Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 252 – Gennaio 2020 – Anno Ventiduesimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM251 ha diffuso 3'306 copie e il 08/01/2020 per Google eravamo in 11'400 pagine.

Tutto quanto pubblicato dalla rivista è soggetto al diritto d'autore e in base a tale diritto *concediamo il permesso di libera pubblicazione e ridistribuzione* alle condizioni indicate alla pagina `diraut.html` del sito. In particolare, tutto quanto pubblicato sulla rivista è scritto compiendo ogni ragionevole sforzo per dare le informazioni corrette; tuttavia queste informazioni non vengono fornite con alcuna garanzia legale e quindi la loro ripubblicazione da parte vostra è sotto la vostra responsabilità. La pubblicazione delle informazioni da parte vostra costituisce accettazione di questa condizione.

Newton non era esattamente un bonaccione simpatico e accomodante, ma a quanto ci risulta, neanche Galileo in questo campo era un santarellino. Aver fatto convivere nella stessa teca gli originali delle loro due maggiori invenzioni avrebbe sicuramente fatto girare le scatole ad entrambi.

1. Tenere fuori, tenere dentro, cancellare

"L'essenza stessa della percezione geniale del mondo sta nella capacità di penetrare nel profondo delle cose, mentre l'essenza della percezione illusoria sta nel nascondere a sé stessi la realtà.."

"La verità è un'antinomia."

> *"La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto."*

È forse il passo più citato di Galileo, almeno dai matematici e soprattutto dai fisici che (giustamente) ancora si stupiscono della strana efficienza della matematica nel descrivere i fenomeni naturali[1]. Con ogni probabilità, Galileo ha avuto il privilegio di essere stato il primo essere umano a rendersi conto della "irragionevole efficacia" wigneriana, anche se – con altrettanta probabilità – sarà stata certo l'efficacia, più che l'irragionevolezza, a colpire l'immaginazione del grande pisano. Dopo quattro secoli di metodo scientifico, è inevitabile che anche lo stupore galileiano sia solo in parte esperibile dai nuovi adepti alle meraviglie della scienza; a lungo andare si ha assuefazione a quasi tutto. Eppure, la meraviglia dev'essere stata davvero grandiosa, per i pionieri di quei tempi: usare i numeri, la geometria, la matematica per indagare gli eventi del cielo e della terra, che alle astrazioni matematiche sembrano, di primo acchito così estranei; e, come d'incanto, scoprire che la chiave matematica riesce ad aprire centinaia di porte dei labirinti della conoscenza.

1 *"Il Saggiatore" di Galileo Galilei*

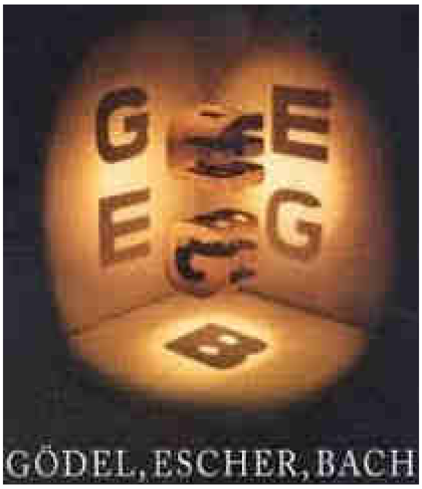
Tanto meravigliosa, la scoperta, che è quasi dissacrante provare a leggere il celeberrimo passo da un punto di vista insolito; certo non opposto, tutt'al più laterale. Si tratta proprio di quel poetico affermare "*…è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche*". Galileo sembra quasi assimilare alla *geometria* tutta la matematica. Per quanto la geometria sia stata – e ci sono validi motivi per ritenerla ancora oggi – la parte centrale e più nobile della matematica, è altrettanto indubbio che non sia l'unica. Fin dai tempi di Archimede e Pitagora i numeri mostrano la loro stupefacente magia e le incredibili potenzialità dell'aritmetica, eppure Galileo non li nomina neppure.

---

[1] A questo punto, dovremmo per forza citare l'articolo di Eugene Wigner sull'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali ("*The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*"), ma se lo facessimo, i lettori più fedeli e affezionati scrollerebbero disperati le spalle per l'eccessivo numero di volte che l'abbiamo citato. E, mannaggia: ormai l'abbiamo fatto anche stavolta…

Non è difficile giustificarlo: promuovere la geometria euclidea a strumento principe della lettura del mondo implica, di necessità, che la geometria dovrà essere corredata da misure, e quindi da calcoli, per rendere tangibili e utilizzabili le conclusioni dei suoi teoremi. Quindi Galileo non esclude certo l'aritmetica: semplicemente la dà per scontata. Resta però il fatto che anche quelle "figure geometriche" che vengono incoronate da Galileo a chiavi assolute di conoscenza sono oggetti finiti e definiti, in un certo senso "chiusi": non si parla di rette infinite, di segmenti dallo spessore nullo, men che mai di punti; ma oggetti che, per quanto geometrici e euclidei, si possono pensare tangibili (anche se in realtà non lo sono), reali, o perlomeno sovrapponibili alla realtà. Nessun umano ha mai davvero "toccato" un triangolo, eppure è facile immaginare un triangolo disegnato da tre punti nello spazio reale, come ad esempio la posizione dell'osservatore, la cima di un albero e la sua base. Non è possibile fare l'esperienza di un cerchio perfetto, ma basta alzare gli occhi in una notte di luna piena per vedere un oggetto sospeso nel cielo che gli assomiglia davvero tanto. Poco conta che l'oggetto reale sia in realtà tridimensionale, e quindi tutt'altro che simile a un cerchio perfetto, al massimo, potrà essere l'ottima approssimazione di una sfera: sulla tela immaginifica del cielo notturno, i piccoli esseri umani vedono disegnato un cerchio giallastro.

A dirla tutta, forse è proprio per questo passaggio logico impostoci dalla fisiologia dell'occhio che tanta importanza assumono, fin dai tempi più remoti, le intangibili figure della geometria piana. Il mondo avrà pure tre dimensioni[2], ma il nostro cervello, schiavo dell'occhio e dalla superficie bidimensionale della retina, lo legge sempre a due dimensioni per volta.



2 *La copertina del più famoso libro di Douglas Hofstadter esplica bene la differenza tra oggetti 3d e visione 2d*[3].

Forse, inconsapevolmente o meno, Galileo in quella frase scritta ne "*Il Saggiatore*" fa effettivamente un passo importante non solo per la nascita della fisica, ma anche per le scienze cognitive e – chi l'avrebbe mai detto – per la psicologia: è un po' come se dicesse "non preoccupatevi troppo delle beghe ontologiche, non intestarditevi sulle ombre delle caverne platoniche: se la Natura vi fa leggere la solidità del mondo attraverso proiezioni bidimensionali interpretate dalla vostra mente, non abbiate paura di usare la geometria bidimensionale per analizzarle".

O forse, tutto questo non gli passava neppure per l'arcinota anticamera del cervello. L'affermazione di Galileo è già traboccante di straordinario significato così com'è, non c'è bisogno di aggiungerne altro. Resta però il fatto che la nostra visione ci ha abituato a leggere il mondo per "forme", associandole a immagini di oggetti reali. Così, in prima approssimazione rimane indubitabile che ogni oggetto, per quanto complesso possa essere, è individuato dalla nostra vista come una forma che si stacca dallo sfondo e quindi – al causa del vincolo fisiologico della bidimensionalità della nostra vista – come una figura, geometrica o meno che sia, ben definita: insomma, come una forma "chiusa" stagliata su un piano. L'approssimazione e la capacità di interpolazione del cervello fanno il resto, come insegna bene la storiella del

[2] Almeno, così probabilmente pensava Galileo. Albert Einstein aveva idee diverse e più ampie, per non parlare delle pervicaci convinzioni che hanno in merito gli estimatori della Teoria delle Stringhe.

[3] Ma la strana (unica e solida) forma che proietta tre diverse (piane e bidimensionali) lettere dell'alfabeto resta un gioco da ragazzi, se confrontata a quel che fanno gli appassionati del genere. Basta dare uno sguardo qui, per rendersene conto: *https://lgg.epfl.ch/publications/2009/mitra_2009_SHA.pdf*

fisico e delle mucche[4]: insomma, il comandamento sembra essere quello di cogliere innanzitutto l'essenziale, e solo in seguito arricchirlo di dettagli. E se quel che di "essenziale" rimane è così povero e approssimato da ridursi a mero simbolo, niente di male: in fondo, nessun maestro dell'arte del disegno è mai riuscito a disegnare un "vero" triangolo, per quanto bravo lui possa essere e per quanto semplice possa essere immaginarlo.

Un cerchio disegnato, anche mal disegnato, può sempre venire buono per rappresentare una testa o un pallone, se disegnato da un bimbo; può servire a fissare l'immagine d'un perfettissimo cerchio euclideo, se disegnato da un insegnante non troppo versato nel maneggiare gesso e lavagna[6]; e migliaia di altri significati sono pur sempre possibili, a patto che la codifica tra l'autore del cerchio e gli spettatori sia sufficientemente chiara. Si pensi al massacro matematico che la topologia (che è matematica) fa proprio delle figure geometriche così care a Euclide e allo stesso Galileo: tutti i poligoni ridotti a reciproca equivalenza, rigorosi angoli retti che perdono di significato, e tutto solo per popolare l'immaginario matematico di forme estendibili, modificabili, maltrattabili fino all'eccesso, purché resti salvaguardata un'essenza tutto sommato poco appariscente: il numero di nodi e di incroci delle linee, i fori nelle superfici, cose così. La stessa linea chiusa che per Galileo era il passaporto, il ponte e il viatico tra la natura e la conoscenza; quella stessa linea chiusa che per un bimbo è l'essenza rappresentativa di un oggetto – la testa, una palla, il sole – è ridotta a mera separatrice di zone. Una tazza equivale ad un anello nuziale, nello spazio topologico: e nel piano topologico un triangolo, un cerchio, un quadrato (e qualsiasi altra linea chiusa che non si incrocia con sé stessa) non è più qualcosa che si staglia dallo sfondo, ma qualcosa che agisce sullo sfondo, suddividendolo in regioni.

3 *C'è comunque gente in grado di fare meraviglie con soli cerchi, come Dorota Pankowska*[5].

Sembra pura teoria, e invece è tutt'altro: basti pensare ad una delle attività fondamentali dell'*Homo sapiens*, la costruzione di capanne, case, palazzi. Prima di cominciare a esistere, un edificio viene immancabilmente disegnato. Dalla linea tracciata dalla mina dell'architetto (o dai pixel del suo CAD, ormai) prende forma innanzitutto il perimetro della pianta dell'edificio, e l'essenza è già tutta lì, in quel primissimo passo, molto prima che venga sistemato il primo mattone, prima ancora che la prima zolla di terra venga rimossa per far spazio alle fondamenta. La linea chiusa della pianta già divide la superficie del mondo intero nelle due sezioni "dentro l'edificio" e "fuori dall'edificio". Ed è divisione cruciale: tutto lo scopo della costruzione è, in ultima analisi (e non solo topologica), quello di distinguere in maniera nettissima l'interno dall'esterno. Vale anche

[4] Nell'improbabile caso che non la conosciate già: un contadino deve riorganizzare la stalla dove tiene le mucche, ormai cadente e troppo piccola. L'impresa è complessa e difficile, e chiede quindi consiglio al figlio, fresco di laurea in fisica. Il contadino gli spiega il problema, il giovane si concentra e quasi subito esclama soddisfatto: "Ma è facile! Consideriamo, per semplicità, una mucca perfettamente sferica…" – La storiella ha innumerevoli varianti, e la categoria professionale presa in giro è altrettanto variabile: al fisico viene spesso sostituito il matematico e talvolta perfino l'ingegnere. Come tutte le barzellette, animate solo dalla volontà di far sorridere, è sommamente imprecisa: tutti i seri professionisti sopra citati avrebbero in prima battuta assunto l'ipotesi di mucche puntiformi.

[5] Dorota Pankowska (Dori per gli amici) è un'artista canadese. Quando ha scoperto che il logo di Twitter, il celeberrimo uccellino azzurro, è stato fatto usando solo 13 cerchi, ha deciso di generalizzare l'exploit. Così, ha disegnato altri 13 animali, tutti generati da soli 13 cerchi. Sono uno più bello dell'altro, roba che noi di RM potremmo usarli come copertine della rivista per un anno intero, calendario compreso. Li trovate tutti sul suo sito, ovviamente: *http://dorotapankowska.com/13-animals-13-circles.html.*

[6] La citazione preferita dagli insegnanti di geometria? "*La geometria è l'arte di ricavare belle dimostrazioni da brutti disegni*".

per la prima caverna abitata dagli esseri umani: l'interno deve essere il più possibile accogliente, caldo, sicuro, e quanto meglio possibile separato dall'esterno pericoloso, freddo, pullulante di predatori. Si alzano barriere, protezioni, si inventano cose davvero geniali come le porte e le finestre – sorta di barriere mobili a piacere, in grado di mettere temporaneamente in comunicazione le due regioni che devono in genere restare separate e ben distinte – e tanta è l'importanza della separazione che, a ben vedere, è forse quella che meglio riepiloga il concetto di "civiltà". Civiltà e città vengono dalla stessa radice etimologica, e città è insieme di case, che sono isole protettive dall'esterno.

Poi, come sempre, gli esseri umani seguono le loro vite e le loro follie: quanto ci sarà voluto, dopo l'invenzione della prima "casa" nata per impedire ai pericoli naturali di entrare all'interno, prima che qualcuno pensasse che quella medesima invenzione potesse servire anche per tenere rinchiuse persone che non si voleva far uscire all'esterno? Dal punto di vista logico e geometrico appare paradossale, ma dal punto di vista della natura umana non lo è affatto, anzi. La linea chiusa disegnata a matita che separa, su un foglio di carta, un interno e un esterno diventa una muraglia tanto più spessa quanto più si desidera che le due regioni così individuate restino impermeabili l'una all'altra. Così, è solo per abitudine che non ci si stupisce, leggendo i libri di storia o le guide turistiche, che non è esistita fortezza che non sia stata, oltre che baluardo nei confronti dei nemici, anche prigione inviolabile per un certo numero di detenuti.

Difficile entrare, difficile uscire: e non solo in quel senso traslato, quasi psicoanalitico, che Dino Buzzati descrive così bene parlando della fortezza Bastiani ne "*Il deserto dei Tartari*", ma anche in quello fisico, pragmatico, banale del superare le barriere fatte di mattoni e sbarre metalliche. E se è un destino tutt'altro che insolito, quasi obbligatorio, per gli edifici militari, è assai meno tradizionale, e quindi sorprendente che la stessa ambivalenza possa toccare anche a certi monasteri.

4 *Il Monastero delle Isole Solovki sotto la neve.*

Il Monastero di Solovki si chiama così perché è situato sull'omonimo arcipelago, alle fredde latitudini[7] del Mar Bianco. Separato dalla terraferma, incastonato in un mare che è per gran parte dell'anno ghiacciato e con una natura intorno tutt'altro che accogliente, il primo mattone del monastero non poteva essere posato se non da uomini animati dal sacro fuoco missionario. Sono tre monaci, tutti e tre santi per la chiesa ortodossa, ad arrivare lassù nel bel mezzo del XV secolo per evangelizzare i pochi abitanti di quelle isole ghiacciate: Zosima, Herman e Savvatiy. Per quanto remoto e apparentemente poco attrattivo, il monastero si sviluppa e cresce rapidamente, diventando un punto focale della regione del Mar Bianco. Un po' perché i monasteri, specie nelle regioni remote e dimenticate, assumono presto la caratteristica di essere l'unico centro di aggregazione, non soltanto dal punto di vista religioso, ma anche sociale e soprattutto produttivo e commerciale; un po' perché riceve importanti donazioni dai principi di Novgorod, col passare degli anni si arricchisce sempre più e si organizza sempre meglio. Finirà con l'ospitare fino a mille monaci, impiantando miniere di mica e di sale, sviluppando la lavorazione del ferro, oltre che organizzare le più "naturali" (vista la posizione geografica) attività della pesca e della caccia agli animali di pelliccia. In breve, però, un altro aspetto assume un'importanza sempre maggiore: il monastero è in una posizione strategica particolarmente importante. San Pietroburgo verrà fondata solo nel 1703, e fino ad allora

[7] Attorno al 65° parallelo nord. Non si può forse dire che il Circolo Polare Artico si riesca a vedere affacciandosi alle finestre, ma quasi…

le isole Solovki sono il presidio marino essenziale di tutte le Russie: i nemici che vogliono attaccare la Russia dal mare – o, viceversa, i soli possibili attacchi via mare portati dalla Russia verso nemici esterni – passano quasi inevitabilmente dall'arcipelago e, di conseguenza, dalla "regione di competenza" del monastero.

La parola "cremlino", in russo, ha un significato più preciso e un po' più generico di quello che la stessa parola ha all'estero: "kremlin (кремль)" significa infatti "fortezza", ed è solo per estensione semantica che il Cremlino per antonomasia, quello di Mosca, si sia (almeno per i non-russi) appropriato interamente della parola. Il Monastero Solovki ha il suo *cremlino*, uno dei più antichi e belli di tutta la Russia: e da cittadella fortificata spesso dovrà comportarsi quel luogo idealmente nato solo per il ritiro spirituale. Si troverà al centro di ripetuti attacchi originati dalla Svezia, nemica storica della Russia, e subirà perfino un bombardamento inglese nel 1855, quando la Royal Navy lo attaccherà nell'ambito della Guerra di Crimea, pur così geograficamente lontana.

Ai giorni nostri, il monastero delle Isole Solovki è soprattutto un'attrazione turistica: è stato uno dei primissimi siti russi ad essere inserito nella lista del Patrimoni dell'Umanità dell'Unesco, e non è difficile capirne le motivazioni; ma è abbastanza curioso ripassarne le evoluzioni, da centro religioso a luogo di cruciale importanza commerciale, politica, militare: poi, la rivoluzione bolscevica del 1917 e la trasformazione della Russia in Unione Sovietica apporta un'ulteriore e sostanziale modifica alla sua destinazione d'uso. Il monastero diventa un gulag, e vi saranno rinchiusi molti oppositori al regime; l'ennesimo scambio del ruolo delle fortezze, da protezione verso l'esterno a segregazione verso l'interno. Si chiamerà SLON, acronimo di *Solovkij Lager' Osobogo Naznachenia*, che si può sommariamente tradurre con "Campo speciale delle Isole Solovki"; istituito dallo stesso Lenin, potrebbe detenere il poco allegro record di primo gulag dell'Unione Sovietica.

5 *Pavel Aleksandrovič Florenskij*[8].

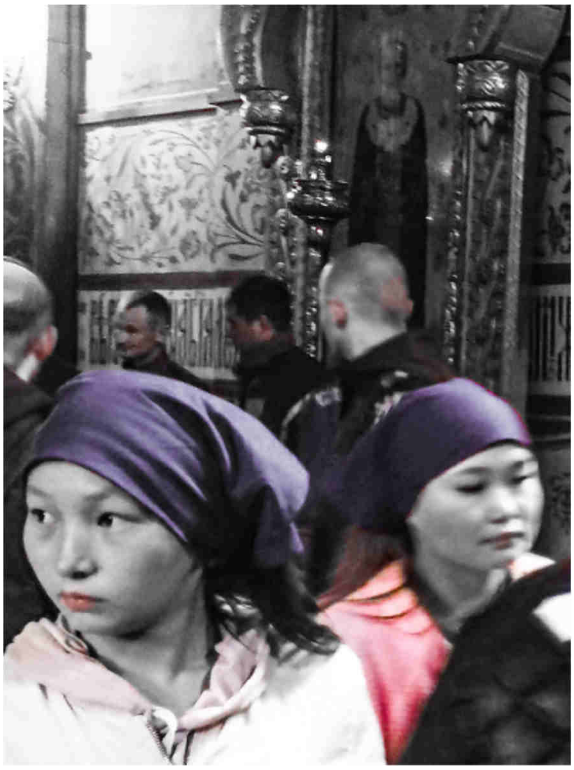
Curiosamente, uno tra i più noti intellettuali rinchiusi per anni nel monastero Solovki è un religioso, che forse potrebbe aver persino trovato non così innaturale il destino che forzosamente lo chiudeva in un monastero, se solo si fosse trattato di una sua libera scelta. Ancora più insolito, forse, è il fatto che il religioso in questione fosse anche un matematico.

Il nome di Pavel Aleksandrovič Florenskij si trova citato assai più frequentemente nei testi di filosofia che in quelli di matematica, eppure gran parte della sua vita è stata dedicata a questa disciplina. Nasce a Yevlax, nell'Azerbaigian nel Gennaio 1882 (il giorno è il 9 o il 21, in funzione del calendario che si preferisce tenere in considerazione, giuliano o gregoriano), figlio di un ingegnere ferroviario. La sua famiglia è insomma senza problemi economici, e vanta anche qualche remoto quarto di nobiltà armeno. Frequenta il liceo di Tbilisi, e già verso il diciassettesimo anno di età attraversa una profonda crisi religiosa[9]. È attratto dalla conoscenza scientifica, ma pensa anche che questa non possa dare piena risposta ai suoi interrogativi e alle sue tensioni

[8] La foto mostra bene la differenza (anche geometrica) tra la croce ortodossa e quella latina. Partendo da quest'ultima, gli ortodossi aggiungono in alto un piccolo rettangolo parallelo al braccio orizzontale, che rappresenta la tavoletta con la scritta INRI, e più in basso un'altra tavoletta simile, ma inclinata. Questa ricorda la narrazione tradizionale secondo cui uno dei due ladroni affiancati a Cristo sul Calvario sarebbe andato negli inferi, mentre l'altro, che si era pentito dei suoi peccati sarebbe asceso al cielo.

[9] Crisi che, a quanto pare, è stata scatenata soprattutto dalla lettura dei testi di Lev Tolstoi. Pavel scrive appassionate lettere al grande scrittore, ma non si ha certezza che Tolstoi le abbia ricevute o lette.

spirituali ed emotive; non ha intenzione di rinnegare la scienza – men che mai la sua amata matematica – ma pensa che debba esistere una sorta di sintesi possibile tra la razionalità e la spiritualità. Per tutta la vita, cercherà di conciliare i due aspetti.



6 *Sergiev Posad, interno della Cattedrale della Trinità nel Monastero di San Sergio, 2019.*

Si iscrive alla Facoltà di Matematica dell'università di Mosca, e ne uscirà laureato nel 1904, con la tesi "*Sulle caratteristiche delle curve piane come luoghi di violazione del principio di discontinuità*"[10]. Gli anni di Mosca sono anni di formazione e tensione spirituale per Pavel, e al tempo stesso sono anni complicati e di forte tensione politica ed economica per la Russia intera. Ci sarà la rivoluzione del 1905, la Grande Guerra nel 1914, e ben due rivoluzioni nel 1917; nel frattempo, Florenskij decide di intraprendere studi teologici nel 1904, trasferendosi nel più importante centro spirituale russo, il monastero della Trinità di San Sergio[11] a Sergiev Posad, non distante da Mosca.

Persegue costantemente il suo strano ideale di fondere insieme, senza contraddizioni, la sua passione per la scienza e la sua cristiana devozione religiosa. Alterna la scrittura di saggi filosofici, religiosi, a poesie e ricerche di matematica. Nel 1906 fonda una società (l'Unione di Lotta Cristiana)[12] che aveva l'intenzione di rivoluzionare la società russa rifondandola sulla base delle idee mistiche di Vladimir Solovyov, cosa che gli costa la prima condanna in tribunale: tre mesi carcere, poi graziati senza che dovesse effettivamente scontarli. A Sergiev Posad i suoi studi e i suoi scritti sono prevalentemente filosofici, com'è in fondo naturale per chi frequenta un corso di teologia: ottiene la relativa licenza – una sorta di primo grado di laurea teologica – nel 1908, e riceve immediatamente dopo l'invito a tenere la cattedra di Storia della Filosofia. Poi, quasi di corsa, gli eventi forse più importanti per la sua vita privata: si sposa nel 1910 con Anna Giacintova, gli nasce un figlio nel 1911, e nello stesso anno viene ordinato sacerdote della chiesa ortodossa. Ancora un anno, fino al 1912, per ottenere il titolo di Maestro in Teologia, una sorta di "master" per quei tempi e luoghi. Sono gli anni più intensi e produttivi, quelli in cui scrive la sua opera più famosa, "*La colonna e il fondamento della Verità*"; ma anche se sono le sue opere teologiche e filosofiche a farlo conoscere come uomo di grande intelletto, Florenskij continua allo stesso tempo la sua produzione matematica, e – più ancora delle sue opere scritte – è l'utilizzo della matematica e soprattutto della geometria nelle sue lezioni accademiche di filosofia e di estetica a stupire l'uditorio.

[10] Titolo che, in qualche modo, può ritenersi curiosamente coerente all'ambivalenza interno/esterno delle linee chiuse con cui abbiamo giocato all'inizio di quest'articolo.

[11] Si tratta di quello che i russi talvolta chiamano "il Vaticano Ortodosso". Anche questo fa parte dei Patrimoni dell'Umanità protetti dall'Unesco.

[12] Forse l'anno era il 1905, non il 1906. Forse la traduzione migliore per il nome della società è "Fraternità Cristiana di Lotta", come suggerisce Wikipedia.it, ma non sappiamo se traduce dalla traduzione inglese "*Christian Struggle Union*" o dall'originale russo "Союз Христианской Борьбы".

Pavel gioca con lo spazio e le sue curvature ("*Non ho altra maniera che parlarvi di fondamenti di geometria, per potervi spiegare l'estetica*", dirà ai suoi studenti), indaga e specula sulla quarta dimensione, ritorna spesso alla sua prima autentica passione matematica, la teoria degli infiniti di Cantor. Nel 1922 viene chiamato a tenere la cattedra di Analisi della Spazialità nell'Istituto Superiore d'Arte Nazionale[13], esperienza che nel 1922 si coagulerà nei libri "*Gli immaginari in Geometria*", e soprattutto in "*Analisi della spazialità e del tempo nelle opere d'arte figurativa*" che però non furono graditi dalle istituzioni sovietiche per il loro approccio un po' troppo metafisico allo spazio, e finirono censurati.

7 *Foto segnaletica di Pavel Florenskij*

Ma non è la censura dei libri l'aspetto più tragico della vita di Pavel Florenskij: per quanto sia un docente ammirato e stimato, per quanto presti opera anche come curatore dell'Enciclopedia Tecnica, per quanto lavori anche a progetti sociali e pragmatici come quelli dell'Amministrazione Russa per l'Elettrificazione dello Stato e si presti anche a ricerche geologiche, il prete matematico non è mai ben visto dalla polizia sovietica, e meno ancora dal KGB. Finisce arrestato nel 1933, imputato di sospetta cospirazione condannato a dieci anni di detenzione e lavori forzati: lavori che, nel suo caso, sono quelli di proseguire la sua ricerca scientifica.

Per quanto l'accusa rivoltagli sia falsa, costruita a tavolino dal KGB[14], Florenskij viene inizialmente costretto in Siberia, nel gulag di Skovorodino, e poi trasferito nelle Isole Solovki i 1° settembre 1934. Qui Pavel lavora: continua la ricerca, ottenendo anche dei risultati significativi, fino al 25 novembre 1937, quando il tribunale emette la sentenza di condanna a morte. Dalle Solovki viene trasferito a Leningrado, e da Leningrado in un bosco vicino alla città, nella mattina dell'8 dicembre. Qui lo fucilano, e qui viene seppellito: in un qualche posto che non sarà mai reso noto o ritrovato.

A Pavel Florenskij interessava l'infinito, sia quello matematico che quello divino, trascendente: e sarebbe bello poter chiudere queste righe con qualche spunto di consolatorio ottimismo, magari rifugiandosi nella indefettibile speranza che la fede religiosa – ogni fede religiosa – riesce ad elargire ai suoi seguaci. Ma è davvero difficile: della consolazione eterna e divina non abbiamo certezze, dell'onnipresente ubiquità della crudeltà presente e umana ne abbiamo invece fin troppe.

[13] Più correttamente, negli "Atelier Artistico-Tecnici Superiori di Stato" di Mosca, meglio noti come "Vchutemas" (che anche se non sembra è un acronimo, il cui sviluppo in cirillico vi risparmiamo).

[14] Questa e altre informazioni sulla vita di Florenskij arrivano dal recente libro di Michele Emmer "*Racconto matematico – Memorie impersonali con divagazioni*", Bollati Boringhieri 2019

2. Problemi

2.1 Parenti Serpenti

Tutto pronto. Il tavolone rotondo, la tovaglia (bianca), il copritovaglia (rosso), sottopiatti, piatti, piattini, posate, bicchieri, candele... Mancavano solo i segnaposto, alla rituale cena di famiglia in attesa di Sannycaws[15].

Già, i segnaposto.

Dovete sapere che in famiglia siamo $2n$, e la situazione non è esattamente tutta rose e fiori: infatti, a ognuno di noi sono cordialmente antipatici al più n–1 parenti (no, a nessuno è antipatico sé stesso, anche se qualcuno se lo meriterebbe...); consci della sua profonda conoscenza di Teoria dei Giochi, all'unanimità la parentela (non si ricordano altri casi in cui ci sia stato un accordo completo di questo tipo) ha delegato l'organizzazione del tavolo a Rudy, il quale (negli intervalli delle innumerevoli telefonate del tipo "...mi raccomando, non mettermi vicino a... *[scrivete qui il vostro nome]*"), continuava a spostare segnaposto con i nomi scritti quasi tutti *[già, qualcuno è antipatico anche a lui]* in bella grafia attorno a un tavolino rotondo, compulsando la lista delle antipatie che era riuscito a compilare.

Riuscite a dare una mano a Rudy, trovando una strategia per disporre quel branco di litigiosi in modo tale che, almeno per Pasqua, si riesca a mangiare in famiglia tranquilli?

Sin qui, il problema, ma a Rudy è venuta in mente un'espansione (di cui non è neanche sicuro ci sia la soluzione) adatta a parenti particolarmente perfidi: supponiamo lungo la nostra circonferenza ci sia in un certo punto una disposizione del tipo ...A-B-R-D-E... (la "R" è Rudy); "B" e "D" sono amici di "R" (e anche, rispettivamente, di "A" e "E") , quindi al momento tutto bene; solo che "A" e "E" non sopportano Rudy e sono particolarmente perfidi. Quindi, per far dispetto a "R", stanno monopolizzando l'attenzione di "B" e "D": riuscite a trovare una disposizione del tavolo tale che non si svolgano tali scene incresciose? Nel caso "no", a quali valori dovrebbe scendere quel "n–1" per permettere una digestione serena?

...e meno male che a Natale son tutti più buoni, come disse il cavolfiore.

2.2 Preparatevi agli esami

...che, non finendo mai, ci garantiscono materiale per sempre nuovi quesiti, soprattutto se si va a vedere il risultato dei vari INVALSI. Ora, siccome tra un po' tornano, meglio organizzare un piano "B" per il recupero.

Una classe contenente un numero pari di studenti è reduce dalla suddetta prova che, per quanto riguarda le abilità logico-matematiche, ha dato dei risultati decisamente vari. Infatti questa parte del test richiedeva di rispondere a undici domande e, nel caso di risposta esatta, alla vittima (no, non la matematica, lo studente) veniva assegnato un punto. La cosa interessante ("tragica" per il prof) è stata che all'interno della classe in oggetto tutti i punteggi da zero a undici erano rappresentati.

Anche se parlare di valore medio in questi casi sembra piuttosto stupido, questo valeva 37/5: neanche poi male ma, come dicevamo, l'ampia varianza dei risultati consigliava di attivare un potente corso di recupero, con l'appoggio del Dirigente Scolastico.

Il quale, con un sorriso sadico, tanto per cominciare enuncia un "...lo fanno *tutti*! Un po' di ripasso non ha mai fatto male a nessuno!". Alla labile obiezione dei prof ("...è che la classe è troppo numerosa, e...") risponde con un "visto che la classe ha un numero pari di studenti, divideteli in due gruppi uguali. Ma attenzione che i gruppi siano uguali non solo

[15] Un amico di Rudy e Doc ha avuto la pessima (per lui) idea di dire "Scommetto che non riuscirete mai a citare il nome del noto personaggio di [...indovinate...] su una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa." Giorgio, hai perso.

come numero di partecipanti, ma anche nel senso che la media di ogni gruppo deve essere pari alla media totale!".

Convinto (lui ha fatto il classico) di aver rifilato una rogna, se ne torna tranquillo in ufficio e leggere un giornale rosa a caso (indovinate quale), ma i nostri prof non si perdono d'animo e chiedono aiuto ai lettori di una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa: riuscite a trovare una strategia per dividere questa classe in due gruppi?

E (ma qui andiamo sul complicato) per quali valori della media (e tutti i voti possibili rappresentati da almeno uno studente) riuscite tranquillamente a fare la divisione?

Ecco, Prof, se tiene la soluzione in tasca sino a fine anno, avremo la certezza che il disamore per la matematica continuerà a regnare sovrano...

3. Bungee Jumpers

Il Postulato di Bertrand sostiene che tra due numeri k e $2k$ (con k>1) esiste sempre almeno un numero primo. Se $\pi(m)$ è il numero dei primi minore o pari a m e p_n l'n-esimo primo, dimostrate che per $n \geq 6$ è:

$$\pi\left(\sqrt{p_1 p_2 p_3 \dots p_n}\right) > 2n \quad .$$

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Gennaio!

Buon anno a tutti, anche se ve l'avranno già detto in tanti. Come al solito siamo in ritardo, anche perché alcuni di noi hanno avuto complicazioni di fine anno e altri si sono dati a bagordi con tutte le famiglie possibili. Il Capo ovviamente non è mai in ritardo, ma questo lo sapete già… Sta aspettando con ansia la pubblicazione delle soluzioni del Winter Contest, che abbiamo pensato di pubblicare dopo marzo, sempre che ne arrivino… per il momento solo un commento. Ma non perdiamo tempo, andiamo a vedere le soluzioni arrivate.

4.1 [251]

4.1.1 Due cose belle dell'inverno

Problema riciclato, e ci pare più di una volta, ma la matematica è come il maiale – come dice il Capo – non si butta mai via niente:

> *Abbiamo un certo numero n di passeri ed alberi. All'inizio su ogni albero si trova un unico passero e tutti gli alberi sono occupati. Non esistono coppie di alberi che si trovino alla stessa distanza tra loro. Quando del fracasso li disturba, si alzano in volo e si spostano dal proprio albero a quello a loro più vicino.*
>
> *Ma per quali valori di n è possibile che dopo il fracasso ci siano due passeri sullo stesso albero?*
>
> *E per quali valori di n è sicuro che ci saranno due passeri sullo stesso albero?*
>
> *Volendo evitare di trasformare un singolo albero in un condominio sovraffollato, esiste un numero massimo di passeri che si possano trovare sullo stesso albero?*

Prima soluzione, di ***Valter***:

> Per n=3 i due passeri sugli alberi più vicini si scambiano; il terzo va assieme a uno dei due.
>
> Per n>3 tre passeri possono essere così distanti dagli altri per cui sono più vicini tra loro.
>
> Per n pari i passeri possono essere vicini a coppie, scambiandosi quindi tra loro a due a due.
>
> Per n dispari anche se $n-1$ si scambiano tra loro, il restante si posa assieme a uno di questi.

Dispongo sei alberi su di una circonferenza ai vertici di un esagono regolare e uno al centro. In questo modo ogni albero ha la stessa distanza dai due a lui adiacenti e a quello centrale. L'albero centrale, infatti, forma sei triangoli equilateri assieme ai sei sulla circonferenza. Sposto gli alberi perché siano a distanze diverse e quello centrale il più vicino agli altri. Ciò non è possibile perché i sei triangoli devono tutti avere più piccolo l'angolo al centro.

Si può fare invece con un pentagono regolare ma non da altri poligoni con più di cinque lati.

Quindi:

- *per quali valori di n è possibile che dopo il fracasso ci siano due passeri sullo stesso albero?* Per n>2.
- *per quali valori di n è sicuro che ci saranno due passeri sullo stesso albero?* Per n>1 dispari (intendo con: "*Saranno due*" come "*saranno almeno due*", altrimenti la risposta è n=3).
- *esiste un numero massimo di passeri che si possano trovare sullo stesso albero?* 5.

Niente male, vero? Abbiamo anche una soluzione di ***trentatre***:

Le relazioni fra gli alberi prodotte dai voli dei passeri sono completamente determinate dal criterio della distanza minima.

In una sequenza lineari di alberi A, B, ... (visti come punti) con le distanze interposte, tutte diverse

$A\ _1\ B\ _4\ C\ _3\ D\ _2\ E\ _5\ F\ _6\ G\ _8\ H\ _7\ I$

- il passaggio dei passeri verso l'albero più vicino produce

$A \leftarrow B\,|||\,C \rightarrow D \leftrightarrow E \leftarrow F \leftarrow G\,|||\,H \rightarrow I$ dove

$\rightarrow$ corrisponde al volo di un solo passero, $\leftrightarrow$ a due voli

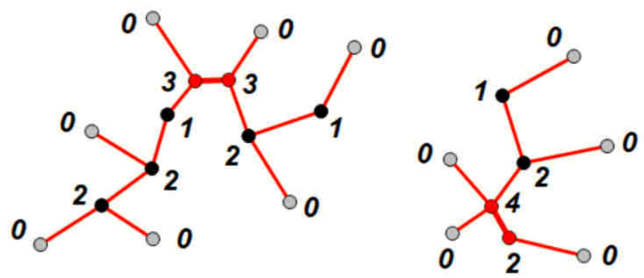
| | | interrompe la sequenza

- il *gruppo* fra due | | | ha all'interno la *coppia* (D,E) in cui i due passeri si scambiano; nel gruppo le distanze crescono allontanandosi dalla coppia

- ad ogni coppia corrisponde uno e un solo gruppo; se questi sono più di uno, sono isolati, senza voli fra loro

- i percorsi verso la coppia – visti come grafi – sono "alberi" e non ci sono percorsi chiusi (la distanza massima interna sarebbe una interruzione | | |).

1



Lo stesso avviene se gli alberi sono disposti nel piano, salvo che a un albero possono arrivare più passeri. Gli alberi sono (fig. 1) di tre tipi

(a) rosso: le coppie (prodotte da due alberi con distanza minore da quella di tutti gli altri alberi vicini); per n grande ci possono essere molte coppie

(b) nero: gli alberi interni, con un volo in uscita verso la coppia, e altri voli in entrata dall'esterno

(c) grigio: gli alberi al confine, con un solo volo in uscita, che restano vuoti.

I percorsi da un albero (c) ad un (a) hanno distanze decrescenti.

Il numero finale k di passeri su un albero (indicato in figura) dipende solo dal numero m, in entrata o uscita, di collegamenti fra un albero e i vicini; per i diversi tipi

(a) $k = m$

(b) $k = m - 1$

(c) $k = 0$.

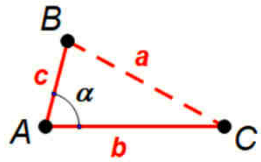
La risposta ai quesiti è

- per quale n è possibile ci siano due passeri su un albero: $\underline{n = 3}$; due alberi di tipo (a) e l'altro (c)

- per quale n è sicuro ci siano due passeri su un albero: $\underline{n = 3}$ come sopra; nb. se n è pari si possono avere solo coppie isolate e nessun albero con 2 passeri

- quale è il massimo di passeri su un albero: $\underline{k = 5}$.

2



Il massimo deriva dalla geometria imposta nel piano dal principio della distanza minima. In fig. 2 l'albero A è collegato a B e C, e le distanze formano il triangolo di lati $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$; assumendo $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{c}$, il collegamento vale solo se $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b} > \boldsymbol{c}$ (altrimenti si uniscono B e C); per il teorema del coseno

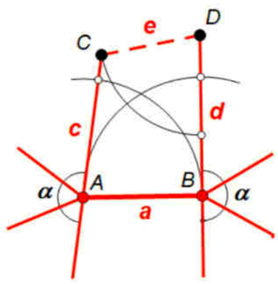
$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2 - 2\boldsymbol{bc}\cos\alpha > \boldsymbol{b}^2$ da cui

$\cos\alpha < \boldsymbol{c}/(2\boldsymbol{b}) < 1/2 \rightarrow \underline{\alpha > 60°}$.

Questo limite deve essere rispettato in ogni albero, e i collegamenti in entrata o in uscita sono al massimo 5 (se fossero 6 almeno un angolo sarebbe minore).

Quindi il massimo per gli alberi (a) è $k = 5$, per i (b) è $k = 4$.

Inoltre i due alberi (a) di una coppia non possono ospitare ciascuno 5 passeri e in totale non possono essercene più di 9; quindi in un gruppo può esserci solo un albero con 5 passeri.



3

Ricavo questo dalla fig. 3, senza scrivere per esteso la dimostrazione; nella coppia (AB) sono indicati 5 collegamenti per albero, inclusi quelli per C e D; poiché $\boldsymbol{a}$ è la distanza minima si può porre $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{c} < \boldsymbol{d}$; i due angoli α misurano più di 180° e le due semirette AC e BD sono, da almeno un lato di AB, convergenti; se ne ricava che per ogni posizione ammessa di D è sempre $\boldsymbol{e} < \boldsymbol{d}$; quindi D si collega a C e non a B, che perde un collegamento.

Il problema si può estendere a tre dimensioni (una foresta con alberi di diversa altezza o meglio una voliera con trespoli al posto di alberi); la topologia – coppie, gruppi, connessioni – è sempre la stessa, ma in questo caso il vincolo di 60° vale nello spazio; ritengo che in una coppia il numero massimo di passeri su un trespolo sia 12 (dal centro di un icosaedro un lato è visto con un angolo di $63°.435 > 60°$ e i 12 vertici possono collegarsi al centro); ma non è facile stimare quanti passeri può ospitare l'altro trespolo, e ancor meno passare ad altre dimensioni.

Svelti passiamo al secondo problema prima che si spostino tutti di nuovo.

4.1.2 Tutti in carrozza (finalmente)!

Anche questo problema è riciclato:

Rudy arriva per primo sulla carrozza e di fronte ai cento posti tutti vuoti, senza neanche consultare il proprio biglietto, sceglie il suo preferito e si accomoda. Gli altri passeggeri (tranne Doc) continuano ad arrivare e:

- *Se il loro posto prenotato è vuoto, ci si accomodano.*
- *Se il loro posto prenotato è occupato, scelgono tra i posti liberi il loro posto preferito e ci si accomodano.*

Questa scena si ripete per novantotto volte e infine arriva Doc, il quale si siede nell'ultimo posto rimasto libero. Quali sono le probabilità che Doc sia seduto al suo posto prenotato? E quali quelle che sia seduto al posto di Rudy?

E anche in questo caso la prima soluzione è di ***Valter***:

Se Rudy o uno svizzero si siede al posto di Rudy, Doc si accomoda al suo posto.

Se Rudy o uno svizzero si siede al posto di Doc, lui si accomoda al posto di Rudy.

Da quando ciò avviene tutti i restanti svizzeri, si accomodano al posto assegnato.

Una delle due situazioni sopra elencate deve verificarsi e ognuna con probabilità 50%.

Mi pare, quindi, che la probabilità per Doc di trovarsi al posto assegnato è del 50%.

E con questo è tutto, alla prossima!

5. Quick & Dirty

In un lago ci sono 4'998 pesci maculati. Su ciascun pesce maschio ci sono 111 macchie, su ciascun pesce femmina ce ne sono 37. Se tolgo i due terzi dei pesci maschi dal lago quante macchie restano?

Togliere i due terzi dei pesci maschi del lago equivale a cancellare da tutti i pesci maschi i due terzi delle macchie. Siccome 111/3=37*, la nuova situazione è equivalente a sostituire ogni pesce maschio con una femmina. A questo punto avremo* 4'988×37=184'296 *macchie.*

6. Zugzwang!

Mettiamo subito le mani avanti confessando la nostra imperdonabile lacuna in merito a questo gioco: non sappiamo *a che ora* è stato inventato. Se qualcuno incontra ***Mark Steere***, lo torchi per sapere nel dettaglio cosa ha fatto il *13 luglio 2005*. E ditegli che abbiamo rispettato (quasi) tutte le condizioni da lui richieste: "*Feel free to publish this rule sheet, and to program the game of Byte for online or offline play. No licensing fee or royalties are expected. However please don't change the name or the rules, and please attribute the game to me, Mark Steere.*". Ora, secondo noi, il nome è una ciofeca: comunque, qui sopra (e poco sotto) lo scriviamo come dice lui. Ma nel titolo no.

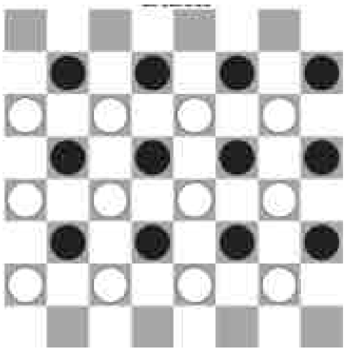
6.1 Riciclare le dame

E ora, che si scateni l'inferno del politicamente scorretto.

In realtà parliamo proprio della Dama come gioco: è stato il primo dei giochi "tosti" ad essere completamente analizzato[16], e la cosa a quanto pare ha indispettito molti appassionati (cosa che non sembra essere successa per gli scacchi e il go), e oggi molti

[16] A parte "Reversi" (o "Othello"), ma quello, se non ricordiamo male, è stato inventato proprio per essere analizzato.

giochi di dama giacciono inutilizzati e dimenticati; la meritoria opera di Mark, con il suo ***Byte*** (adesso basta: lo abbiamo nominato due volte, d'ora in poi "il gioco") è stata proprio quella di permettere il riciclo delle scacchiere da dama: nel formato "standard" del gioco si utilizzano quelle 8×8, ma non ci pare molto difficile portare il tutto al 10×10, a parte un paio di punti che sottolineeremo più avanti. Ma siccome sapete benissimo (e ormai lo avrà capito anche Mark) che noi polemizziamo solo sulle cose che ci sono simpatiche, passiamo alle regole del gioco.



Il ***Setup*** del gioco è quello mostrato in figura (il Nero è in alto); contrariamente alla dama, i pezzi stanno a centro scacchiera. Ora, sicuramente avrete notato *tutti* che c'è un'asimmetria: abbiamo lasciato una riga libera dalla parte del giocatore, ma non ne abbiamo lasciate ai lati; giocando su una damiera 10×10, per motivi filologici (v. dopo) ci sentiremmo di lasciare anche le due colonne laterali libere, ma *forse* si potrebbero mettere anche delle pedine lì, cambiando nome al gioco… Risolveremo tra qualche paragrafo questo dilemma. Comunque, muove prima il *Bianco*.

A questo punto, dovremmo definire le ***Pile***, che noi preferiamo chiamare ***Byte*** come l'intero gioco: il Byte è una pila formata da una a otto pedine (...chiaro, adesso, il motivo del nome? E chiaro perché ci chiediamo se nel passaggio dall'8×8 al 10×10 non sia il caso di cambiare nome? Quale dovrebbe essere il valore massimo di altezza delle pile – aka "lunghezza del byte" – nel secondo caso?) che si muovono in modo solidale. Quando si viene a formare un Byte da otto pedine, questo viene immediatamente rimosso dalla scacchiera, e *la pedina in cima va al giocatore di quel colore*, e conta come un punto; le altre pedine del Byte sono scartate e non torneranno in gioco. Evidentemente, dato che ci sono ventiquattro pedine, potete formare *tre* Byte: se giocate su un'internazionale, ne potete formare *cinque* (Aha! Allora vanno messe le pedine anche sulle colonne di fianco! Cribbio, Mark, non potevi dirlo prima?).

Sappiamo benissimo che il vostro principale interesse è sapere ***come si vince***, quindi soddisferemo subito la vostra curiosità: vince quello che fa più punti, ossia che ha più "pedine da Byte" (Rudy picchierà personalmente chiunque chiami queste pedine MSB).

Soddisfatte le vostre insane curiosità, passiamo a ***come si muove***: una Pila (anche se composta di una sola pedina) è di proprietà del colore della sua pedina *inferiore*, che può muoverla su una qualsiasi casella nera (sì, si gioca solo sulle caselle nere, come a dama) adiacente. *Deve essere sempre mossa l'intera Pila*, tranne in un caso che vedremo tra breve. Avete, inoltre, un ***obbligo di direzione***: dovete sempre muovervi verso la Pila più vicina, dove per "più vicina" si intende in numero di mosse lungo la via più breve: se più di una sono le più vicine ed equidistanti, potete scegliere verso quale andare *[No, la scacchiera non è toroidale. Ma potrebbe essere un'idea… Maaark!]*. Interessante, questo fatto che "guida" la pedina inferiore, ma alla fine "vince" quella superiore. Si intravedono strategie di buona complessità.

Tutto questo, sin quando non avete Pile vicine ad altre. Perché a questo punto le Pile si mescolano, e la cosa non è semplice.

Se due Pile sono finite vicine e *una delle Pile contiene almeno una pedina del vostro colore*, sotto due condizioni *dovete* prendere la vostra pedina e tutte quelle sopra e metterle sulla Pila vicina; le due condizioni sono:

1. La vostra pedina, dopo, si trova ad un livello ***superiore*** rispetto a quello di partenza, e
2. L'altezza totale della Pila risultante è comunque ***minore o uguale a otto***.

Notate che, come nella dama, abbiamo scritto *dovete*: se frazionando in un qualche modo la Pila potete fare una mossa, (e non potete muovere altre Pile sulla scacchiera), allora la mossa è forzata.

Se non avete mosse possibili, saltate il turno, e continuate a saltarlo sin quando il vostro avversario vince (...o perde… A occhio, potrebbe succedere…).

No, noi no. Provate voi, a fare qualche analisi.

7. Pagina 46

Si verifica manualmente che il teorema è valido per n=6:

$$\pi\left(\sqrt{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6}\right)=\pi\left(\sqrt{30030}\right)\geqslant\pi(50)=15>2\cdot 6$$

Procedendo per induzione, supponiamo sia dimostrato che per un qualche $n\geq 6$ sia $\pi\left(\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}\right) > 2n$: quello che vorremmo dimostrare è che $\pi\left(\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n p_{n+1}}\right) > 2n + 2$, ossia che $\pi\left(\sqrt{p_{n+1}}\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}\right) > 2n + 2$.

Essendo $n\geq 6$, allora $p_{n+1} \geq p_7 = 17$ e quindi $\sqrt{p_{n+1}} > 4$ e $\pi\left(\sqrt{p_{n+1}}\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}\right) \geq \pi\left(4\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}\right)$.

Il Postulato di Bertrand ci permette di affermare che $\pi(4k) - \pi(2k)$ e $\pi(2k) - \pi(k)$ valgono ciascuno almeno 1 e quindi

$$[\pi(4k) - \pi(2k)] + [\pi(2k) - \pi(k)] \geq 1 + 1$$

Notando che $\pi(4k) = [\pi(4k) - \pi(2k)] + [\pi(2k) - \pi(k)] + \pi(k)$, si ha:

$$\begin{aligned}\pi\left(\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n p_{n+1}}\right) &\geqslant \pi\left(4\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}\right)\\ &= \left[\pi\left(4\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}\right)-\pi\left(2\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}\right)\right]\\ &\quad+\left[\pi\left(2\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}\right)-\pi\left(\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}\right)\right]+\pi\left(\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}\right)\end{aligned}$$

Ma essendo $\pi\left(\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}\right) > 2n$, si ha:

$$\pi\left(\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n p_{n+1}}\right) > 1 + 1 + 2n = 2n + 2$$

che è la tesi.

8. Paraphernalia Mathematica

Sappiamo benissimo che siete tutti esperti nella Teoria dei Giochi, visto he vi siete formati alla scuola di *Rudi Ludi*. Un dubbio che potrebbe restarvi, però, è *come* si usino nella realtà tutti gli strumenti forniti dalla teoria: scopo di queste note è vedere appunto tutto questo, in un caso un po' più pratico di un giocoso tavolino coperto di carte, dadi e prigionieri.

8.1 Dov'è il problema?

Ho individuato il problema: è tra la sedia e la tastiera.
Qualsiasi Customer Care *(Lo pensa, ma non lo dice)*

Per prima cosa, descriviamo il gioco in modo informale: voi siete il *buono* (A, Alice, 0, … come vi pare) e c'è un *cattivo* (B, Bob, 1, …); per comodità, definiremo anche la presenza di un *Master*, con incarichi sostanzialmente notarili di registrazione delle mosse, cambi di stato, comunicazione delle informazioni eccetera: Alice e Bob non si parlano e non si conoscono ma possono comunicare con il Master, uno all'insaputa dell'altro.

Inoltre, c'è un *Sistema*, che noi per semplicità ridurremo ad un interruttore e una lampadina; all'inizio del gioco, il Sistema è nello stato zero, il che significa che è controllato da Alice e tutto funziona perfettamente.

Quando vuole, senza dir niente a nessuno, uno dei due giocatori fa un *Flip* (tant'è che il gioco si chiama ***FlipIt***) portando l'interruttore nel proprio stato: il guaio è che fare un Flip costa, oltretutto, non necessariamente la stessa cifra per Alice e per Bob. Di solito per Alice l'operazione è più costosa, ma non è detto: tant'è che, quando vi capita di fare un Flip ma il sistema era già "vostro", questo viene amichevolmente chiamato "Flop".

Il sistema deve essere il più possibile nel vostro stato in quanto, alla fine del gioco, "vince" chi ha avuto (con la minima spesa: vedi dopo) possesso del Sistema per più tempo.

"E come faccio a saperlo?" Beh, esistono tre modi di feedback, sui quali ci si mette d'accordo all'inizio. Il più semplice è il ***non adattativo*** (NA): nessuno vi dice niente e andate avanti sparacchiando Flip sin quando restate senza soldi; immediatamente maggiore in complessità è il feedback dell'***ultima mossa*** (LM: Last Move): il Master vi dice quando *il vostro avversario ha fatto l'ultima mossa*: notate che in questo caso non sapete da quanto tempo l'avversario è padrone del sistema: la sua ultima mossa sarebbe potuta essere un Flop; in compenso, se vi ricordate quando avete fatto voi l'ultima mossa, potreste avere la certezza o che la vostra mossa è stata un Flop (ne avete fatta una successiva all'ultima giocata dell'avversario) o avere una stima di minima su quanto sia durato l'ultimo periodo di possesso del Sistema da parte del vostro avversario: specifichiamo "*minimo*" in quanto l'ultima mossa dell'avversario sarebbe potuta essere un Flop. La terza possibilità è che a voi (o al vostro avversario) al momento del Flip venga fornita la ***storia completa*** (FH: Full History) dei flip di entrambi i giocatori con i relativi tempi.

Tutto qui: molti (tra cui ***Rivest***[17], che ha contribuito in massima parte alla sua costruzione) sostengono sia un ottimo modello di simulazione degli attacchi informatici *Stealth* e permetta di analizzare le diverse strategie di difesa: sia "giocando" (o meglio, facendo giocare a qualche elaboratore) svariate partite, sia lavorando in un modo più teorico. Che è quello che ci accingiamo a fare: infatti, ricominciamo da capo in notazione di Teoria dei Giochi (e qualche notazione da parte nostra, giusto per capirci); se poi preferite giocarlo o farlo diventare un gioco "serio", Rudy ha un'idea che vi mette in nota, e non chiede neanche il copyright[18].

[17] Lo conoscete: è la "R" di RSA, e ne abbiamo parlato parlando della "A", che è Adleman.

[18] L'idea era quella di avere svariati Sistemi, collegati tra di loro in una qualche rete stratificata: se siete Bob (il cattivo), ogni volta che flippate una macchina, conoscete tutte le macchine collegate a quella flippata e acquisite il diritto di flipparle; a priori il cattivo non conosce la struttura della rete, ma il buono sì. Se avete flippato una

I *Giocatori* sono due: 0 (Alice) e 1 (Bob).

Il *Tempo* inizia a t=0 e procede indefinitamente ($t \to \infty$): nell'analisi si considera il tempo *continuo*, ma nulla vieta di considerarlo discreto *[attenzione che non dovete obbligatoriamente giocare a tutti i turni: lo decidete voi, quando giocare!].*

Lo *Stato del Gioco* è descritto da una funzione $C=C(t)$ che ci dice se il *giocatore corrente* ha (0) o no (1) il controllo del sistema. Inoltre, definiamo la funzione (logica) di *Indicatore* che ci dice se il gioco è di proprietà di un dato giocatore in un dato momento; la indichiamo con I e possiamo allora definire $C_i(t) = I(C(t)=i)$, $i \in \{0, 1\}$ come la funzione che ci dice se ad un dato tempo il giocatore i ha possesso (0) o no (1) della risorsa; quindi, $C_1(t) = C(t)$ e $C_0(t) = 1 - C_1(t)$ *[questa apparente complicazione ci permette di trattare i due giocatori in modo simmetrico].*

La *Mossa* di un giocatore consiste nel fare un Flip: la cosa non è obbligatoria, se si vuole si può non fare nulla, ma comunque non si possono fare più di una mossa in un (prestabilito) intervallo di tempo. La sovrapposizione di mosse da parte dei due giocatori (quasi impossibile se si gioca a tempo continuo, ma…) di solito annulla entrambe le mosse. Comunque la sequenza dei *Tempi di Mossa* è definita come funzione non decrescente[19] $\boldsymbol{t} = t_1, t_2, t_3, \ldots$; nello stesso modo, possiamo definire la sequenza delle giocate come $\boldsymbol{p} = p_1, p_2, p_3, \ldots$, dove i vari elementi assumono il valore zero o uno, e abbiamo le condizioni iniziali $t_1 = 0$, $p_1 = 0$, ossia il "buono" ha il possesso del Sistema: se vogliamo suddividere le giocate dei due giocatori, possiamo considerare le sottosequenze $\boldsymbol{t_i} = t_{i,1}, t_{i,2}, t_{i,3}, \ldots$: ogni elemento della sequenza dei Tempi di Mossa è un elemento di una (e una sola) delle due sottosequenze.

Lo stato del Sistema è allora descritto dalla variabile $C(t) = p_k$ o, se preferite, $C(t_k) = p_{k-1}$, denotante quale giocatore ha, al momento della k-esima mossa, il possesso del sistema. Teniamo conto anche del *numero di mosse* di ogni giocatore sino ad un determinato momento e del numero totale di mosse: $n(t) = n_0(t) + n_1(t)$; se ci interessa (spoiler: ci interesserà), possiamo anche calcolare il numero medio di mosse per giocatore $\alpha_i(t) = n_i(t)/t$. Indichiamo inoltre il momento dell'ultima mossa del giocatore come $r_i(t)$.

Come possiamo definire il *Feedback* nei vari casi? Il caso NA (silenzio totale) è piuttosto semplice: $\phi(t_k) = 0$, mentre per il caso LM (dico di chi è stata l'ultima mossa) abbiamo $\phi_i(t_k) = r_{1-i}(t_k)$ e per il caso FH (ti racconto tutta la storia passata) $\phi_i(t_k) = ((t_1, t_2, \ldots, t_k), (p_1, p_2, \ldots, p_k))$. Per quanto paradossale possa sembrare, i casi LM e FH sviluppano delle forme di *cooperazione*: "se ti sei preso il sistema, adesso me lo prendo io". Competitiva, ma sempre di cooperazione si tratta: bisogna essere d'accordo in due, per farsi la guerra. Come ultime due forme di notazione, definiamo la *vista* di un giocatore la sequenza dei suoi tempi di mossa e dei feedback ricevuti (caso zero? Sequenza di zeri, ovvio), e la *storia* del gioco come l'insieme delle due viste.

Bene, cominciamo a parlare di *Strategie*. La più semplice, per quanto riguarda il gioco "senza feedback", è quella di giocare periodicamente, con scelta degli intervalli di giocata casuale; dobbiamo distinguere due diversi casi, in funzione delle frequenze di gioco dei due giocatori:

> **Caso 1**: $\alpha_0 \geq \alpha_1$: il buono è veloce almeno come il cattivo. Avremo, per i due giocatori, dei benefici:
>
> $$\beta_0(\alpha_0, \alpha_1) = 1 - \frac{\alpha_1}{2\alpha_0} - k_0\alpha_0$$
> $$\beta_1(\alpha_0, \alpha_1) = \frac{\alpha_0}{2\alpha_1} - k_1\alpha_1$$

---

macchina interna alla rete ma vi flippano quella più vicino al bordo, mantenete la proprietà della macchina interna, ma perdete quella esterna. Non sappiamo se abbiamo reso l'idea, ma la prima immagine che ci viene in mente è: "giocare a 'Risiko!' con la luce spenta".

[19] Come al solito, il diavolo sta nei dettagli: dicendo "non decrescente" anziché "crescente", ammettiamo le giocate coincidenti dal punto di vista temporale. Risolviamo subito il problema di "cosa fare" in questo caso, decidendo che non ci sia cambio di stato (ma tutti e due i giocatori "perdono i soldi" della giocata).

Caso 2: $\alpha_0 \leq \alpha_1$: il buono non è più veloce del cattivo. Secondo la stessa logica, si ha:

$$\beta_0(\alpha_0, \alpha_1) = \frac{\alpha_0}{2\alpha_1} - k_0\alpha_0$$
$$\beta_1(\alpha_0, \alpha_1) = 1 - \frac{\alpha_0}{2\alpha_1} - k_1\alpha_1$$

Adesso viene il bello, ossia cerchiamo gli *Equilibri di Nash*: se indichiamo con gli asterischi le strategie ottimali, si ha:

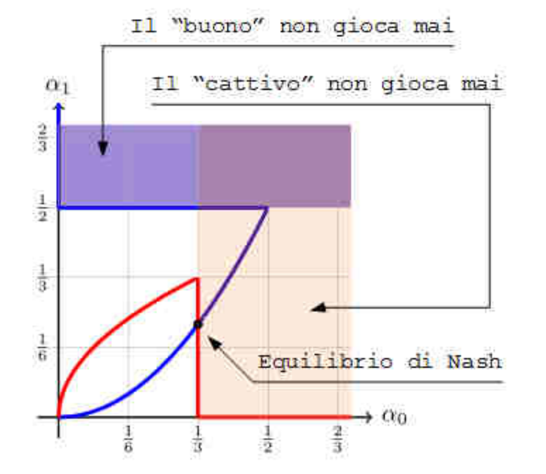
$$k_0 < k_1 \Rightarrow \alpha_0^* = \frac{1}{2k_1}, \alpha_1^* = \frac{k_0}{2k_1^2}$$
$$k_0 = k_1 \Rightarrow \alpha_0^* = \alpha_1^* = \frac{1}{2k_0}$$
$$k_0 > k_1 \Rightarrow \alpha_0^* = \frac{k_1}{2k_0^2}, \alpha_1^* = \frac{1}{2k_0}$$

che a prima vista non significano nulla, ma proviamo a vedere un caso particolare.

Supponiamo i costi delle giocate siano rispettivamente[20] $k_0 = 1$ e $k_1 = 1{,}5$: trovate il grafico delle due funzioni di profitto nella figura a fianco, ma vi diciamo che i valori "topici" sono:

$$(\alpha_0, \alpha_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)$$
$$(\gamma_0, \gamma_1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$
$$(\beta_0, \beta_0) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

dove α è la frequenza media di gioco, γ il guadagno medio e β il beneficio medio.



8 *Traetene le logiche conseguenze…*

A questo punto, seduti sull'equilibrio di Nash, ci sentiamo di trarre alcune edificanti conclusioni, visto che a Natale son tutti più buoni, ma dopo che sono stati fregati sono tutti più realisti:

$\alpha_0 > \alpha_1$: aggiornate il vostro software il più spesso possibile.

$\gamma_0 > \gamma_1$: il crimine non paga, o meglio paga molto poco per la fatica che si fa.

$\beta_0 > \beta_1$: fare il "black hat" è sempre stressante.

Alla prossima.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[20] Ci sentiamo di dover dare una giustificazione: questa strategia di gioco "casuale", a prima vista piuttosto illogica, è nota come *renewal*, che noi preferiamo tradurre come *aggiornamento*: aggiornare il software costa caro al "buono" (anche se il software è gratuito: aggiornamento dei tecnici, upgrade delle macchine, and so on) e, probabilmente, ancora più caro al "cattivo" (che, oltre alle stesse spese del buono, deve anche studiare per trovare il "baco"). Quindi, questo è lo scenario che si presenta più spesso, per strano che possa sembrare.