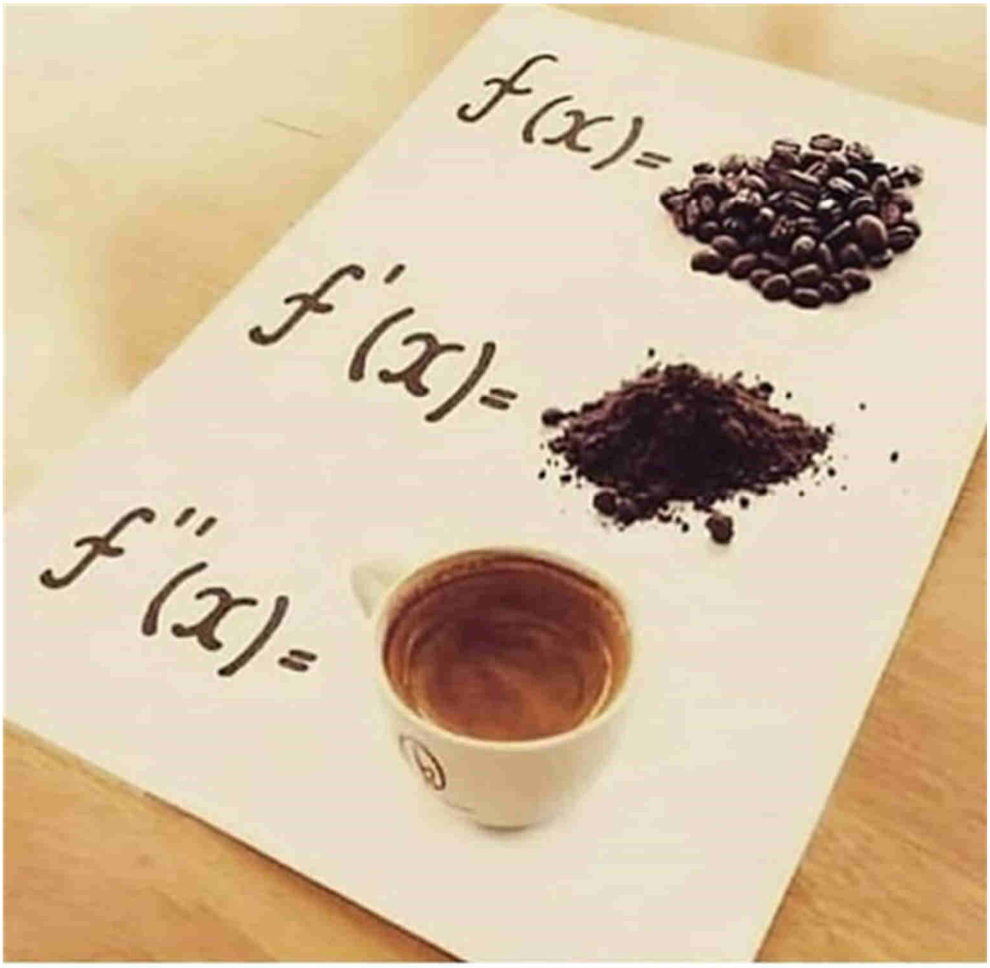
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 242 – Marzo 2019 – Anno Ventunesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com

RM241 ha diffuso 3'304 copie e il 03/03/2019 per Google eravamo in 24'300 pagine.

La frase di ***Paul Erdős*** che più ci piace è senza dubbio la celebre affermazione "*Un matematico è una macchina per trasformare il caffè in teoremi*". Solo di recente abbiamo scoperto che questa nasconde anche un grazioso gioco di parole in tedesco: "*Satz*", tra i teutoni, significa infatti sia "teorema" che "fondo di caffè", cosa che rende il calembour di Erdős assai più pregnante. In rete gira da qualche tempo l'immagine che riportiamo in copertina, e come al solito risalire alla fonte originaria è quasi impossibile: una buona possibilità potrebbe essere il sito http://prezi.com/b9pzmvjv8vzp/derivada-de-la-taza-de-cafe, che quantomeno arricchisce l'immagine con un vero e proprio (e aromatico) problema.

1. Nuovi alfabeti

"No, [il suo pupillo], non essendo nobile, non potrà mai entrare in artiglieria; neanche se fosse un secondo Newton"

*(*Risposta del giudice esaminatore a Legendre, riportata nel necrologio letto da François Arago*)*

Che cosa unisce pittori così diversi come Modigliani e Delacroix? Compositori così distanti come Bellini e Rossini? Che cosa mai può avere in comune Oscar Wilde con Gertrude Stein? O la voce ruvida e tagliente di Jim Morrison con quella lucida e perfetta della Callas? E soprattutto, che cosa unisce questi personaggi (oltre a decine di altri) tutti insieme, non solo presi due a due? Beh, la Grande Unificatrice, è ovvio: in questo caso specifico, il luogo parigino dove regna sovrana e incontrastata, il cimitero di Père Lachaise.

Non sono tanti i cimiteri che possono vantare il titolo di attrazione turistica; perlomeno, non i "cimiteri" nel senso stretto e moderno: se si allarga la definizione fino a comprendere nel concetto anche i grandi monumenti funebri e i cenotafi, l'affermazione diventa subito inesatta, se non del tutto insensata. A Giza, che ormai praticamente è solo una periferia del Cairo, le tre grandi piramidi di Cheope, Chefren e Micerino possono essere in un certo senso considerate un "cimitero"; ma quantomeno non nel senso moderno del termine. Ed è proprio l'aggettivo "moderno" la parola chiave della frase: nonostante nell'antichità non mancassero certo luoghi di sepoltura istituzionali – basti pensare a quante civiltà ci sono note soprattutto per le loro necropoli, o ai grandi sistemi di catacombe che ritroviamo in molte città antiche – il concetto di cimitero così come è inteso al giorno d'oggi è definito solo da un paio di secoli.

Il 12 giugno 1804 è uno dei primissimi giorni dell'Impero Francese. Dopo le giornate della Rivoluzione, del Consolato e del Direttorio, il senato francese ha dichiarato "Imperatore" Napoleone il 18 maggio: non è passato quindi neppure un mese da che la testa del Bonaparte sostiene virtualmente[1] il peso di una corona. Eppure è proprio in questo 12 giugno che viene promulgato il "Decreto Imperiale sulle sepolture", che rivoluziona del tutto il modo e la tradizione del trattamento delle spoglie mortali dei defunti. È evidente che la riforma doveva essere considerata urgente; di sicuro, aveva almeno due motivi diversi che ne giustificavano la messa in atto: uno igienico-sanitario, l'altro politico; anzi, rivoluzionario.

Il motivo igienico-sanitario è evidente: le sepolture, nell'affollata Parigi e nelle altre popolose città dell'Impero, seguivano usi, costumi, tradizioni e regolamenti vari e diversi, con la naturale conclusione che non c'era nessun reale governo della situazione. Le famiglie benestanti solitamente potevano seppellire i morti nelle loro terre, ma la situazione tra i poveri era del tutto fuori controllo: fosse comuni quando andava bene, e non è difficile capire quale fosse la situazione quando bene non andava. Le malattie e l'insorgere di vere e proprie epidemie non erano infrequenti, e infatti il primo e più forte comandamento contenuto nel "*Décret Impérial sur les sépultures*" imponeva che i defunti andassero sepolti al di fuori delle mura cittadine[2]. I risultati del decreto si leggono ancora oggi in quasi tutte le cartine toponomastiche delle città: le aree colorate di verde dei

[1] L'avverbio "virtualmente" sottolinea che Napoleone è già a tutti gli effetti "Imperatore dei francesi", ma non è ancora stato incoronato: la sontuosa cerimonia di incoronazione avviene infatti solo il 2 dicembre (data cara a Napoleone, primo anniversario del trionfo di Austerlitz), quando il corso si mise da solo in testa la corona imperiale e coronò subito dopo anche la moglie Giuseppina.

[2] Tutti gli studenti liceali italiani sono chiamati a studiare, anche se non più a memoria, il carme "Dei Sepolcri" che Ugo Foscolo scrisse nel 1806. Forse non tutti ricorderanno però che l'ispirazione – se non proprio la necessità – per la scrittura di quei quasi trecento endecasillabi fu proprio una sorta di reazione all'editto napoleonico del 1804, che in territorio italiano divenne operativo appunto nel 1806.

cimiteri sono spesso situate all'interno del territorio urbano, ma spostate verso le periferie; il grande sviluppo delle metropoli del XIX e XX secolo ha finito per inglobare quelli che, a inizio Ottocento, erano ancora luoghi al di fuori della cinta muraria.

Il motivo politico è invece figlio della rivoluzione, ed è probabilmente grazie ad esso che si può continuare a sostenere che, come recita la famosa poesia di Totò, la morte sia "la livella" che rende uguali tutti gli esseri umani. Il senso più profondo del principio di "livellazione" infatti resta valido sempre e comunque, ma per gli aspetti esteriori e monumentali non si può certo dire altrettanto: la citata e grandiosa piramide di Cheope custodiva la mummia del suo faraone, ma non c'è certo nei suoi dintorni neppure una pietra a ricordare le migliaia di schiavi che l'hanno eretta. Napoleone, seppure imperatore e fondatore di un'intera e nuova aristocrazia, è pur sempre un figlio della rivoluzione, e il suo *Décret* impone così che tutte le tombe debbano essere uguali; eccezioni limitate sono ammesse solo per grandi personaggi, e comunque perfino la possibilità di incidere o meno sulla pietra tombale un epitaffio è argomento che deve essere valutato e giudicato da un'apposita commissione[3].

1 *Il Père Lachaise nel 1815, ancora più con l'aspetto di un parco che di un camposanto*

È difficile immaginare cosa deve aver comportato nell'immediato un'ordinanza del genere: le cronache francesi raccontano di enormi traslazioni di bare verso i luoghi deputati al di fuori delle mura, non prive di incidenti e qualche subbuglio. E i suddetti "luoghi deputati" sono appunto quei cimiteri che ancora oggi riconosciamo: i legislatori si dovevano preoccupare di identificarli, organizzarli e, non ultimo, anche di convincere la popolazione che erano posti necessari e in qualche modo anche "belli", giusti, acconci allo scopo. Parigi si dotò allora di un cimitero a nord, quello di Montmartre, uno a sud, quello di Montparnasse, mentre ad ovest le salme venivano tumulate nel cimitero di Passy. Appurata l'esigenza anche di un'area da destinare come "cimitero dell'est", il prefetto della capitale francese individuò nel Mont-Louis, di proprietà dei Gesuiti, il sito atto alla bisogna. Il più celebre inquilino della tenuta gesuitica era stato François d'Aix de La Chaise, detto popolarmente Père (padre) La Chaise, confessore del Re Sole, Luigi XIV. Personalità notevole e influente sulle decisioni religiose del gran re, trasmise ai posteri la sua influenza finendo con il dare il suo nome a tutta la tenuta.

Quando il decreto imperiale viene emanato, il Père Lachaise non è ancora un vero cimitero, anche se ospita una mezza dozzina di tombe: ma l'urgenza che accompagna ogni legge napoleonica fa sì che il progetto, già abbozzato l'anno prima dall'architetto Alexandre-Théodore Brongniart, diventi velocemente operativo.

[3] Già durante il Consolato Napoleone si era fatto promotore di una legge volta a garantire una sepoltura anche per coloro che normalmente non venivano giudicati degni di una tomba. Vi si legge l'affermazione che "*ogni cittadino ha diritto d'essere sepolto quale che sia la sua razza o religione*", e più avanti cita esplicitamente, a titolo di esempio, le categorie alle quali più spesso il diritto veniva negato: i miscredenti, gli scomunicati, i poveri e gli *attori*.

Ma i parigini sembrano disdegnare quell'area cimiteriale, e il primo anno passa senza che il nuovo cimitero si arricchisca di molte sepolture: così, nel 1805 il prefetto di Parigi mette in atto una sorta di ordinanza di "marketing" ante litteram: per rendere più appetibile il cimitero, vi fa trasferire le salme di illustri personaggi, come Molière e La Fontaine; e il suo asso nella manica sono i resti mortali di Abelardo ed Eloisa, protagonisti della storia d'amore più tragica di Francia, e forse dell'Europa intera, con buona pace di Giulietta e Romeo che, peraltro, nel confronto con la coppia francese difettano anche della realtà storica.


2 *Abelardo ed Eloisa visti dai pennelli di E.B. Leighton*

Lo stratagemma prefettizio dà i suoi frutti, e il Père Lachaise diventa rapidamente il camposanto preferito dai parigini: e la sua popolarità crescerà continuamente, fino ai nostri giorni, diventando probabilmente l'unico cimitero al mondo ad attrarre tre milioni e mezzo di turisti all'anno. Come tutte le attrazioni turistiche, il Père Lachaise abbonda di guide e indicazioni per raggiungere le sepolture dei personaggi più noti, e chi avesse desiderio di vagare nei luoghi dell'eterno riposo di personaggi celebri avrebbe un bel daffare per esplorare l'intero cimitero. È quindi tutt'altro che impossibile che molti visitatori tralascino di passare in prossimità di una strana coppia di tombe, situate in un sito che sembra voler restituire una certa atmosfera da antico Egitto: una porta un busto marmoreo del defunto che ospita, l'altra, meno esplicita dal punto di vista della rappresentazione fisica ma più potente dal punto di vista simbolico, è sormontata da un obelisco. Già il fatto che entrambe abbiano dei vistosi segni distintivi, ben più appariscenti di un epitaffio, palesa che si tratta di personaggi che persino le restrittive norme napoleoniche riconoscevano come eccezionali. Per di più, è notevole il fatto che i due non riposano l'uno accanto all'altro per mero accidente, ma per scelta voluta e precisa: erano infatti molto amici. Per raccontarne brevemente la storia, bisogna inevitabilmente tornare a colui che, per dirla manzonianamente, "si nomò due secoli": Napoleone Bonaparte; più precisamente, a uno dei suoi rari insuccessi militari.

Quasi inevitabilmente, se si nominano insuccessi napoleonici, si pensa subito a Waterloo. La cosa è naturale, anche se non del tutto giusta: a vedere la carriera del Bonaparte nel suo insieme, la cosa stupefacente della battaglia di Waterloo è che Napoleone, in appena cento giorni, sia riuscito a rimobilitare l'esercito francese abbastanza da affrontare inglesi e prussiani in una battaglia, e che abbia seriamente rischiato di vincerla. La vera sconfitta militare dell'*Empereur* è quella dell'ottobre 1813 a Lipsia, quando i suoi 190.000 uomini furono sconfitti dai 430.000 che Austria, Russia, Prussia, Svezia e Sassonia scagliarono loro contro: e anche in questo caso è opportuno ricordare che la Grande Armée, a Lipsia, non era che il pallido fantasma dei settecentomila uomini che, appena l'anno prima, erano partiti alla conquista della Russia. Bonaparte perde tutto già quando varca il confine polacco diretto a Mosca: la Wermacht, centotrenta anni dopo, compirà sostanzialmente lo stesso errore strategico, e anche per essa risulterà fatale.

A parte questa sequenza che ne segna definitivamente la fine, gli insuccessi di Napoleone Bonaparte sono davvero pochi: pochissimi, se messi a confronto con l'elenco lunghissimo delle sue vittorie. Non ebbe mai pace in Spagna, un po' per il terreno poco adatto alle sue ampie manovre, un po' per la strategia degli iberici, che hanno fin da allora insegnato al mondo il potere della guerriglia contro i grandi eserciti disegnati per le battaglie sul campo. Per il resto, e nonostante il suo esercito terrestre non registrasse sconfitte particolarmente devastanti, neppure lo stesso Bonaparte avrebbe il coraggio di definire un trionfo la sua Campagna d'Egitto del 1798; ed è questo l'insuccesso che ci interessa.

Dal punto di vista strettamente militare, la Campagna d'Egitto del 1798-1801 è marcata principalmente dalla vittoria contro i Mamelucchi nella Battaglia delle Piramidi[4] e dalla batosta che Horatio Nelson inflisse alla flotta francese ad Abukir, in quella che viene chiamata Battaglia del Nilo. L'esercito rivoluzionario si volse poi verso la Siria (anche perché da Istanbul il sultano pensava che avrebbe avuto gioco facile contro i francesi ormai malridotti) con esiti alterni: i Turchi vengono rintuzzati, ma riescono a resistere quanto basta per non cedere l'importante piazzaforte di San Giovanni d'Acri. A quel punto Bonaparte decide di tornare prima al Cairo e poi, già nell'agosto 1799, di lasciare definitivamente l'Egitto per rifarsi vivo a Parigi, dove la sua carriera avrebbe avuto migliori occasioni di svilupparsi. I francesi, senza il suo carisma, resistono sulle rive del Nilo solo per pochi anni ancora, e infine lasciano il campo libero agli inglesi.

3 *Napoleone davanti alla Sfinge (J.L. Gérôme)*

Dal punto di vista strategico l'obiettivo era indubbiamente non tanto quello di impossessarsi di un territorio così distante dalla Francia rivoluzionaria, quanto quello di disturbare il controllo inglese del Mediterraneo, e non si può certo dire che l'obiettivo sia stato raggiunto. Ma c'è ancora un altro aspetto, decisamente più romantico, che è comunque significativo e merita d'essere preso in considerazione. La campagna d'Egitto, pur essendo stata guidata e persino ideata da Napoleone, è ancora una campagna militare figlia della Rivoluzione Francese. Nel 1798 Bonaparte è ben lontano dall'essere l'imperatore dei francesi: è solo un generale agli ordini del Direttorio, anche se è già il generale più ammirato e amato. Un primo piano guerresco prevedeva addirittura di portare direttamente la guerra in terra inglese, ma fu scartato perché giudicato troppo rischioso e temerario; curiosamente, però, fu accettata dal Direttorio l'idea – per molti versi ancora più temeraria e difficile – di portare i soldati francesi in terra egiziana. A favore di questa scelta ha certo giocato anche l'aspetto culturale, l'idea di portare gli ideali rivoluzionari nella terra che per prima ha marcato la Storia con una grande civiltà.

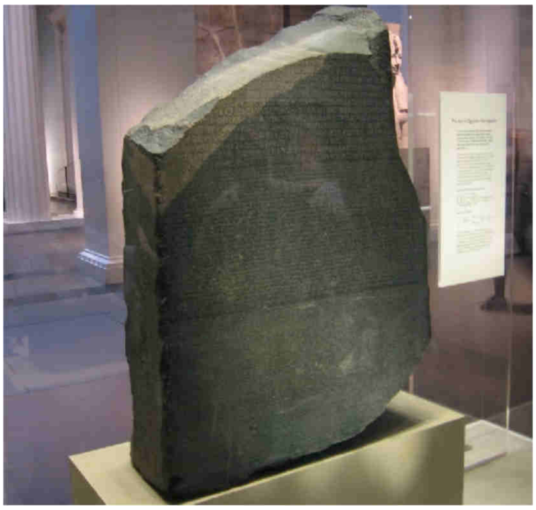
Lo dimostra il fatto che la spedizione francese non è solo un'azione militare, ma anche una grandiosa operazione scientifica e culturale. Sulle navi che partirono da Tolone il 19 maggio 1798 presero posto un gran numero di studiosi, più di centocinquanta accademici annoverati nella rivoluzionaria Commissione delle Scienze e delle Arti, che giunti al Cairo provvidero subito alla fondazione dell'*Institut d'Égypte*[5], una nuova istituzione culturale che doveva governare la ricerca e lo sviluppo scientifico della terra dei faraoni. All'Institut furono subito associati 48 studiosi, classificati in sezioni; le divisioni principali contavano sei membri in quella di politica economica, otto per l'arte e letteratura, dieci per la fisica e la storia naturale, e ben dodici per la sezione di matematica, nella quale volle annoverarsi lo stesso Napoleone.

Sia dal punto di vista militare che da quello culturale, il breve possesso francese dell'Egitto vede il suo punto saliente nel pieno dell'estate del 1799. Solo pochi giorni prima della partenza in sordina di Napoleone, il tenente Pierre-François Bouchard,

[4] "*Soldati, dall'alto di queste piramidi quaranta secoli vi guardano*" è la famosa frase con cui Napoleone esortò il suo esercito alla battaglia.

[5] Nella denominazione richiama evidentemente il confratello *Institut de France* che, fondato sempre in epoca rivoluzionaria, nel 1795, ancora oggi aggrega le maggiori "Académie" francesi, compresa quelle delle Scienze.

ingegnere militare, ritrova una grande pietra nera in basalto durante i lavori di rinforzo del forte della città portuale di Rashid, sul delta del Nilo. La pietra è fitta di iscrizioni in tre lingue, greco egizio demotico e geroglifici, e la sua importanza per lo studio dell'antica lingua scritta dei faraoni è subito evidente; diventa immediatamente nota come "la stele di Rosetta", dall'antico nome della città di Rashid. È un tesoro culturale che resta in mano francese solo per un paio d'anni; nel 1801 le truppe britanniche riescono a scacciare definitivamente i francesi, e la Stele di Rosetta prende subito la via per Londra, dove risiede ancora oggi.



4 *La stele di Rosetta al British Museum*

Nel luglio 1799, quando la pietra torna alla luce del sole, Jean-François Champollion non ha ancora compiuto nove anni, ma ha il destino già segnato. Alla tenera età di cinque anni, senza che nessuno lo aiuti, riesce a capire che la scrittura è un modo per registrare le parole, e impara a leggere da solo. Uno dei suoi sei fratelli maggiori, Jacques-Joseph, comincia allora ad istruirlo seriamente, e quando vede che il fratellino incomincia a padroneggiare latino, greco ed ebraico, passa a introdurlo allo studio dell'arabo e dell'aramaico. A diciassette anni presenta una sua memoria all'Accademia di Grenoble, dove è andato a studiare: sostiene che il copto è lingua che deriva dall'antica lingua dei faraoni, ed è convincente al punto che i membri dell'Accademia lo eleggono seduta stante socio della stessa. Tempo tre anni, tutti dedicati allo studio di lingue orientali, e diventa esperto anche di sanscrito, cinese, persiano, avestico, e ge'ez[6]. A diciannove anni è già professore di storia a Grenoble, e decide che deve riuscire ad imparare il copto come fosse la sua lingua madre, perché ritiene che sia la chiave di volta per la decifrazione dei geroglifici.

La persona che più condivide ed esalta la passione di Jean-François Champollion verso l'interpretazione dei geroglifici è senz'altro suo fratello Jacques-Joseph, al punto che gran parte dei suoi successi possono ragionevolmente essere attribuiti a entrambi i fratelli; ma un ruolo determinante nella carriera e nella vita di Champollion lo ha avuto anche il Prefetto di Grenoble: è davanti a lui che Jean-François, appena quattordicenne, si ritrova a commentare un complicato passo della Genesi in ebraico. Il prefetto ne rimane così impressionato che l'anno dopo gli presenta Dom Raphaël de Monachis, un monaco greco che aveva partecipato alla Campagna d'Egitto e che fu, probabilmente, il primo a convincere Champollion della stretta relazione tra il copto e l'antico egizio.

E il prefetto continua a proteggere e a facilitare il giovane concittadino, fino a diventarne molto amico dei due fratelli Champollion; amicizia importante, perché il prefetto era un personaggio di alta rilevanza scientifica e politica. Se aveva avuto la possibilità di presentare Monachis a Champollion, questo dipendeva dal fatto che a suo tempo era stato eletto unanimemente segretario del citato *Institut d'Égypte*; e anche questa non era una carica che gli rendesse pieno merito, che lo definisse pienamente: egli era infatti la persona che Napoleone in persona aveva messo a capo di tutta la spedizione scientifica della Campagna d'Egitto. Era il primo e più importante dei centocinquanta "*Savants*" che i francesi avevano mandato sulle rive del Nilo, ed era un matematico.

[6] L'avestico è lingua del ceppo iranico: il ge'ez è diffuso nell'altopiano etiopico.

5 *Joseph Fourier*

Jean Baptiste Joseph Fourier nasce ad Auxerre il primo giorno di primavera, il 21 marzo 1768, nono dei dodici figli di un sarto. Perde entrambi i genitori quando è ancora un ragazzino di dieci anni, e inevitabilmente si ritrova nella situazione dei ragazzini privi dei genitori e di parenti abbastanza benestanti da poterne garantire il futuro. Dalla sua ha una mente pronta e brillante, ed è su questa che dovrà fare affidamento. Studia prima dai monaci di Auxerre poi, dodicenne, passa alla Reale Scuola Militare della città. Oscilla tra educazione religiosa e militare, insomma, e oscilla anche nell'individuazione dei suoi interessi: inizialmente sembra appassionarsi prevalentemente all'arte e alla letteratura, ma dai tredici anni in poi scopre, sempre più forte, la passione per la matematica. Nel 1787, ormai diciannovenne, deve risolvere una volta per tutte la direzione del suo futuro, ma sono le regole pre-rivoluzionarie a decidere per lui: la sua crescente passione per la matematica lo aveva convinto di avere le carte in regola per entrare nell'Artiglieria, la più scientifica e matematica arma del Regio Esercito Francese, e per seguire questa strada riceve addirittura l'appoggio del grande Legendre[7], che a quel tempo era Ministro della Guerra. La frase riportata in testa a quest'articolo è la risposta che il giudice esaminatore della richiesta restituisce al ministro: non contava quanto potesse essere abile e adatto, il percorso di ufficiale di Artiglieria era riservato esclusivamente ai nobili.

Il rifiuto costringe Fourier a ripiegare sulla carriera ecclesiastica, ed entra nel seminario dell'abbazia benedettina di Saint Benoit-sur-Loire, per diventare sacerdote. Probabilmente, è quello stesso rifiuto che comincerà però ad accendergli l'interesse verso gli ideali rivoluzionari; fatto sta che nel 1789, anno primo della Rivoluzione, Joseph lascia il seminario e va a Parigi, dove avrà l'occasione anche di presentare un suo studio sulle equazioni algebriche all'Accademia delle Scienze.

Nel 1793, il dubbio sul suo destino è definitivamente sciolto: "*sono davvero innamorato di questa causa, che ritengo essere la più grande e la più bella che qualsiasi nazione abbia mai intrapreso*", scrive a proposito della Rivoluzione. Ma la Rivoluzione è spesso matrigna, più che madre: entrato del Comitato Rivoluzionario di Auxerre, comincia a trovarsi in imbarazzo durante il Terrore, quando la lama della ghigliottina sale e scende senza un attimo di requie. Arriva addirittura a correre il rischio di conoscerla personalmente, quando, nelle continue risse tra le fazioni rivoluzionarie, si schiera con quella d'Orléans. Finisce arrestato, processato e incarcerato, e a salvarlo dall'incontro con il marchingegno del dottor Guillotin è lo stesso Robespierre, ma non per un atto di grazia: nei continui rovesci politici del tempo finisce che è lo stesso Robespierre a lasciare la testa nel cesto del boia, e Fourier, nel cambiamento politico che ne seguì, ritrova testa e libertà.

Ritorna ad insegnare al collegio di Auxerre dove aveva studiato da giovane, e nel 1794 riesce ad entrare alla Scuola Normale Superiore, da studente, perché l'Istituto aveva

[7] Il suo "compleanno" è in RM140, Settembre 2010: "Le opere e le facce".

l'obiettivo di formare insegnanti. Alla Normale si mette in mostra come il migliore degli studenti, e acquista stima agli occhi dei suoi docenti: ed è stima davvero preziosa, visto che i suoi professori si chiamano Lagrange[8], Laplace, Monge[9], Carnot.

Non sono tempi facili, a Parigi: ogni mese, forse ogni giorno che passa porta novità, pericoli, sconvolgimenti, ritorni. Dal punto di vista professionale Joseph Fourier è ormai stimato e considerato dai maggiori matematici di Francia, che incidentalmente sono anche, a quel tempo, i migliori matematici del mondo; e si ritrova a lavorare in quella Scuola Centrale dei Lavori Pubblici che presto cambierà nome diventando nota come École Polytechnique. Ma gli sconvolgimenti politici sono incontrollabili, e il suo nome viene nuovamente additato, la sua persona nuovamente arrestata, e poi nuovamente rilasciata, forse proprio per gli interventi di Lagrange e Laplace. Rientra al Politecnico nel 1795, e quando due anni dopo Lagrange lascia la cattedra di Analisi e Meccanica, ne prende il posto. Giusto il tempo di ambientarsi che arriva il fatale 1798, anno in cui inizia la Campagna d'Egitto.

A differenza di Napoleone, Joseph Fourier rimane al Cairo fino al 1801, quando ritorna a Parigi con la naturale intenzione di riprendere la sua cattedra all'École. Ma Bonaparte, che ormai è sulla via di diventare il padrone assoluto della Francia, ne ha apprezzato le doti organizzative in Egitto, e ritiene che sia la persona giusta per insediarsi a capo della Prefettura del Dipartimento dell'Isère, in sostituzione del prefetto da poco deceduto.

È certo una carica di altissimo prestigio, ma non si può dire che Joseph se ne faccia carico con orgoglio ed entusiasmo. Non ritiene particolarmente interessanti i compiti principali di cui deve occuparsi, come la bonifica delle paludi di Bourgoin, e soprattutto la realizzazione un'importante strada che metta in veloce comunicazione Grenoble e Torino[10]; inoltre, quando le ambasce governative gli concedono un po' di pace, è comunque tenuto a portare avanti la sua grande opera "*Descrizione dell'Egitto*", un compendio dell'avventura scientifica africana che lo terrà impegnato per anni. E comunque, la sua predisposizione all'incertezza politica a Grenoble lo metterà ripetutamente in imbarazzo, perché un animo non troppo combattivo come il suo probabilmente mal si adattava a quei tempi burrascosi: quando Napoleone viene sconfitto e relegato all'Elba, il convoglio che lo doveva portare sull'isola toscana doveva passare per Grenoble, ma Fourier riesce a evitare l'imbarazzo facendolo deviare; quando l'ex-imperatore ritorna dando inizio ai suoi Cento Giorni, Fourier è assai preoccupato della cosa, al punto di defilarsi dalla porta opposta della città quando Napoleone, alla testa delle sue nuove truppe, fa in suo ingresso trionfale. Non doveva comunque mancare di qualche abilità diplomatica se, nonostante questi tentennamenti, riesce a mediare tra Bonaparte e il Re al punto che Napoleone non solo si fa passare la rabbia, ma lo nomina addirittura Prefetto del Reno. Ma lo abbiamo già detto, questi sono comunque tempi in cui la Storia corre più veloce degli uomini: non fa in tempo ad assumere la sua nuova carica che da Parigi arriva l'ordine di rimuovere tutti i detentori di cariche istituzionali che abbiano simpatie monarchiche, e Fourier rientra in questa lista; non fa in tempo a subire questa rimozione che Waterloo mette definitivamente fine all'avventura napoleonica, e in conclusione di tutto, Joseph Fourier se ne torna a Parigi, senza più alcuna carica prefettizia.

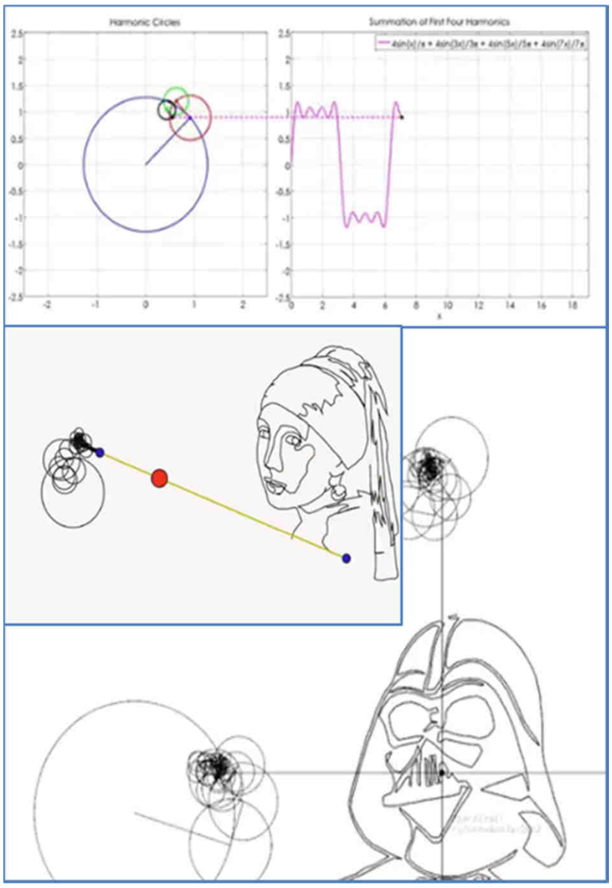
Dal punto di vista scientifico, però, gli anni di Grenoble sono quelli più fecondi per Joseph Fourier. Provvede a fondare l'Università Imperiale di Grenoble: vi chiama come segretario Jacques-Joseph Champollion, e nel contempo esorta lo Champollion più giovane, Jean-François, ad impegnarsi della decifrazione dei geroglifici. Partecipa attivamente alla locale Accademia Delfinale e mostra sempre particolare attenzione nel favorire le menti brillanti: farà lo stesso per tutta la vita, anche nel periodo successivo alla caduta napoleonica. Nel 1816 il re Luigi XVIII gli rifiuterà l'accesso all'Accademia

[8] Il compleanno a lui dedicato è il primo di tutta la serie: si trova in RM048, Gennaio 2003, con il titolo "Torino, 1750".

[9] RM208, Maggio 2016, "Mille e una Gioconda".

[10] A quanto pare, il problema di superare velocemente le Alpi Occidentali è sempre stato fonte di alta preoccupazione per i governanti …

delle Scienze, ma l'anno successivo viene accettato, e vi fa rapidamente carriera, diventandone il segretario perpetuo per le scienze matematiche dopo la dipartita di Delambre: da quello scranno, sarà uno di quelli che più si impegneranno affinché venga accettata tra i membri dell'Accademia Sophie Germain, che infatti diventerà la prima donna accademica.



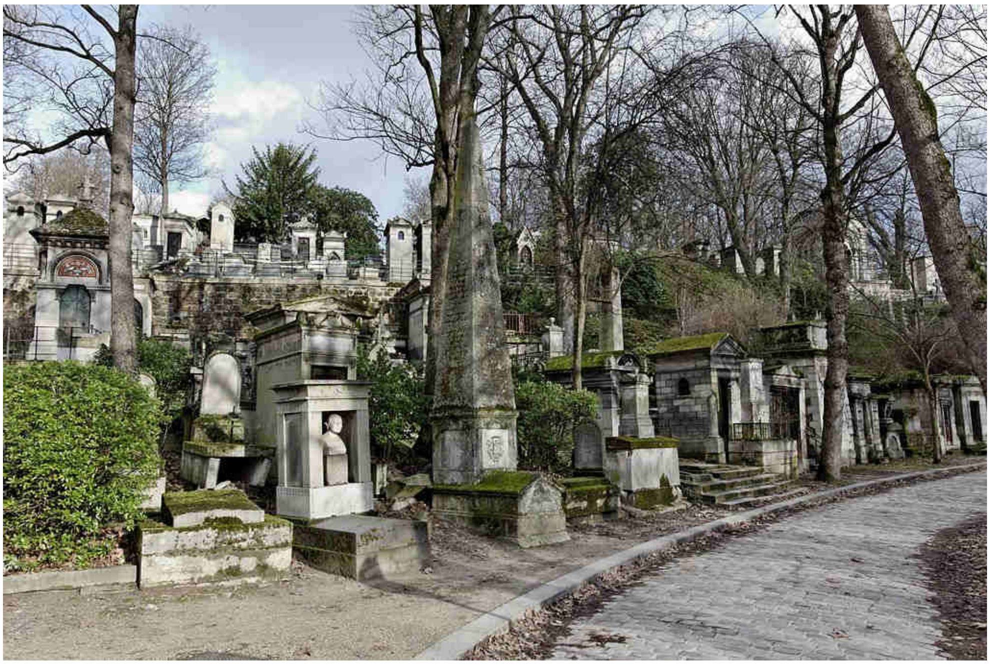
6 *Qualche divertente applicazione delle trasformate di Fourier si trova facilmente in rete, ad esempio qui:* http://gfycat.com/gifs/search/fourier+transform

Ed è sempre ai piedi delle Alpi che inizia ad interessarsi dell'argomento che più legherà al suo nome, la trasmissione del calore. Se ne occupa anche per partecipare al Premio messo in palio dall'Accademia delle Scienze, e si ritrova a fare qualcosa non usuale, almeno per i matematici moderni: organizza degli esperimenti. Non dimentica certo d'essere un matematico, perché la sua intenzione principale è proprio quella di trovare un modello analitico che possa giustificare il processo fisico, e trova un sistema originale per riuscirci: l'utilizzo di serie trigonometriche. Quando, nel 1807, invia all'Accademia la sua memoria per la partecipazione al concorso, non ha molti concorrenti: solo un altro candidato ha presentato uno studio per il premio, e Fourier risulta vincitore, anche se non in maniera indiscussa. I grandi Lagrange e Laplace, che certo non avevano pregiudizi verso Fourier, trovavano che quelle approssimazioni tramite serie trigonometriche fossero un po' ardite e non pienamente giustificate, e per di più Jean-Baptiste Biot sosteneva anche una sorta di diritto di primogenitura sul metodo. Fourier riuscirà a dimostrare facilmente di non aver plagiato Biot, ma dubbi sul metodo utilizzato permanevano. È solo con il tempo che le serie e le trasformate di Fourier riusciranno a dimostrare tutta la loro incredibile potenza.

Perché il metodo di Fourier, con tempo, si rivela essere quasi un passe-partout matematico universale, un grimaldello capace di ridurre in termini analitici una enorme quantità di concetti apparentemente intrattabili. In un certo senso, si può arrivare a dire che l'idea di Fourier non è tanto una geniale applicazione matematico ad un determinato problema di termodinamica, ma un vero e proprio "interprete matematico", un traduttore in termini analitici del mondo reale.

Non si può fare troppo una colpa a Lagrange e Laplace se non hanno colto subito l'importanza rivoluzionaria del colpo di genio di Fourier; col il senno di poi è fin troppo facile tranciare giudizi. Ed è fin troppo facile individuare similitudini, predestinazioni, o coincidenze sorprendenti: come il notare, ad esempio, che sia proprio stato Joseph Fourier a individuare e battezzare per primo, nel 1824, quell' "effetto serra" che sta diventando rapidamente il maggior pericolo dell'umanità; o che ci sia una specie di strano sortilegio e contrappasso su di lui, che ha studiato per tutta la vita il calore ed era particolarmente freddoloso: Arago ricorda che nei mesi invernali, a Parigi, Fourier era costretto a vestirsi come "quei viaggiatori costretti a svernare nei ghiacci polari".

Ancora più sorprendente sembra adesso ricordare il sorprendente legame che unisce Champollion e Fourier, entrambi scopritori e decrittatori di nuovi alfabeti: quando il matematico muore, il 16 maggio 1830, il suo amico e protetto Champollion lascia scritto che desidera di essere inumato accanto a lui, nella diciottesima divisione del cimitero parigino di Père Lachaise. Sarà accontentato fin troppo presto, meno di due anni dopo, appena quarantunenne: e ancora oggi si trovano lì, nel cimitero più famoso del mondo, a contendersi il titolo del traduttore più insolito e geniale del mondo.



7 *Le tombe affiancate di Joseph Fourier e Jean-François Champollion al Père Lachaise*

2. Problemi

2.1 Dadi redenti

Rudy al momento sta litigando con dei dadi agnostici: nel senso che ha tre dadi “bianchi” (senza numeri, con tutte le facce uguali: dato il grande amore che Treccia nutre per la Teoria della Probabilità, è *felicissima* di giocare con questi) e sta provando (Rudy, non Alice) a disegnare dei “+” e dei “–“ (equiprobabili) su ognuno di loro per implementare un gioco di ruolo.

No, non vi chiediamo la distribuzione dei segni sui dadi *[...ma se mi date una mano a fare i disegni ben fatti, potrei addirittura ringraziarvi (RdA)]*, ma il giramento di dadi (e di ben altro) ha fatto venire in mente a Rudy un problema.

Il motivo del titolo è che vorremmo due dadi *obbligatoriamente* “farlocchi”, ma, in un certo senso, onestissimi.

Sapete tutti che un singolo dado è in grado di darvi (in teoria) un valore tra 1 e 6 uniformemente distribuito, mentre se tirate due dadi “onesti” non ottenete una distribuzione uniforme dei risultati *[Hint: puntate sul* 7 *(RdA)]*. Ora, la nostra intenzione è giustappunto quella di rendere una coppia di dadi “onesti”, nel senso di “appesantirli opportunamente” *[nel senso che vorremmo barare con il metodo del “loading”: se mettete un peso sulla faccia* 6*, viene (quasi) sempre* 1 *(RdA)]* in modo tale che qualsiasi risultato tra 2 e 12 sia equiprobabile: supponiamo anche di poter distinguere i dadi, nel senso che “quattro su uno e due sull’altro” è distinguibile da “due su uno e quattro sull’altro” (altrimenti è troppo facile: stracarico il sei di uno e stracarico l’uno dell’altro, faccio sempre sette e il gioco è noiosissimo).

Come possiamo fare? Oh, con calma: tanto, Rudy prima deve progettare il gioco, poi deve scriverlo, poi Doc deve trasformarlo in un’emozionante avventura… Direi che abbiamo tempo sino a primavera, non necessariamente la prossima.

2.2 L’omino di neve triste

...e vorrei vedere voi, vestiti da omini di neve, con le temperature tropicali che ci ritroviamo…

In realtà il titolo non c’entra niente, ma facendo il disegno (per prima cosa, proviamo sempre un paio di casi simmetrici), ci è venuta fuori una cosa che sembrava effettivamente un tristissimo omino di neve.

Vorremmo comunque provare a fare il problema senza disegni (e senza ambientazione, che il *Campo dei Chinotti* si sta stufando, di essere usato per esperimenti eticamente scorretti).

Avete due cerchi (uno piccolo e uno grande) intersecantesi: siano i punti di intersezione A e B. Sul cerchio piccolo, scegliete un punto P, tracciate le due corde passanti per P e, rispettivamente, per A e B prolungandole sin quando non incrociano (di nuovo) il cerchio grande in due punti Q e R.

La domanda dell’omino di neve è: come varia la corda RQ del cerchio grande al variare di P sul cerchio piccolo?

3. Bungee Jumpers

Provate che, se per n intero positivo $4^n + 2^n + 1 = p$ è primo, allora n deve essere una potenza di 3.

La soluzione, a “Pagina 46”

4. Soluzioni e Note

Marzo!

Se ce la facciamo a fare in fretta con queste soluzioni, e ad uscire con ritardo minimo, avete ancora abbastanza tempo per fare gli auguri al padre fondatore di RM, così niente note, solo soluzioni.

4.1 [240]

4.1.1 Un classico e una variazione.

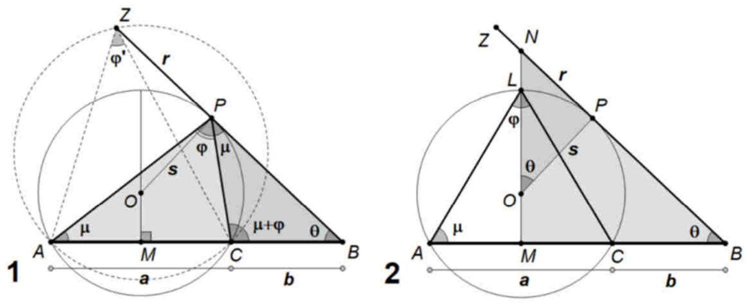
Qualche nuovo commento sui problemi presentati il mese scorso. Cominciamo con il primo, che era questo:

> *Supponiamo una statua di altezza h, la colonna ha altezza p, i vostri occhi sono ad altezza e dal terreno. Da che distanza la statua appare "più grande", ossia la figura umana in cima sottende dal punto di vista scelto il maggior angolo?*

Con l'ulteriore variazione:

> *Sia C un punto (fisso) su un segmento AB, e sia Z un punto mobile su una retta r passante per B. Siano definiti gli angoli θ=ZBA e φ=CZA: al variare di Z su r, φ varierà; sia P la posizione di Z per cui φ assume il valore massimo. Come varia P al variare di θ?*

Il mese scorso abbiamo presentato le soluzioni di ***Jeeves62***, ***Alberto R.*** e ***Valter***. Un bel contributo di ***trentatre*** segue ora:

> Riguardo al secondo problema (variazione) ho compreso solo in parte, per la mancanza di figure, la soluzione di ***Valter*** e provo ad integrarla.
>
> Siano in fig. 1 $a = AC$, $b = CB$, M : punto di mezzo di AC, ZB : retta r
>
> 
>
>
> - ogni punto sul cerchio per A, C, Z vede la corda AC sotto un angolo costante che dipende dal raggio del cerchio
>
> - il valore massimo dell'angolo φ si ha per il cerchio minimo, che passa per A e C ed è tangente alla retta r in P
>
> - il centro O del cerchio di raggio s è sull' asse del segmento AC con piede in M
>
> - per il teorema delle corde $PB^2 = AB \cdot CB$ da cui $PB / AB = CB / PB$. i triangoli PBA e CBP, con angolo θ comune, sono dunque simili
>
> - con μ angolo PAB, gli angoli $(\varphi+\mu)$ in P e C sono uguali, come dimostrato da ***Valter*** .
>
> Con le coordinate polari (ρ,θ) centrate in B il punto P è dato da
>
> $$P_{\rho,\theta} = (\sqrt{(a+b)b},\theta)$$
>
> - infatti $\rho = PB = \sqrt{AB \cdot CB} = \sqrt{(a+b)b}$
>
> - il passaggio a coordinate cartesiane $M(x, y)$ orientate verso B e verso O è immediato.
>
> Questo risponde alla domanda "come cambia P al variare di θ" e il problema termina qui.
>
> In funzione di (a,b,θ) si può anche ottenere il valore di s e φ con la fig. 2
>
> - sulla linea MO sono posti i punti N, L - l'angolo ALC è ancora φ
>
> - i triangoli rettangoli BMN e OPN sono simili e valgono le

$$NB = NP + PB\,,\ NP = s\cdot\tan\theta\,,\ NB\cdot\cos\theta = MB$$

- eliminando *NB* e *NP*, passando ad *a* e *b*, e con $PB = \rho = \sqrt{(a+b)b}$, si ha per il raggio *s*

$$s = \frac{a/2 + b - \rho\cos\theta}{\sin\theta}$$

- vale (altro teorema delle corde) $AC = a = 2s\cdot\sin\varphi$ e quindi per l'angolo φ

$$\sin\varphi = \frac{a\sin\theta}{a + 2b - 2\rho\cos\theta}\,.$$

Ottimo lavoro. Proseguiamo.

4.1.2 Problema squisitamente teorico (per ora)

Continua l'interesse per questo problema:

> *Avete appena fatto due bellissime e compatte palle di neve, una con diametro il doppio dell'altra. Portate al caldo, essendo la neve un pessimo conduttore di calore, solo la superficie assorbirà calore, quindi lo scioglimento è proporzionale alla superficie esposta; dopo un certo tempo, il volume della palla più grande è dimezzato. Quanto vale il volume della palla piccola?*

Il mese scorso, abbiamo pubblicato le soluzioni di ***Alberto R***, ***Jeeves32***, ***trentatre*** e ***Valter***, il primo commento è di ***Jeeves32***:

> La premessa del mio ragionamento era corretta: "Il rapporto tra calore assorbito e la corrispondente diminuzione del volume per scioglimento è necessariamente costante ed in particolare non dipende dalla dimensione della sfera (ovvero dal suo raggio R)"
>
> La conclusione era sbagliata! Ciò che rimane costante è il "dR/dt" cioè la diminuzione in valore assoluto del raggio indipendentemente dalla sua dimensione e forse è proprio questa la "stranezza" annunciata.
>
> Quindi niente Zenone e la soluzione corretta (anche dal punto di vista numerico) è quella di Alberto R. a cui va il mio plauso!

Valter invece ci scrive:

> Settimanale passeggiata montana, la discussione sull'argomento continua.
>
> Forse (molti dubbi) ho intuito quanto ha esposto trentatre nella soluzione (mi piacerebbe veramente conoscere la sua opinione a tal proposito).
>
> Con "scioglimento" s'intende la "velocità" con cui la palla perde volume.
>
> Come la velocità classica è spazio/tempo cioè dS/dt lo "scioglimento" è dV/dt.
>
> Il problema ci dice che lo "scioglimento" è proporzionale alla superficie. Il loro rapporto, vale a dire: "Scioglimento" / superfice, quindi, è costante.
>
> I due valore di tale rapporto si possono esprimere come:
>
> - "scioglimento" = dV/dt
>
> - superficie di una sfera = dV/dR con V il suo volume e R il raggio.
>
> Dividendo ed eliminando dV ho la formula iniziale di trentatre: dR/dt = –h.
>
> La costante è quanto indica come: "Volume che evapora per unità di superficie".
>
> Tutto il resto della sua dimostrazione deriva, utilizzando il Calcolo, da lì.
>
> Penso che il mio errore sia stato nell'interpretazione di "scioglimento". Chiaramente, oltre all'errore iniziale, mi mancano tutte le basi del Calcolo. Mi sono convinto una volta di più di quanto sia diversa la teoria dalla pratica. Ho provato a leggere da autodidatta almeno i concetti fondamentali del Calcolo. Mi è anche sembrato di averli capiti ma se devo utilizzarli, nascono i problemi. Mi manca penso quella familiarità con essi per poterli associare ai casi reali.

Forse, ma questa interpretazione mi è piaciuta più di altre… ma sono di corsa, per cui non mi soffermo.

4.2 [241]

4.2.1 Prolegomeni labirintici

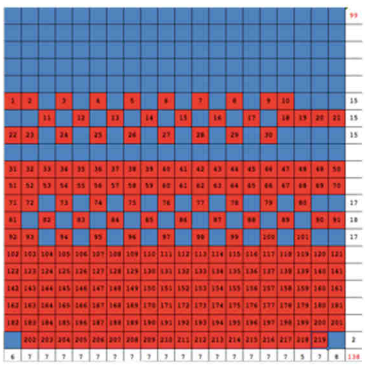
Primo problema con paletti e archetti colorati:

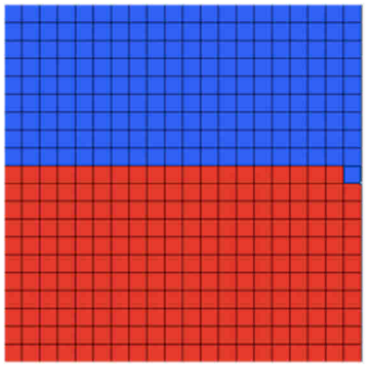
> *Nel Campo dei Chinotti si trova un reticolo quadrato di paletti, 20 per lato, alcuni dei quali blu e alcuni rossi, con i vari paletti adiacenti (verticalmente e orizzontalmente: niente diagonali) uniti tra di loro da archetti. Gli archetti sono di colori diversi, e se due paletti adiacenti sono di ugual colore, l'asticella è dello stesso colore; se sono di colore diverso, l'asticella è nera.*
>
> *Ci sono 219 paletti rossi, di cui 39 sui bordi, nessuno dei quali sugli angoli, e 237 archetti neri. Quanti sono i paletti blu?*
>
> *Se il nostro reticolo è rettangolare, con un numero pari di colonne e di righe, e con un numero di paletti blu pari al numero dei paletti rossi in ognuna delle righe e delle colonne (ma questa volta non mettiamo nessun archetto nero), avrò più paletti blu o più paletti rossi?*

Ecco, qui non si sa bene, come al solito, se il Capo ha proposto un tranello, o ha sbagliato la domanda, come nota giustamente ***Jeeves32***:

> Parlate di reticolo quadrato di 20 x 20 paletti alcuni blu alcuni rossi. Date il dato di 219 paletti rossi e più sotto chiedete il numero di paletti blu. Non penso sia un semplice tranello (risposta 400–219 = 181) ma forse sì, mah!
>
> Ritengo più verosimile uno scambio tra archetti e paletti, (credo che 219 siano archetti rossi) me lo potete chiarire?

Valter risolve così:

> Fornisco quella che a me pare la soluzione:
>
> 
>
> - in ultima colonna a destra ho contato gli archetti neri in ognuna delle righe
> - in ultima riga in fondo ho contato gli archetti neri in ognuna delle colonne
> - in ogni cella/paletto rossa il suo numero in sequenza
> - si nota che il totale degli archetti neri è 237 e dei paletti rossi 219 di cui 39 sui bordi
>
> Sono partito dalla configurazione "compressa":



Poi ho "decompresso" man mano sino a giungere alla configurazione finale.

Sono perplesso perché mi pare di non aver compreso il problema in quanto:

- di soluzioni diverse ve ne sono parecchie
- la risposta alla domanda "*Quanti siano i paletti blu...*" è comunque: 400 – 219 paletti rossi = 181
- a un certo punto si parla anche di "asticella" ma qui immagino proprio che stia per "archetto".

Ho pensato ad altre interpretazioni tipo che debbano esserci solo archetti neri. Ho scartato questa ipotesi perché il problema parla esplicitamente anche di archetti blu e rossi. Essendo poi il numero di paletti rossi maggiore di 400/2 qualche archetto rosso deve esserci.

Allego due calcoli che mi sono fatto detto N il lato del reticolo:

- numero totale di archetti: $2*N*(N-1) = 2*N^2 - 2*N = N^2+N*(N-2)$
- per N = 20 il numero totale di archetti è 760
- 760 – 237 = 523 archetti fra rossi e blu.

No, non commentiamo. Il Capo ha evidentemente deciso di anticipare il primo aprile o di festeggiare il compleanno ricevendo maledizioni a denti stretti.

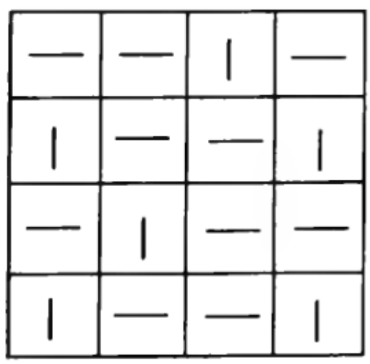
4.2.2 Qualcuno telefoni a Richard (Feynman)

Un problema con figura, che non chiarisce affatto…

Il vostro compito è aprire la cassaforte che vedete qui di fianco: la "serratura" è composta di sedici maniglie che ammettono due posizioni: "verticale" o "orizzontale". Quando girate una maniglia, tutte le maniglie della riga e della colonna della maniglia che girate "cambiano stato"; siete liberi di girare una maniglia quante volte volete (evidentemente, anche non consecutive…).

Quante (e quali) maniglie girate?

Qual è il massimo lato (pari) della cassaforte che posso sempre aprire con 2002 mosse? Per quali altri numeri di mosse ottengo la stessa risposta che ottengo per "2002"?



8 *Apritela senza dinamite.*

Questo problema è piaciuto molto, come tutti i problemi di parità ha una sua bellezza intrinseca difficile da definire. Cominciamo con ***Jeeves32***:

Ho affrontato il problema in questo modo:

Partendo da una matrice tutta uniforme (tutte barre orizzontali che indicheremo con "0") quali caselle devo attivare per avere solo una particolare casella attivata (che indicheremo con 1)

Tabella delle attivazioni Tabella risultante

? ? ? ?	0 0 0 0
? ? ? ?	0 1 0 0
? ? ? ?	0 0 0 0
? ? ? ?	0 0 0 0

La risposta, che ho trovato empiricamente, è (per matrici quadrate di lato pari!) la seguente

0 1 0 0
1 1 1 1
0 1 0 0
0 1 0 0

ovvero tutte le caselle della riga e della colonna della casella desiderata.

A questo punto possiamo attivare qualsiasi gruppo di caselle della matrice facendo il "segno della croce" su ognuna delle caselle desiderate.

Ad esempio:

Tabella Desiderata		Tabella delle Attivazioni						
0 0 0 0		0 1 0 0		0 1 0 0		0 0 1 0		0 0 1 0
0 1 1 0	=	1 1 1 1	+	0 1 0 0	+	1 1 1 1	=	0 1 0 0
0 1 0 0		0 1 0 0		1 1 1 1		0 0 1 0		1 0 0 1
0 0 0 0		0 1 0 0		0 1 0 0		0 0 1 0		0 0 1 0

E' chiaro che invece di procedere a 7 x 3 = 21 attivazioni basterà effettuare solo quelle nelle caselle con un **numero dispari** di attivazioni (ultima tabella con 5 attivazioni da fare).

E qui finisce la premessa e viene generata la procedura generale:

1 – Individuiamo nella tabella le caselle che vogliamo attivare.

2 – per ognuna delle caselle della tabella calcoliamo quante caselle da attivare ci sono nella sua riga e nella sua colonna (compresa se stessa se è tra quelle che devono essere attivate)

3 – Se il risultato è **pari** la casella **non** viene attivata mentre se è **dispari** la casella viene attivata

Problema della cassaforte:

Abbiamo la tabella di partenza:

0 0 1 0
1 0 0 1
0 1 0 0
1 0 0 1

Dobbiamo attivare tutte le caselle con lo zero.

Per ogni casella calcoliamo la somma degli zeri che sono nella sua riga e nella sua colonna (ad esempio per la prima casella in alto a sinistra abbiamo somma 4).

Al termine del calcolo attiviamo solo le caselle che hanno una somma dispari.

Fatti i conti attiveremo 2 caselle: **1r-2c e 3r-3c.**

Tabella delle attivazioni

0 1 0 0
0 0 0 0
0 0 1 0
0 0 0 0

Detto ciò passiamo al problema finale.

Una tabella quadrata di lato N (con N pari) composta da tutti zeri ha bisogno di attivare tutte le caselle (hanno tutte somma dispari di zeri nella riga e colonna = 2N–1) per averle tutte uguali ad 1 perciò consideriamo il numero N il cui quadrato è più vicino a 2002.

La radice di 2002 è 44,74 quindi direi N = 44 = massimo lato della cassaforte che si può aprire con al più 2002 mosse.

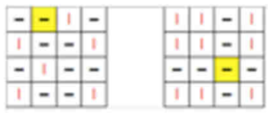
Ottengo la stessa risposta dal 1936 al 2115.

P.S. Nella enunciazione del problema non viene indicato se per aprire la cassaforte le barre debbano essere tutte orizzontali o tutte verticali! Ho scelto quello che mi dava la soluzione più semplice ed elegante.

P.P.S. Nella mia ricerca empirica ho creato un semplice "spreadsheet" con una tabella delle attivazioni ed una tabella risultante che qui allego. Lo faccio soprattutto come risposta alla divertentissima copertina di questo mese!

Lo spreadsheet che lo siamo tenuto e non ve lo facciamo vedere, e speriamo che le matrici sopravvivano al nuovo formato. Vediamo la versione di ***Valter***, ma non vi perdete, i contributi sono alcuni, questo il primo:

Inizio con la prima domanda assumendo che per aprire le maniglie debbano essere tutte in posizione verticale. Fornisco un'immagine dei due passaggi necessari; la maniglia che giro è quello con sfondo giallo:



Per quanto riguarda il resto del quesito inizio col notare alcune proprietà dell'aggeggio:

- girare due volte la stessa maniglia mi riporta alla posizione precedente
- conosciute le maniglie da girare per aprire la cassaforte, è indifferente l'ordine in cui sono fatte le mosse
- girare, quindi, due volte la stessa maniglia, anche non consecutivamente, è come non averla mai girata
- di conseguenza è sufficiente girare ogni maniglia che fa aprire la cassaforte una sola volta
- se giro tutte le maniglie ritorno alla disposizione di partenza ma con la loro posizione invertita
- girare un set di maniglie o le restanti porta alla stessa disposizione ma anche qui con loro posizione invertita.

Fornisco ora un metodo generale dal quale mi pare si possa desumere, date le mosse, quale sia il massimo lato.

Non faccio i conti ma mi pare comunque che la sua complessità computazionale sia lineare cioè di ordine O(n).

Se si può aprire sia con tutte le maniglie in orizzontale che in verticale mi pare si riduca a ¼ il numero di mosse.

Quest'ultima affermazione è conseguenza del metodo e di quanto esposto nei punti elencati in precedenza.

Di seguito le "istruzioni" per aprire la cassaforte assumendo serva avere tutte le maniglie in orizzontale:

- considero tutte le maniglie che nella posizione iniziale sono in verticale e le giro
- poiché devo poi tornare alla posizione iniziale, quest'operazione posso farmela solo "sulla carta"

- se la cosa non fosse permessa dal problema basta che le giri tutte una seconda volta per ritornarci

- in alternativa, se conviene, posso rigirare quelle che non lo dovevano essere e girare quelle non ancora girate

- quando ho girato tutte le maniglie verticali, verifico quali sono in posizione diversa da com'erano inizialmente

- ripartendo dalla posizione iniziale, tali maniglie sono quelle da girare per aprire la cassaforte.

Se è indifferente la posizione cui giungere posso scegliere nei due passaggi il caso con meno maniglie da girare.

Nel primo tutte le verticale oppure le orizzontali nel secondo quelle in posizione uguale o diversa dalla partenza.

Alcune immagini di utilizzo del metodo su casi concreti:

- il primo quadrato di ogni riga è la posizione di partenza

- il secondo è la posizione cui si giunge dopo aver girato le maniglie verticali

- in sfondo giallo le maniglie che dovranno essere girate per aprire essendo in posizione diversa dalla partenza

- gli altri due quadrati sono i passaggi per giungere ad avere tutte le maniglie in orizzontale

- in sfondo verde evidenzio le maniglie che ho girato nel passaggio in questione.

Mi sono fatto aiutare da due scorciatoie che ho trovato per semplificarmi la vita nei diversi passi:

- se su una riga le maniglie da girare sono pari, tutte restano nella stessa posizione altrimenti tutte girano

- se in numero di maniglie da girare sulla riga e colonna di quella che considero è dispari la giro altrimenti no.

Ecco, vediamo come procede:

Ho un po' di tempo, provo a giustificare le mie farneticazioni, sempre che abbiano un senso. Tutto il mio sproloquio si basa su una specie di "algebra" e di parità "costruite" sul nostro aggeggio. Assumo che per aprire la cassaforte tutte le maniglie debbano essere in posizione orizzontale. Per come imposto il ragionamento, comunque, mi pare che la posizione da raggiungere sia indifferente.

Comincio notando che a ogni mossa vengono girate un numero dispari di maniglie: (2 * lato) – 1.

La parità del numero di maniglie orizzontali/verticali si alterna dopo ogni mossa: pari/pari, dispari/dispari, … .

Alla configurazione che apre, cioè con tutte le maniglie in orizzontale, assegno, a ognuna di esse, il valore zero.

Per quanto già detto se rieseguo le mosse che mi hanno portato a una posizione ritorno a quella di partenza.

Cerco quindi di trovare un modo di ricostruire i passi fatti per raggiungere una determinata posizione finale.

Le stesse mosse saranno quelle che mi permettono di tornare alla posizione iniziale e aprire la cassaforte.

Le regole della “pseudo algebra”, da applicare quando si muove una determinata maniglia, sono:

- somma 1 alle maniglie sulla sua stessa riga

- somma–1 a quelle sulla sua stessa colonna

- lascio immutato il valore della maniglia girata (sommerei uno siccome è chiaramente sulla sua stessa riga e –1 per essere sulla stessa colonna, quindi 0).

Noto che così facendo la somma dei valori assegnati a tutte le maniglie continua comunque a rimanere uguale 0.

La parità dei valori delle maniglie indica, inoltre, come saranno sistemate dopo aver girato quelle verticali.

A maniglie con valori dispari corrisponderanno, per stesse posizioni, maniglie verticali e orizzontali a valori pari.

Vale inoltre quanto detto per le maniglie che si trovano in posizione diversa prima di girare quelle verticali.

Tali maniglie sono quelle da dover girare per tornare alla posizione di partenza con tutte in orizzontale.

Sono le stesse che hanno portato alla posizione finale qualsiasi sia stato l’ordine in cui sono state mosse.

Allego tre esempi che dovrebbero chiarire quanto ho esposto; spero di non far perdere tempo con stupidaggini.

Ciascuno dei tre esempi è illustrato per mezzo tre riquadri allineati in sequenza su di una stessa riga.

Il primo riquadro rappresenta la posizione finale dopo che sono state girate le maniglie evidenziate in rosso.

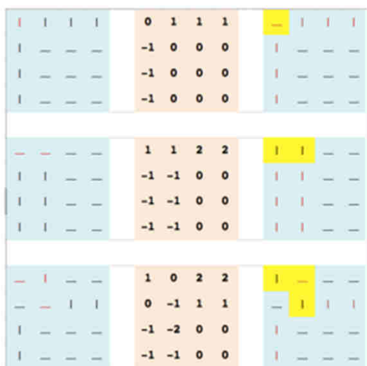
Tale posizione è quella da cui partire per aprire la cassaforte; le mosse sono le stesse che hanno portato a essa.

Il secondo riquadro evidenzia i valori assegnati alle maniglie dall’”algebra” applicata alle mosse effettuate.

Nel terzo riquadro le maniglie sono nella posizione raggiunta dopo aver girato quelle in verticale.

Anche qui le maniglie girate sono evidenziate in rosso; con sfondo giallo quelle da girare per aprire la cassaforte.

La parità dei valori nel secondo riquadro fornisce la posizione del terzo: pari=orizzontale, dispari=verticale.



Aggiungo due considerazioni, una sul discorso dei valori che si assegnano l'altra sulle proprietà delle mosse.

Ripetendo le mosse per tornare alla posizione che apre la cassaforte tutti i valori delle maniglie raddoppiano.

Se invece inverto il calcolo: sommo 1 per stessa colonna e –1 per stessa riga, ritorno con tutte maniglie a valore 0.

Considero ora l'insieme G di tutte le combinazioni di mosse possibili definite come segue:

- esiste la mossa I che consiste nel non muovere alcuna maniglia
- una combinazione è composta da 0 a "n" mosse, con "n" numero totale di maniglie
- l'ordine in cui muovo le maniglie di una combinazione è ininfluente
- ogni maniglia può essere mossa al più una sola volta in una combinazione.

Assegno all'insieme un'operazione binaria "*" che abbina due combinazioni per ottenerne una terza come segue:

- se una maniglia è mossa in entrambe le combinazione non è presente nella terza ottenuta
- tutte e solo le restanti maniglie mosse nelle due combinazioni sono presenti nella terza.

Considero la combinazione F in cui sono mosse tutte le "n" maniglie e vedo che porta ad averle tutte in verticale.

Si può dimostrare per induzione:

- parto con "n" = 4 e verifico che è vero
- gli aggiungo ora una "cornice" di una maniglia tutto attorno e ottengo "n" = 16
- inizio muovendo le 4 maniglie centrali
- come prima le 4 centrali saranno verticali e le rimanenti nella "cornice" rimarranno tutte in orizzontali
- quelle d'angolo, infatti, non sono state girate e le altre lo sono 2 volte rimanendo quindi com'erano
- completo, ora, muovendo tutte le maniglie sulla "cornice"
- mi ritrovo con tutte le maniglie in verticale
- quelle in "cornice" sono girate un numero dispari , cioè 3, di volte passando quindi da orizzontale a verticale
- le 4 centrali, al contrario, girandosi un numero pari, cioè 2, di volte rimarranno verticali
- il processo di dimostrazione si può iterare per "n" = 36, 64, … .

Abbinando una combinazione con quella le cui mosse sono tutte quelle non presenti nella prima giungo a F.

Mi pare che l'insieme G={I,A,B,C,…,F} con l'operazione binaria "*" sia un gruppo commutativo:

- identità = I
- proprietà associativa: A*(B*C) =(A*B)*C
- esistenza dell'inverso: A*A=I
 (ogni elemento è l'inverso di se stesso)
- proprietà commutativa: A*B=B*A.

Dovrebbe essere un gruppo finito poiché la cardinalità di G è 2^n = tutte le combinazioni di mosse possibili.

Siccome l'inverso è univoco, da due combinazioni non si ottiene mai la stessa disposizione di maniglie.

> Da I*F=F, in cui le maniglie cambiano tutto di stato, si ricava che lo stesso vale per qualsiasi A*F=B.
>
> Per capirci tutte le maniglie che in A erano in verticale in B sono in orizzontale e viceversa.
>
> Da (A*A)*F=A*B → I*F=A*B → F=A*B si ricava che B è composto di tutte e sole le mosse non presenti in A.
>
> Mi rendo conto che non ho chiarito completamente, ma è quanto di meglio (o peggio) sono riuscito a fare.
>
> Posso solo aggiungere che mi pare il tutto dipenda da quanto detto sulla parità e le proprietà dell'aggeggio.

Va bene, ma non finisce qui:

> Si può anche "ragionarla" servendosi della parità concernente il numero di volte che una maniglia è girata.
>
> Di seguito provo a documentare cosa penso si possa desumere da ciò.
>
> Se la combinazione delle mosse comprende tutte le maniglie, ciascuna è girata un numero dispari di volte.
>
> Gira tutte le volte che la mossa riguarda una maniglia sulla sua stessa riga e colonna compresa lei.
>
> Se, per esempio, inizialmente è in posizione orizzontale, dopo "n"=dispari mosse la maniglia sarà in verticale.
>
> Muovendo su tutte le maniglie partendo da una loro posizione iniziale si finisce in quella complementare.
>
> Spiego: le maniglie che inizialmente erano orizzontali al termine saranno verticali e viceversa.
>
> Partendo con tutte le maniglie in orizzontale me le ritroverò quindi, al termine, tutte in verticale.
>
> Se una configurazione di mosse è complementare a un'altra, lo saranno anche le posizioni delle maniglie.
>
> Spiego:
>
> - parto da una stessa posizione di maniglie ed eseguo le mosse di una configurazione
> - faccio lo stesso eseguendo le mosse della sua configurazione complementare
> - confronto la posizione delle stesse maniglie al termine delle due configurazioni di mosse
> - le maniglie che nella prima sequenza sono verticali nella seconda sono orizzontali e viceversa.
>
> La cosa si può dimostrare come segue:
>
> - la sequenza di mosse di una configurazione e dalla sua complementare è quella che le muove tutte
> - come già detto eseguendo le due configurazioni di seguito mi ritrovo con tutte le maniglie capovolte
> - partendo con tutte in orizzontale, dopo la prima configurazione ve ne sono sia in orizzontale sia in verticale
> - la seconda configurazione gira solo quelle in orizzontale per averle al termine tutte in verticale
> - quelle che sono già in verticale sono, quindi, girate un numero pari di volte e le altre un numero dispari
> - partendo con tutte in orizzontale, perciò, con essa si giunge alla posizione complementare alla prima
> - girando un numero pari di volte quelle che con la prima finiscono verticali, le stesse restano orizzontali
> - discorso opposto per quelle orizzontali con la prima; quindi la posizione finale risulta complementare.
>
> Si ha quindi una relazione binaria fra le configurazioni di mosse e la posizione

finale delle maniglie.
Questa relazione ha le seguenti proprietà:
- in due relazioni con configurazioni complementari lo sono anche le loro posizioni finali e viceversa
- relazioni con configurazioni diverse hanno anche posizioni finali, dopo le mosse, diverse e viceversa
- per giustificarlo uso i simboli e quanto già detto per il gruppo commutativo (G,*):
-- chiamo A,B le due configurazioni diverse e " a " la posizione finale comune alle due
-- chiamo inoltre A',B' le configurazioni diverse e " *a'* " le posizioni complementari comuni
-- le relazioni sono (A,*a*),(B,*a*) e (A',*a'*) e (B',*a'*)
-- ho A*A'=F, A*B'=F → A*A'*A*B'=I →A*A*A'*B'=I →A'*B'=I
-- ma sappiamo che ogni configurazione è l'elemento inverso di se stessa
-- l'unica possibilità per A'*B'=I è, di conseguenza: A'=B'=I ma ciò è impossibile poiché A è diverso da B.

Mi pare che il gruppo (G°,*), con G° insieme di tutte le possibili combinazioni di posizioni verticali, sia isomorfo a (G,*).
Tento di giustificare ora il metodo con cui determino le mosse da fare per aprire la cassaforte:
- per I è ovvio, basta aprire senza fare alcuna mossa: non avendo maniglie in verticale da girare il metodo funziona
- per F girandole ritorno nuovamente a I; il metodo anche qui funziona perché sono tutte da girare
- considero ora una configurazione con un'unica mossa
- le sole maniglie in verticale sono quelle sulla stessa riga e colonna oggetto della mossa
- rigirando quelle risultanti in verticale, solo la maniglia che ha generato la mossa, cambia di posizione
- è l'unica maniglia, infatti, che è girata un numero dispari di volte: 2*N – 1 con N = lato del quadrato
- si può poi iterare la dimostrazione procedendo passo dopo passo di mossa in mossa.
Adesso mi gira anche un po' la testa ...

Anche a noi a dire il vero, ma non siamo ancora al fondo, sempre ***Valter***:

Mi pare di aver individuato un algoritmo goloso che permette di aprire la cassaforte con la stessa complessità computazionale dei precedenti. Ha il grosso vantaggio, rispetto a quelli che ho esposto, che non richiede di individuare e segnarsi inizialmente le maniglie da girare. Inoltre, anche sbagliando a girare una maniglia durante i passaggi si arriva sempre ad aprire, con un po' più di mosse, se in seguito lo si rispetta.

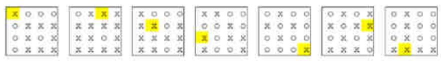
Le istruzioni dell'algoritmo sono le seguenti:

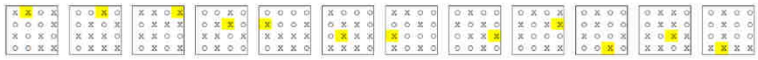
- cerco la prima maniglia verticale per cui, compresa lei, ce ne sono un numero dispari, sommando quelle sulla sua stessa riga e colonna, e la giro

- se non ve ne sono e non posso ancora aprire cerco la prima orizzontale con un numero pari di maniglie su stessa riga e colonna e la giro

- iterando dovrei sempre riuscire a proseguire con le mosse sino ad avere tutte le maniglie in orizzontale e quindi poter aprire la cassaforte.

Allego l'immagine di due esempi, il primo riguardo di ogni riga è la posizione iniziale e con sfondo giallo la maniglia che l'algoritmo mi dice di girare.





Manca la situazione in cui devo girare una maniglie in orizzontale in quanto non vi sono maniglie verticali che l'algoritmo mi indica da girare (per verificare anche questo caso basta partire con un riquadro 2x2 in cui 2 maniglie su una riga sono orizzontali e le altre due, sull'altra riga, verticali).

Bene, alcuni pezzi della soluzione di ***Valter*** li abbiamo lasciati da parte, ma speriamo di aver preso le parti fondamentali. Adesso direi che siamo pronti per la soluzione di ***trentatre***:

Il problema equivale a una matrice A con 1 e 0 per le maniglie verticali e orizzontali

[1] $A=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$

La cassaforte si apre[11] quando tutte le maniglie diventano 1. Siano

P_{nk} un elemento della matrice generica P

$U=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$, $Z=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

E_{nk} : matrice con 1 solo in (n,k) , G_{nk} : matrice Z *girata* in (n,k)

p.es. $E_{32}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, $G_{32}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$

Definiamo l'operatore $\oplus$ con

[2] $R=P\oplus Q$ se $R_{nk}=P_{nk}\oplus Q_{nk}$ per ogni elemento

$\oplus$ è la *disgiunzione esclusiva* o *XOR* per cui vale $0\oplus 0=1\oplus 1=0,\ 0\oplus 1=1\oplus 0=1$

$\oplus$ è commutativo e associativo.

Valgono le

[3] $P\oplus P=Z$, $P\oplus U=P^c$, $P\oplus P^c=U$

dove P^c è il complemento di P: tutti gli elementi scambiati $(0\leftrightarrow 1)$.

Per ogni P definiamo la matrice

[4] $[P]$ che si ottiene sostituendo $E_{nk}\to G_{nk}$ - p.es.

$P=E_{11}\oplus E_{32}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\to$

$[P]=G_{11}\oplus G_{32}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&0\\0&1&1&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}$.

Se in A *giriamo* le maniglie corrispondenti ai $P_{nk}=1$ il risultato è $[P]\oplus A$

- la soluzione di A si ha quando $[P]\oplus A=U$ che per [3] è $[P]=A\oplus U=A^c$

[11] Se la cassaforte si apre con tutte le maniglie uguali a 0, basta sostituire in [5] $P=[A]$.

- quindi $[P]=A^c$ è noto e occorre da questo ricavare P - vale l'identità

[5] $[[P]]=P$ da cui $P=[A^c]$

- che si calcola con [4] come somma dei G_{nk} corrispondenti ai $A_{nk}=0$

Per il problema specifico [1] si ha

$$[A^c]=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

- le maniglie da girare sono A_{12} e A_{33}.

Per qualsiasi problema A esiste una e una sola soluzione.

La soluzione non vale solo per matrici 4×4 <u>ma per tutte le matrici quadrate $n\times n$ con n pari</u>.

Manca la dimostrazione di [5]

- per ogni E_{nk} vale $[[E_{nk}]]=E_{nk}$ (basta verificarlo per E_{11})

- in [4] P è una somma di E_{nk} - quindi $[[P]]$ è la stessa somma di $[[E_{nk}]]=E_{nk}$ da cui la [5].

E adesso basta, è già marzo. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Partizionate gli interi positivi in due sottoinsiemi A e B in modo tale che contengano progressioni aritmetiche di ogni lunghezza finita ma non contenga una progressione aritmetica di lunghezza infinita.

Partizioniamo gli interi positivi in sottoinsiemi aventi cardinalità 1, 2, 3,…*:*

(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), (11, 12, 13, 14, 15), ...

Quindi costruiamo i sottoinsiemi richiesti assegnando alternativamente i sottoinsiemi ad A e B:

A = (1; 4, 5, 6; 11, 12, 13, 14, 15; …)

B = (2, 3; 7, 8, 9, 10; 16, 17, 18, 19, 20, 21; ...)

In questo modo sia A che B contengono intervalli di interi consecutivi di qualsiasi lunghezza (in A le lunghezze dispari, in B quelle pari), che sono progressioni aritmetiche. Non solo, ma sia A che B sono perforati[12] *da intervalli sempre crescenti di interi consecutivi, il che impedisce che una progressione possa "sforare" nella successiva.*

6. Pagina 46

Fattorizzando il 3 in n, $n = 3^k t$ otteniamo un naturale t non ulteriormente divisibile per 3 e almeno pari a 1. Quindi, per un qualche s non negativo, $t = 3s + r$, dove r vale 1 o 2.

Quindi

$$\begin{aligned} p &= 4^{3^k\cdot t}+2^{3^k\cdot t}+1\\ &= \left(2^{3^k\cdot t}\right)^{2\,t}+\left(2^{3^k\cdot t}\right)^{t}+1 \end{aligned}$$

Si dimostra facilmente che questa espressione contiene il fattore

$$F=\left(2^{3^k}\right)^2+2^{3^k}+1 \quad .$$

[12] Non sappiamo se questo termine sia matematicamente corretto: lo prendiamo a prestito dalle specifiche tecniche dei metodi di codifica sull'interfaccia aerea della telefonia mobile di seconda generazione.

Consideriamo il caso $r = 1$, essendo il caso $r = 2$ perfettamente analogo.

Posto $x = 2^{3^k}$ e notato che $t = 3s + 1$, si ha:

$$Z = \left(2^{3^k}\right)^{2t} + \left(2^{3^k}\right)^{2} + 1 = x^{6s+2} + x^{3s+1} + 1$$

Il nostro scopo è di dimostrare che $F = (x^2 + x + 1)$ è un fattore di Z; moltiplicando entrambi i termini per $(x - 1)$, otteniamo:

$$\begin{aligned}(x-1)F &= x^{6s+3} + x^{3s+2} + x - x^{6s+2} - x^{3s+1} - 1\\ &= \left(x^{6s+3} - 1\right) - \left(x^{6s+2} - x^{3s+2}\right) - \left(x^{3s+1} - x\right)\\ &= \left[\left(x^3\right)^{2s+1} - 1\right] - x^{3s+2}\left[\left(x^3\right)^{s} - 1\right] - x\left[\left(x^3\right)^{s} - 1\right]\end{aligned}$$

dove ogni termine contiene un fattore della forma $(x^3)^m - 1$. Per ogni intero m,

$$\left(x^3\right)^m - 1 = \left(x^3 - 1\right)\left[\left(x^3\right)^{m-1} + \left(x^3\right)^{m-2} + \ldots + x^3 + 1\right],$$

e quindi $(x^3 - 1)$ è fattore di $(x - 1)\,Z$. Ma ricordando che $(x^3 - 1) = (x - 1)\,(x^2 + x + 1)$, si ha che $(x^2 + x + 1)$ deve essere fattore di Z.

Sotto questa assunzione, essendo p un numero primo e F maggiore di 1, deve essere $F = p$ e quindi:

$$p = \left(2^{3^k}\right)^{2t} + \left(2^{3^k}\right)^{t} + 1 = F = \left(2^{3^k}\right)^{2} + 2^{3^k} + 1$$

Nell'ipotesi $t > 1$, ognuno dei primi due termini della prima espressione sarebbe maggiore del termine equivalente della seconda, invalidando l'uguaglianza: deve quindi essere $t = 1$ e, conseguentemente, $n = 3^k\,t = 3^k$.

7. Paraphernalia Mathematica

Il concetto di "bella dimostrazione" è arduo da definire: i motivi possono essere i più vari, ma questa ci piace in quanto pare un "cammino dell'ubriaco", girando per i punti più strani per finire in un luogo inaspettato: cerchiamo di seguire un discorso vagamente logico.

7.1 Passaggi sconnessi

Partiamo da un *reticolo cartesiano*: un punto (a, b) è detto *visibile dall'origine* se non esiste nessun altro punto più prossimo all'origine che ne copra la visuale; si vede facilmente che un punto è visibile dall'origine *se e solo se a e b sono primi tra loro*.

Restiamo nel reticolo cartesiano, ma cambiamo discorso.

Consideriamo un triangolo avente i vertici sui punti del reticolo, ma nessun altro punto del reticolo né all'interno né sui lati, e definiamo un triangolo di questo tipo come *triangolo primitivo*.

Restiamo sui triangoli, ma cambiamo discorso.

Ricordiamo che l'area di un triangolo avente vertici in $(x_1, y_1|$, $(x_2, y_2|$, $(x_3, y_3|$ ha area:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(x_1 \ y_2 + x_2 \ y_3 + x_3 y_1 - x_1 \ y_3 - x_2 \ y_1 - x_3 y_2 \right).$$

Se i vertici sono sul reticolo intero, l'espressione tra parentesi assume comunque un valore intero, e varrà zero solo se i tre punti sono collineari (e quindi non esiste il triangolo). Quindi la parentesi nel caso di triangoli reali varrà almeno 1, quindi l'area di un triangolo qualsiasi con i vertici sui punti del reticolo avrà area almeno 1/2.

Restiamo nella geometria, ma cambiamo discorso.

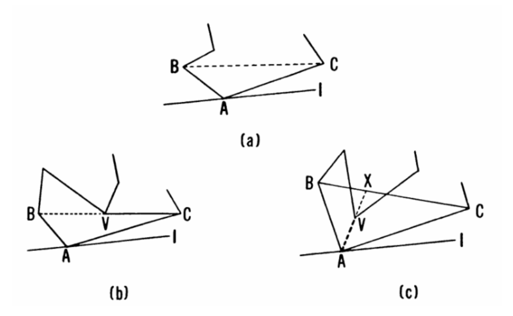
Un *poligono semplice* è un poligono nel quale nessun lato interseca un altro lato. Si può dimostrare che *un poligono semplice può essere decomposto in triangoli per mezzo di diagonali tra di loro non intersecantesi*. La dimostrazione procede per induzione, anche se in un modo piuttosto strano: è evidente che la cosa funziona per i quadrilateri (anche quelli concavi: basta andare dall'angolo della concavità all'angolo opposto, e avete i due triangoli); qui, l'induzione lavora sul fatto che ci basta dimostrare che se un poligono ha v vertici, può essere diviso in due sub-poligoni da una diagonale *completamente interna al poligono*: nel peggiore dei casi, il sub-poligono più grande avrà $v - 1$ vertici (e l'altro sarà un triangolo); a questo punto, supponendo il teorema dimostrato per $v - 1$, il nostro teorema sarebbe dimostrato.

Restiamo dalle parti del poligono, ma cambiamo discorso.

Prendiamo una linea l senza punti in comune con il poligono (questo si può sempre fare, visto che il nostro poligono è limitato): spostiamo l verso il poligono sin quando l ha un punto (e uno solo) in comune con il poligono: il punto in comune deve essere un vertice, che chiameremo A. Se B e C sono i due vertici adiacenti ad A, allora ci sono solo tre casi possibili (autoescludentesi):

1. La linea BC è una diagonale interna del poligono *[caso "semplice": pensate ad un poligono convesso]*.
2. C'è almeno un altro vertice del poligono su BC *[siete stati abbastanza sfortunati da prendere i due vertici sulla cui congiungente c'è un vertice concavo del poligono]*.
3. C'è almeno un altro vertice del poligono dentro il triangolo ABC *[il vertice concavo è all'interno del vostro triangolo]*.

Nel primo caso, abbiamo trovato il nostro triangolo, e abbiamo finito.



1 *I tre casi.*

Nel secondo caso, *ABC* è comunque un triangolo, e possiamo considerare le due parti restanti (avente in comune il vertice che incontra la nostra linea) come due sub-poligoni che sicuramente possiamo triangolare.

Nel terzo caso, sia *X* un punto libero di muoversi su *BC* da *B* verso *C*, e si consideri il segmento *XA*; questo segmento, al muoversi di *X*, incontrerà un primo vertice *[nulla vieta nel movimento ne incontri più di uno] V*: in questo modo, otteniamo una diagonale (interna) *AV* del nostro poligono.

Restiamo nei poligoni, ma cambiamo discorso.

Consideriamo un triangolo *ABC* i cui vertici siano punti del reticolo: se il triangolo non ha altri punti del reticolo sui lati o al suo interno, è un triangolo primitivo.

Se *ABC* ha punti del reticolo sui lati *ma nessuno al suo interno*, consideriamo uno dei lati contenenti uno o più punti del reticolo, e uniamoli al vertice opposto: i triangoli formati sono tutti primitivi. Se anche un altro lato ha dei punti del reticolo al suo interno, possiamo sempre unirli al punto "più vicino" del primo lato che abbiamo diviso.

Se *ABC* ha *un* punto del reticolo al suo interno, possiamo unire questo punto con i tre vertici, ottenendo tre triangoli senza punti del reticolo all'interno.

Se i punti del reticolo all'interno di *ABC* sono più di uno, scelto un punto a caso e unito con i vertici, otterremo tre triangoli ciascuno dei quali avrà al suo interno meno punti del reticolo rispetto al triangolo originale.

Quindi se *ABC* ha punti del reticolo al suo interno, possiamo prima decomporlo in sub-triangoli senza punti del reticolo al loro interno *ma con punti del reticolo sui lati*, e quindi procedere con il metodo visto al punto precedente. Quindi, ogni triangolo può essere decomposto in triangoli primitivi.

Restiamo sui triangoli primitivi, ma cambiamo discorso.

Dicevamo che l'area di uno di questi oggetti è *almeno* 1/2.

Prendiamo il nostro triangolo primitivo, e inscriviamolo in un rettangolo in modo tale che le altezze del rettangolo appoggino sui vertici "più a sinistra" e "più a destra" del triangolo, mentre le due basi appoggiano sul vertice "più in basso" e "più in alto". Il nostro rettangolo avrà k punti del reticolo al suo interno, e l punti sui lati: di questi ultimi, quattro saranno vertici del rettangolo e gli altri $l - 4$ saranno sui lati.

Restiamo nel rettangolo, ma cambiamo discorso.

OK, è possibile partizionare il rettangolo in triangoli primitivi, ma quanti sono questi nelle diverse partizioni?

Restiamo nelle partizioni, ma parliamo di angoli.

Ogni punto del reticolo interno al rettangolo è un vertice comune ad alcuni triangoli primitivi che, evidentemente, assommano a 360°; se ci sono k punti all'interno del rettangolo, in totale sono $360\,k$ gradi.

Se un punto del reticolo è su un lato (ma non in un vertice), gli angoli dei triangoli primitivi contribuiscono per 180° in questo punto: siccome questi punti sono $l - 4$, abbiamo che il contributo è $180\,(l - 4)$.

Per quanto riguarda i vertici, i triangoli primitivi assommano a 90° per ogni vertice, quindi $4 \cdot 90° = 360°$.

La somma di tutti gli angoli interni degli n triangoli primitivi è quindi:

$$360\,k + 180\,(l - 4) + 4 \cdot 90.$$

Ma se ogni triangolo ha somma degli angoli interni pari a 180°, abbiamo:

$$180\, n = 360\, k + 180\, (l - 4) + 4 * 90 \Rightarrow n = 2k + l - 2.$$

Quindi, il *numero dei triangoli* in ogni partizione dipende da k e da l, non dalla partizione.

Restiamo nelle partizioni, ma cambiamo discorso.

Il nostro rettangolo è *partizionabile* in n triangoli primitivi congruenti *[isosceli rettangoli]*, ciascuno di area 1/2: per quanto abbiamo mostrato prima, l'area del rettangolo deve essere pari a $n/2$.

Torniamo al poligono sul reticolo, ma cambiamo discorso.

Supponiamo di avere un poligono "semplice" con p punti del reticolo sul perimetro e q al suo interno. Sappiamo che questo poligono può essere partizionato in triangoli primitivi e, utilizzando il metodo usato per il rettangolo, possiamo dimostrare che il numero dei triangoli primitivi è sempre lo stesso.

Supponiamo ora il poligono abbia v vertici, tutti sui punti del reticolo: se escludiamo quelli che si trovano nei vertici, avrà $p - v$ punti del reticolo sui lati; in gradi, il contributo di ogni triangolo primitivo verrà ad essere:

1. 360 q per tutti i punti del reticolo interni al poligono;
2. 180 $(p - v)$ per tutti i punti del reticolo sui lati (ma non nei vertici);
3. 180 $(v - 2)$ per tutti i punti sui vertici (come in ogni poligono).

Se nella partizione ci sono n triangoli, la somma di tutti i loro angoli è 180 n, quindi:

$$180\, n = 360\, q + 180\, (p - v) + 180\, (v - 2).$$

e

$$n = 2\, q + p - v + v - 2 = 2\, q + p - 2.$$

Se ogni triangolo ha area 1/2, il poligono ha area:

$$n/2 = q + p/2 - 1$$

E questo è il ***Teorema di Pick***.

Cambiamo discorso?

Consideriamo[13] la sequenza F_n delle frazioni proprie ridotte ai minimi termini per cui il denominatore sia minore di n, cui aggiungiamo all'inizio e alla fine i termini 0 e 1: ad esempio,

$$F_4 = \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$$

Essendo ridotte ai minimi termini, la frazione a/b implica che a e b siano primi tra loro, e quindi che (a, b) sia un *punto visibile dall'origine* del reticolo degli interi.

Dovendo essere (nel nostro caso, ma la cosa è facilmente generalizzabile) il denominatore minore di 4 (sia n), il numeratore sarà al più uguale a 3 (ossia $n - 1$): quindi i punti che rappresentano le frazioni di Farey giacciono all'interno del rettangolo definito da O(0, 0), G(3, 0), H(3, 4) e K(0, 4).

Essendo le frazioni proprie, quindi con il numeratore minore del denominatore (tranne l'ultima, 1/1), giaceranno tutte al di sopra della linea $y = x$; questo significa che tutti i punti visibili rappresentanti le frazioni di Farey giaceranno all'interno del quadrilatero definito da:

1. asse y
2. linea $y = x$
3. $x = 3$
4. $y = 4$.

I *soli* punti visibili di questa regione sono quelli associati a F_4: infatti, se un punto visibile è sull'asse x deve essere l'origine (gli altri punti non sono nella regione); se un punto

[13] Sono note come *Frazioni di Farey*. Dovremmo averne già parlato.

visibile è sulla retta $y = x$ deve essere il punto (1, 1) (altrimenti questo punto non sarebbe visibile); in genere, il punto (u, v) nell'area considerata per essere visibile deve avere:

- $u < v$, in quanto deve essere al di sopra della linea $y = x$.
- $u \leq 4$, in quanto deve essere sulla linea $y = 4$ o al di sotto di essa.
- u e v devono essere primi tra loro, in quanto il punto è visibile.

Insomma u/v deve essere una frazione propria con denominatore minore di 4 e ridotta ai minimi termini: ma questa non è altro che la definizione di frazione di Farey, e quindi appartiene all'insieme F_4.

Le varie rette che uniscono l'origine ad un punto visibile hanno coefficiente angolare pari alla relativa frazione di Farey, e formano una "stella"[14]: elementi consecutivi della serie di frazioni identificano rette consecutive del nostro oggetto.

Siano ora a/b e c/d frazioni di Farey consecutive e (a, b) e (c, d) i loro punti corrispondenti sul reticolo. Se sono frazioni consecutive, le due rette dello *Strahlkörper* che uniscono l'origine ai punti sono due rette *consecutive*, quindi sicuramente *non ci sono punti visibili* nel triangolo (0, 0), (a, b), (c, d) (o sui suoi lati, con l'eccezione dei tre vertici). Se non ci sono punti visibili, non ci sono punti del reticolo all'interno: quindi questo identificato è un *triangolo primitivo* e quindi ha area 1/2.

Se calcoliamo l'area attraverso il determinante della matrice, abbiamo:

$$Area = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(b \cdot c - a \cdot d) = \frac{1}{2}$$

Da cui, ***per due frazioni di Farey consecutive, è sempre*** $bc - ad = 1$.

E adesso basta.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[14] Ci pare di ricordare che questo oggetto si chiami *Strahlkörper*, che letteralmente significa *corpo radiante*.