, con i quali i rapporti con sono mai stati idilliaci[8], e comunque la distanza in gioco è così grande e il percorso così pericoloso da scoraggiare viaggi e imprese commerciali anche solo per arrivare nel cuore dell'Europa. Non troppo diversa è la situazione via mare, con lo stretto di Gibilterra a fare da comodo presidio militare per chi avesse voluto render complicato il transito ai navigli di Lisbona. Come venir fuori da una simile impasse? L'unica soluzione, se tutte le vie sono chiuse, è quella di cercarne delle altre, ma è cosa più facile a dirsi che a farsi. Per fortuna dei portoghesi, due eventi giunsero a maturazione proprio nel momento ideale: il primo fu l'ascesa al trono di un re che aveva lo spirito e il carattere dell'esploratore, Enrico il Navigatore; il secondo fu il definitivo perfezionamento della loro navicella spaziale: la caravella.

4. La caravella portoghese "Boa Esperança" (evidentemente, una replica moderna…)

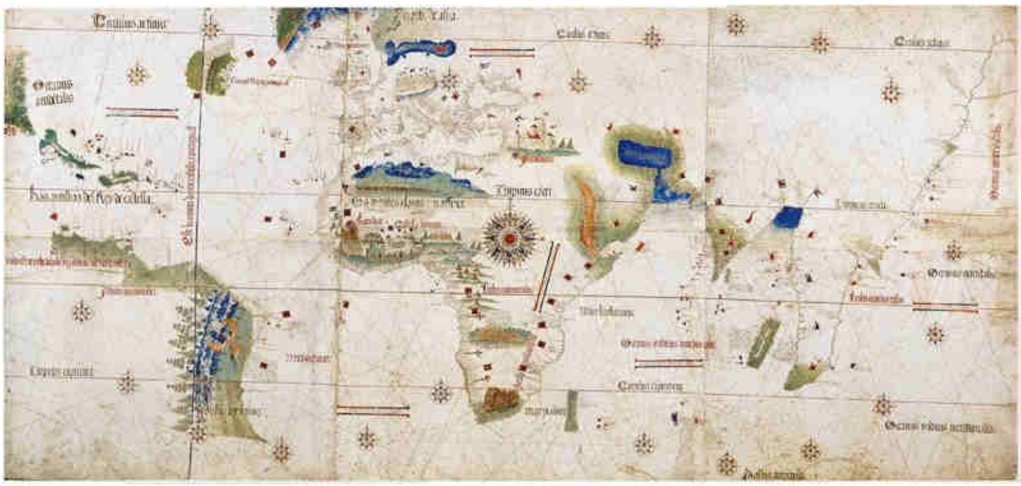
Se è facile comprendere l'influenza che può aver avuto la determinazione di un re nel XV secolo nell'indirizzare la politica e le strategie economiche di un paese relativamente piccolo come il Portogallo, è forse meno evidente l'impatto che ha avuto lo sviluppo di una nave abbastanza diversa dalla galea mediterranea: i portoghesi elaborarono il disegno delle piccole navi che usavano i pescatori nordafricani, i *qarib*[9], e ottennero una nave molto manovrabile, dotata di vele latine e in grado di compiere lunghi viaggi. Si trattava di

[7] Durata quasi un millennio, la *Reconquista* è la serie di guerre intraprese dagli spagnoli per cacciare dalla Spagna i musulmani, che fin dalla fondazione dell'Islam l'avevano conquistata quasi per intero. L'ultimo atto è la sconfitta del Sultanato di Granada, e avviene proprio nel fatidico 1492, pochi mesi prima della partenza da Palos di Cristoforo Colombo alla volta (accidentale) delle Americhe.

[8] Se si escludono i sessant'anni compresi tra il 1580 e il 1640, Spagna e Portogallo non si sono mai uniti, per quanto la cosa possa sembrare geopoliticamente strana. Anzi, com'è inevitabile, modi di dire e barzellette canzonatorie sono ancora oggi ben diffuse da entrambe le parti del confine, ovviamente con reciproco sberleffo.

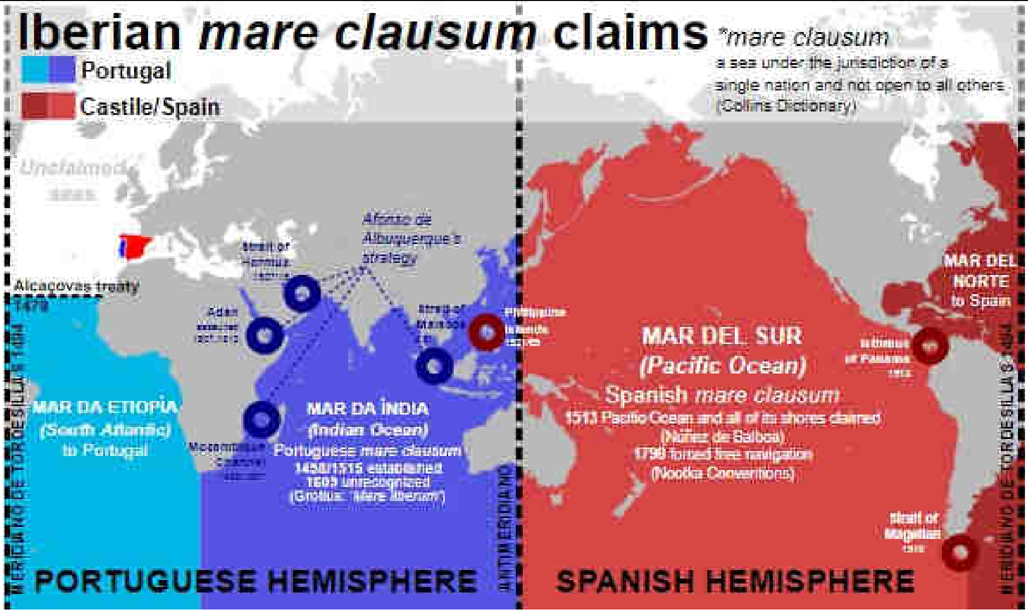
[9] In ultima analisi, si tratta quasi di una "restituzione" dall'Atlantico africano al Mediterraneo europeo: come illustra bene lo stesso nome, il qarib deriva dal *carabus* dell'antica Roma.

navigli comunque abbastanza piccoli, ed è facile capire perché potessero essere disdegnati da chi, nelle navi, cercava soprattutto l'espressione muscolare e militare per le azioni di battaglia e conquista. Ma i portoghesi, relegati nel remoto angolo occidentale del mondo conosciuto, con le caravelle volevano soprattutto esplorare per poi commerciare, più che dare battaglia. Fatto sta che è a questo punto che ci si ritrova in un momento davvero speciale nella storia del mondo; ce se ne renderà conto solo più tardi, ma è un periodo non troppo diverso (anche se su scala infinitamente più piccola) da quello che potrebbe essere scandito allorché gli esseri umani scoprissero il modo di intraprendere viaggi interstellari. Anche se, in ultima analisi, quel che i portoghesi cercano è solo un modo per arrivare alle terre delle spezie senza dover fare a botte con tutta la cristianità europea prima e con l'impero del sultano turco poi, il risultato finale, di lì a qualche decennio, sarà una completa ridefinizione del mondo conosciuto. Le caravelle portoghesi scendono verso sud costeggiando l'Africa, e anche se devono fare i conti con i venti contrari (che li costringeranno a deviare sempre più a largo, fino a scoprire, quasi per caso, la parte più occidentale del Brasile) arrivano a doppiare il capo di Buona Speranza, a circumnavigare l'Africa, e a diventare i soli occidentali in grado di padroneggiare le rotte dell'Oceano Indiano; gli spagnoli, una volta completata la *Reconquista* e raggiunta una sostanziale unità nazionale grazie al matrimonio di Isabella I di Castiglia e Ferdinando II d'Aragona, si precipitano ad imitare i cugini iberici, danno fiducia alle strampalate idee di un genovese e si appropriano di un continente.



5. Mappa di Sebastiano Cantino del 1502, con la "raya" in evidenza. In compenso, tutt'altro che evidente è ancora la forma e l'estensione del duplice continente americano.

C'è insomma un momento in cui, mentre diverse popolazioni europee ancora si arrabattano in guerricciole interne o comunque di limitato predominio locale, due stati si spartiscono il resto del mondo, e senza neppure chiedere il permesso a chi, in quel resto del mondo, già ci abita. Con la mediazione e la benedizione del loro comune capo religioso, papa Giulio II, il sovrano del Portogallo e i due monarchi della neonata Spagna firmano il trattato di Tordesillas il 7 giugno 1494, per definire le sfere di competenza – ma sarebbe più obiettivo dir "di proprietà" – del resto del pianeta. C'era già stato, a dire il vero, un precedente il 4 settembre 1479, prima ancora della scoperta dell'America, con la firma del trattato di Alcáçovas in cui i due stati iberici definivano le zone di competenza del Nord-Atlantico: quello, insomma, per il quale ancora oggi le Canarie sono territorio spagnolo mentre le Azzorre e Madeira sono portoghesi; ma non aveva certo l'importanza e la generalità di quello di Tordesillas, che sanciva né più né meno la divisione in due del pianeta, secondo la formale – per quanto approssimativa – linea immaginaria che correva lungo il meridiano terrestre posto "cento leghe a ovest delle Azzorre". Ad est di quella linea, i padroni erano i portoghesi; ad ovest, gli spagnoli.



6. La spartizione dell'universo. (immagine di Nagihuin) (Opera propria, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=68476977)

Un po' come se, a viaggi interstellari possibili, America e Asia si dividessero la Via Lattea: una bella linea (ma forse sarebbe necessario un piano, vista la tridimensionalità della Via Lattea) che passa, tanto per dire, tra il Sole, Betelgeuse e il centro galattico, e via; con la mezza galassia a destra agli uni e la mezza a sinistra agli altri. Alcune conseguenze risultano abbastanza curiose, se viste con gli occhi di oggi: ad esempio, che i tre grandi oceani terrestri vennero di fatto considerati veri e proprio "mari chiusi" – un po' com'era il Mediterraneo per gli antichi romani – con l'Indiano dominio del Portogallo, il Pacifico zona di caccia spagnola, e l'Atlantico grosso modo diviso a metà, più o meno seguendo il precedente trattato di Alcáçovas, con la parte settentrionale alla Spagna e quella meridionale ai portoghesi.

Naturalmente, anche prima che Inghilterra, Olanda e Francia si mettessero di buzzo buono a rompere le uova nel paniere ai due stati iberici[10], diverse contese scoppiarono tra i due padroni del mondo: la causa principale era, come al solito, di natura economica, perché la tentazione di ignorare i trattati è sempre stata forte, per gli uomini, quando le violazioni dei patti appaiono comunque convenienti; ma un po' anche per ragioni squisitamente tecniche. La regola delle "cento leghe ad ovest delle Azzorre", infatti, non è che fosse così perfettamente chiara, specialmente quando ci si ritrovava in mezzo all'oceano, su navi che comparate alle moderne sono poco più che gusci di noce, mentre si andava alla ricerca di nuove terre in un pianeta ancora in gran parte sconosciuto. Va inoltre considerato che la sfericità della Terra era conoscenza del tutto chiara ai navigatori del tempo (nonostante alcune false leggende che ancor oggi si raccontano) e questo implicava chiaramente che oltre al meridiano chiave, quello appunto che faceva da confine di competenza secondo il trattato di Tordesillas e che veniva chiamato la "*raya*", ce ne era un altro altrettanto importante, ovvero l'"antimeridiano" che, diametralmente opposto, segnava l'altra metà del confine ispanico-portoghese. Questo passava grosso modo sopra le Molucche, il che era un gran bel guaio, perché quelle erano zone ricchissime delle famigerate spezie che gli Europei cercavano con la stessa determinazione con cui Paperon de' Paperoni cercava l'oro nel Klondike.

[10] Il termine "rompere le uova nel paniere" è certo poco elegante, ma va considerato che per quegli stati la frequentazione dei mari era, secondo Tordesillas, sostanzialmente proibita. Gli europei del nord vi si avventuravano consci della situazione "illegale". Anche se, tecnicamente, le incursioni inglesi e francesi contro i navigli iberici erano avallate dai rispettivi governi, e quindi si trattava di "guerra da corsa" e i "corsari" restano figure un po' più nobili dei comuni pirati, in pratica, l'abbordaggio di navi non sufficientemente protette divenne quasi un'abitudine, ed è probabilmente per questa ragione che fiorì l'epopea della pirateria.

Tutto questo mentre è ancora imperante uno dei problemi più antichi e durevoli della storia mondiale della navigazione, ovvero l'incapacità di determinare con buona esattezza la longitudine. Se l'arte di navigare è antichissima, va ricordato che per moltissimo tempo la pratica marinara si affidava soprattutto al cabotaggio[11], ovvero la navigazione che si manteneva sempre prossima alle coste, senza avventurarsi troppo in mare aperto: questo consentiva ovviamente di conoscere sempre, con buona approssimazione, la posizione della nave. Per i viaggi più avventurosi, la determinazione della latitudine – ovvero della posizione in direzione nord-sud – era cosa nota fin dall'antichità, seppure con livelli diversi di approssimazione in funzione delle epoche e degli strumenti usati: ma la longitudine, ovvero l'elongazione in direzione est-ovest rispetto a un meridiano di riferimento, restava un problema apparentemente irresolubile. La Terra gira quotidianamente attorno al proprio asse tra i poli Nord e Sud, cosa che non impatta sull'altezza misurabile del Sole o della stella polare, ma rende assai difficoltosa la misurazione ortogonale in direzione Est-Ovest: da quando il problema della determinazione esatta della longitudine diventa pressante, ovvero proprio all'inizio dei grandi viaggi oceanici, alla sua definitiva risoluzione, trascorreranno più di due secoli; e alla fine sarà proprio assecondando e misurando il tempo di rotazione terrestre, ovvero utilizzando precisissimi orologi in grado di confrontare l'ora locale con quella del meridiano di riferimento, che si potrà archiviare il problema. Ma nel frattempo, in quei due secoli, furono migliaia le intelligenze che si sforzarono di risolvere la questione, e ingentissimi i premi che le grandi nazioni marinare promettevano a chi fosse riuscito a rendere più sicura e facile la navigazione. Naturalmente, tra questi figuravano molti matematici: curiosamente, uno tra i primi che si dedicò con passione al problema non era né spagnolo né portoghese, e nemmeno originario di una città marinara, ma di un villaggetto di provincia nel pieno dell'Europa continentale.

7. *Johann Werner*

Johann Werner nasce il 14 febbraio 1468 a Norimberga, e doveva mostrarsi subito come un ragazzo dotato, se a soli sedici anni entra all'università di Ingolstadt. Non si sa moltissimo della sua infanzia e giovinezza: in un suo scritto in tarda età si legge che sapeva fin da piccolo che sarebbe diventato un matematico, ma non molto di più. È certo comunque che, cosa tutt'altro che insolita ai suoi tempi, intraprende presto la carriera religiosa, diventando prima cappellano all'età di 22 anni, in quel di Herzogenaurach[12], per poi essere ordinato prete direttamente a Roma nel 1493. Continuerà la sua missione di prete cattolico e parroco in diverse città tedesche, per tutta la vita.

L'interesse principale della sua esistenza temporale e scientifica è senza dubbio l'astronomia: seguace e cultore degli studi di Regiomontano[13], si rivela presto come un

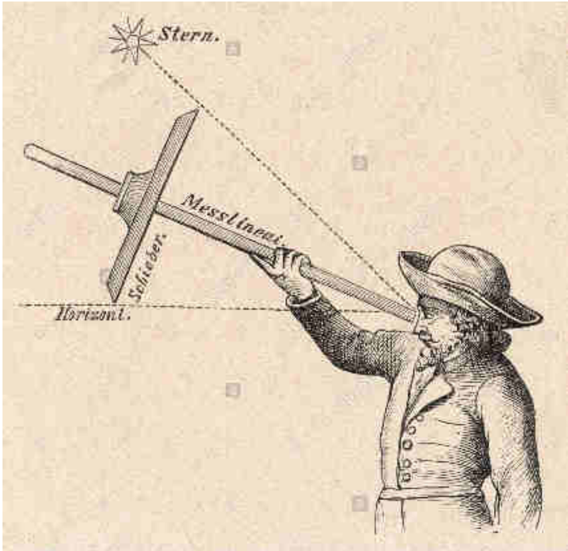
[11] L'etimologia del termine è ancora incerta, con due grandi scuole di pensiero: quella che la fa derivare da Giovanni Caboto, celeberrimo navigatore che, tra le altre cose, scoprì il Canada, e quella che invece sostiene che venga dalla parola portoghese "*cabo*", cioè "capo", a rimarcare la natura della tecnica navigatoria da capo terrestre a capo terrestre.

[12] Piccola cittadina poco a nord di Norimberga, sempre in Baviera. Le ridotte dimensioni e la difficile pronunciabilità del nome non ne facilitano la popolarità, eppure è ancora oggi la sede ufficiale di due marche di scarpe sportive tra le maggiori al mondo e dell'industria leader mondiale nella produzione dei cuscinetti a sfera.

[13] Nonostante le apparenze e il nome, Giovanni Regiomontano era del tutto tedesco. Come i nostri lettori più affezionati ricorderanno, a lui è stato dedicato il compleanno "*Fra Piumazzo e Sant'Anna Pelago*", RM185,

brillante astronomo sia dal punto di vista teorico che pratico; la sua abilità nel costruire strumenti astronomici diventa presto nota a tutti gli astronomi del circondario, e non disdegna – tra la costruzione di un astrolabio e di un sestante – di cimentarsi anche come osservatore diretto, scoprendo una cometa nell'estate dell'anno di grazia 1500.

Lungi dall'essere solo uno scienziato affascinato dagli aspetti pratici e sperimentali, Werner mostra una capacità di mettere a frutto le migliori conoscenze teoriche del suo tempo. La sua opera più famosa è in apparenza una mera traduzione: "*In Hoc Opere Haec Continentur Nova Translatio Primi Libri Geographicae Cl Ptolomaei*". Come recita diligentemente il titolo, questo suo libro del 1514 "contiene una nuova traduzione del primo libro della *Geografia* di Claudio Tolomeo", ma in realtà è arricchito dai suoi importanti commenti. Dal punto di vista storico è particolarmente significativo proprio quello in cui suggerisce un metodo per la determinazione della longitudine. L'idea di fondo si basa sul moto apparente della Luna sullo sfondo delle stelle fisse: è un moto astronomicamente assai veloce, perché il nostro satellite copre la distanza corrispondente al suo diametro in circa un'ora. Avendo a disposizione delle buone effemeridi in grado di riportare la distanza della Luna da certe stelle fisse per un determinato luogo d'osservazione e comparando quella distanza con quella effettivamente osservata da un altro punto del globo terrestre (ad esempio, da un vascello in navigazione in mezzo all'oceano), in linea di principio è possibile determinare il "tempo locale" del luogo di osservazione e di conseguenza la sua longitudine. Da bravo costruttore di strumenti, Werner si preoccupa anche di fornire la soluzione strumentale, proponendo la costruzione di uno speciale "bastone di Giacobbe"[14].



8. *Come usare un "bastone di Giacobbe"*

Sembrerebbe insomma che il leggendario "problema della longitudine" avrebbe potuto essere risolto appena un quarto di secolo dopo la scoperta dell'America, senza la necessità si aspettarne un altro paio, e in un certo senso è proprio così, perché il "metodo della distanza lunare" funziona ed è stato a lungo usato per la determinazione della longitudine: questo però è avvenuto solo molti anni dopo la pubblicazione del commento di Werner. All'inizio del '500, il metodo non era seriamente applicabile per più di una ragione: pur con le migliorie strutturali proposte dallo stesso Werner, il bastone di Giacobbe non era in grado di fornire misurazioni sufficientemente precise; per non parlare dell'inaffidabilità delle "tavole di osservazione" necessarie per il confronto: è bene ricordare anche che corre l'anno 1514, mentre i *Principia Mathematica* di Newton, con tanto di legge di gravitazione, verranno pubblicati solo nel 1687; per di più la determinazione dell'esatto moto lunare è un "problema dei tre corpi", che anche con gli strumenti newtoniani non è esattamente di facile risoluzione.

Sul piano puramente teorico, Johann Werner si applica e produce dei risultati significativi proprio sulle sezioni coniche e la trigonometria sferica, quel campo che è un

Giugno 2014, nel quale raccontiamo come il suo cognome non sia altro che la latinizzazione di Königsberg, sua città natale, dove mamma e papà lo battezzarono con il nome di Johannes Müller.

[14] Nome un po' strano per uno strumento scientifico, ma così è noto anche nei paesi di lingua inglese ("*Jacob's staff*"). A dire il vero, Werner ne propose una variazione un po' più efficiente, che chiamava "bastone a croce", o qualcosa di simile. Se il termine italiano vi pare ugualmente poco attraente, potete usare i sinonimi "asta di Jacob" o il bellissimo "balestriglia").

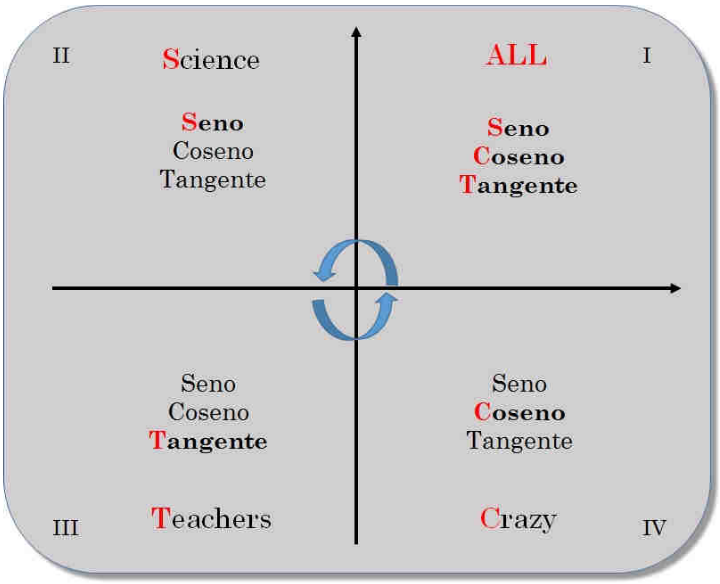
po' il punto di confine tra la matematica del periodo classico e quello rinascimentale; del resto lui stesso, concittadino e quasi coetaneo di Albrecht Dürer[15] (che talvolta ricorrerà a lui per questioni di matematica) è da molti visto come un po' come l'ultimo dei matematici medievali o, il che è un po' lo stesso, il primo dei matematici rinascimentali. Raccoglie metodi per la duplicazione del cubo, è un pioniere delle previsioni del tempo e, ci pare di capire, un uomo curioso della natura e del mondo.

Nonostante tutto ciò, il suo nome è quasi del tutto dimenticato, se non fosse per qualche formula che perpetua il suo nome su migliaia di libri scolastici. In un suo scritto compare infatti la formula: $2\sin(\alpha)\sin(\beta)=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$ che ancora oggi legioni di studenti mandano a memoria. Si trova più facilmente scritta insieme alle consorelle, in questa forma:

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$
$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

Sono le famose "formule di Werner", solitamente ricordate solo perché sono le inverse dell'altra famiglia di formule trigonometriche, quelle più utilizzate e soprattutto dotate di un nome indimenticabile: le formule di prostaferesi.

Del resto, lo sappiamo benissimo noi e probabilmente lo sapeva benissimo già ai suoi tempi Johann Werner: gli studenti tendono a ricordarsi più facilmente le cose di pratico e frequente utilizzo (fosse anche solo per la risoluzione di esercizi), o con qualcosa di curioso, come ad esempio il nome. E siamo anche convinti che avrebbe benevolmente apprezzato ogni ausilio mnemonico utile a ricordare meglio le sue formule, fosse anche un po' scherzoso e irriverente come questo qua sotto, buono per ricordare il segno delle funzioni trigonometriche nei quattro quadranti del piano cartesiano, a patto di ricordare l'irriverente frase che abbiamo messo come citazione in testa a quest'articolo.



[15] Di lui parliamo in "*Viaggio in Italia*", RM124, maggio 2004.

2. Problemi

2.1 Discendenze matematiche

Come i più brillanti di voi avranno notato, questo mese siamo in ritardo.

Il motivo, a nostro parere ampiamente giustificato, era di risolvere un enigma della storia della matematica che ha sfidato la soluzione da parte delle menti più brillanti e che ci procurerà sicuramente i dovuti riconoscimenti e onori; siamo fieri di comunicarvi che lo abbiamo risolto e che i risultati sono andati ben oltre le nostre aspettative.

Tenete per voi la notizia sin quando non verrà pubblicata sul *Journal de Crelle*: il professore di matematica di Gauss alle elementari si chiamava Gert Geärgert. Non solo, ma siamo riusciti a tracciare la sua discendenza e abbiamo scoperto che il suo unico discendente attualmente in vita, Irofilo Marrabbio, insegna matematica vicino a noi.

Quando gli abbiamo comunicato la notizia il nostro non stava più nella pelle e, per festeggiare, il giorno dopo appena arrivato in classe ha trovato il modo peggiore per comunicarla ai discenti:

"Prendete carta e matita, o se preferite anche il PC. Prendete anche tutti i numeri da 101 sino a 200 e trovate il massimo divisore dispari di ognuno. Sommateli tutti e datemi il risultato".

Ora, prima che la classe scopra che è colpa nostra, riuscite a risolvere il problema?

Posto che vi avanzi tempo... Come funziona la regola generalizzando? Divisori dispari massimi dei numeri tra a e b, con questi valori variabili?

Oh, come al solito, per l'estensione non abbiamo la più pallida idea. E, se dobbiamo essere onesti, non è che neanche l'originale ci risulti molto chiaro...

2.2 Scacchiere con i dadi

Uno solo, in realtà. Ma *molto grosso*.

Rudy sta rispolverando la sua attrezzatura da giochi di ruolo[16], e da qualche mese si trovano in giro per la casa dadi di tutte le forme, dimensioni e numerazioni in grado di lasciare perplesso il professore di Algebra Esoterica della Miskatonic University.

Quando gli spiritosi di famiglia si sono accorti di questa sua nuova mania, non hanno trovato niente di meglio da fare che regalargli un dado (ciascuno), rigorosamente a sei facce e con i numeri da uno a sei posizionati nel modo usuale. Uno di questi dadi, assolutamente inutilizzabile, è enorme e al momento fa da fermacarte sul tavolo.

L'altro giorno, Rudy stava meditando davanti a una scacchiera vuota (no, lo sa benissimo che *quello* lo hanno già inventato), quando si è accorto che le facce del dadone erano esattamente della dimensione delle caselle della scacchiera; posizionato il coso nella casella in basso a sinistra, con la cifra "1" ben visibile in alto, sopra la testa gli si è formato il fumetto (del pensiero, non quello del parlato) con la scritta "...supponiamo..." e, chiaramente, tutti i pensieri relativi ai giochi sono spariti.

Supponiamo, giustappunto, di avere un dado "caldo" (no, non in quel senso), in grado di incidere il numero presente sulla faccia a contatto con la scacchiera nella casella occupata; supponiamo inoltre di poter muovere il dado per "rotolamento" su uno spigolo, o verso l'alto (di fronte a noi) o di fianco (niente diagonale). Nostro scopo, con questi rotolamenti, è arrivare il prima possibile nella casella in alto a destra; intanto, il nostro dado marchia a fuoco ogni casella attraversata. Quanto vale la somma di tutti i numeri marchiati? E se fossi partito da 2? e da 3? e da (eccetera, eccetera) 6?

No, tranquilli. Come diceva Pippo, "danni irrilevanti".

---

[16] *Dungeon Master* risulta termine brevettato, quindi non posiamo usarlo; non solo, ma quello che sta interessando a Rudy in questo momento sono i motori, non la progettazione delle avventure, quindi stiamo sul generico.

3. Bungee Jumpers

Dato un naturale scomposto in primi $n = \prod_{i=1}^{k} p_k^{a_k}$, la *Funzione di Möbius* $\mu(n)$ è definita come:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 1 \\ 0 \text{ se almeno un } a_k > 1 \\ (-1)^k \text{ negli altri casi} \end{cases}$$

Sia invece $\tau(n)$ la funzione che conta *tutti* i divisori (naturali) di n.

Provate che è:

$$\tau(n) + \mu^2(n) = \tau(n^2)$$

se e solo se n è un numero primo.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Febbraio!

Accidenti il mese finisce e non abbiamo ancora finito RM. Meno male che quest'anno ha un giorno in più, magari se usciamo il 28 non è proprio l'ultimo.

4.1 [252]

4.1.1 Parenti serpenti

Siamo sconcertati per l'assenza di commenti sulla famiglia di Rudy, così vi passiamo il problema epurato di quasi tutte le parti non necessarie:

> *Dovete disporre una famiglia di* 2*n persone, sapendo che ad ognuno sono antipatici al più n*–1 *parenti, intorno ad un tavolo rotondo, facendo in modo che nessuno sieda accanto ad un antipatico.*

Prima soluzione, di ***Valter***:

> Propongo come possibile strategia una procedura che affianca man mano al tavolo coppie di parenti.
>
> Assegno una lettera decrescente sul numero di parenti a ogni gruppo di reciprocamente antipatici. Al gruppo con maggior numero di antipatici, lettera A e così via; se uguali lettere consecutive. Metto come pendice il numero di antipatici rimasti da sistemare dopo ogni ciclo della procedura.
>
> Alcuni esempi con $2n = 14$, per farmi capire: A_7,B_7 / A_7,B_5,C_2 / A_6,B_4,C_4,D_2 / A_5,B_4,C_3,D_2 / A_4,B_4,C_4,D_2.
>
> A ogni ciclo tratto, unicamente, i due gruppi che hanno più parenti antipatici ancora da sistemare. Se sono nella condizione di dover scegliere fra più di due considero pure il loro ordine alfabetico.
>
> Predo nell'ordine un elemento di ogni gruppo affiancandolo a destra di quelli già disposti a tavola.
>
> Al primo ciclo sistemo la coppia di parenti in due posti fra loro adiacenti scelti in modo casuale.
>
> Proseguo sino a che ho sistemato tutto il branco di litigiosi … e si dovrebbe mangiare tranquilli.
>
> Sempre per spiegarmi mostro come si comporta la procedura con tre esempi sopra citati per $2n = 14$.
>
> A ogni ciclo in grassetto i due elementi scelti e alla fine la disposizione completa dei commensali.
>
> - A_7,B_7 / A_6,B_6 / A_5,B_5 / A_4,B_4 / A_3,B_3 / A_2,B_2 / A_1,B_1: ABABABABABABAB
>
> - A_7,B_5,C_2 / A_6,B_4,C_2 / A_5,B_3,C_2 / A_4,B_2,C_2 / A_3,B_1,C_2 / A_2,B_1,C_1 / A_1,B_0,C_1: ABABABABACABAC

- A_5,B_4,C_3,D_2 / A_4,B_3,C_3,D_2 / A_3,B_2,C_3,D_2 / A_2,B_2,C_2,D_2 / A_1,B_1,C_2,D_2 / A_1,B_1,C_1,D_1 / A_0,B_0,C_1,D_1: ABABACABCDABCD

Riguardo all'espansione tento di buttare giù qualcosa ma temo di non aver nemmeno interpretato bene. Mi pare che, come in quello originario, la disposizione più "rigida" sia quella con soli due gruppi.

Si hanno, mi pare, in quel caso il numero minimo di possibilità su come far accomodare i commensali.

Con $n - 1$ antipatici, infatti, si può unicamente alternare un parente di un gruppo con uno dell'altro.

A mio avviso una digestione serena si dovrebbe avere con, al più, $n - 3$ antipatici e partendo da n>4.

Questa sarebbe la mia soluzione per n=5, sempre che abbia un senso: X_A Y_B [X_N Y_N X_R Y_N X_N] Y_D X_E Y_N (X e Y i due gruppi, X_R Rudy, X_A A, X_E E, X_N i due per arrivare a 5, Y_B B, Y_D D, Y_N come per i due X_N).

Chi tiene queste note non ha capito granché, ma i nostri lettori sono notoriamente molto più intelligenti di noi. Andiamo avanti con la soluzione di ***Silvano***:

vediamo se questo approccio risolutivo vi piace è un po' brute force, ma funziona.

La logica è la seguente: considero le n persone come nodi di un grafo non orientato e costruisco la relativa matrice simmetrica di adiacenza (faccio un esempio su un 6 persone che si odiano al massimo consentito dai dati del problema):

		INIMICIZIE				
	N1	N2	N3	N4	N5	N6
N1	**0**	1	1	0	0	0
N2	1	**0**	0	0	0	1
N3	1	0	**0**	1	0	0
N4	0	0	1	**0**	1	0
N5	0	0	0	1	**0**	1
N6	0	1	0	0	1	**0**

Dato che odio i litigi e amo le amicizie a questo punto considero la sua negata, ossia considero chi sono gli amici, ignorando il fatto che una persona è amica di se stessa.

		AMICIZIE				
	N1	N2	N3	N4	N5	N6
N1	**0**	0	0	1	1	1
N2	0	**0**	1	1	1	0
N3	0	1	**0**	0	1	1
N4	1	1	0	**0**	0	1
N5	1	1	1	0	**0**	0
N6	1	0	1	1	0	**0**

E costruisco la matrice delle amicizie che è ottenuta da quella delle amicizie ponendo a 1 gli zeri e viceversa.

A questo punto prendo un qualsiasi nodo, e applico un algoritmo su grafo di visita in profondità: appena trovo un ciclo di lunghezza $2n$ (nel caso in esempio 6) mi fermo, controllando, però, che l'ultimo nodo del cammino sia anche amico del primo nodo:

N1	N4	N1	X					
N1	N4	N2	N3	N2	X			
N1	N4	N2	N3	N5	N1	X		
N1	N4	N2	N3	N5	N2	X		
N1	N4	N2	N3	N5	N3	X		
N1	N4	N2	N3	N6	N1	X		
N1	N4	N2	N3	N6	N3	X		
N1	N4	N2	N3	N6	N4	X		
N1	N4	N2	N5	N1	X			
N1	N4	N2	N5	N2	X			
N1	N4	N2	N5	N3	N2	X		
N1	N4	N2	N5	N3	N5	X		
N1	N4	N2	N5	N3	N6	N1	Amico N1	

Il cammino N1->N4->N2->N5->N3->N6->N1 è una possibile disposizione del tavolo.

Se il problema ha soluzione l'algoritmo trova rapidamente una collocazione, anzi, se fossero tutti amici lo farebbe al primo colpo.

Se poi gli amici dovessero stare a "distanza doppia" allora io produrrei una matrice delle triplette ammesse, ossia di gruppi di 3 amici ammissibili vicino) da calcolare inizialmente. Se N1 è amico di N2 e N3 è amico di N1 e N2 allora possiamo inserire il percorso, nel nostro caso:

N1	N4	N6		N3	N2	N5
N1	N6	N4		N3	N5	N2
N2	N3	N5		N4	N1	N6
N2	N5	N3		N4	N6	N1
N5	N2	N3		N6	N1	N4
N5	N3	N2		N6	N4	N1

Ora con questo tasso di litigiosità impostato si vede subito (e questo è proprio il controesempio) che ci sono 2 gruppetti tra le amicizie del tavolo: N1, N4, N6 e N3, N2, N5 e quindi "in generale" non è possibile trovare una soluzione di ordine 2 (così si fa a matematica: si trova un contro-esempio e si evita di pensarci :D).

Ci sarebbe (forse) una soluzione al nostro esempio, comunque, se gli amici litigassero un po' di meno e fosse possibile concatenare i gruppetti in modo da ottenere tutti i nodi del grafo.

Manca una sola cosa: esiste sempre il circuito completo tra tutti gli amici perché si possano sedere a tavola e mangiare?

Beh quello che abbiamo fatto nell'algoritmo è null'altro che verificare se il grafico delle amicizie è Hamiltoniano, in particolare se esiste un ciclo Hamiltoniano.

Per il "teorema di Ore" si ha, quindi dato che esiste almeno un ciclo hamiltoniano se $\deg(Ni)+\deg(Nj)\geq n$ qualsiasi siano i due nodi.

Visto che i nemici sono al massimo "$n-1$", allora gli amici sono almeno $n+1$ per ogni nodo, e quindi presi comunque due nodi Ni e Nj del grafo delle amicizie si ha che

$$\mathrm{Deg}(Ni)+\deg(Nj)\geq n+1+n+1=n+2>n$$

Adesso chi mi invita a cena?

Considerati automaticamente invitato, visto che almeno tu sai dove sederti... Andiamo al secondo problema.

4.1.2 Preparatevi agli esami

Poveri noi, un problema con i valori medi:

> *Una classe contenente un numero pari di studenti è stata sottoposta ad un test che richiedeva di rispondere a undici domande e, nel caso di risposta esatta, alla vittima veniva assegnato un punto. All'interno della classe in oggetto tutti i punteggi da zero a undici erano rappresentati, ed il valore medio valeva 37/5. Tutti gli studenti devono dunque partecipare ad un corso di ripetizione e vengono divisi in due gruppi uguali, in modo che la media di ogni gruppo deve essere pari alla media totale. Come formare i due gruppi?*
>
> *Per quali valori della media (e tutti i voti possibili rappresentati da almeno uno studente) riuscite tranquillamente a fare la divisione?*

E anche in questo caso ecco la soluzione di ***Valter***:

> Il numero degli studenti e la somma dei punteggi ovviamente sono interi e i primi sono anche pari. Il valore medio è dato dal rapporto fra la somma dei punteggi ottenuti e il numero degli studenti.
>
> Si può "normalizzarlo", quindi, ponendo al denominatore gli studenti e al numeratore tale somma.
>
> Con soli 12 studenti, per la regola imposta, tale rapporto è 66/12 vale a dire 11/2 e quindi 5.5. Al crescere del numero di studenti il valore medio può avvicinarsi a 0 o 11 ma mai raggiungerli. Per quanto detto 37/5 può essere ottenuto con numero di studenti pari e multipli di 5, p.e. 148/20.
>
> Mostro la strategia con 20 studenti cercando di evidenziare i passaggi per poterla generalizzare. Per ottenere quanto richiesto i restanti 20–12=8 studenti, devono aver un punteggio di 148–66=82.
>
> Vi sono molti modi per formare due gruppi con 12 studenti che hanno tutti i punteggi rappresentati. Di questi un certo numero ha la media uguale a quella totale p.e.: (0, 3, 4, 7, 8, 11) / (1, 2, 5, 6, 9, 10).
>
> Essendo i punteggi dispari in numero pari la differenza fra i totali può essere solo un numero pari.
>
> Scambiando studenti si ottengono punteggi totali che differiscono per tutti i numeri pari da 2 a 36.
>
> P.e.:
>
> - se metto i primi 6 punteggi in un gruppo e i restanti nell'altro la differenza fa 36
> - nei gruppi (0, 1, 2, 9, 10, 11)/(3, 4, 5, 6, 7, 8) scambiando 2 con 3 … 8 ho le differenze pari da 2 a 12
> - le differenze 14 e 16 le ho scambiando 0 con 7 e 8 rispettivamente
> - 18, 20, 22, 24, 26 le ottengo scambiando 0 con 8 e anche 2 con 3, 4, 5, 6, 7
> - 28, 30, 32 da 0 con 8, 1 con 4 e 2 con 5, 6, 7
> - 34 da 0 con 8, 1 con 7 e 2 con 5.
>
> Torno ai restanti 8 studenti per arrivare ai 20 che devono totalizzare complessivamente 82 punti. Anche in questo caso, essendo 82 un numero pari, lo sono pure gli studenti con punteggio dispari.
>
> Divido nei due gruppi coppie di studenti con pari punteggi; me ne rimangono infine un numero pari. La somma dei punteggi di quelli rimasti è anch'essa pari come gli studenti con punteggi dispari. Distribuendo in egual numero i rimasti nei gruppi, la differenza totale dei loro punteggi è pari.

> Riducendola al minimo tale differenza essa non può mai superare il 10, p.e. se rimane un 1 e un 11. Tale differenza si può però, comunque, sempre compensare con uno o più degli scambi di cui sopra. Per quanto detto non può esserci strategia se al numeratore c'è un numero dispari p.e. con 147/20. Dovrei dividere per due 147 per i due gruppi da 10 ma restando un intero cosa chiaramente impossibile.

Malgrado il ritardo di RM non è arrivato altro, per cui chiudiamo qui. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

I due bracci di una bilancia a bracci uguali non sono perfettamente uguali, quindi nel pesare un oggetto si commette un errore sistematico. Per ovviare a questo problema, viene suggerito di pesare l'oggetto due volte, prima con i pesi sulla sinistra e l'oggetto sulla destra e la seconda volta con l'oggetto sulla sinistra e i pesi sulla destra, per poi calcolare la media aritmetica delle due pesate. Siete d'accordo? O c'è un metodo migliore?

6. Pagina 46

È immediato dimostrare che, se n è un primo (indicato con p), la relazione è valida:

$$\tau(n)+\mu^2(n)=\tau(p)+\mu^2(p)=2+(-1)^2=3=\tau(p^2)$$

Supponiamo ora valida la relazione: siccome la tesi non è verificata per n=1, abbiamo che n deve essere diverso da 1.

Supponiamo n sia decomponibile come:

$$n=\prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$$

Se un qualsiasi esponente è maggiore di 1, allora $\mu(n)=0$, e quindi la tesi si riduce a $\tau(n)=\tau(n^2)$; ma siccome n^2 ha comunque più divisori di n tranne per il caso n=1 che abbiamo precedentemente escluso, segue che tutti gli esponenti a_i devono essere pari a 1, ossia:

$$n=\prod_{i=1}^{k} p_i \quad n^2=\prod_{i=1}^{k} p_i^2$$

in questo caso la condizione diventa:

$$\tau(n)+\mu^2(n)=2^k+(-1)^{2k}=\tau(n^2)=3^k$$

ossia

$$2^k + 1 = 3^k$$

Questa condizione è valida solo per k=1, quindi deve essere $n = p_1$, che è un primo.

7. Paraphernalia Mathematica

Va bene, ne abbiamo già parlato. Ma ci pare che questo approccio, oltre ad essere più chiaro, sia anche più legato alla quotidianità e quindi più interessante.

7.1 "Follow the money"

No, non abbiamo intenzione di riesaminare l'intera inchiesta Watergate: molto semplicemente, vogliamo parlare di economia e verificare alcune interessanti (e scoraggianti) conseguenze di queste interpretazioni.

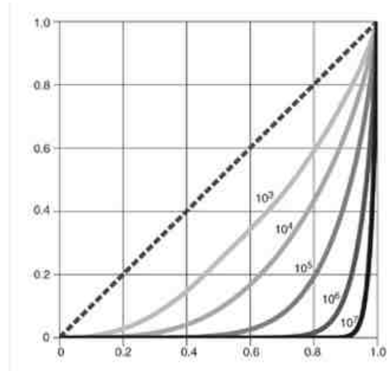
È diventato di moda, presso alcuni gruppi di economisti, di dare un supporto un po' più pragmatico alle loro deduzioni; un metodo interessante è quello seguito dall'*econofisica*, che affronta l'analisi dei mercati cercando di applicare le regole e i metodi della meccanica statistica: alcuni di questi modelli sono facili da implementare anche solo con un foglio elettronico e permettono di arrivare a risultati interessanti.

Uno dei modelli più semplici è il modello della *Festa della Via*[17]: voi e tutti i vostri vicini mettete su un banchetto in strada con sopra tutte le carabattole che vorreste vendere e ve le comprate/vendete allegramente. Alla festa sono invitati solo i residenti che hanno un banchetto. Cerchiamo adesso di giustificare queste regole.

Per cominciare, il sistema è *chiuso*: i ricconi non residenti nella via non possono partecipare e la quantità totale di soldi resta costante. Se si parte dall'ipotesi (piuttosto comune nelle teorie economiche ma purtroppo scarsamente valida nella realtà) che il prezzo applicato sia sempre quello giusto, il nostro sistema è perfettamente stabile: prima avevate cento euro in contanti, adesso avete cento euro in abecedari, e tutti sanno che i vostri abecedari valgono cento euro. Per fare il paragone con la fisica, la temperatura del nostro sistema chiuso è costante e tutte le molecole si muovono alla stessa velocità con urti perfettamente elastici.

Dicevamo però che questo modello è scarsamente reale: tra i nostri vicini ci sono dei grandi venditori e altre persone che considerano di cattivo gusto tirare la contrattazione troppo per le lunghe: quindi gli oggetti possono *cambiare di valore* in funzione delle persone coinvolte nella vendita; in pratica, possiamo anche ignorare gli abecedari e considerare la transazione come un semplice *trasferimento di benessere* da una persona all'altra: se riesco a convincervi a comprare a caro prezzo l'abecedario, il trasferimento di benessere è da voi a me; se siete dei draghi della contrattazione, il trasferimento è da me a voi.

Non è molto complesso implementare una simulazione del genere in un foglio elettronico, decidendo a priore quali sono i "furbi" della nostra popolazione: come ci si aspetta, questi vengono a generare un'*oligarchia*, pochi sempre più ricchi e molti sempre più poveri; la cosa si vede facilmente tabulando la *Curva di Lorenz*[18], avente in ordinata la frazione della popolazione e in ascissa la frazione della ricchezza.



9. Piove sempre sul bagnato.

Quello che stupisce è che anche se attribuiamo casualmente ad ogni transazione l'abilità nel commercio, *nasce comunque un'oligarchia*: insomma, qualsiasi mercato nel quale i prezzi siano lasciati liberi di fluttuare è una lotteria nella quale uno prende tutto:

[17] Ci prendiamo la libertà di cambiare il nome: la versione originale è *Garage Sale*, ma (fortunatamente) questo metodo di commercio non è diffuso da noi; il nome che abbiamo trovato ci pare quello che si avvicina di più al modello americano.

[18] La curva prende il nome dall'economista italiano *Max Lorenz* (sic!); vi ricordiamo che l'area tra la curva e la linea della completa uguaglianza (tratteggiata in figura) espressa come percentuale dell'area del triangolo avente la linea tratteggiata come ipotenusa è l'*Indice di Gini*, di cui abbiamo ampiamente trattato nel PM del numero 217, "Début, les damnés de la terre…"

tanto varrebbe, a questo punto, mettere tutti i beni in un mucchio e estrarre il vincitore.

Prima di piangere la morte del libero mercato, però, chiediamoci quanto sia sensato questo modello.

Piuttosto poco, o meglio per poco tempo: infatti, la sua conclusione è che un solo agente accumula l'intera ricchezza disponibile (ha sia l'abecedario che i soldi) e l'economia congela, lui non ha più nulla da comprare (ha tutto lui) e il resto del mondo neppure (non ha i soldi). Quindi, deve esserci qualcosa di sbagliato.

Il fatto che all'inizio si sia parlato di meccanica statistica potrebbe avervi messo una pulce nell'orecchio: cosa succederebbe, se un gas si comportasse in questo modo? Semplicissimo: ci sarebbe una molecola che ha tutta l'energia del gas, mentre tutte le altre molecole sono congelate allo zero assoluto. Questa assurdità suggerisce di cercare di costruire un altro modello, basato sugli assunti della teoria cinetica dei gas.

In pratica, il prezzo di ogni transazione dipende da quanto siamo ricchi io e la controparte: esattamente come due molecole dotate di velocità a e b quando si urtano, usciamo dalla contrattazione con, ciascuno, una velocità $(a+b)/2$. In questo caso non è necessaria nessuna simulazione, visto che appunto la teoria cinetica ci dà la risposta: il sistema si stabilizza ad una temperatura T.

La risposta alla domanda che vi state ponendo tutti hanno provato a darla ***Adrian Drăgulescu*** e ***Viktor Yakovienco***: la temperatura non è altro, secondo loro, che il valore medio della disponibilità finanziaria di ogni partecipante.

Qui, il "qualcosa di sbagliato" ve lo raccontiamo con un aneddoto.

Siete seduti nel mercatino dietro le vostre carabattole quando vi accorgete che George Soros è affascinato dal vostro vaso di petunie.

"...certo che posso vendertelo, George! Tu metti tutti i tuoi soldi in questo mucchio, io metto tutti i miei soldi assieme ai tuoi, dividiamo a metà e il vaso di petunie è tuo!" Vi immaginiamo piuttosto felici della transazione, ma non ci pronunciamo sull'opinione di George.

Comunque, esistono dei casi nei quali si segue una logica di questo genere, ed è il caso di un matrimonio seguito (non necessariamente nell'immediato) da un divorzio: la divisione non è casuale, ma sorvoleremo su questi dettagli puramente parametrici.

Insomma, entrambi i nostri modelli, sia quello della festa di strada che quello del divorzio sembrano piuttosto estremisti. Come possiamo mitigarli?

Una proposta potrebbe essere quella di stabilire (casualmente) in ogni transazione chi "ci perde" e stabilire che la transazione (ossia il guadagno dell'altro) sia *proporzionale alla ricchezza di chi ci perde*: questo, oltre a non farvi andare "in rosso", dovrebbe anche mitigare l'irresistibile crescita dei ricconi, che perderebbero molti più soldi nella transazione dei poveri.

Come si configura nella realtà un modello del genere? Ragioniamo. C'è l'incontro tra un povero, che rischia piuttosto poco, e un ricco, che rischia molto, e tutti vogliono fare affari con il ricco, il quale non è molto d'accordo.... Già. È il modello del *furto*. E il bello è che funziona. Si stabilizza circa sugli stessi valori del sistema del divor... Ops. Cambiamo discorso.

Tutti questi modelli, comunque, sembrano avere un problema in comune, ossia che è molto difficile risalire la "Skid Row": se siete diventato povero, tornare ricco (o viceversa) è un processo estremamente lungo, una volta che finite in uno degli estremi dell'intervallo, la tendenza è a restarci.

E questo, ha fatto venire un'idea a qualcuno: "...ma non potremmo, più che risollevare le sorti dei poveracci, *evitare che lo diventino*?"

Buona idea.

Alcuni hanno puntato la loro attenzione sull'*irreversibilità* del fenomeno (una volta che cominci a scivolare, non ti fermi più) e hanno proposto, per le nostre transazioni, un cammino dell'ubriaco all'isola di Elea.

In pratica, il lancio di una moneta decide se "vincete" o "perdete", però l'entità della vincita (o perdita) viene stabilita in modo deterministico: al primo acquisto, al più vincete o perdete metà del vostro patrimonio; alla seconda giocata, un quarto di tutto quello che avete in quel momento in tasca, e avanti così dimezzando ogni volta il *rischio*. Non riponete troppe speranze nel cammino alla Zenone: anche se più lentamente, continua ad accumulare agli estremi.

Ma, come si diceva una volta, "Il problema sta a monte": infatti, non è ben chiaro quale sia la legge che descrive la distribuzione della *ricchezza* in una popolazione. Si pensa, generalmente, che la distribuzione segua una paretiana, e che sia quindi una *legge di potenza*, ma le idee in merito sembrano abbastanza confuse. Più chiaro sembra il calcolo sulle *entrate,* anche perché (presumiamo siate dei tipi onesti) dovete fare tutti gli anni la dichiarazione dei redditi: ma quanto "vale" una Maserati che usate una volta l'anno e passa tutto il suo tempo in un garage? E un quadro?

Insomma, c'è una certa confusione, e anche nei casi più semplici non si scherza: l'ineluttabilità del monopolio sembra smentita dalla situazione attuale, nella quale i grandi nomi possiedono si e no l'uno per cento della ricchezza totale; per quanto ingiusto questo possa sembrare, siamo ancora lontani dal potere economico assoluto.

Un'altra tendenza della ricerca sembra essere quella, piuttosto che cercare dei risultati finali compatibili con la nostra situazione attuale, di analizzare quali sono i metodi di funzionamento delle economie reali, e tentare da questi di estrapolare dei modelli. Uno dei primi candidati a creare dei dubbi sul modello della Festa della Via è la regola che impone di non andare in debito: se non posso farmi prestare dei soldi per realizzare la mia Grande Idea, ben difficilmente potrò modificare la mia situazione economica. Non solo, ma i sistemi finanziari odierni sono una palese violazione di questa regola, visto che lo scopo medesimo di queste transazioni è la speranza di guadagnare più del capitale che rischio.

L'unico stato nel quale sembra funzionare il modello della Festa della Via, ad oggi, sembra quello degli scambi commerciali tra intere nazioni, con forme di *deregulation* che amplifichino le possibilità del libero mercato. Ma in questo campo, che il ricco si arricchisca e il povero si impoverisca è, da tempo, una tragica realtà per riconoscere la quale non ci serve molta matematica.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms