Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 249 – Ottobre 2019 – Anno Ventunesimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM248 ha diffuso 3'303 copie e il 13/10/2019 per Google eravamo in 9'100 pagine.

La frase (attribuita a Feynman, ma probabilmente non è vero) "...i primi acceleratori di particelle non raggiungono altissime velocità" è, quantomeno, ambigua. [Immagine tratta da ***Asimmetrie*** numero 6, aprile 2008].

1. Torno (quasi) subito

"Viaggiare nel tempo è troppo pericoloso.
È meglio che mi dedichi a studiare l'altro
grande mistero dell'universo: le donne."
(Emmett L. "Doc" Brown
in *Ritorno al futuro – Parte II*
di Robert Zemeckis. 1989)

Chissà perché proprio una macchina, poi.

E quasi sempre una "macchina" proprio nel senso comune, almeno per gli italofoni, di "automobile", con tanto di ruote e spesso anche con la possibilità di schizzare via a tutta velocità anche nelle tre euclidee dimensioni spaziali, e non solo in quella temporale. Prima fra tutte la DeLorean di "*Ritorno al Futuro*", genialmente riadattata da "Doc" Brown e audacemente pilotata da Marty McFly. In fondo, per muoversi attraverso la sola dimensione temporale dovrebbe andar bene qualsiasi cosa, proprio perché non abbiamo nessunissima idea su come iniziare un simile viaggio[1]. Forse la capacità di muoversi anche nelle tradizionali tre dimensioni spaziali è necessaria perché quasi ogni letterario viaggio nel tempo è immaginato nella simmetrica forma di "andata e ritorno", e occorre quindi che la "macchina" trasporti non solo gli umani viaggiatori, ma anche sé stessa, e che sappia come ritornare al luogo/tempo di partenza; anche se questo apre tutta una nuova questione sulla *governance* dei sistemi di riferimento (inerziali o meno) perché – con il passare del tempo – la Terra, il Sole, la Galassia e Tutto il Resto continuano serenamente a muoversi nello spazio, e il compito di una diligente macchina del tempo deve prevedere anche un'ottima capacità di recuperare le coordinate spaziali di destinazione, mica solo quelle temporali.

1 *Avengers, la locandina.*

Nonostante tutte le difficoltà tecniche e persino immaginifiche, il viaggio nel tempo resta uno dei temi più intriganti per tutte le forme di fantascienza e fantasy: non solo si presta a varie interpretazioni, ma soprattutto lascia totale libertà agli scrittori per creare regole eccezionali e paradossi intriganti, cosa concessa solo a chi discetta di tecnologie ancora del tutto inesistenti e quindi limitate solo dalla propria fantasia, e in parte dalle mode narrative del "tempo" in cui vive il narratore. Cinematograficamente parlando, siamo oggi nell'epoca del fantastico più spinto e soprattutto dei supereroi, ed è quindi del tutto normale che si possa ricorrere ad un saltino nel passato per risolvere un problema presente, fosse anche solo di mera logistica, quasi come un accessorio legittimo e scontato di trama, senza troppe complicazioni teoriche di fisica o filosofia. Tant'è che nell'ultima epopea della Marvel "*Avengers: Endgame*" i supereroi della casa produttrice sono proprio riuniti in quella che sembra quasi la pianificazione di una gita parrocchiale per tornare tutti insieme indietro nel tempo.

Forse per espressione di modestia, o magari addirittura di arroganza, nel film si celebra una sorta di omaggio sinottico alle precedenti coniugazioni – tutte irte di paradossi – del

[1] Sembra che nella prima stesura della sceneggiatura del film di Zemeckis la "macchina" non fosse una DeLorean, e neppure un'automobile, ma un frigorifero. Frigorifero al quale non si sarebbe richiesto di raggiungere le 88 miglia all'ora, ma che per funzionare avrebbe avuto bisogno dell'intera energia di un test atomico, che negli Anni '50 (uno dei "tempi" in cui si sviluppa il film), erano relativamente frequenti. Il regista optò poi per l'automobile per il timore che i ragazzini spettatori si potessero poi chiudere in frigorifero per imitazione, con conseguenze tutt'altro che divertenti. Curiosamente, frigoriferi e test nucleari sono poi tornati insieme sugli schermi di Hollywood per colpa (e in questo caso il termine è abbastanza meritato) di "*Indiana Jones e il regno del teschio di cristallo*".

viaggio nel tempo: ed è indubbiamente significativo che sia il professor Bruce Banner, o se si preferisce il professor Hulk, il personaggio a cui si assegna il compito di spiegare come funziona la base teorica del cronoviaggio: "*Pensateci: se si viaggia nel passato, quel passato diventa il proprio futuro, e quello che era il presente diventa passato, che ovviamente non può essere cambiato dal nuovo futuro*". Una spiegazione perfetta, volendo, del motivo per cui i viaggi nel tempo potrebbero funzionare al più come operazione turistica, senza neppure riuscire a rispondere a quelle domande così angosciose che i frequentatori di rimpianti e rimorsi ogni tanto si pongono, come "*che cosa sarebbe successo se non avessi preso quella decisione*?". Certo, è una risposta elementare e virtualmente tautologica, che presume che la linea del tempo resti comunque unica (cosa accuratamente rifiutata da buona parte degli autori) ma è notevole che sia Banner/Hulk a pronunciarla: e l'omone verde è la contemporanea personificazione congiunta del bene e del male, come Dr.Jekyll/Mr.Hyde, lo è stato nel secolo precedente: ad un tempo il bruto e lo scienziato, il timido e l'iracondo, il protettore dei deboli e il gretto spaccatutto: è davvero l'unico "eroe per caso" adatto a pronunciare una spiegazione del genere.

La "versione di Hulk" potrebbe essere una buona ragione per cui la macchina del tempo non esiste ancora: forse gli stessi candidati inventori perdono interesse, quando si rendono conto di non poter cambiare il loro passato ma solo il loro futuro e per effettuare un'operazione del genere non esiste altro mezzo che agire sul proprio presente: esattamente quel che succede già nella vita di tutti i giorni, senza bisogno di nessuna macchina. Così, penseranno gli emuli di Emmett "Doc" Brown, tanto vale dedicarsi alla costruzione di un veicolo in grado di raggiungere (e magari superare) la velocità della luce, o magari ad un bel sistema di teletrasporto, così da poter tornare a guardare senza più morire d'invidia il capitano Kirk mentre ordina "*Ci porti su, signor Scott*", e che risolverebbe quegli storici problemi logistici che Internet, a ben vedere, non ha fatto che accentuare.

2 *La prima macchina del tempo, 1895.*

Tra una questione destinata ad restare irrisolta e un'altra, forse possiamo ipotizzare quanto meno una risposta ad una delle domande minori che ci siamo posti finora. Nell'immaginario collettivo i saltelli nel passato e nel futuro non hanno ancora esaurito il loro interesse, ed è un interesse che probabilmente non scemerà mai, almeno dal punto di vista narrativo, con buona pace dei paradossi implicati (anzi, forse proprio a causa loro), e non abbiamo l'ambizione di poterne scioglierne neppure uno. Però alla domanda "perché proprio un'automobile?" potremmo provare a rispondere: per tradizione. Il primo autore ad occuparsi dell'argomento sembra essere stato H. G. Wells, già nel 1895, in un libro il cui titolo crea e definisce per sempre il nome (e tutto sommato la forma) stesso dello strumento: "*The Time Machine*", appunto *la macchina del tempo*. Seguendo le descrizioni del libro, le immagini associate alla forma della "macchina" si sono subito stabilizzate, e si vede benissimo che – pur senza ruote – la macchina di Wells somiglia molto alle prime automobili, quelle di fine Ottocento, che dal canto loro somigliavano tantissimo a delle carrozze a cavalli senza cavalli.

Herbert George Wells[2], autore ottocentesco, è considerato insieme a Jules Verne il padre della fantascienza, e non a caso: l'Ottocento è il secolo dell'affermazione della tecnologia, ricco di scoperte scientifiche, e i due, alla fin fine, non fanno altro che proporre miglioramenti ed estensioni di quello che vedevano prendere vita ogni giorno intorno a

[2] Bromley, 21 settembre 1866 – Londra, 13 agosto 1946. Per le foto e tante delle informazioni qui di seguito riportate ringraziamo sempre e con affetto Wikipedia. E no, questo è il numero di ottobre, per cui non è il suo compleanno. Ma se pensate che questo signore è un bel modello di come ci piacerebbe essere, siete sulla buona strada per l'esame di telepatia.

loro. Avevano dalla loro la fortuna di essere i primi a trasportare nella letteratura la fantasia scientifica, un'immaginazione fecondissima e la capacità narrativa per poter trasformare quell'immaginazione in storie. E il risultato è bene evidente ancora oggi, a ben più di un secolo di distanza: basti pensare a quante "continuazioni" e nuove coniugazioni sono state create sulla base delle loro idee primigenie.

E si fossero limitati ai romanzi avveniristici… H.G. Wells, quantomeno, scrisse innumerevoli trattati di studio e critica della società contemporanea, e naturalmente trattati scientifici di biologia e della giovane Teoria dell'Evoluzione. Diciamo "naturalmente" perché, prima ancora di essere un autore tra i più celebrati del suo tempo, H.G. era un uomo di scienza: aveva studiato nella Normal[3] School of Science che divenne poi il Royal College of Science, dove studiò biologia sotto la guida di Thomas Henry Huxley, meglio noto come "il mastino di Darwin[4]".

3 *H. G. Wells.*

Wells fu studente ed insegnante, e spesso allo stesso tempo e nella stessa scuola, e anche solo un'occhiata alla sua vita in Wikipedia dà un'idea di quanti mestieri diversi abbia intrapreso, un po' per puro interesse e un po' per sbarcare il lunario. Molti temi dei suoi romanzi e saggi prendono spunto proprio da queste esperienze, ma almeno altrettanti prendono forma solo dalla sua fantasia visionaria. A lui sono attribuite infatti parecchie previsioni: mezzi di trasporto allora davvero fantascientifici, come gli aeroplani e diverse macchine per viaggi spaziali, ma non solo; secondo alcuni, avrebbe preconizzato anche la bomba atomica e il web.

Sembra un tipo interessante, vero? Beh, se vi venisse voglia di costruire questa benedetta macchina del tempo giusto per andare a conoscerlo, non dubitiamo che apprezzerebbe la visita e vi inviterebbe subito a cena. Vi consigliamo comunque di prepararvi a una conversazione eclettica e ad ampio raggio: politica, etica, filosofia sarebbero argomenti altrettanto necessari e inevitabili quanto la scienza e la letteratura. A Wells i confini di qualsiasi tipo davano fastidio, e non per nulla era molto attivo (e ai suoi tempi era un atteggiamento rivoluzionario) per promuovere il pacifismo, un mondo senza nazioni, e la causa femminile per la parità di genere, che muoveva allora appena i primi passi.

Anzi, forse per quest'ultima si diede fin troppo da fare: dette scandalo con un primo matrimonio con una cugina, poi intrecciò altre relazioni, più o meno durature, con molte protagoniste dell'impegno politico o della creatività artistica, e naturalmente collaborò con loro anche per mettere al mondo un discreto numero di figli[5]. Un uomo insomma molto prolifico sotto diversi aspetti, moderno ancora oggi, se più di un centinaio di anni dopo la sua prima edizione i personaggi da lui creati (non solo il viaggiatore nel tempo, ma anche l'uomo invisibile, o i temi della guerra dei mondi) ritornano periodicamente in voga alla radio, in televisione, e sul grande schermo.

Ma l'ultimo capitolo su Wells in ogni biografia è inevitabilmente centrato sulle sue donne, perché non si innamorava mai di donne che non fossero protagoniste dei loro tempi. A parte la cugina, Mary, che fu il suo primo amore e la sua prima moglie, la catena di amanti è fitta di personalità del mondo accademico e politico del tempo, attiviste e scrittrici. Durante una sua visita in Russia entrò in contatto con la segretaria di Gor'kij, che divenne in seguito diplomatica e che rientrò come amante nella vita di Wells negli

[3] Ci deve essere una sorta di crudele complotto tra i fondatori dei migliori istituti scientifici volto a far sentire inadeguate la maggior parte delle persone: altrimenti, perché chiamare cotanti istituti, a cui accedono solo geniacci, con il modesto termine di "Scuola Normale"?

[4] Di Darwin e di tutta una serie di suoi discendenti parliamo in "*Tre matematici alla corte del re*", RM138, Luglio 2010.

[5] "Naturalmente" perché sono cose che capitano, quando si hanno delle relazioni amorose, ma è certo quanto meno insolito, per quel periodo storico, che la cosa fosse di dominio pubblico.

Anni Trenta. Ma è l'impegno politico – che del resto guida e marca a fuoco tutta la sua vita – a procurargli le passioni anche sentimentali. È per i suoi ideali politici che aderisce alla *Fabian Society*, che si propone (esiste ancora adesso in Inghilterra, anche se ridimensionata) di introdurre una forma di socialismo gradualmente, senza passare attraverso rivoluzioni. Vi appartenevano personaggi di tutto rispetto: tra i più eminenti membri, oltre a Wells, vi sono scrittori come George Bernard Shaw, Annie Besant, Leonard Woolf e la di lui più famosa moglie Virginia Woolf; l'anarchica Charlotte Wilson, la femminista Emmeline Pankhurst, il sessuologo Havelock Ellis, il militante Edward Carpenter, il fisico Oliver Joseph Lodge, il politico Ramsay MacDonald, per non parlare di Bertrand Russell e John Maynard Keynes. Con tutta evidenza, un vero ricettacolo di menti brillanti.

4 *Generazioni di grandi donne: Maud Pember Reeves, Amber Pember Reeves (Dusa) con Anna-Jane in braccio e la bisnonna signora Robinson.*

Tra tante persone a dar lustro alla società, si incontrava anche il nome di una donna del tutto notevole: Maud Pember Reeves. Era un'attivista, una suffragetta che aveva lottato per il diritto di voto per le donne, fino ad ottenerlo, per la prima volta al mondo, in Nuova Zelanda[6], nel 1893. Tra una battaglia civile e l'altra, la stesura di testi sociologia ancora studiati nelle università, Maud era riuscita anche a fondare la sezione femminile della Fabian Society.

Sua figlia Amber fu una delle amanti di H. G. Wells e – manco a dirlo – anche protagonista di alcuni romanzi del prolifico autore. Ma fu molto di più: vivace autrice di testi filosofici e di novelle, insegnante, attivista. Una volta superato lo scandalo di essere madre malgrado il padre fosse sposatissimo e con altri figli (in quel periodo con Amy Catherine Robbins nota come Jane, con cui rimase sposato finché lei visse, benché assai infedele: ad Amber seguirono altre amanti, durante il medesimo, primo matrimonio[7]), Amber trovò marito, ebbe altri figli, e continuò la sua carriera di scrittrice, madre, nonna. In tempi in cui le donne non venivano neppure prese in considerazione nelle domande per lavori a tempo pieno se avevano o volevano avere una famiglia, continuò a la sua battaglia per fare tutto quello che aveva già fatto e anche di più, ispirando le nuove generazioni di fanciulle.

H.G. Wells la chiamava Dusa, apparentemente a causa dei lunghi capelli neri, o forse solo perché a lei stessa piaceva essere chiamata così: e si suppone che il nomignolo fosse un chiaro riferimento alla figura mitologica della Medusa. In ogni caso, quando frequentava Wells era una sua studentessa, e davvero giovane: ed è indiscutibile che, guardando la foto di lei giovanissima con in braccio la piccolissima Anna-Jane, non sembra poi tanto strano accostare i suoi capelli corvini e lo sguardo ammaliante all'immagine dell'ipnotica Medusa.

"Dusa" è davvero un bel soprannome: forte come la Medusa, ma addolcito dall'abbreviazione, dal richiamo alla Musa, immagine ispiratrice e femminile per eccellenza, e sospettiamo che la prole di Amber lo abbia un po' invidiato alla sua celebre mamma. Quel che è certo è che il nome "Dusa" è rimasto inutilizzato per una sola generazione, perché Amber lo regala ad una delle sue nipoti.

[6] Nata australiana, vissuta per buona parte della sua vita a Londra, vittoriosa a Wellington: erano i tempi in cui l'impero inglese copriva davvero mezzo mondo, e tre quarti dei mari.

[7] La successiva fu Rebecca West: femminista, scrittrice, giornalista, famosa in tutto il mondo anche per i suoi saggi di politica e romanzi di viaggio. Con Wells ebbe un figlio che scrisse, tra le altre cose, la biografia del padre.

5 *Dusa Waddington primi anni '60.*

A promuovere il bisillabo "Dusa" da soprannome a vero e proprio nome di battesimo è Dusa McDuff[8], nata Dusa Waddington il 18 Ottobre 1945. Fin da piccola decise che voleva essere una matematica, ed ebbe vita facile in una famiglia di accademici. Alla lista di grandi signore di cui abbiamo già parlato, la mamma Margaret si aggiunge come architetto di successo, ma un nonno matematico ed un padre rinomato biologo sono personaggi non di poco peso, e in famiglia erano gli uomini – non le donne – ad essere più importanti. Malgrado l'indipendenza della nonna Amber, e la vita piena e libera che ebbe con il marito, il grande Wells fu sempre presenza forte e importante, ricordato da lei con affetto come l'uomo più brillante che avesse mai conosciuto.

Dusa stessa cercherà un uomo in grado di ispirarla. Il marito che conoscerà come studente è un poeta, non capisce niente di matematica, ma in qualche modo la aiuterà proprio nella carriera matematica: nel seguirlo in Russia dove lui aveva un convegno sul simbolismo russo, Dusa incontrerà Gel'fand[9]. Il grande matematico (che inizialmente era più interessato al convegno del marito che alla giovane studentessa) scoprì presto di che pasta era fatta Dusa e la spinse a proseguire gli studi e la ricerca in topologia, che fu poi la branca che le portò fama e numerosi premi. Durante un discorso di ringraziamento per uno di questi premi, Dusa racconta che spesso i colleghi (uomini) le chiedono – quasi increduli – se sia mai stata discriminata per il fatto di essere donna, aspettandosi evidentemente una risposta negativa, essendo discendente di una famiglia così piena di donne in grado di rivendicare e lottare per la loro parità e indipendenza.

Eppure discriminazione c'è stata, c'è ancora, ed è facilissimo notarla, come racconta lei stessa: tra il 1947, anno dell'elezione di Dame Mary Carthwright alla Royal Society of London e il 1994, anno in cui lo stesso onore fu concesso proprio a Dusa Waddington McDuff trovano spazio 50 anni senza che compaia alcun nome di donna. La matematica è una scienza "dura", e forse le scienze dure sono ancora considerate poco femminili, chissà. Ma anche oggi, quando tutte le leggi promuovono l'eguaglianza, la discriminazione resiste pervicace, nascosta, implicita, causata da stereotipi così radicati da sembrare quasi una malattia. Al punto che la maggior parte delle grandi donne in posizione di potere ammettono di essere affette dalla "sindrome dell'impostore", quella sorta di malessere che in qualche modo non le lascia credere che il loro successo se lo siano meritato, e che prima o poi arrivi qualcuno a smascherarle.

Se siamo qui a raccontare la storia di Dusa, evidentemente, è perché è una matematica, ma molti dei motivi per cui lo facciamo hanno poco a che vedere con la matematica. Ma forse questo è sempre vero: per anni abbiamo cercato di spiegare quanto poco valore abbiano, per noi, i pregiudizi che ancora godono di ottima salute su molte questioni e argomenti. Wells ebbe molti figli da diverse relazioni, generò per loro e attraverso di loro molto scandalo, al punto che molti di loro ebbero difficoltà all'inizio della loro carriera. Eppure tutti diventarono scrittori, artisti, inventori, matematici. Il mondo senza di queste persone, nate da relazioni extraconiugali, sarebbe senz'altro un posto peggiore, e non abbiamo bisogno della macchina del tempo per provare la nostra teoria.

La nostra Dusa continua a parlare della propria vita e di tutte le grandi donne in essa per ricordare che non è affatto la stessa cosa voler essere una persona completa mantenere la

[8] Molte delle informazioni e le foto sono prese senza chiedere il permesso da un suo articolo che abbiamo trovato in rete: https://www.ams.org/journals/notices/201708/rnoti-p892.pdf.

[9] Israel Moiseevich Gel'fand, 2 settembre 1913 – 5 ottobre 2009, uno dei maggiori matematici russi.

propria identità di donna o di uomo; non è la stessa cosa, perché per la donna questo duplice, naturale obiettivo è assai più difficile da raggiungere. La prima Dusa decise di continuare a lavorare a tempo pieno, insegnare, scrivere e di avere una famiglia, e la sua facoltà di scegliersela. Sua madre decise di combattere per i diritti di tutte le donne di avere il voto, di poter lavorare, di poter essere donne, mamme, mogli, ma prima di tutto persone. Ignorare un problema non aiuta a risolverlo e così, come Dusa, noi continuiamo a dirlo. E se avessimo veramente la macchina del tempo la useremmo per tornare indietro e conoscere queste incredibili persone e dir loro di non mollare, perché anche grazie a loro un giorno il mondo sarà veramente migliore.

2. Problemi

2.1 Torna la capretta (con delle amiche)!

Il problema (almeno dal nostro punto di vista) è doppio, nel senso che c'è il problema vero e proprio (e ve lo presentiamo dopo), ma al suo interno c'è un problema per noi: per una serie di motivi che forse un giorno vi spiegheremo, vorremmo riuscire a spiegarci senza disegni.

Siete i felici possessori di un appezzamento di terreno di forma triangolare (scaleno); questo terreno è diviso in quattro parti da due muretti che partono dagli angoli alla base e proseguono sino a incontrare il lato opposto all'angolo di partenza (in un qualche punto).

Evidentemente, i due muretti si incrociano in un punto (nel quale potremmo mettere la stalla, considerata puntiforme) e dividono il triangolo in quattro parti che, con la creatività che ci contraddistingue, chiameremo *Nord* (quella in alto), *Est* (quella alla destra guardando il disegno), *Sud* (quella in basso) e *Ovest* (quella alla sinistra di chi guarda).

Ora, data la vostra lunga esperienza bucolica (e qualche esperimento con delle pazienti caprette) voi sapete che il prato *Ovest* nutre 5 caprette, il prato *Sud* è in grado di nutrirne 10 e il prato *Est* riesce a satollarne 8. Il prato *Nord*, infine, riesce a nutrire tutte le caprette restanti.

La domanda è: quante caprette avete, in tutto? Oh, *ça va sans dire* (e quindi ve lo diciamo) che tutte le caprette sono dotate dello stesso stomaco e dello stesso robusto appetito, quindi mangiano tutte la stessa quantità di erba.

2.2 Abboffata di (metà) caramelle

Dopo aver nutrito le caprette, ci pare giusto che voi e il vostro fido mandriano vi sfidiate ad uno di quei giochi da *macho* diffusi nel Selvaggio West: avete a disposizione un sacchetto contenente N caramelle e, a turno, potete prenderne (prima andate a lavarvi, che puzzate come delle capre. Senza offesa per le capre) quante volete, da una a metà delle caramelle presenti nel cassetto: non potete *superare la metà*, quindi indovinate cosa succede se il numero delle caramelle è dispari.

Perde chi non riesce a fare una mossa legale (indipendentemente da quante caramelle si ritrova).

"...E se ne resta una sola, e tocca a me?" Avete perso: dovreste superare la metà, e la cosa è proibita.

Adesso, avete ottenuto l'indubbio privilegio di giocare per primo, e il vostro avversario sta cercando di decidere *quante* caramelle mettere nel sacchetto: per quali valori di N avete una strategia di vittoria? E per quali li ha il vostro avversario?

3. Bungee Jumpers

Se $\pi(n)$ è il numero di numeri primi minori o uguali a n, dimostrate che (Erdős):

1. $\pi(n)\geq\frac{\log n}{\log 4}$
2. Se $a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq n$ è una sequenza di numeri naturali tale che nessuno degli a_i divide il prodotto dei termini restanti, dimostrate che $k \leq \pi(n)$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Ottobre!

Ancora?

4.1 [248]

4.1.1 ... in che anno siamo?

Il Capo non ha ancora finito i problemi dell'anno, e siamo quasi alla fine!

> *Il giardino è un n-agono convesso, da tenere ad erba, con qualche diagonale tracciata con dei fiori monocromatici: non solo, ma quando si traccia una nuova diagonale si chiede che incroci al più una delle diagonali già presenti, e nel punto di incrocio mettere un singolo fiore dal colore contrastante. Qual è il numero massimo di diagonali soggiacenti alla condizione data che si possono tracciare per n=2011 e n=2019?*

A stretto giro di posta della distribuzione di RM248 ci scrive ***Valter***:

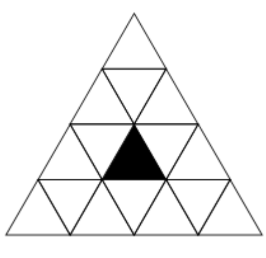
> Farei così per disegnare/calcolare quanto i Nostri dovranno al massimo lavorare:
>
> - triangolo = nessuna diagonale: ho terminato
> - inizio considerando quattro vertici consecutivi
> - disegno le due diagonali fra il primo/terzo e secondo/quarto vertice
> - se restano ancora vertici da considerare disegno la diagonale fra il primo e il quarto
> - se è rimasto un solo vertice, ho terminato
> - mi rimane un poligono con un lato in meno del precedente
> - non ho più i due lati fra il primo e quarto vertice precedente
> - ho però in più il lato ottenuto con la diagonale fra il primo e quarto vertice
> - considero il primo e quarto vertice precedenti e due consecutivi a quest'ultimo
> - itero con tale poligono e, nell'ordine: primo, quarto precedente e sui due successivi.
>
> C'è da dimostrare che con questa procedura si ottiene il numero massimo di diagonali. Penso si possa fare per induzione. Chiaramente con quattro oppure cinque lati la procedura funziona. Assumo che con N+1 lati si possa fare meglio mentre sino a N lati no.
>
> Si nota che in qualsiasi configurazione di diagonali almeno da un vertice ne esce una sola. Se così non fosse ci sarebbe almeno una diagonale che ne incrocia sicuramente più di una. Elimino tale diagonale il corrispondente vertice. Ottengo un poligono con N lati e una sola diagonale in meno.
>
> Con la procedura le diagonali aumentano di uno/due al crescere dei lati (pari/dispari). Ciò contraddice l'ipotesi induttiva per cui con N lati non si possa fare di tale procedura.

No, non abbiamo nient'altro, non c'è stato abbastanza tempo. Passiamo direttamente al secondo problema.

4.1.2 Chi vince?

Giochiamo in due e il Capo guarda:

> *Doc e Alice partono da un foglio di carta triangolare disegnato come indicato in figura. Il primo giocatore taglia lungo una linea con un taglio completo (devono venir fuori due pezzi), e consegna il pezzo contenente il triangolo nero al secondo giocatore, che taglia lungo una linea con un taglio completo e consegna il pezzo contenente il triangolo nero... Vince il giocatore che riceve il solo triangolo nero, ed è impossibilitato ad effettuare tagli. Esiste una strategia vincente per il primo giocatore?*



6 *Tagliare, tagliare!*

Valter, con la stessa velocità del primo problema, ha anche risolto il secondo:

Si vince lasciando all'avversario una delle 3 "strisce" di cinque triangoli con il nero centrale. Il giocatore che si ritrova in tale situazione perde sia nella versione "diretta" sia misère. La strategia del primo per portare il secondo in tale stato è la stessa per entrambe le versioni:

- il primo inizia tagliando un triangolo d'angolo
- il secondo per non ritrovarsi poi nella configurazione perdente taglia anche lui uno d'angolo
- il primo taglia il terzo d'angolo rimasto
- il secondo ora non può che tagliare su una linea di due o tre triangoli
- il primo a questo punto riesce a portare l'avversario nella configurazione perdente.

Velocissimo, vero? La versione di Lorenzo è arrivata non troppo più tardi:

In entrambe le sue versioni (*diretta* e *misère*), si tratta di un gioco a due competitori, combinatorio imparziale, per cui o ha una strategia vincente chi inizia o ha una strategia vincente chi risponde.

L'analisi completa del gioco porta alle seguenti conclusioni.

Sia nella versione *diretta* (chi riceve il solo triangolo nero *perde*) sia nella versione *misère* (chi riceve il solo triangolo nero *vince*), *ha la strategia vincente il giocatore che taglia per primo* (A), che deve necessariamente tagliare via uno solo dei tre triangoli posti ai vertici, ad esempio:

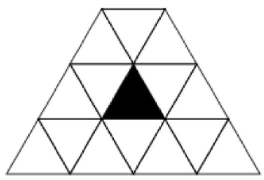


Fig. 0

Modulo simmetrie, cinque sono le possibili risposte del secondo giocatore (B):

1)

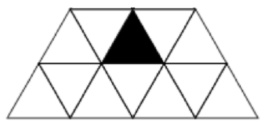
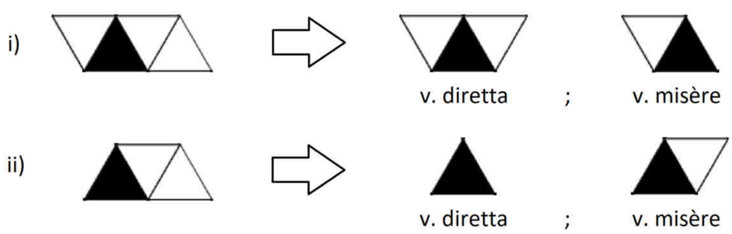


Fig. 1

In entrambe le versioni, il giocatore A deve necessariamente tagliare in orizzontale:

Fig. 1.1

Il giocatore B può rispondere in due modi, e di conseguenza A ha una mossa vincente:



2)

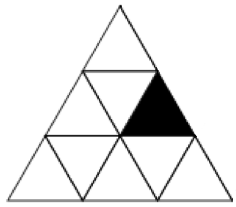


Fig. 2

In entrambe le versioni, il giocatore A deve necessariamente lasciare a B la situazione illustrata in Fig. 1.1 (mediante il taglio di quattro triangoli bianchi).

3)

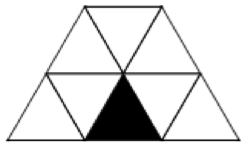


Fig. 3

In entrambe le versioni, naturalmente, se il giocatore A (col taglio orizzontale) lascia a B la situazione illustrata in Fig. 1.1, allora si assicura la vittoria.

Tuttavia, nella sola versione *diretta*, il giocatore A ha anche un'altra mossa valida:

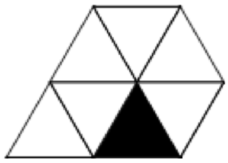


Fig. 3.1

4)

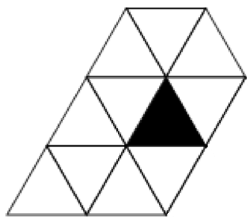


Fig. 4

Anche in questo caso, in entrambe le versioni, se il giocatore A (mediante il taglio di sei triangoli bianchi) lascia a B la situazione illustrata in Fig. 1.1, allora si assicura la vittoria.

Tuttavia, nella sola versione *diretta*, il giocatore A ha anche altre due valide possibilità: lasciare a B la situazione illustrata in Fig. 3.1 (mediante un taglio orizzontale) oppure quella riportata in Fig. 4.1.

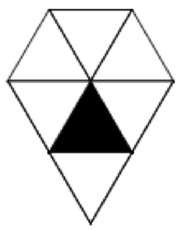


Fig. 4.1

5)

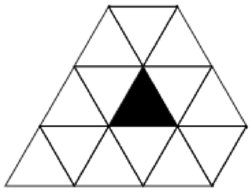


Fig. 5

In entrambe le versioni, il giocatore A deve necessariamente tagliare via l'ultimo triangolo al vertice:

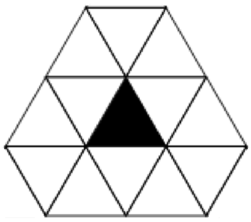


Fig. 5.1

Il giocatore B può rispondere in due modi, giungendo alla situazione di Fig. 3 (dalla quale A vince) oppure alla seguente:

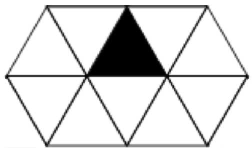


Fig. 5.2

dalla quale A può vincere comunque, lasciando a B la situazione di Fig. 1.1 (mediante il taglio orizzontale).

Tuttavia, nella sola versione *diretta*, se B lascia ad A la situazione di Fig. 5.2, allora A ha anche le altre due possibilità, entrambe valide, che portano alle configurazioni illustrate in Fig. 3.1 e in Fig. 4.1.

Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Vi propongo un gioco: lanciamo una moneta (onesta) più volte: se compare per prima la sequenza Croce-Croce-Testa vincete 16 euro, se compare prima la sequenza Testa-Croce-Croce perdete 8 euro. Accettate?

6. Pagina 46

6.1

Sia m un numero naturale: sia inoltre k^2 sia il più grande quadrato che divide n, con $n=k^2v$. In questo caso, v è la parte libera da quadrati di n, ossia la scomposizione in termini primi di v non ha elementi di grado superiore al primo.

Sia ora specificato un numero naturale n, e si considerino tutti i numeri naturali $m\leq n$. Esprimiamo i numeri $m = 1, 2, \dots, n$ come $m = k^2v$, in modo tale che v non abbia fattori ripetuti: essendo, sotto queste condizioni, $k^2 \leq k \leq n$, si ha che k deve essere uno dei numeri 1, 2, …, $[\sqrt{n}]$, dove il termine tra parentesi quadre rappresenta l'intero non maggiore della radice quadrata di n.

Inoltre, essendo $g \leq m \leq n$, tutti i divisori primi di v devono appartenere all'insieme dei primi minori o uguali a n, ossia p_1, p_2, …, $p_{\pi(n)}$. Se il prodotto dei primi va ottenuto da questo insieme, v deve essere uno dei numeri:

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_{\pi(n)}^{a_{\pi(n)}}$$

dove, essendo v libero da quadrati, ogni esponente a_i vale 0 o 1. Dato questo, si ha che ci sono $2^{\pi(n)}$ diversi numeri in questa forma.

Riassumendo, per ogni $m = k^2 v \leq n$, dove v è libero da quadrati, k deve appartenere all'insieme di $[\sqrt{n}]$ numeri $X = \{1, 2, \dots, [\sqrt{n}]\}$, mentre v deve appartenere all'insieme di $2^{\pi(n)}$ numeri

$$Y = \{p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_{\pi(n)}^{a_{\pi(n)}}, \qquad a_i \in \{0, 1\}\}$$

Ognuno dei numeri $m = 1, 2, \dots, n$ genera un "k" in X e un "v" in Y, in quanto $m=k^2v$; di converso, per opportune selezioni di k in X e di v in Y, deve essere possibile costruire tutti i numeri 1, 2, …, n nella forma k^2v . Di conseguenza, la procedura del selezionare un k da Y, un v da Y e costruire il numero k^2v, una volta che sia *effettuata per tutti i possibili valori*, deve generare un insieme di numeri che contiene gli n valori 1, 2, …, n. E, in questo modo, generiamo $[\sqrt{n}]\ 2^{\pi(n)}$ numeri, con $[\sqrt{n}]\ 2^{\pi(n)} \geq n$.

Ma, per definizione, $\sqrt{n} \geq [\sqrt{n}]$, e quindi:

$$\sqrt{n} \cdot 2^{\pi(n)} \geqslant n$$
$$2^{\pi(n)} \geqslant \sqrt{n}$$
$$\pi(n) \cdot \log 2 \geqslant \tfrac{1}{2} \cdot \log n$$
$$\pi(n) \geqslant \frac{\log n}{2 \cdot \log 2} = \frac{\log n}{\log 4}$$

che è la nostra tesi.

Si noti comunque che (attraverso metodi meno "dal Libro"), *P. Tchebishev* ha ottenuto la formula ben più robusta:

$$\pi(n) > \frac{n}{12 \cdot \log n}.$$

6.2

Ogni è a_i minore o pari a n, e quindi ammette una decomposizione

$$a_i = p_1^{q_1} p_2^{q_2} \dots p_{\pi(n)}^{q_{\pi(n)}}$$

Se a_i non divide il prodotto degli altri termini, deve contenere un qualche primo $p_i \in \{p_1, p_2, \dots, p_{\pi(n)}\}$ ad un grado maggiore della somma dei gradi dei p_i in tutti gli altri a.

Ogni a_i ha un p_i di questo tipo, e non esistono due a aventi lo stesso p_i. Non essendo possibile avere più a dei primi contenuti in $\{p_1, p_2, \dots, \pi(n)\}$, deve essere $k \leq \pi(n)$.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Pizza Americana Multidimensionale

Pizza: sì, parliamo di pizza.

Multidimensionale: ...non vorrete mica fermarvi alla banale bidimensionalità?

Avendo ora tutto più chiaro, possiamo finalmente passare al termine medio: allo scrivente risulta incomprensibile il motivo per cui n americani (per qualsiasi n maggiore di uno) debbano comunque dividere ogni pizza in n fette, anche nel caso in cui siano disponibili n pizze uguali tra loro.

"...e non potevi trasformarle in torte?" No. Sono le undici di mattina, e francamente una torta mi rovinerebbe l'appetito. Molto meglio una fetta di pizza. Quindi, partiamo dalla pizza.

Procuratevi, tanto per cominciare, un congruo numero di pizze; dato che il budget è quello che è, se promettete di non mangiarli vanno benissimo anche dei cerchi di carta.

Con un taglio, ottenete due fette di pizza[10,11].

Con due tagli, ottenete quattro fette di pizza.

Con tre tagli... Se avete letto con attenzione la prima nota due righe più sopra, *evitate il punto di intersezione dei primi due tagli* e ottenete *sette* pezzi di pizza.

A questo punto, avete capito il trucco: mai passare per un punto di intersezione di due tagli, e riuscite facilmente ad ottenere *undici* pezzi con quattro tagli, *sedici* pezzi con cinque tagli e la bellezza di *ventidue* pezzi con sei tagli.

Dopo, comincia a diventare complicato, quindi meglio provare con un metodo più scientifico. Che, tra l'altro, i lettori più anziani (nel senso di "lettori da più numeri" di voi) *sicuramente* ricorderanno[12]. Scriviamo nella *zeresima* (visto che serve solo come riferimento) colonna il numero di tagli, nella prima il numero di fette ottenute e nella seconda la differenza tra un numero di fette e il successivo: nelle colonne successive, inseriamo la differenza tra due numeri della colonna precedente.

Se non abbiamo sbagliato i conti, otteniamo un oggetto del tipo di quello qui a fianco.

0	1			
		1		
1	2		1	
		2		0
2	4		1	
		3		0
3	7		1	
		4		0
4	11		1	
		5		0
5	16		1	
		6		
6	22			

1 *Il trucco di Isaac.*

In pratica, abbiamo scritto il numero delle fette (nella "prima" colonna, se abbiamo anche la "zeresima"), poi abbiamo calcolato la differenza tra due tagli successivi (seconda colonna), poi la differenza tra le differenze e poi la differenza di terzo grado, che vale zero per ogni passaggio.

Se siete andati a ripassarvi il metodo delle differenze di Newton, a questo punto non dovreste avere problemi a fare i conti, ma affrontiamo la cosa in un modo leggermente differente. Se T è il numero di tagli, vediamo che le fette aumentano più velocemente di T, ma *più lentamente* di T^2. Il che, ci fa pensare che il tutto sia una funzione al più di T^2.

Partiamo allora dall'idea che il numero massimo di fette F ottenibili con T tagli sia della forma:

$$F = a_1T^2 + a_2T + a_3$$

[10] Notate che nella frase non compare la parola *uguali*, che ignoreremo per tutto il resto del tempo. Qui, siamo parlando di persone cui non importa di ricevere una razione uguale a quella degli altri partecipanti alla mangiata.

[11] Nota per i pignoli: con *zero* tagli, ottenete *una* fetta di pizza.

[12] *Il triangolo di interpolazione*, Paraphernalia Mathematica di RM025, febbraio 2001.

Scegliamo i valori più "facili" di T, ossia $T = 0, 1, 2$ e inseriamoli con i corrispondenti valori di F (che sono 1, 2, 4) nell'espressione qui sopra; il sistema di tre equazioni in tre incognite ci permette di calcolare i valori dei coefficienti, ottenendo l'espressione generale:

$$F_2 = \tfrac{1}{2}\,(T^2 + T + 2)$$

Ossia, con 10 tagli ottenete 56 fette, e con 100 tagli 5051. Se non siete convinti, auguri durante la verifica a mano. Notate che abbiamo aggiunto a F un pedice "2" per indicare che stiamo lavorando in due dimensioni.

Jakob Steiner (al quale, probabilmente, non piaceva la pizza) ha generalizzato il problema chiedendosi *qual è il massimo numero di parti nelle quali il piano può essere diviso da linee rette?* La risposta è evidentemente la stessa di prima[13] ma, per andare avanti, Steiner preferisce metterla nella forma perfettamente equivalente:

$$F_2 = 1 + T + \tfrac{1}{2}T(T-1)$$

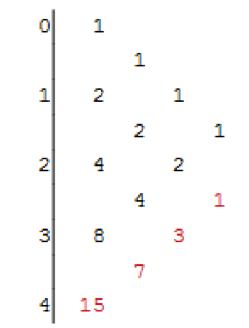
A margine, notiamo che di solito si ha un'espressione *ricorsiva* delle formule e si cerca l'espressione *generale*: qui abbiamo trovato subito l'espressione generale ma, se preferite avere quella ricorsiva, si verifica facilmente che vale (attenzione che il pedice di F cambia significato):

$$F_{T+1} = F_T + T + 1,\ \text{con } n=2$$

Bene, adesso che siamo fiduciosi del metodo, torniamo un po' più indietro per prendere la rincorsa. Il bello è che (senza saperlo) il primo caso lo aveva già risolto Euclide.

Se la nostra pizza si riduce ad un singolo punto, forti del primo postulato nella sua formulazione originale[14], possiamo dire che per qualunque numero di tagli ci resterà sempre il nostro punto; quindi (tornando alla nostra notazione con la dimensione a pedice, abbiamo $F_0=1$.

Se ora consideriamo una pizza monodimensionale (...un grissino?), vediamo facilmente che per zero tagli abbiamo un grissino, per un taglio due "fette di grissino", per due tagli tre e avanti di questo passo: quindi, possiamo dire che $F_1 = 1+T$.



2 *Un mucchio di "spazio".*

Satolli di pizza, si tratta ora di tagliare l'anguria, ossia di passare alle tre dimensioni.

Il caso T=0 ci fornisce la solita fetta formata dall'intera anguria, mentre per il caso T=1 abbiamo F=2. Per T=2, F=4, e per T=3 F=8 (qui, bisogna ricordarsi gli assi cartesiani tridimensionali che dividono lo spazio in otto settori); se riuscite a visualizzare T=4, sappiate che sarete eternamente inseguiti da tutta la nostra invidia. Fortunatamente, esistono un paio di modi per cavarsela.

Il ***primo modo*** prevede di costruire una tabella simile a quella costruita per il caso bidimensionale, effettuando i calcoli sui valori ottenuti; trovate la tabella qui di fianco, e i numeri rossi sono stati calcolati ipotizzando che, se in una dimensione sono costanti le *differenze prime* e in due dimensioni le *differenze seconde*, in tre dimensioni a diventare costanti siano le *differenze terze*: ipotizzando quindi il valore *1* (in rosso) nell'ultima colonna, siamo riusciti a calcolare tutta la serie dei numeri rossi.

Il ***secondo modo*** ci permette di ottenere facilmente la formula (non ricorsiva): ipotizzando che la formula sia nella forma (si noti che compare il terzo grado nel secondo membro dell'equazione):

$$F_3 = a_1T^3 + a_2T^2 + a_3T + a_4$$

Utilizzando i quattro valori ottenuti nella tabella (sì, dobbiamo utilizzare anche "quello rosso": ci servono *quattro* valori, visto che la nostra equazione ha quattro coefficienti) si arriva alla formula:

[13] Evitate la battuta "Io voglio una fetta con il bordo". Grazie.

[14] "Il punto è ciò che non ha parti".

$$F_3 = 1/6\ (T^3 + 5T + 6)$$

o, se preferite la formulazione di Steiner,

$$F_3 = 1 + T + ½T(T-1) + 1/6\ T(T-1)(T-2)$$

Se proprio volete la relazione ricorsiva (confessiamo un certo disamore per queste forme),

$$F_{T+1} = F_T + 1 + T + ½T(T-1) \text{ con } n=3.$$

Torniamo un attimo alla formulazione di Steiner vista qui sopra; confrontatela con la formula equivalente nelle due dimensioni. Ve le mettiamo una vicino all'altra e allineate; non notate nulla di interessante?

$F_2 = 1 + T + ½T(T-1)$

$F_3 = 1 + T + ½T(T-1) + 1/6\ T(T-1)(T-2)$

Già: nella dimensione n, i primi n termini sono uguali a quelli che compaiono nella dimensione $n-1$.

Il che ci spinge a tagliare altri oggetti nelle dimensioni superiori; impostando la formula (non "alla Steiner") per n=4, il nostro sistema di equazioni si risolve (attraverso, ad esempio, il metodo dei determinanti) e ci porta alle due forme:

$$F_4 = 1/24\ (T^4 - 2T^3 + 11T^2 + 14T + 24)$$

$$F_4 = 1 + T + ½T(T-1) + 1/6\ T(T-1)(T-2) + 1/24\ T(T-1)(T-2)(T-3)$$

...e adesso, dovreste cominciare a sospettare qualcosa sulla formulazione di Steiner; se rifate i calcoli (sono sostanzialmente identici, solo più noiosi) per n=5, ottenete che il termine di quinto grado ha coefficiente pari a 1/120 , e 1, 2, 6, 24, 120,... non è altro che la ***sequenza dei fattoriali***. Allora, con poca fatica (e imponendo $T \geq n$) potete scrivere la formula risolutiva generale:

$$F_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{T}{j}$$

OK, chi taglia la pizza?

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms