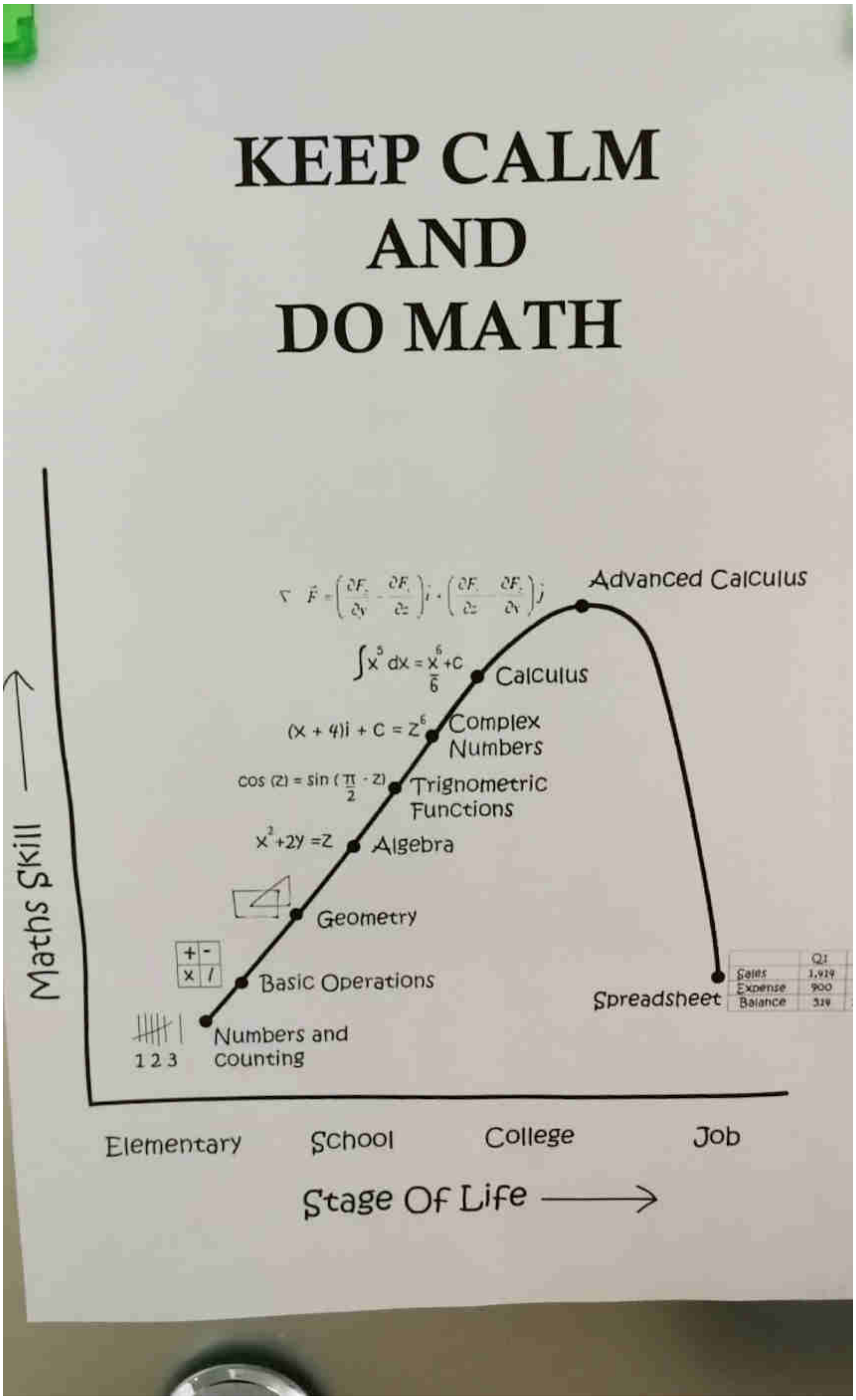
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 241 – Febbraio 2019 – Anno Ventunesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM241 ha diffuso 3'304 copie e il 02/02/2019 per Google eravamo in 8'950 pagine.

Un grafico vale più di mille parole, e non c'è dubbio che quello messo in copertina sia drammaticamente significativo. Si trova facilmente in rete, anche se non siamo riusciti ad avere certezza dell'autore (una versione è siglata "*Pearls of Raw Nerdism*", ma questo non aiuta granché). Anche per questo preferiamo mettere in copertina, più che l'immagine chiara e pulita, la "vera" foto scattata sulla scrivania di ***Davide***, giovane matematico/ingegnere che solo da poco sta toccando con mano la possente verità di quella curva.

1. Gente di mare

"L'abilità tecnica consente di padroneggiare la complessità, la creatività consente di padroneggiare la semplicità."

Sembra quasi che ogni generazione abbia il suo ciclo "fantasy" di riferimento.

Non sono più giovanotti i primi adoratori della saga de "Il Signore degli Anelli" di Tolkien, almeno non quanto coloro che sono cresciuti cercando di farsi venire una fulminea cicatrice sulla fronte identica a quella di Harry Potter. E, più recentemente, si rischia di restare tagliati fuori dalle amene conversazioni da pausa caffè se non si conoscono almeno i punti fondamentali de "Il Trono di Spade".

A ben vedere, però, ricondurre tutto a confronto generazionale è certamente frettoloso, se non del tutto sbagliato. Innanzitutto, proprio per questioni meramente temporali: Tolkien pubblica "*Lo Hobbit*" nel 1937, la Rowling dà alle stampe il primo volume di Harry Potter, "*Harry Potter e la pietra filosofale*", ben sessant'anni dopo, nel 1997; per contro, le "*Cronache del ghiaccio e del fuoco*" di George R.R. Martin, che si possono considerare come il primo romanzo che ha dato il via al "Trono di Spade", sono addirittura del 1996, quindi tecnicamente addirittura più vecchi della saga di Harry Potter. La discrasia temporale è però peccato solo veniale: la data di nascita di un'opera assai spesso non coincide con il periodo della sua massima notorietà, e casi di eccezionali ritardi in questo senso sono tutt'altro che rari: lo stesso Tolkien è diventato un'icona di fama mondiale solo negli anni Sessanta e Settanta, vale a dire poco prima della sua morte, avvenuta nel 1973[1].

Più in generale, ci si potrebbe avventurare nella definizione stessa di "fantasy"; non c'è dubbio che – quasi per definizione – sia il genere con più gradi di libertà di coniugazione, quello con minori vincoli narrativi. Un giallo deve muoversi tra detective e morti ammazzati, un western richiede pistoleri, pellerossa e cow-boy; persino la fantascienza, che pure a libertà di sviluppo narrativo non scherza, ha qualche vincolo da rispettare, se vuole mantenersi tale: ad esempio, il rispetto delle leggi fondamentali della natura, anche se si concede la libertà di violarle a patto che specifici, da qualche parte del racconto, che un grande scienziato ha trovato un metodo (scientifico) per aggirarle. Forse per questa ragione è abbastanza difficile, per i puristi, decidere se il ciclo di maggior impatto dell'ultimo mezzo secolo, "*Star Wars"*, sia da classificare come vera fantascienza o come una sorta di fantasy collocata temporalmente nel futuro, anziché nel passato come è solita fare. Rimane il fatto che il fantasy non è tanto caratterizzato da "ciò che non può trattare", quanto dall'utilizzo, meglio ancora dalle dosi, con cui tratta elementi che è difficile, se non proprio impossibile, inserire in altri generi: la magia sopra ogni altra cosa, ma anche creature fantastiche, percezioni extrasensoriali, draghi, pozioni, nani, elfi, fate, dei, stregoni, e la lista potrebbe continuare ancora a lungo.

Certo è che l'industria dell'intrattenimento, che una volta chiedeva solo saltuariamente, con garbo e perfino con una punta di timidezza la "sospensione del giudizio" per potere avere il via libera a raccontare una storia ("*Caro spettatore, lo sappiamo bene tutti e due che non si può viaggiare più veloci della luce, ma se mi fai passare l'idea della velocità curvatura, ti delizierò con un sacco di strambe avventure con il capitano Kirk e il signor Spock…*"), adesso si è fatta indubbiamente più sfacciata. Non c'è quasi mese che non veda

[1] …e non si può certo dire che sia stato l'artista più sfortunato della storia: basti ricordare che Vincent Van Gogh è riuscito a vendere un solo quadro in tutta la sua vita, e a un prezzo infinitamente inferiore all'attuale quotazione della sua più minuscola pennellata. Per non parlare di casi ancora più strani come quello di Johann Sebastian Bach, che è stato ragionevolmente apprezzato in vita, ma poi quasi totalmente dimenticato: solo grazie a Felix Mendelssohn, cent'anni dopo la sua morte, il suo nome è tornato a risuonare nelle stanze musicali, per assestarsi definitivamente tra i più grandi della storia della musica.

l'uscita di un mirabolante film basato sui supereroi della Marvel o della DC Comics, e che il pubblico sia dispostissimo a sospendere il giudizio sulle condizioni iniziali del racconto è ben dimostrato dal fatto finiscono immancabilmente in testa alla classifica dei film più visti. Anzi, dal punto di vista filologico sono anche la prova evidente dei meccanismi di nascita e sviluppo dei miti e delle leggende: chi abbia avuto la ventura di voler sfogliare un testo di mitologia conosce bene quel senso frustrante che compare quando, di un determinato mito, si scopre che ne esistono molte, e spesso diversissime versioni. Finissero mai con l'essere tramandati ai posteri i contemporanei eroi in calzamaglia, non sarebbe molto diversa la sensazione che proverebbero i futuri esegeti di Spiderman o di Batman, in mezzo alle decine di narrazioni diverse che dovrebbero comparare e integrare.

Il punto cruciale, come quasi sempre, è da ricercare nella consolidata legge economica della domanda e dell'offerta: la coerenza narrativa – specialmente quando lo stesso tema è sviluppato da interpreti diversi – è un valore del tutto accessorio, sempre che sia un valore; e finché c'è un pubblico disposto a pagare pur di essere stupito dalle imprese di un personaggio che ha ormai imparato ad amare, va bene anche stravolgerne tutte le caratteristiche, a parte quelle poche che servono proprio ad identificarlo come l'amato eroe. La sempiterna regola del mercato unita all'esaltante sviluppo tecnologico ha infine congiurato per portarci alla situazione attuale: la creazione degli "universi narrativi", un tempo, richiedeva soltanto un visionario e prolifico autore disposto a scrivere migliaia di pagine sul medesimo argomento, e un editore disposto a stampare e distribuire i suoi libri. Fin dalle origini l'industria cinematografica si è messa alla ricerca di buoni soggetti attorno ai quali costruire un film, e non c'è certo voluto molto ad esaurire o quasi i romanzi più famosi; così si è formata un'intera categoria di autori specializzati nello scrivere soggetti e sceneggiature per i film, ma senza comunque tralasciare di gettare un occhio a quelle nuove storie che, arrivate con successo in libreria, avevano le caratteristiche giuste per poter essere traslate su pellicola a 35 millimetri. Ed era quasi un premio speciale, per l'autore del libro: quando un romanzo finiva con il trasformarsi in un film, era come se si fosse ufficializzato che il libro era un capolavoro, e il suo autore un mezzo genio.

1 *Il Trono di Spade*

Le cose non sono cambiate poi molto, ma si sono amplificate, allargate, espanse grazie alla tecnologia dell'intrattenimento: romanzo e film sono ormai solo due canali – quasi certamente non i più importanti – per la diffusione delle "storie". In rapida successione sono arrivati fumetti, radio, televisione generalista, TV via cavo, merchandising, giochi di ruolo, videogame, e soprattutto Internet, che da sola fa da *hub* di almeno una mezza dozzina di nuovi canali, se non proprio di tutti. Così, se ottant'anni fa Tolkien si chiudeva in una stanza e decideva da solo la creazione, lo sviluppo e il destino degli abitanti della Terra di Mezzo, i personaggi degli universi fantastici contemporanei devono adattarsi ai rapidissimi cambiamenti di supporto e ambientazione: non per niente il titolo italiano "*Il trono di spade*" non ha lo stesso effetto dell'originale "*A Game of Thrones*", che sembra palesare già nel nome l'intento programmatico di diventare subito, quanto meno, un gioco da tavolo; come se il trasformarsi in una scatola piena di segnalini di plastica, dadi e tavoliere di cartone fosse l'obiettivo di base, il minimo sindacale per qualunque storia aspiri a diventare oggetto di culto.

La differenza è vieppiù marcata se la "destinazione naturale" della storia non è più, come un tempo, un supporto unitario (libro, film o gioco che sia), ma una serie televisiva. Sembra esserci uno strano parallelismo evolutivo tra il consenso dei consumatori di storie e quello dei consumatori della politica: un tempo, gli uomini politici si candidavano portando un programma, nella legittima speranza che questo piacesse agli elettori, e una volta assurti a cariche istituzionali cercavano (più o meno) di metterlo in atto. Il governo che formavano poteva piacere o meno, ma in ogni caso la verifica cruciale era rimandata alle elezioni successive, e nel frattempo c'era un periodo in cui la cura del consenso poteva essere almeno per un po' messa da parte (a meno di rivolte di piazza), tant'è vero che era uso comune riservare i primi anni di potere a mettere in opera le meno popolari tra le misure previste, per arrivare al momento cruciale della nuova campagna elettorale con qualche buona carta legislativa per ammansire l'elettorato. Ai giorni nostri, questo non accade più: non è detto che la ragione sia esclusivamente tecnologica, ma certo è che gli strumenti per misurare il consenso sono più numerosi, evoluti e soprattutto rapidi. Intorno alla metà del XX secolo, per avere un'idea ragionevole della volontà popolare, occorreva ordinare (e pagare) un sondaggio statistico laborioso e complicato, oltre che lento e costoso. Ora gli strumenti a disposizione consentono ai politici di carriera di avere un'idea quasi in tempo reale del tipo e grado di accoglienza del loro ultimo discorso, fosse anche solo quello fatto in occasione dell'inaugurazione di un nuovo impianto fognario. Questo comporta inevitabilmente che, a prescindere dal programma elettorale promesso, dalle necessità di intervento impopolare e – in ultima analisi – perfino a prescindere dalle personali opinioni etiche e politiche del governante, questi sarà influenzato nelle sue decisioni e scelte dai risultati dei sondaggi e degli umori palesati sui media e sui social network.

2 *George Gallup, il re dei sondaggi*

Gli autori delle serie televisive, seppur con molti meno rischi per la società e per il pianeta tutto, si ritrovano in una situazione analoga: una serie che ottenga un buon favore di pubblico dovrà subito, dopo le prime puntate, prendere in considerazione se mettere in campo o meno una seconda stagione; deciderà se porre più in risalto un personaggio amato o far sparire, con opportuni tempi e modi, quello che il pubblico trova antipatico, e così via, in un continuo sviluppo della trama che è alimentato (e quindi almeno in parte governato) dal gradimento del pubblico, salvo gli indispensabili colpi di scena a sorpresa dovuti sia alla necessità di ravvivare la trama (agli spettatori piace molto anche essere sorpresi), sia a problemi organizzativi, logistici e al turn-over del cast. Per molto tempo, quando usciva nelle sale un film tratto un romanzo famoso, si alzavano i commenti del pubblico e della critica sull'aderenza della pellicola al manoscritto originale: quasi sempre l'opinione pubblica maggioritaria concedeva l'onore delle armi al film, ma sosteneva che il libro ne uscisse vincitore. Risultato tutt'altro che sorprendente, visto che ogni romanzo richiede al lettore di trasformare dei segnetti neri d'inchiostro su carta in una scenografia, una sceneggiatura e un'ambientazione tutta organizzata in proprie immagini mentali. Nel leggere un romanzo, una gran parte del lavoro la fa il lettore, mentre allo spettatore seduto nella poltroncina di un cinema viene richiesto un lavoro di elaborazione narrativa minore; e di solito, quando facciamo qualcosa tendiamo a farla secondo i nostri gusti, quindi il libro parte naturalmente avvantaggiato. Per contro, una serie televisiva non può essere messa a confronto con un romanzo, anche se magari è tratta, almeno inizialmente, proprio da esso: specialmente se è una serie di successo, si adatterà facilmente ai gusti degli spettatori ed evolverà in funzione del responso dell'Auditel, con buon pace del canovaccio iniziale.

Mettendo insieme tutti gli elementi: la libertà narrativa del genere fantasy; la tecnologia che accelera la produzione, la diffusione e il proliferare dei canali di distribuzione; la natura di serie televisiva e la disponibilità di reagire rapidamente alla volatilità dei gusto degli spettatori, si ottiene come prodotto finale qualcosa che non è oggettivamente comparabile con un "libro", che quasi per definizione è opera fissa, definita da un Autore e soggetta all'interpretazione – di fatto altrettanto unica – di un Lettore. Si ottiene piuttosto un contenitore magico, in grado di far coesistere ambienti, storie, personaggi diversi, senza porsi reali richieste di coerenza, tanto meno delle canoniche unità di tempo, spazio e azione. Per di più, la continuità seriale data proprio dal successo di pubblico, di stagione in stagione, obbliga soggettisti e sceneggiatori a rincorrere almeno un colpo di scena per ogni finale di puntata, con relativi sviluppi arditi della trama e ripetuti innalzamenti dell'asticella che misura la difficoltà di indurre sorpresa nello spettatore. Qualcosa in cui, insomma, può entrare davvero di tutto, senza alcun pudore o richiesta di reale coerenza narrativa: e di questo "*Il Trono di Spade*" è un esempio perfetto.

Questo non comporta certo che il prodotto finale non sia godibile, tutt'altro: una produzione ad alto costo, ben recitata, scritta apposta per attrarre la curiosità del pubblico e variegatissima dal punto di vista dei possibili sviluppi narrativi si apre verso l'apprezzamento di un target assai vasto di estimatori, e anche di buona parte della critica.

Resta comunque divertente provare a considerare la fatica degli autori, che – forse proprio a causa dei molti scenari che devono necessariamente produrre e alimentare – non si fanno scrupoli di ispirarsi a qualsiasi fonte disponibile. Lo si vede fin dalla sigla iniziale che manifesta, con indubbio impatto, alcuni elementi fortemente caratterizzanti dello scenario. Il pezzo musicale che fa da sottofondo è di indubbia professionalità, con tamburi e trombe che danno un aulico tono marziale e anticheggiante, mentre il tema principale è articolato da un violoncello solista; l'atmosfera vagamente medievale è subito creata, e curiosamente sottolineata dalla scelta delle immagini scelte per introdurre la serie. Anziché affidarsi ai primi piani intensi dei protagonisti (anche perché lo spettatore farà un po' di fatica, prima di capire quali siano veramente i protagonisti e quali i comprimari, vista la facilità con cui vengono ammazzate quelle che inizialmente sembrano essere le star della storia) la videocamera sembra esplorare un'antica carta geografica; anzi – e meglio – proprio il tavoliere di un gioco di ruolo, con rapide zoomate sui luoghi destinati ad essere i punti topici della trama[2].

3 *Sigla del "Trono di Spade"*

Non occorre essere esperti di geografia per riconoscere, fin dalla prima puntata della prima serie, che il "mondo" rappresentato dalla mappa visualizzata nella sigla inziale sembra una Gran Bretagna disegnata male, ma abbastanza riconoscibile: il "continente occidentale", (*Westeros* nell'originale), teatro della maggior parte degli avvenimenti, è un'isola di medie dimensioni, separata da un continente orientale più vasto da un "mare stretto" (*Narrow Sea*). La città più importante, che palesa il suo ruolo di capitale già nel nome, in italiano viene chiamata "Approdo del Re", è situata a sud, alla confluenza di un fiume che scorre nella parte meridionale da ovest verso est. La somiglianza con Londra (o meglio, con "London") è sfacciatamente riconosciuta nel nome originale in inglese, "*King's Landing*". Quando la camera si muove verso nord incontra la città di "Grande Inverno" (*Winterfell*), confermando, se mai ce ne fosse bisogno, che qualunque sia il pianeta che

[2] La sigla "evolve" anche in funzione della trama stessa: di stagione in stagione, le città al centro delle azioni cambiano, e la sigla cambia di conseguenza, soffermandosi su queste e magari tralasciando quelle che sono nel frattempo diventate meno significative. In alcuni casi, se una città "cambia" in maniera sensibile (per esempio venendo messa a fuoco, o espugnata da un'altra casata) la sigla registra diligentemente l'avvenimento.

ospita la storia, le terre in questione sono piazzate nell'emisfero boreale; ma è soprattutto la presenza di un elemento assai importante nell'economia del racconto, "la Barriera" (*the Wall*) che conferma l'ispirazione geografica con la Gran Bretagna, visto che è piazzata proprio in corrispondenza con il Vallo di Adriano, e ricopre sostanzialmente lo stesso ruolo strategico: tener fuori i cattivi.

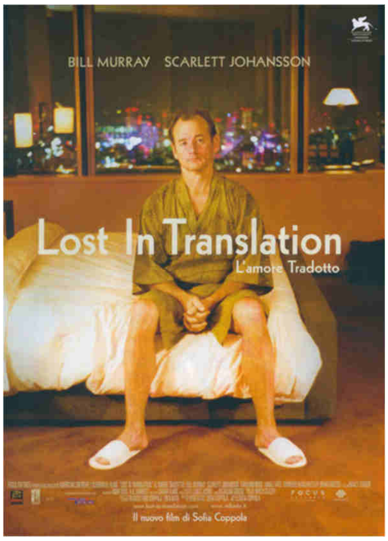
4 *C'è chi sostiene che la forma di Westeros sia ottenuta ruotando di 180° l'Irlanda e attaccandola alla costa sud dell'Inghilterra*

Non stupisce allora se la prima stagione della serie si apre con una ambientazione che assomiglia tanto al basso medioevo inglese: nobili in lotta per il trono, castelli, tornei cavallereschi, damigelle e volgo abbruttito dagli stenti. Al punto che, quando il novello spettatore si accorge che le casate che si fanno guerra si chiamano Lannister e Stark, difficilmente riuscirà a reprimere un sorriso, tanto è palese il saccheggio storico della Guerra delle due Rose tra i Lancaster e gli York. La storia inglese fornisce elementi narrativi a piene mani, almeno in questo scenario occidentale e prerinascimentale: i fan della serie riescono a riconoscere riferimenti di buona parte degli eventi britannici nello sviluppo della serie, dall'arrivo di Guglielmo il Conquistatore (identificato nel capostipite dei *Targaryen*, legittima casa reale), al marasma politico dei *Sette Regni*, che non possono non richiamare il periodo storico dell'Eptarchia, quando Northumbria, Mercia, East Anglia, Essex, Sussex, Wessex e Kent si scannavano davvero per il predominio dell'isola.

Ma cavalieri, dame e castelli creano solo uno scenario, e ne servono di più: così, il più vasto continente orientale (*Essos*) è in grado di fornirne subito altri. Qui la civiltà umana è meno omogenea, e si possono ricreare sia ambientazioni molto vicine alla Roma imperiale, con tanto di gladiatori e giochi circensi, sia culture più barbariche, e gli sceneggiatori possono davvero sbizzarrirsi. Tutto questo, senza ancora chiamare in causa nessun elemento tipicamente "fantasy", e solo per delineare lo scenario di fondo; ma ben presto tutti gli elementi canonici arrivano, in sovrabbondanza: pozioni magiche, nani, stregonerie, sette segrete, e poi ovviamente l'elemento cruciale e definitivo, i draghi. È a loro che spetta una buona metà del titolo originale della saga letteraria ("*A song of ice and fire*"), quella del fuoco: al ghiaccio provvedono invece tutta una sorta di cattivi, dai bruti (che poi tanto cattivi non sono) ad altri personaggi che solitamente si trovano nel genere horror, come i non-morti, gli zombie, e persino i terribilissimi "estranei", il male assoluto, che potrebbero perfino essere extraterrestri, da quel poco che si sa su di loro. Il tutto innaffiato – visto che la casa produttrice è la HBO, quella che negli USA ha virtualmente inventato la TV via cavo, e di conseguenza ha la possibilità di essere un po' più libera e libertina di una normale TV in chiaro – con non infrequenti scene di nudo, violenza e sesso.

Un aspetto assai particolare, per quanto assolutamente secondario, del genere fantasy riguarda la traduzione. L'inglese viaggia sereno lungo il tragitto che lo consolida come lingua franca del pianeta (almeno finché non comincerà a sentire forte la concorrenza del cinese), e in Italia trova terreno assai più fertile che in altri paesi europei. Un gran numero di termini stranieri, in tutti gli ambienti, non viene neanche più tradotto in italiano, e persino le istituzioni si ritrovano sempre più spesso non solo a lasciare non tradotti molti termini americani o inglesi, ma addirittura a battezzare direttamente in lingua d'Albione dei provvedimenti legislativi. Se l'uso è così ampio perfino in sede istituzionale, figurarsi come possa essere in altri campi, e soprattutto nello spettacolo di importazione: un distributore che osasse lanciare l'ultimo film di Spiderman mettendo nel titolo la dicitura "Uomo Ragno" sarebbe probabilmente lapidato sulla pubblica piazza. Per il fantasy, tutto questo non vale: sembra condivisa l'idea che, per quanto possibile, resti opportuno eliminare le tracce della lingua originale e tradurre tutto quanto è traducibile. Lo si è già visto parlando dei luoghi geografici come Approdo del Re, Grande Inverno e Mare Stretto, ma l'universo della saga è ampio e vasto, e i toponimi sono davvero molti, tutti accuratamente tradotti[3]. È probabile che questo dipenda dal fatto che si ritenga importante, nel fantasy, mantenere l'atmosfera utopica e ucronica, in altre parole lasciare l'ambientazione su un piano diverso dalla realtà: usare nomi in una lingua straniera renderebbero la storia più ancorata al mondo reale, perché, per quanto maltrattata e fuori moda, la lingua madre è sempre quella con il più alto grado di neutralità e astrazione, alle orecchie degli astanti.

Nonostante tutti questi accorgimenti, però, la narrazione originaria usa la sua propria lingua madre, e per fruirla in italiano i traduttori devono spesso fare dei salti mortali. Si tratta di ordinaria amministrazione per i bravi traduttori, perché certe difficoltà sono indipendenti dal genere o dal supporto: tradurre è sempre complicato. Certo, il fatto che gli sceneggiatori originali decidano di sviluppare, magari ex-post, un gioco di parole sul nome di un personaggio già incontrato in precedenza li inguaia forse più del solito, come dev'essere capitato nel quinto episodio della sesta stagione de "il Trono di Spade". Un personaggio secondario, ma consolidato fin dalla prima stagione, si chiama "Hodor"; l'episodio citato ha come punto fondamentale della trama la rivelazione che il suo strano nome (che incidentalmente è anche l'unica parola che il personaggio, con problemi mentali, è in grado di pronunciare) deriva da un trauma causato da un momento particolarmente drammatico in cui veniva implorato affinché riuscisse a mantenere una porta chiusa: il ripetuto urlo dei suoi compagni, "*Hold the door!*" si è contratto e fissato nella sua debole mente, diventando appunto "Hodor".



5 *"Lost in translation", con un grande Bill Murray*

I traduttori italiani devono aver avuto un momento di sconforto; a saperlo prima, probabilmente avrebbero potuto cambiare fin dall'inizio cambiare il nome in Bluscio ("*Blocca l'uscio!*"), o qualcosa del genere, ma a giochi ormai fatti hanno dovuto adattarsi. Non se la sono cavata poi troppo male, scegliendo la frase "*Trova il modo!*", e stressando con ripetizioni le ultime due sillabe.

Altri problemi di traduzione sono talvolta insormontabili, tant'è vero che "lost in translation" è diventato quasi un modo di dire: altri sono del tutto ordinari, e indipendenti dal genere, supporto e canale distributivo. In un altro episodio della stessa serie, una fanciulla confessa che da bambina credeva che "il *mare* si chiamasse così perché segnava il limite fin dove era possibile *mirare*", ed è evidente che nell'originale le parole protagoniste della frase sono "*sea*" e "*see*", con un effetto più diretto di quanto possa permettersi di riprodurre la traduzione.

Effettivamente, la somiglianza del nome "*sea*" e del verbo "*to see*" è curiosa, ma non sembrano esserci radici etimologiche comuni tra le due parole. Entrambe arrivano direttamente dal Proto-Germanico, ma secondo alcuni dizionari etimologici online[4] "sea" deriva da "sœ", parola che ha generato anche il tedesco "see" e l'olandese "zee", oltre a termini analoghi nelle regioni scandinave; ed è curioso che il termine, in ognuna di queste lingue, non fa distinzione tra i significati nostrani di "mare" e "lago", anzi, probabilmente

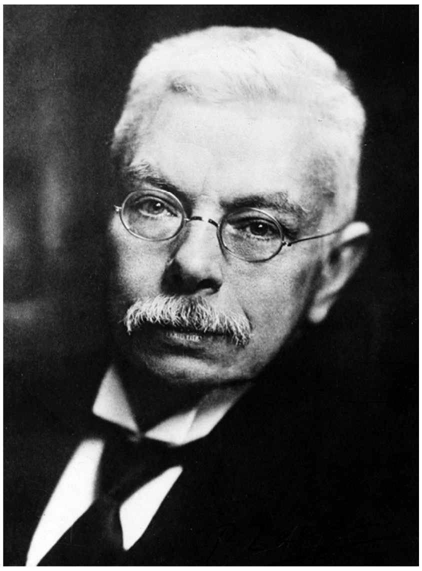
[3] Per i curiosi (non certo per gli affezionati, che li conosceranno tutti già a memoria) c'è l'opportuna voce di Wikipedia: https://it.wikipedia.org/wiki/Luoghi_delle_Cronache_del_ghiaccio_e_del_fuoco. Consigliamo la Wiki italica, ovviamente, proprio per consentire i raffronti diretti tra originale e traduzione.

[4] Come ad esempio www.etymonline.com

in origine il significato principale era proprio più vicino a quello lacustre, piuttosto che a quello marino. "To see", invece, dovrebbe arrivare da "*sehwanan*", la cui radice semantica è vicina al significato di "seguire", e quindi, passando dalla forma "seguire con gli occhi", arrivare al significato di "vedere".

Anche se l'etimologia ne rinnega la parentela, è indubbio che nei tempi passati uno dei compiti essenziali in mare era quello di vedere, scrutare l'orizzonte. Il *seaman* inglese, il *seemann* tedesco e lo *zeeman* olandese, oltre a cazzare le scotte e a svuotare sentine, erano tenuti continuamente a salire sugli alberi, esplorare con lo sguardo la distesa delle acque, insomma a ricercare indizi e nuovi elementi nell'ambiente. E, perlomeno in Olanda, che la parola "*zeeman*" equivalga un po' anche a "ricercatore" è ribadito in almeno un paio di casi.

Gli studenti di fisica sono soliti associare l'aggettivo "anomalo" al nome "Zeeman". Questo non per qualche forma di disprezzo o classismo, ma soltanto perché dell'effetto scoperto da Pieter Zeeman, la forma "anomala" è didatticamente più intrigante; ma è innegabile che l'"effetto Zeeman" sia fondamentale in tutte le sue forme. E, tanto per continuare a giocare con le parole, indubbiamente legato alla luce, che è del tutto indispensabile per "vedere". Pieter Zeeman nasce nel 1865, e non ci mette molto a dimostrare interessi scientifici: nel 1883 un'eccezionale aurora boreale è visibile alle latitudini olandesi, e il diciottenne Zeeman ne rimane impressionato a punto di scriverne una dettagliata descrizione, corredarla con un disegno di suo pugno, e mandarla a *Nature*, la nota rivista scientifica. Nature apprezza, pubblica articolo e disegno, e nel farlo ringrazia pubblicamente "*il professor Zeeman per l'attenta descrizione del fenomeno dal suo osservatorio di Zonnemarie*"; non deve essere stata soddisfazione da poco per Pieter, che a quel tempo non aveva ancora finito il liceo. Un paio di anni dopo si iscrive alla facoltà di Fisica di Leida, e segue i corsi di Lorentz[5], e presto ne diventa assistente, prima ancora di ottenere la laurea.



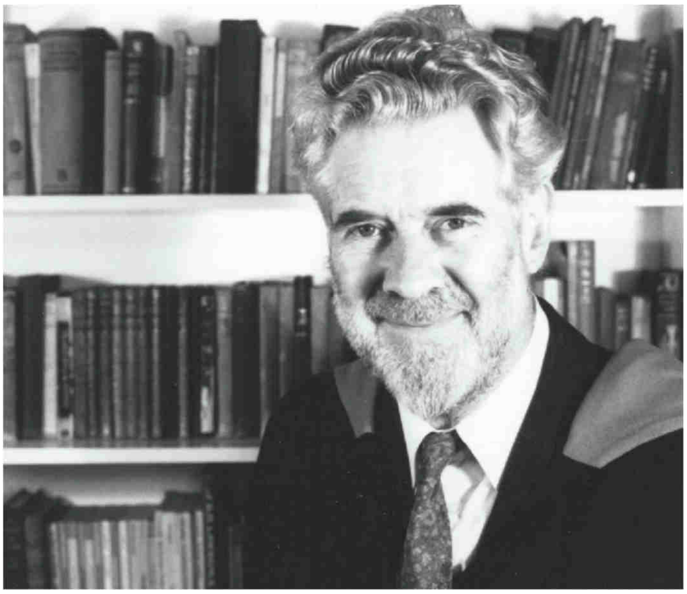
6 *Pieter Zeeman*

Nel 1896 Pieter è ormai laureato, sposato, e ha già insegnato a Strasburgo: rientra a Leiden come professore per un breve periodo, prima di trasferirsi ad Amsterdam. Forse memore del fatto che il suo mentore Lorentz sosteneva che la luce avrebbe dovuto subire una polarizzazione quando sottoposta a campo magnetico, Zeeman esegue esperimenti di laboratorio per sottoporre a verifica la tesi: scopre così che una linea di spettro veniva scomposta in più componenti in presenza di campo magnetico. Lorentz viene a sapere della scoperta un venerdì, mentre si trovava a un congresso alla Reale Accademia delle Scienze: passa un weekend probabilmente caratterizzato da pochissime ore di sonno, e il martedì mattina si presenta nell'ufficio di Zeeman con la giustificazione teorica della sua scoperta sperimentale. Ci piace immaginare che abbiano brindato e festeggiato, in quella mattina di Novembre: e di sicuro lo hanno fatto sei anni dopo, nel 1902, quando si sono divisi il premio Nobel per la Fisica.

Per comprendere appieno l'importanza della scoperta occorre tenere presente lo stato delle conoscenze dell'epoca: l'indagine del mondo microscopico era appena iniziata, e persino la "vecchia Teoria dei Quanti" doveva ancora vedere la luce: tradizionalmente, la sua data di nascita è associata al "quanto di azione" definito da Max Planck nel 1900. Le misure eseguite da Zeeman nel 1896 non solo confermavano la tesi di Lorentz sugli effetti

[5] Si tratta ovviamente di Hendrik Antoon Lorentz, lo stesso che, tra le molte altre cose, ha descritto le famose "trasformazioni di Lorentz" utilizzate nella Teoria Speciale della Relatività da Einstein.

dei campi elettromagnetici sulla luce, ma consentivano anche di stabilire che le misteriose "particelle oscillanti" che causavano l'effetto osservato dovevano essere cariche negativamente, e dotate di una massa di circa duemila volte inferiore a quella dell'atomo di idrogeno; tutto questo prima che J.J. Thomson formalizzasse la scoperta dell'elettrone. Il confratello "effetto Zeeman anomalo"[6] è così detto perché le sue particolari caratteristiche che lo distinguono dall'effetto Zeeman ortodosso (parità e disparità delle linee spettrali decomposte) si spiega in base al numero totale di spin elettronico; ovviamente, quando fu notato per la prima volta restò del tutto inspiegabile, poiché il concetto di spin era ancora lontano, in un mondo che ancora faceva fatica ad essere sicuro dell'esistenza degli elettroni.


7 *Chris Zeeman*

La Rete non aiuta a capire se sussista un qualche grado di parentela tra il fisico Pieter e il matematico Chris; nati a sessant'anni di distanza l'uno dall'altro, non ci stupirebbe se il primo fosse il nonno del secondo, ma d'altro canto il cognome Zeeman è tutt'altro che raro, nei Paesi Bassi, ed eviteremmo di scommettere grosse cifre su tale eventualità. Tanto più che, nonostante il nome olandese, Erik Christopher Zeeman nasce in Giappone, da padre danese, e dalla tenera età di un anno in poi è sempre vissuto in Inghilterra. Vede la luce il 4 Febbraio 1925, ma non è facile neppure scoprire il luogo esatto dell'arcipelago giapponese che lo introdusse in questa valle di lacrime. Della sua infanzia si ricorda solo che mamma Christine, quando il figlio aveva appena sette anni, lo invitò a risolvere un problema di matematica: dato un rettangolo di lati 3 e 4, trovare il rettangolo interno a quello dato che abbia area pari a metà di quella del rettangolo originario e che lasciasse un "bordo" di larghezza costante tra sé stesso e il rettangolo iniziale. È possibile che nel 1932 i programmi scolastici inglesi di matematica fossero un po' più avanzati di quelli attuali, ma un problema del genere sembra davvero fuori misura per un bimbo di seconda elementare. Chris non riuscì a risolverlo, ma ascoltò e comprese la madre che gli spiegava come si arrivasse alla soluzione introducendo la variabile "*x*" e definendola come il doppio della larghezza del bordo, e questo non cambia di molto lo stupore di chi ascolta l'aneddoto.

A parte questa, che Zeeman ricorda essere stata una vera e propria "rivelazione", la giovinezza e l'educazione di Chris non registrano eventi particolarmente significativi, almeno dal punto di vista matematico: studia senza entusiasmo alla Christ's Hospital School di Horsham, e nel 1943, in piena guerra, entra nella RAF come navigatore sui bombardieri. Rimane nella Royal Air Force fino al 1947, poi riprende gli studi a Cambridge.

Il dottorato in matematica (Ph.D.) arriva nel 1953, e a questo segue un periodo americano tra Chicago e Princeton. Trova il tempo di sposarsi con Rosemary nel 1960, e di lavorare un paio d'anni all'IHES, *Institut des Hautes Études Scientifiques.*

[6] Scoperto da Thomas Preston, fisico irlandese, nel 1897.

È nel 1964 che trova finalmente la sua vera strada: per quanto inizialmente scettico ("*il centro della matematica sarà sempre Cambridge*", dirà più di una volta) accetta di partecipare alla fondazione di una nuova università, quella di Warwick[7]. Qui si fa carico di creare dal nulla il Dipartimento di Matematica che, non per nulla, ha battezzato il suo edificio principale come "Zeeman building". Chris dirige il neonato istituto in maniera abbastanza informale, insolita, soprattutto se comparata allo stile tradizionale dei grandi college inglesi. Insolito e informale è anche il modo in cui recluta i docenti; nel suo necrologio Ian Stewart (che studiò a Warwick) ricorda la leggenda secondo cui Zeeman avesse deciso di avere tre aree principali di interesse per il suo istituto: algebra, analisi e topologia, e scrisse ai maggiori esperti del paese invitandoli a ricoprire le cattedre a Warwick. Rifiutarono tutti, e Zeeman allora rispose individualmente a tutti, uno per uno, scrivendo: "*Che peccato… tutti gli altri hanno accettato!*".


8 *Zeeman con la sua "Macchina delle Catastrofi"*

Rimane a Warwick fino al 1988, a parte una breve parentesi in California, a Berkeley, come *visiting professor* e un anno sabbatico a Parigi. È qui che lavora con René Thom[8] sulla Teoria delle Catastrofi: ne rimane così affascinato da impegnarsi nella creazione di un oggetto – cosa invero insolita per un matematico – la "Macchina delle Catastrofi". Per mettere in evidenza il concetto matematico di catastrofe, ovvero il precipitare improvviso in uno stato radicalmente diverso dal precedente attraverso piccole, irrisorie e imprevedibili variazioni, Zeeman costruisce un disco circolare che può liberamente ruotare attorno al suo centro, con due bande elastiche di identica lunghezza attaccate al bordo del disco. Fissando l'estremo di una delle due bande elastiche e lasciando libera l'altra, si ottiene una buona simulazione della catastrofe matematica, perché il comportamento risultante del disco diventa imprevedibile e soggetto a drastiche variazioni. La leggenda vuole che una volta abbia tentato di portare con sé la sua creazione a un simposio negli USA, ma alla dogana si siano spaventati a morte quando Zeeman ha candidamente dichiarato ai funzionari che trasportava la sua "catastrophe machine", al punto di evacuare subito il locale e arrestare Zeeman stesso. La regina Elisabetta gli ha conferito il titolo di "sir" nel 1991, per la sua "eccellenza matematica". Amava la musica e la pittura, e teneva in gran conto la creatività, come ricorda la frase che abbiamo messo in testa quest'articolo. È stato insignito di un gran numero di onorificenze; anzi, da qualche anno è stata addirittura istituita una speciale onorificenza che porta il suo nome, la "Zeeman medal".

Sembra che studiare le catastrofi non comporti necessariamente vivere una vita catastrofica. Anzi.

[7] Gli inglesi, è ben noto, sono abbastanza originali: così non stupisce troppo scoprire che l'Università di Warwick si trova in realtà nel territorio di Coventry. Consola il fatto che Coventry e Warwick distano fra loro a malapena una ventina di chilometri.

[8] Di lui parliamo in "*Tutto sbagliato, tutto da rifare*", RM080, settembre 2005.

2. Problemi

2.1 Prolegomeni labirintici

Nel senso che un aggeggio del genere, nella migliore della ipotesi, può servire a progettare un labirinto (se va bene…).

Nell'ormai scomparso come lacrime nella pioggia Campo dei Chinotti, alcuni etologi interessati alle attività perditempo degli indigeni hanno trovato un interessante reperto: un reticolo quadrato di paletti, 20 per lato, alcuni dei quali blu e alcuni rossi, con i vari paletti adiacenti (verticalmente e orizzontalmente: niente diagonali!) uniti tra di loro da archetti.

La cosa interessante è che questi archetti sono di colori diversi, e sembra esserci una regola: se due paletti adiacenti sono di ugual colore, l'asticella è dello stesso colore; se sono di colore diverso, l'asticella è nera.

I nostri validi esploratori di contrade sperdute hanno contato 219 paletti rossi, di cui 39 sui bordi, nessuno dei quali sugli angoli; inoltre, hanno trovato 237 archetti neri.

Siccome non hanno più nessuna voglia di contare, si stanno chiedendo ansiosamente quanti siano i paletti blu…

Il problema è pericolosamente simile a quelli ispirati dalla Teoria di Ramsey, che Rudy sbaglia con pervicace continuità: comunque, questa volta abbiamo *la soluzione di un'espansione*!

Se il nostro reticolo è rettangolare, con un numero pari di colonne e di righe, e con un numero di paletti blu pari al numero dei paletti rossi in ognuna delle righe e delle colonne (ma questa volta non mettiamo nessun archetto nero), avrò più paletti blu o più paletti rossi?

Tornando al primo problema, mi sorge un dubbio (e qui, niente soluzione!): se mi fossi dimenticato di aggiungere "nessuno dei quali sugli angoli", il problema sarebbe stato risolubile?

Raga, veloci, che gli etologi ci stanno saccheggiando la cantina…

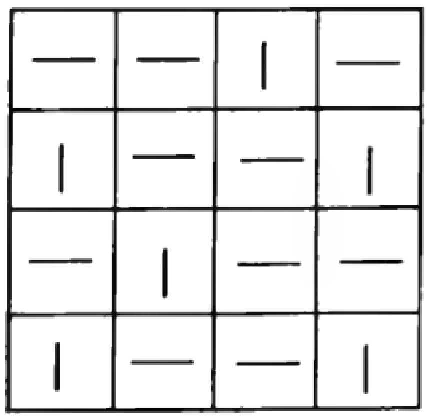
2.2 Qualcuno telefoni a Richard (Feynman)

No, non ci serve uno che suoni i bongo: dovete aprire una cassaforte. Ma prima, qualche parola sul tipo di problema.

Questo, ha l'aria di uno di quei "cosi" che a Rudy proprio non piacciono: procedere per tentativi è una cosa che non sopporta.

Grande è stata la sua gioia, quindi, nello scoprire che almeno per questo tipo di problema esistono dei metodi *di ragionamento* non basati sulla forza bruta: prima, però, un problemino di allenamento.

Il vostro compito è aprire (senza danneggiare) la cassaforte che vedete qui di fianco: la "serratura" è composta di sedici maniglie che ammettono due posizioni: "verticale" o "orizzontale".



9 *Apritela senza dinamite.*

Il guaio è che, quando girate una maniglia, tutte le maniglie della riga e della colonna della maniglia che girate "cambiano stato"; siete liberi di girare una maniglia quante volte volete (evidentemente, anche non consecutive…).

Quante (e *quali*) maniglie girate?

Come dicevamo, esistono dei metodi generali, almeno nel caso delle casseforti quadrate con lato (sì, insomma, numero delle maniglie su un lato) pari. Infatti, arriva la domanda che dovrebbe farvi fare un'analisi del tutto: *qual è il massimo lato (pari) della cassaforte che posso sempre aprire con* 2002 *mosse*? ...non so se si è capito, ma il problema è di qualche tempo fa.

Comunque, potreste provare ad aggiornarlo… Per che anni ottengo la stessa risposta che ottengo per "2002"?

Svelti, che dentro c'è la birra.

3. Bungee Jumpers

Un insieme di numeri è detto "libero da somme" se la soma di due qualsiasi elementi (non necessariamente diversi tra loro) non appartiene al gruppo. Qual è la dimensione massima di un sottoinsieme A libero da somme dell'insieme $\{1, 2, 3, \ldots, 2n+1\}$?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Non ci pare il caso di sottolineare – tanto meno di celebrare – l'eccezionale evento di vedere questa rubrica comparire per ben due numeri di seguito di RM. Non perché l'evento eccezionale non sia davvero, anzi: piuttosto perché suona un po' ridicolo vantarsi di essere un po' meno in difetto del solito. È forse invece opportuno ricordare le altre caratteristiche di questa rubrica, oltre alla sua arcinota e schizofrenica saltuarietà; ovvero che essa intende recensire solo opere che vedono come interpreti (autori, coautori, collaboratori, disegnatori, quant'altro) persone amiche di Rudi Mathematici. Altra caratteristica, in fondo corollario della precedente, è che EuNBeT non ha nessuna velleità di imparzialità; agli amici vogliamo bene, ed è virtualmente impossibile che non si parli bene anche di quello che fanno. Questo dovrebbe metterci al riparo da mugugni e musi lunghi da parte degli interessati, eppure riusciamo ugualmente a sentirci un po' in colpa nei confronti di PuntoMauPunto (Maurizio Codogno per coloro che si fidano solo dell'anagrafe); è uno degli amici più cari e vecchi di RM, eppure ogni tanto riusciamo a non dedicargli la meritata recensione su queste colonne. Oddio, la colpa è principalmente sua: pubblica libri con la stessa frequenza con cui un gatto domestico reclama le crocchette, e non è davvero possibile stargli dietro. Cerchiamo di rimediare dedicando questo pezzo alla sua ultima fatica, non senza muovergli però un appunto severo: non è davvero concepibile che noi si debba recensire un libro leggendone il mero pdf. Aspettiamo con la dovuta alterigia il tempestivo arrivo di tre copie, debitamente infiocchettate, qui in redazione.

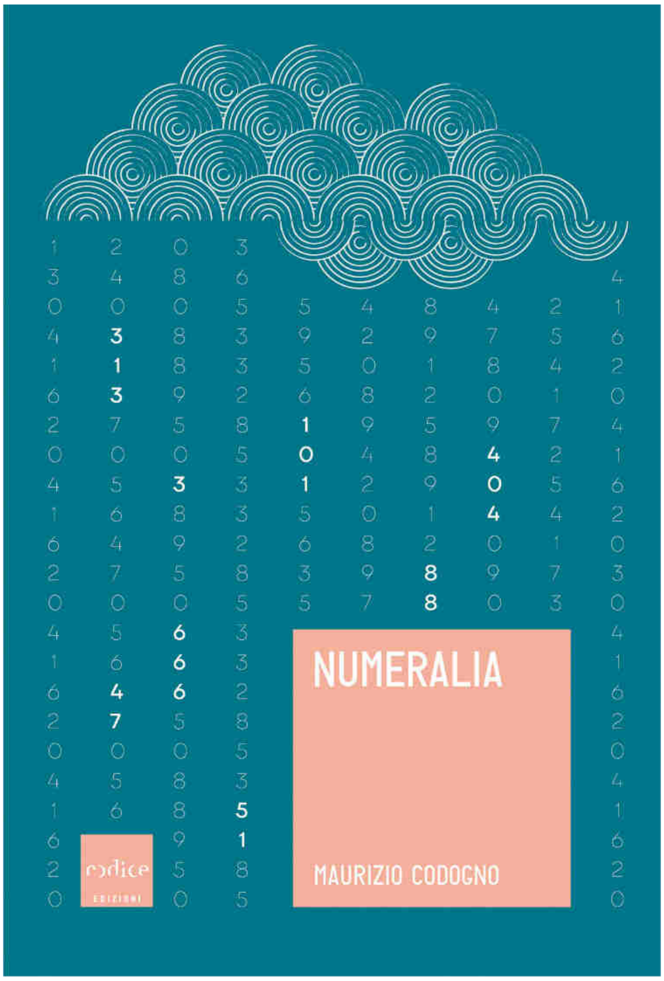
4.1 Numeralia

*«La matematica è la
scienza dei numeri.
Parliamone.»*

Quella riportata a mo' di citazione in testa a questo articolo non è una frase qualunque di "Numeralia", ultima fatica dell'infaticabile Maurizio Codogno: è proprio la frase d'apertura, l'*incipit*, e non si può negare che sia una bella frase ad effetto, oltre che capace di aprire un programmatico dibattito. Fin dalla notte dei tempi i filosofi e i sapienti – per non parlare dei matematici – si sono interrogati sulla Domanda Fondamentale (e per una volta non parliamo di quella che pone Douglas Adams nella *Hitchhikers' Guide to the Galaxy*), ovvero: "Che cos'è la matematica?" Non staremo qui a sminuire la cruciale importanza di cotanto interrogativo, ma vorremmo, per una volta, anche attirare l'attenzione su quella che potremmo chiamare la "Domanda Complementare alla Domanda Fondamentale", che è certo meno importante, ma che meriterebbe un po' di attenzione, ovvero: “Che cosa credono che sia la matematica, quelli che la matematica non frequentano?”.

Non è domanda trascurabile, se ne converrà: anche e soprattutto perché “quelli che non frequentano la matematica” sono tanti, tantissimi, sono quasi tutti. E a questa domanda non è poi tanto difficile rispondere, piuttosto è difficile convincere quei “quasi tutti” che la risposta dovrebbe essere diversa. “Numeri!”, risponderanno tutti, in coro perfetto. La matematica tratta i numeri, gioca coi numeri, fa i calcoli con i numeri. C’è anche una piena relazione biunivoca, ovviamente: se si parla di numeri, c’entra la matematica; se si parla di matematica, c’entrano i numeri.

Questa convinzione unanime e diffusa comporta anche qualche responsabilità: provate a dire che non siete pronti a dividere a mente i 471 euro del conto del pranzo aziendale per i 17 commensali in meno d’una frazione di secondo: se avete la sventura di possedere una laurea in matematica e non sciorinate istantaneamente la risposta: “Venti euro e settantuno centesimi a testa, avanzano 7 centesimi per la mancia”, passerete per millantatori per tutto il resto della vita. Non vi crederanno più, non vi daranno minimamente retta se protesterete dicendo di essere bravissimi a risolvere integrali di superficie, equazioni differenziali complesse del quarto ordine, neppure se gli sventolerete sotto il naso la Medaglia Fields per aver appena dimostrato che l’Universo deve avere una topologia pari a quella di un frattale annodato in ventitré dimensioni. Non ci crederanno, non sapete neppure fare le divisioni a mente…



Poi, certo, potrete trovare conforto e stima tra i vostri simili, quelli che adorano la matematica e ogni tanto si sbagliano persino a ricordare quanto faccia sette per nove, quelli che riescono a visualizzare un politopo in quattro dimensioni ma si perdono nell’incolonnare le spese detraibili della dichiarazione dei redditi, ma sarà consolazione ben misera. La matematica tratta i numeri, e amen.

Del resto, che cosa si può fare per convincere il mondo non-matematico (che è come dire tutto il mondo meno epsilon) che si sta sbagliando? Imbastire una crociata matematica contro-numerica? Esortare il MIUR a una campagna informativa? Scendere in piazza indossando gilè con sopra disegnati i grafici di funzioni ellittiche? Non sembrano scelte auspicabili, e neppure vagamente appetibili dal punto di vista mediatico.

Si può forse fare quel che fa questo libro, però. Oddio, è un approccio del tutto insolito, rovesciato, insomma che non sembra sfiorare neanche lontanamente l’obiettivo di spiegare al mondo che la matematica non è solo questione di numeri: perché fa esattamente l’opposto. Prende i numeri, o meglio, alcuni numeri, e li tratta dal punto di vista non matematico, ma aneddotico, scherzoso: culturale, insomma. Parte dal fondo, spiegando che non necessariamente i numeri sono matematica, ma sono anche vita quotidiana, emozioni, giochi, curiosità. Chissà, forse il lettore non-matematico potrebbe persino essere indotto nella salutare (benché erronea) deduzione logico che se talvolta i numeri hanno anche un valore non-matematico, magari la matematica potrebbe talvolta avere anche una natura non-numerica. Sarebbe una conquista non da poco.

Ma sia ben chiaro, Maurizio Codogno non ha certo scritto questo libro con queste intenzioni educative: la sua intenzione è piuttosto quella di mostrare come i numeri si intrufolino davvero nelle nostre vite e, siccome è dannatamente curioso, scava alla ricerca di esempi, episodi, storie legate ad alcuni numeri notevoli. Poi – certo – inocula pure a tradimento qualche proprietà matematica dei numeri in questione, ma lo fa più per dispetto che per vera intenzione educativa, forse.

A chi invece la matematica piace – e immaginiamo che chi legge queste righe, visto dove sono scritte, rientri per forza nella categoria – suggeriamo di giocare subito con il sommario iniziale: visto che i capitoli del libro prendono spunto e titolo da un singolo numero (sempre intero) e ne raccontano, oltre a (e più che) le proprietà aritmetiche, le note e le insospettabili relazioni con la vita, si scorra l'elenco dei titoli: si incontreranno diciannove protagonisti, e precisamente 666, 313, 42, 99, 1001, 23, 515, 6, 451, 0, 10^{100}, 48, 24000, 7, 555, 60, 13, 8, e 538. Beh, si provi a capire quali siano le caratteristiche per cui proprio quei numeri si siano meritati la dignità di un intero capitolo ad essi dedicato. È probabile che saranno più le sorprese dei ritrovamenti, anche per gli amanti della matematica: non sorpresi magari dal googool, che invece probabilmente terrorizzerà gli altri lettori, e forse riuscirà a immaginare diverse altre proprietà di numeri matematicamente notevoli come lo zero, o proprio "da nerd" come il 42.

Ma quanti rimarranno senza risposta? Siete sufficientemente letterari da sviscerare il 23, esperti di scritture per il famosissimo 666, fantasiosi per riconoscere il tema principale del 313? Vi aiuterà sapere che, uscendo a Febbraio, il 24000 è un po' più facile da indovinare?

Insomma, i numeri non sono solo matematica, anzi. L'unico serio rischio è che, siccome sono avvero tanti, il Codogno abbia già in canna un'altra dozzina di "Numeralia"…

Titolo	Numeralia
Autore	Maurizio Codogno
Editore	Codice edizioni
Data Pubblicazione	Gennaio 2019
Prezzo	16 Euro
ISBN	978-88-7578-755-4
Pagine	206

5. Soluzioni e Note

Febbraio!

Presto che è tardi. Il mese è corto…

5.1 [238]

5.1.1 Ricordi di un pianeta lontano

Non ne parliamo, no. Le soluzioni erano tutte corrette, ma come gli stessi protagonisti ci hanno fatto notare, con le parole di ***Jeeves62***:

> Ci sono rimasto un po' male quando ho capito di essere scivolato proprio alla fine sull'equa divisione del gregge. In effetti occorrerebbero 8 euro per pareggiare il valore dei due lotti ma essendo l'armonica di proprietà di uno dei due soci giustamente va conteggiato anche il depauperamento di quest'ultimo quindi giusto conteggiarla la metà.

Andiamo avanti, questa era solo per amor di precisione.

5.2 [240]

5.2.1 Un classico e una variazione.

Il primo problema del mese scorso era sorprendentemente di prospettiva! Vediamo di che cosa si trattava:

> *Supponiamo una statua di altezza h, la colonna ha altezza p, i vostri occhi sono ad altezza e dal terreno. Da che distanza la statua appare "più grande", ossia la figura umana in cima sottende dal punto di vista scelto il maggior angolo?*

Con l'ulteriore variazione:

> *Sia C un punto (fisso) su un segmento AB, e sia Z un punto mobile su una retta r passante per B. Siano definiti gli angoli θ=ZBA e φ=CZA: al variare di Z su r, φ varierà; sia P la posizione di Z per cui φ assume il valore massimo. Come varia P al variare di θ?*

A stretto giro di posta è arrivata la soluzione di ***Jeeves62***:

Caso $e < p$

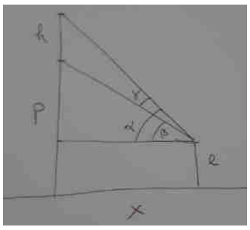


figura 1.

Obiettivo trovare la x che massimizzi l'angolo γ.

$$\gamma = \alpha - \beta$$

Potremmo per semplicità massimizzare la tangente dell'angolo poiché tra 0 e 90° è una funzione crescente.

$$\mathrm{tg}(\gamma) = \mathrm{tg}(\alpha-\beta) = (\mathrm{tg}(\alpha) - \mathrm{tg}(\beta))/(1 + \mathrm{tg}(\alpha)\mathrm{tg}(\beta))$$

posto

$$\mathrm{tg}(\alpha) = (p+h-e)/x$$
$$\mathrm{tg}(\beta) = (p-e)/x$$

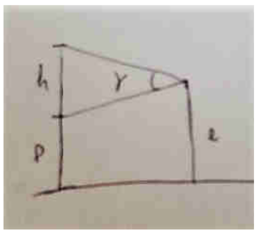
sostituendo e semplificando dovremo massimizzare la funzione

$$f(x) = h(x/(x^2+(p-e)(p-e+h))$$

derivando e uguagliando a zero avremo

$$x = \sqrt{(p-e)(p-e+h)}$$

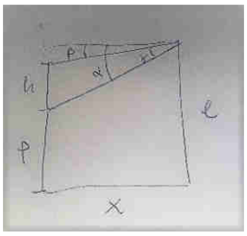
Caso di $p < e < p+h$



vedi figura 2.

In questo caso più ci avviciniamo alla statua più aumenterà l'angolo visuale che tenderà a 180° per $x = 0$.

Caso $p + h < e$ (Presepe)

Vedi fig.3. 

In questo caso avremo una situazione simile alla prima figura con la differenza di avere (e–p) al posto di (p–e). Infatti

$$\mathrm{tg}(\alpha) = (e-p)/x$$

$$\mathrm{tg}(\beta) = (e-p-h)/x$$

La funzione da massimizzare sarà

$$f(x) = h(x/(x^2+(e-p)(e-p+h))$$

da cui

$$x = \sqrt{(e-p)(e-p+h)}$$

Belle le figure, vero? Andiamo avanti con il fustigatore per eccellenza, il nostro carissimo ***Alberto R.***:

Eliminiamo subito il caso in cui gli occhi dell'osservatore si trovano ad un'altezza intermedia tra la testa e i piedi della statua. In questo caso l'angolo sotto cui è vista la statua è sempre crescente al diminuire della distanza dell'osservatore, per cui, se diamo retta alla geometria, dovremmo strofinare il naso sulla statua, come farebbe il mostruosamente miope rag. Filini in un film di Fantozzi.

Negli altri due casi (statua in alto e statuina in basso) vale la stessa formula:

$$[1]\ \alpha = \mathrm{atan}(A/S) - \mathrm{atan}(B/S)$$

dove:

α è l'angolo sotteso dalla statua rispetto all'osservatore

S è la distanza in orizzontale tra l'osservatore e la statua;

A e B sono i valori assoluti delle due differenze di quota della sommità e della base della statua rispetto all'occhio dell'osservatore. A il numero più grande e B il più piccolo.

L'angolo α è massimo per S = sqrt (AB) che annulla la derivata della [1]

Va bene, la formula è la stessa scritta dal primo solutore, lo avete notato anche voi, ma l'approccio pare diverso, vero? Vediamo la versione di ***Valter***, che parte direttamente dalla variazione:

Provo con la variazione ma so di non essere molto rigoroso. Lo faccio perché mi pare accettiate anche farneticazioni. Uso gli stessi simboli del problema e parto con la mia proposta di soluzione.

A mio avviso la posizione P di Z è dove gli angoli AZB e ZCB sono uguali. I due triangoli AZB e CZB in tale punto P della retta r risultano simili (in quanto hanno l'angolo ZBC in comune e i due angoli AZB e ZCB uguali).

Eguaglio il rapporto tra due lati corrispondenti ZB/AB=BC/ZB, ottengo ZB^2=AB*BC.

Essendo AB e BC fissi, P è sulla circonferenza di raggio ZB e di centro B.

Un po' di farneticazioni che mi hanno fatto pensare che questa sia la soluzione.

In qualsiasi punto di Z su r i triangoli AZB e ZCB hanno l'angolo ABZ in comune. Da ciò e da come sono disposti i triangoli dovrebbero valere per gli angoli:

- AZB > CZB, ZAB < ZCB, 180°–ZBC = AZB+ZAB = CZB+ZCB → AZB–CZB = ZCB–ZAB
- AZB–CZB = ZCB–ZAB = CZA è l'angolo φ che deve assumere il valore massimo.

Gli angoli AZB e CZB tendono a 180°–ABZ man mano che Z si avvicina a B.

Gli stessi angoli decrescono poi in modo continuo tendendo a 0 sulla retta *r*.

Per gli angoli ZAB e ZCB vale l'inverso: tendono a 0/180°–ABZ con P→B/retta *r*.

L'angolo CZA invece tende a 0 sia quando Z si avvicina a B che quando →∞ su *r*.

Dai due estremi tale angolo cresce in modo continuo avendo un massimo in P.

Considero il caso degenere in cui la retta *r* e quella per AB sono parallele.

In questo caso il punto P cercato è quello per cui il triangolo CZB è isoscele (dei triangoli di stessa base/altezza è quello con angolo al vertice maggiore). Mi pare non sia necessario dimostrarlo in quanto è una proprietà conosciuta.

Inclinando poi la retta *r*, per P vale l'invarianza AZB = ZCB fra i due angoli.

Infatti così posso "costruire" tutte le possibili configurazioni di A,B,C e *r*.

Parto con due rette parallele r_1 e r_2 e due punti A,C qualsiasi su diciamo r_1.

Costruisco il triangolo isoscele con base AC e vertice nel punto P su r_2.

Gli angoli APr_2 e PCr_1 nella stessa direzione in r_1 e r_2 risulteranno uguali.

Costruisco allo stesso modo altri triangoli con Z diverso da P su r_2 e base AC.

Gli angoli AZC risultano tutti inferiori all'angolo APC del triangolo isoscele.

Vario degli stessi gradi α AZr_2 e ZBr_1; le due rette ora si incontreranno in B.

Modificando il valore α ottengo tutte le possibili configurazioni di θ=ZBA.

Mi pare di aver così "costruito" tutte le configurazioni possibili di A B C e *r*.

Risulta perciò che, comunque, φ=CZA assume il valore massimo quando AZB = ZCB.

Cominciando con "mi pare che accettiate farneticazioni" ***Valter*** scrive la definizione del nostro modo di selezionare le soluzioni ed è con questo pensiero che passiamo al secondo problema.

5.2.2 Problema squisitamente teorico (per ora)

Scritto dal Capo prima dell'avvento del freddo, un bel problema di fisica, o quasi:

> *Avete appena fatto due bellissime e compatte palle di neve, una con diametro il doppio dell'altra. Portate al caldo, essendo la neve un pessimo conduttore di calore, solo la superficie assorbirà calore, quindi lo scioglimento è proporzionale alla superficie esposta; dopo un certo tempo, il volume della palla più grande è dimezzato. Quanto vale il volume della palla piccola?*

Adesso che la neve è arrivata quasi ovunque, le soluzioni sono passate anche all'atto pratico, come vedete in questo bel racconto di ***Valter***:

È stato argomento di "dibattito" col mio amico geometra poi geologo poi insegnante di matematica nelle medie e infine pensionato. Ci ha aiutati a non sentire la fatica durante la nostra settimanale passeggiata montana (ora d'aria/libera uscita concessaci gentilmente dalla rispettive consorti).

La butto lì come provocazione: a suo avviso il volume della palla piccola diminuisce di 7/8 rispetto a quello di partenza.

Non mi ha convinto ma in compenso ha aumentato i dubbi riguardo la mia proposta di soluzione (abbiamo anche provato a fare le due palle, visto che un po' di neve c'era, ma alla temperatura di 0° circa non si sono sognate di variare di volume neanche un po' …).

Bene, adesso sarete curiosi di conoscere la soluzione di ***Valter*** stesso, eccola qui:

Partecipo per onore di firma ma penso solo di dire cavolate; vedete Voi … .

Penso che c'entri il Calcolo dove per me è quasi nebbia assoluta. Spero di imparare qualcosa dalle soluzioni che verranno proposte. Comincio con le farneticazioni.

Parto da un grafico relativo alla palla grande con:

- in ascissa il tempo che scorre da 0 a "t" quando il volume dimezza
- in ordinata la superficie della palla che scende man mano.

So che "lo scioglimento è proporzionale alla superficie esposta". Mi pare quindi che il grafico sia una retta inclinata verso il basso. L'inclinazione dipenderà dalla temperatura esterna, compressione della neve, … . Considero la superficie sotto il grafico dal tempo 0 a al tempo "t".

Da quel poco che capisco del Calcolo dovrebbe essere il suo integrale definito.

Essendo il grafico di una superficie che varia col tempo si tratta di un volume?

Se è così potrebbe essere il volume che si è perso cioè ½ di quello iniziale?

Dopo tutto è la somma delle superfici che si perdono con lo scorrere del tempo. Lo stesso grafico della palla piccola dovrebbe essere identico al precedente. Per capirci: mi immagino di proseguire sulla sua retta inclinata. Ad un certo tempo "x" la relativa superficie sarà quella della palla piccola. A $x+t$ dovrei avere quindi la sua superficie quando la grande dimezza di volume.

So di quanto è scesa la superficie della grande dato che è dimezzata di volume. Essendo una funzione lineare anche la piccola dovrebbe essere scesa lo stesso. Dai miei calcoli però arrivo al tempo "t" ad ottenere una superficie negativa. La palla piccola dovrebbe essersi quindi già sciolta completamente da prima. Che sia questa la "stranezza"?

Allego alcuni calcoli che ho fatto.

Formule per superficie S e V di una sfera:

- $S = 4\pi R^2$
- $V = (4/3)\pi R^3$

R_0-S_0-V_0/R_1-S_1-V_1 raggio-superficie-volume iniziale-finale della palla grande.

r_0-s_0-v_0/r_1-s_1-v_1 raggio-superficie-volume iniziale-finale della palla piccola.

Assumo che R_1 valga 1 e calcolo gli altri valori.

$R_1 = 1$

$S_1 = 4\pi$

$V_1 = (4/3)\pi$

$R_0 = 2^{(1/3)}$

$S_0 = 4\pi 2^{(2/3)}$

$V_0 = 2V_1 = (8/3)\pi$

$r_0 = 2^{(1/3)}/2$

$s_0 = \pi 2^{(2/3)}$

$v_0 = (1/3)\pi$

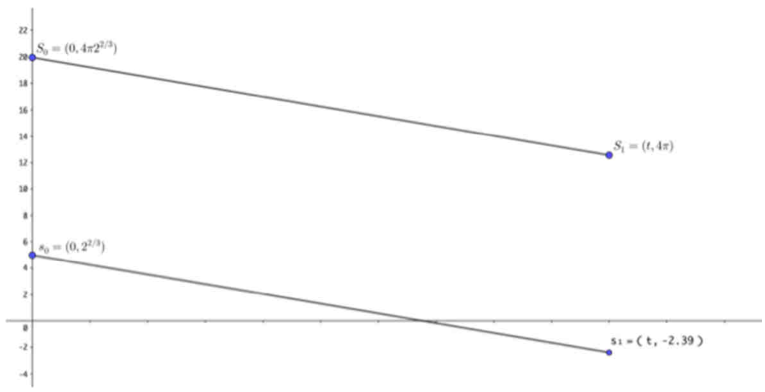
$S_0 - S_1 = 4\pi(2^{(2/3)} - 1) = 7.3815$

$S_1 = s_0 - (S_0 - S_1) = \pi 2^{(2/3)} - 4\pi(2^{(2/3)} - 1) = -2.3945$

Ho disegnato il grafico di come diminuisce la superficie delle 2 palle.

Le ho fatte partire dal tempo 0 sino a "t" quando la grande dimezza di volume.

Si nota che la piccola si era già sciolta completamente prima di "t":



Non commentiamo in nessun modo, non vogliamo fare come quelli che raccontano all'inizio di un film come va a finire…, passiamo alla versione di ***Alberto R.***:

> "…lo scioglimento è proporzionale alla superficie esposta…" significa che il raggio di entrambe le palle diminuisce in proporzione al tempo indipendentemente dal valore attuale del raggio, e con la stessa velocità per entrambe.
>
> Indicato – per comodità tipografica – con k l'inverso della radice cubica di 2, abbiamo:
>
> SFERA GRANDE
>
> Raggio iniziale = 2
>
> Raggio a volume dimezzato = $2k$
>
> Perdita di raggio = $2 – 2k$ (che vale anche per la sfera piccola)
>
> SFERA PICCOLA
>
> Raggio iniziale = 1
>
> Raggio finale = $1 – (2 – 2k) = 2k – 1$
>
> Volume finale/iniziale = $[(2k – 1)^3]/1^3$ = 20,27%
>
> "…se fate i conti per bene, ad un certo punto dovrebbe saltarvi fuori una 'stranezza' mica male…" A me salta fuori solo che il volume della palla piccola si riduce al 20,27% nel tempo in cui il volume della grande si dimezza. Non ci vedo alcuna stranezza.

Cominciamo a preoccuparci dell'assenza della stranezza o del fatto che ***Alberto*** ha ancora una palla dove ***Valter*** non ne ha più traccia? Nessuna delle due, andiamo avanti a vedere la versione di ***Jeeves62***:

> Il rapporto tra calore assorbito e la corrispondente diminuzione del volume per scioglimento è necessariamente costante ed in particolare non dipende dalla dimensione della sfera (ovvero dal suo raggio R). Quindi nel tempo in cui la prima sfera avrà dimezzato il volume anche l'altra avrà proporzionalmente dimezzato il suo volume.
>
> Si tratta di una variante termodinamica del paradosso di Zenone.
>
> Le nostre palle di neve matematiche continueranno a sciogliersi all'infinito dimezzando il proprio volume ad intervalli costanti di tempo

Palle di neve di Zenone, ecco che cosa mancava. Concludiamo con la versione di ***trentatre***, che trova tutte le soluzioni di cui sopra e ancora qualcuna:

> Con R,S,V : raggio, superficie, volume della palla grande, R',S',V' : idem per la palla piccola, h: volume che evapora per unità di superficie e unità di tempo – valgono le
>
> $$S = 4\pi r^2 , V = (4\pi / 3)\, r^3$$
>
> - la variazione nel tempo t del volume V è

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dR} \cdot \frac{dR}{dt} = S \cdot \frac{dR}{dt} = -h \cdot S \text{ da cui } \frac{dR}{dt} = -h$$

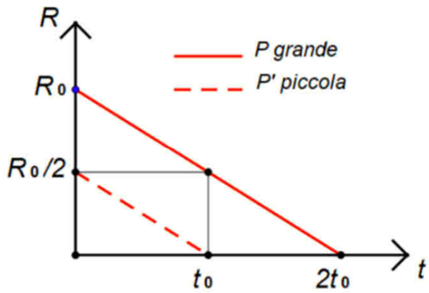
- quindi integrando e con $R_o, R'_o = R_o / 2$: raggi iniziali delle due palle

$$R = R_o - ht\,,\ R' = R_o / 2 - ht$$

- eliminando t

$$[1]\ \boxed{R - R' = R_o / 2}\ .$$

In figura l'andamento dei raggi – nel tempo in cui il raggio della palla grande si dimezza, quella piccola scompare.



Il problema non parla della metà del raggio, ma della metà del volume. Invece della metà prendiamo più in generale il rapporto $1/n$. Il rapporto fra i volumi è il cubo del rapporto fra i raggi, cioè

$$V / V_0 = 1 / n \rightarrow R / R_0 = 1 / n^{1/3}$$

- e per la [1] nella forma $R'/ R_o = R / R_o - 1/2 = 1/ n^{1/3} - 1/2$

$$V'/V_0 = (R'/ R_0)^3 = (1/ n^{1/3} - 1/2)^3$$

- all'inizio si ha $n = 1 \rightarrow V'/V_0 = (1 - 1/2)^3 = 1/8$: che è il rapporto fra i volumi iniziali

- il valore massimo è $n = 8 \rightarrow V'/V_0 = (1/8^{1/3} - 1/2)^3 = 0$: cioè $R = R_0 / 2$ per cui la palla piccola sparisce

- la soluzione è $n = 2 \rightarrow \boxed{V'/V_0 = (1/2^{1/3} - 1/2)^3 = 0.0253346}$.

Il processo è analogo per palle di forma diversa, purché la forma si conservi durante l'evaporazione, p.es. per il cubo o altro solido euclideo (R va sostituito con il raggio della sfera inscritta). Ma le palle di neve perfettamente cubiche sono difficili da fare, per non parlare del dodecaedro.

E noi non ci pensiamo neanche, a fare palle a dodecaedro, già siamo circondati dai solidi platonici di origami fatti dal Capo. Siamo alla fine. Alla prossima!

6. Quick & Dirty

Non esattamente "Quick", ma sicuramente "Dirty". E con una lontana parantela con il Bungee Jumpers del numero 241…

Partizionate gli interi positivi in due sottoinsiemi A e B in modo tale che contengano progressioni aritmetiche di ogni lunghezza finita ma non contenga una progressione aritmetica di lunghezza infinita.

7. Pagina 46

Se il massimo elemento di A è il dispari $2k+1$, A sarà un sottoinsieme di $\{1, 2, 3, \dots, 2k+1\}$: i primi $2k$ di questi numeri sono associabili a coppie tutte di somma $2k+1$:

$$(1,2k),(2,2k-1),(3,2k-2),\dots,(k,k+1)$$

Per essere libero da somme, A non può avere che un elemento per ognuna delle coppie qui sopra e quindi, non dimenticando di considerare anche $2k+1$, la sua dimensione non potrà eccedere $n+1$.

D'altronde, supponendo il massimo valore in A sia un numero pari $2k$, questo trasformerebbe A in un sottoinsieme di $\{1, 2, 3, \dots, 2k\}$: essendo però $k + k = 2k$, k non può appartenere ad A, e quindi i $2k–2$ interi $\{1, 2, 3, \dots, k–1, k+1, \dots, 2k–1\}$ possono essere raggruppati nelle $k–1$ coppie di somma $2k$:

$$(1,2k-1),(2,2k-2),\dots(k-1,k+1)$$

e quindi la massima dimensione di A non può eccedere $(k–1) + 1 = k$, che non è maggiore di n.

In entrambi i casi, la cardinalità di A non può superare $n+1$. È però molto facile trovare degli insiemi liberi da somme aventi cardinalità $n+1$:

1. L'insieme dei primi $2n+1$ numeri dispari, visto che la somma di due dispari è sempre un pari.
2. Gli $n+1$ interi consecutivi $\{n+1, n+2, \dots, 2n+1\}$, visto che la somma di due qualsiasi (anche uguali tra loro) supera $2n+1$.

Quindi, la dimensione massima di A è $n+1$.

8. Paraphernalia Mathematica

OK, lo avevamo già detto. Ma la cosa era stata piuttosto informale e la dimostrazione, anche se molto carina, poteva lasciare qualche dubbio. Siamo riusciti a trovare le dimostrazioni complete, e non possiamo esimerci dal comunicarvele.

Se non abbiamo sbagliato i conti, dovrebbe essere l'ultimo PM a parlare di certi argomenti, pericolosamente connessi con il mondo reale.

8.1 Sezioni (quasi) coniche

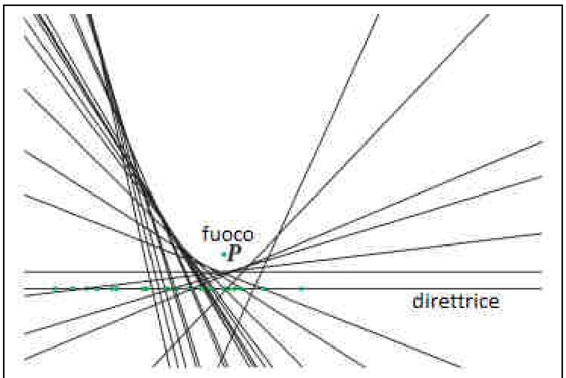
Nel senso che con l'origami pretendere precisione è una pia illusione, e quindi questa volta svolgeremo la trattazione a livello puramente teorico.

8.1.1 Parabola

> *La parabola è il luogo dei punti equidistanti da una retta fissa detta direttrice e da un punto fisso detto fuoco.*

Per tracciare la parabola attraverso le sue tangenti, è necessario definire la retta direttrice e il fuoco.

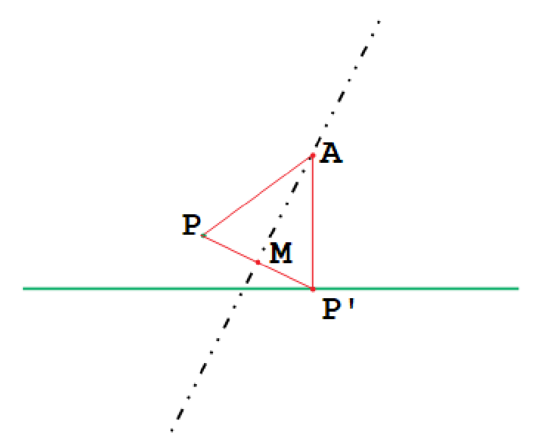
La costruzione procede, come da figura, portando il fuoco sulla direttrice ed effettuando la piegatura. La piegatura non è univoca, quindi dopo un buon numero si ottiene una buona approssimazione della parabola.



10 *La parabola – metodo.*

Per verificare che effettivamente la figura ottenuta è una parabola, consideriamo una sola delle linee di piegatura ottenute.

Nella figura a fianco, il fuoco *P* e la direttrice sono indicati in verde; quando portiamo il fuoco sulla direttrice nel punto *P'*, otteniamo la piegatura passante per *M* e per *A*.



11 *La parabola – dimostrazione.*

A seguito della piegatura, il segmento *PA* coincide con il segmento *AP'*, e quindi i due segmenti sono uguali: ossia, la distanza del punto *A* da *P* è pari alla sua distanza da *P'*. Ma questa non è altro che la definizione di punto appartenente alla parabola.

Più formalmente, se $A(x, y)$ è il punto ottenuto, il fuoco ha coordinate $P(0, c)$ e l'equazione della direttrice è $y=-c$, piegando *P* su *P'* abbiamo che il punto *M* è il punto medio di *PP'*, con coordinate $M(x/2, 0)$. La pendenza di *PP'* è quindi:

$$\frac{c-(-c)}{-x}$$

e quindi la pendenza di *MA* è pari a $x/(2c)$.

Ma la pendenza della retta *MA* può essere calcolata anche attraverso i punti *A* e *M*:

$$\frac{y-0}{x-\frac{x}{2}}=\frac{2y}{x}$$

Uguagliando le due espressioni si ha $x^2=4cy$, ossia

$$y=\frac{x^2}{4c}$$

È interessante notare che questa derivazione ci permette di verificare che la piegatura è effettivamente una tangente alla parabola: infatti, derivando l'equazione della parabola, si ottiene $y'=x/(2c)$, che non è altro che l'equazione della nostra retta.

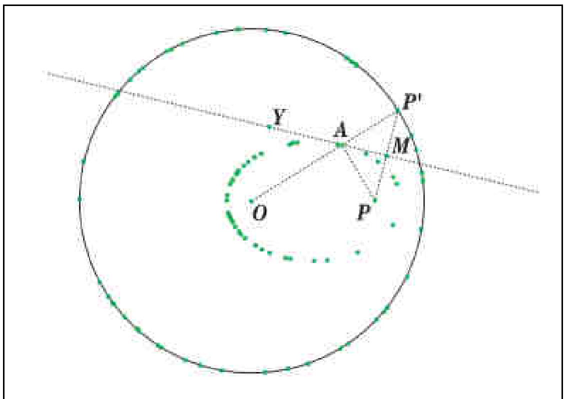
Tra le altre cose, questa costruzione permette di verificare molto facilmente le proprietà di riflessione della parabola, considerando la linea di piegatura e la prosecuzione di *P'A* oltre la parabola.

8.1.2 Ellisse

> *L'ellisse è il luogo dei punti per cui la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi è costante.*

Qui, è necessario definire un cerchio (di cui il centro sarà uno dei fuochi) e un altro punto (l'altro fuoco) *interno* al cerchio.

La costruzione procede esattamente come nel caso dell'ellisse, con la sola differenza che anziché una retta, la "direttrice" qui è il cerchio tracciato.



12 *L'ellisse.*

Riferendoci alla figura a fianco, sia O il centro della circonferenza e l'origine di un sistema di riferimento cartesiano; sia P il punto scelto all'interno del cerchio (secondo fuoco) e *YAM* la piegatura ottenuta portando P' su P, con A punto sull'ellisse. Definendo poi le coordinate dei diversi punti: $P(a,\ b)$, $A(x,\ y)$, $O(0,\ 0)$, $P(d,\ 0)$, essendo M punto medio di PP' si ha:

$$M\left(\frac{a+d}{2},\frac{b}{2}\right).$$

Se tracciamo la congiungente tra P' e O, questa incrocerà la piegatura in un punto $A(x, y)$[9]. Se la pendenza di PP' è pari a $b/(a-d)$, si ha che la pendenza di MA sarà pari a $(d-a)/b$, esprimibile anche come:

$$y-\frac{b}{2}=\frac{d-a}{b}\left(x-\frac{a+d}{2}\right) \qquad [1]$$

Essendo P sul cerchio, deve essere $a^2+b^2=r^2$: se abbassiamo le perpendicolari all'asse x passanti per A e P, per la similitudine dei due triangoli rettangoli aventi come ipotenuse OA e OP, si ricava:

$$\begin{cases}\dfrac{a}{x}=\dfrac{r}{\sqrt{x^2+y^2}}\\[2ex]\dfrac{b}{y}=\dfrac{r}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$$

e quindi:

[9] Al momento, non sappiamo ancora se questo punto appartiene o no all'ellisse: scopo della dimostrazione è dare una risposta affermativa a questa domanda.

$$\begin{cases} a = \dfrac{rx}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ b = \dfrac{ry}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \qquad [2]$$

Sostituendo i valori di a e b nell'equazione [1] e dopo una serie di semplificazioni, si ottiene:

$$2r\sqrt{x^2+y^2} - 2dx = r^2 - d^2 \qquad [3]$$

che, eliminando il radicale e raccogliendo i fattori comuni, diventa:

$$\frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{\frac{r^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{r^2-d^2}{4}} = 1$$

che, per quanto complicata, non è altro che l'equazione di un'ellisse con centro in (d/2, 0) e asse maggiore r.

La verifica che la piegatura è effettivamente una tangente all'ellisse non è semplicissima.

Derivando la [4], si ottiene:

$$\frac{2\left(x-\frac{d}{2}\right)}{\frac{r^2}{4}} + \frac{2yy'}{\frac{r^2-d^2}{4}} = 0$$

risolubile in y' come:

$$y' = \frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)\left(d^2-r^2\right)}{yr^2}.$$

Il coefficiente angolare della retta passante per P e P' vale $m(PP') = (b - 0)/(a - d)$; se sostituiamo in questa espressione i valori ottenuti nella [2], si ha:

$$m(PP') = \frac{ry}{rx - d\sqrt{x^2+y^2}} \quad \Rightarrow \quad m(MA) = \frac{rx - d\sqrt{x^2+y^2}}{ry}$$

Da [3], si ricava che

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{r^2-d^2+2dx}{2r}$$

moltiplicando per d, sottraendo rx e dividendo per ry entrambi i membri, si ha:

$$\frac{d\sqrt{x^2+y^2} - rx}{ry} = \frac{\frac{d\left(r^2-d^2+2dx\right)}{2r} - rx}{ry}$$

e, riconoscendo nel primo membro *m(MA)*, semplificando il secondo membro si ricava:

$$y' = \frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)\left(d^2-r^2\right)}{r^2 y}$$

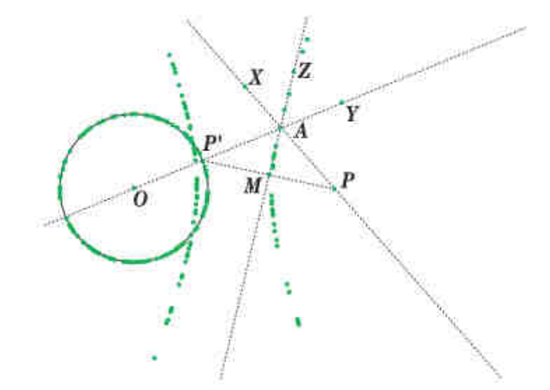
Ossia, la retta è effettivamente tangente all'ellisse nel punto A.

8.1.3 Iperbole

L'iperbole è il luogo dei punti per cui la differenza tra le distanze da due punti fissi detti fuochi è costante.

Le definizioni necessarie sono le stesse del caso dell'ellisse, ma qui il secondo fuoco va scelto all'*esterno* del cerchio.

Definiti il cerchio di centro O e il punto P esterno, portando P su P' si traccia la piegatura MA. Se tracciamo la linea OP' prolungandola sin quando incrocia la piegatura nel punto A, notiamo che $OA - AP' = r$, dove r è il raggio del cerchio.



13 *L'iperbole.*

La piegatura è la bisettrice perpendicolare del segmento PP', quindi deve essere anche $AP = PP'$, il che impone l'ulteriore relazione $OA - AP = r$.

Essendo il raggio una costante, si ha che la differenza delle distanze di A da due punti fissi (O e P) è costante, quindi A giace sull'iperbole aventi fuochi in O e P.

Le coordinate di O, P, P', M e A sono le stesse del caso dell'ellisse, con la sola differenza che $d^2 - r^2$ in questo caso è maggiore di zero; l'equazione [4] diventa allora:

$$\frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{\frac{r^2}{4}}-\frac{y^2}{\frac{d^2-r^2}{4}}=1$$

che è l'equazione di un'ellisse con centro (d/2, 0) e asse trasverso coincidente con l'asse x.

La dimostrazione del fatto che la piegatura è una tangente all'iperbole segue gli stessi passi di quella dell'ellisse.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms