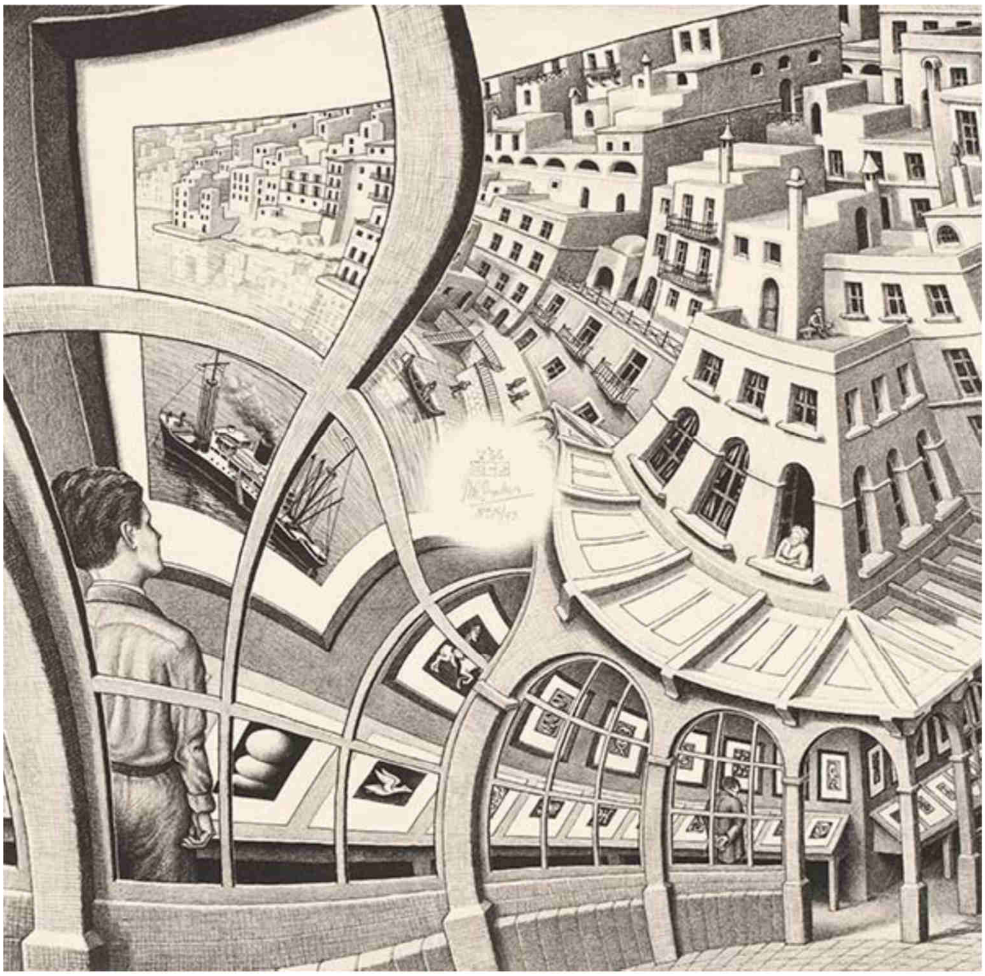
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 240 – Gennaio 2019 – Anno Ventunesimo



Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM237 ha diffuso 3'285 copie e il 13/01/2019 per Google eravamo in 38'000 pagine.

"...la conosciamo, ne hai anche già parlato...". Prima leggetevi il PM di questo numero, poi riguardatela. Potrebbe apparirvi in tutta un'altra *luce*.

1. Ma il cielo è sempre più blu

"Con la termodinamica si può calcolare, in modo grossolano, quasi tutto; con la teoria cinetica dei gas si possono calcolare meno cose, ma più accuratamente. Con la meccanica statistica si può calcolare con estrema precisione… quasi niente."
(Eugene Wigner)

"Credo si dovrebbe riconoscere che le leggi della termodinamica hanno qualcosa di diverso da tutte le altre leggi della fisica. C'è qualcosa di più palpabilmente verbale, in loro: come se manifestassero ancora i loro retaggi umani."
(Percy Bridgman)

"Ogni matematico sa che è impossibile capire qualsiasi corso elementare di termodinamica-"
(Vladimir Arnold)

L'Uomo ha sempre avuto un rapporto conflittuale con il cielo.

La colpa però è più del cielo che degli esseri umani: il cielo se ne sta lì, onnipresente e intangibile, proprio come un ente supremo che ribadisce severamente la sua esistenza e presenza, ma rifugge da ogni sorta di contatto. Si dice "toccare il cielo con un dito" per rappresentare il massimo della felicità, ma forse il modo di dire è perfidamente pessimista: toccare il cielo è impossibile, raggiungere la felicità pure.

A ben vedere, non è impossibile solo toccarlo, ma anche definirlo in maniera appropriata. Per quanto sia una delle parole che si imparano per prime, per quanto non esista lingua al mondo che non la preveda, non è davvero chiaro cosa diavolo sia, in ultima analisi, questo benedetto "cielo". Bisogna per forza risalire indietro, all'infanzia della storia, anzi forse ancora prima: Homo sapiens poggia i piedi per terra, solida, piena zeppa di cose, oggetti, esseri viventi, e con tutto questo stabilisce delle relazioni fondamentali. Sopra di lui vede invece sempre una distesa implacabile e impalpabile, azzurra di giorno e nera di notte, e già questa variabilità è stupefacente. Come non dargli un nome, come non immaginarla come cosa tangibile al pari del suolo, anche se è del tutto diversa dal resto del mondo?

Ma anche la storia de nomi non aiuta molto a definirne l'identità: le lingue anglosassoni come l'inglese e il tedesco, ad esempio, rivelano nell'etimologia dei loro termini (*sky, Himmel*) un'attenzione rivolta soprattutto alle nuvole, quasi come se, con nordica praticità, tralasciassero lo "sfondo" di così difficile definizione e si limitassero a definirlo come il "luogo dove stanno le nuvole". È probabile che ciò dipenda soprattutto dalla meteorologia impietosa del Nord Europa, dove i cieli tersi e sgombri di nuvole sono relativamente rari, almeno se messi in confronto con quelli delle terre del Mediterraneo; ma è anche possibile – le ricerche etimologiche sono sempre davvero difficili e complesse – che in realtà sia il "cielo", sia le "nuvole", derivino il proprio termine dalla parola del proto-Germanico che indica "coprire". Forse gli antichi abitanti del Nord riconoscevano la proprietà di "coprire" non solo alle nuvole – che è cosa evidente – ma anche al cielo stesso, che in fondo sembra proprio costantemente indaffarato a coprire la Terra.

Se così fosse, non ci sarebbe poi questa gran distanza con l'Europa mediterranea: tutte le lingue neolatine declinano il loro cielo a partire da "*coelum*" (o "*caelum*", tanto per ribadire la costante incertezza del soggetto), e la parola latina, come spesso accade, prende il via da un termine greco, *κοῖλος*, che significa "cavità". Se il cielo è terso e azzurro, privo di nuvole, come immaginarlo, visto che non finisce mai, se non lontanissimo, all'orizzonte, quando incontra la terra? E come fa ad incontrarla?

Nella geometria ingenua dei primi uomini, probabilmente la Terra era immaginata piatta[1]: e se la terra è piatta, che forma potrà avere il cielo, che la copre tutta? Non altrettanto "piatto", avranno immaginato, forse perché è istintiva l'idea che se cielo e terra fossero "piani infiniti" paralleli e contrapposti l'uno all'altro, dovrebbe in qualche modo essere visibile, all'orizzonte, qualcosa che non sia né cielo né terra: più semplice immaginare allora il Cielo come una grande cupola posata sulla Terra. E come tutte le cupole che si rispettino, la sua caratteristica principale dev'essere proprio la sua "cavità", in modo che gli esseri umani possano vivere al suo interno.

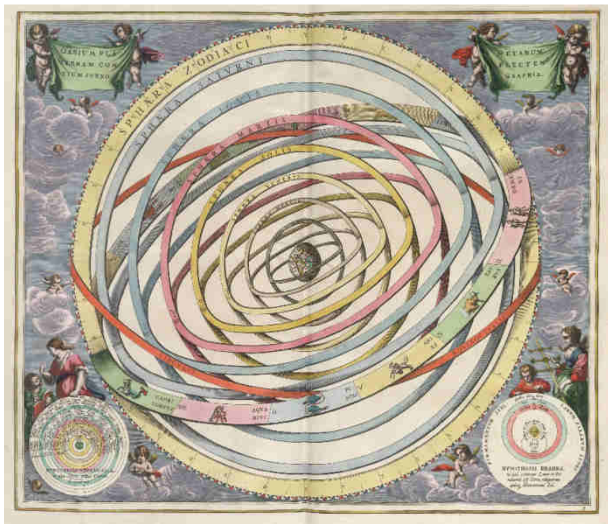
1 *Nut, la dea del Cielo, si inarca a proteggere Geb, il dio (sdraiato) della Terra, ed è sorretta da Shu, il dio dell'Aria.*

Gli antichi Egizi condividevano l'idea della cupola, della "volta" celeste, ma come al solito facevano di più: la personificavano.

Per i costruttori delle piramidi il cielo era femmina, e si chiamava Nut. Madre e sposa di Geb, dio della Terra, fu da questi un giorno separata per volontà di Ra, dio del Sole, che inviò Shu, il dio dell'Aria, a dividerli e a mantenerli tali. Come spesso accade nelle antiche mitologie, tutta la cosmogonia egizia sembra ridursi a beghe di famiglia: Ra era forse offeso all'idea che Nut dovesse ingoiare il sole ogni notte (per farlo transitare attraverso il suo corpo e riproporlo ogni mattina a est, dopo che era scomparso a Ovest[2]), ma era soprattutto preoccupato che Nut potesse avere figli in grado di superare il suo potere. Nut era però decisissima all'idea di sfornare dei pargoli, e ci rimane malissimo quando Ra la colpisce con una maledizione più o meno suonava: "*Non potrai avere figli in nessun giorno dell'anno*". Con i calendari però, si sa, non si può mai essere certi di nulla; men che mai con quello egiziano del tempo, che prevedeva che l'anno durasse solo 360 giorni. Il mito continua con Nut che, disperata, corre da Thoth, dio della Saggezza, a chiedere ausilio e conforto. Come tutti i saggi che si rispettino, Thoth elabora un sapiente piano, oggettivo e razionale, basato su… una partita a dadi. Va da Konshu, dio della Luna (al quale, sia detto per inciso, Ra stava già abbastanza antipatico) e lo sfida a mettere in palio un po' della sua luce lunare ad ogni partita. Thoth vince così tante partite da riuscire a racimolare la luce sufficiente per illuminare il mondo per ben cinque giorni, e ovviamente coglie così due piccioni con una fava. Primo, dà una bella regolata al calendario, che vede l'anno arrivare a quota 365 giorni, molto meglio dei 360 fino ad allora previsti; secondo, regala a Nut cinque giorni buoni per partorire, perché quei giorni extra non rientrano naturalmente nella maledizione lanciatale a suo tempo da Ra. Nut ne approfitta alla grande, e scodella in men che non si dica Osiride, Horus, Seth, Iside e Nefti; in pratica tutto il pantheon egizio. È a questo punto che Ra si infuria e decide di separare Nut da Geb: e per farlo manda a far da poliziotto anticopula Shu che – cosa in fondo non troppo sorprendente in un regno in cui era usuale fa sposare i monarchi fra fratelli – era padre sia di Geb che di Nut.

[1] E non solo in quella, ahimè… i Terrapiattisti sono ancora fra noi, com'è noto.

[2] Non si pensi che questo meccanismo sia troppo ingenuo e ridicolo, agli occhi dei moderni. I Terrapiattisti citati nella nota precedente spiegano lo strano comparire del sole all'alba in un posto diverso da quello in cui è scomparso al tramonto tramite il fantasmagorico "effetto Pac-Man". Ci rifiutiamo di dettagliarlo oltre, un po' perché chi è abbastanza vecchio da aver giocato al celebre videogioco forse può intuirlo, in parte perché è così ridicolo che non vogliamo togliere a nessuno la voglia di scoprirlo da solo con una ricerca in rete.



2 *Le sfere cristalline secondo Andreas Cellarius: "Harmonia macrocosmica seu atlas universalis et novus, totius universi creati cosmographiam generalem, et novam exhibens"*

L'idea della volta celeste è insomma antichissima. Verosimilmente, gran parte degli antichi la immaginava davvero solida, tangibile: idea che naturalmente si rafforza quando si nota che tutte le stelle si muovono in maniera solidale tra loro. Come può essere possibile una cosa del genere, a meno di immaginare che le stelle siano "inchiodate" appunto su una cupola rigida, eternamente in moto? Oddio, abbiamo detto "tutte le stelle", e forse abbiamo esagerato: ci sono sempre quei dannati "astri vagabondi", o "*πλάνητες ἀστέρες*", per dirla alla greca, che invece scorrazzano per conto loro. Eppure, ecco: quegli astri ribelli non bastano a far archiviare l'idea della volta celeste: il "cielo delle stelle fisse[3]" continua a mantenere la sua esistenza, e per spiegare il moto strano del Sole, della Luna e dei pianeti si moltiplicano addirittura le volte: saranno sempre rigide e solide ma, diamine, occorrerà allora che siano anche trasparenti, altrimenti oscurerebbero l'una il cielo dell'altra, e soprattutto l'ultimo, quello delle stelle fisse. Così, ogni pianeta si vede attribuire una "sfera cristallina", cioè trasparente come il vetro, su cui inchiodarsi, per potersi muovere nel cielo in maniera certo esatta, ma svincolato dagli altri e dalle stelle fisse.

Certo, suona tutto un po' artificioso, specie ad orecchi moderni: ma è sempre difficile abbandonare le vecchie convinzioni; e capita spesso che ogni nuova scoperta che sembra poter demolire l'ordine costituito venga ricondotta, per lo più forzatamente, nell'ortodossia dottrinale. Già dai tempi di Tolomeo si deve ricorrere a forzature: lui stesso deve correre ai ripari per giustificare la precessione degli equinozi scoperta da Ipparco di Bitinia, e per allineare quel piccolo moto retrogrado inventa un'ulteriore sfera – la madre di tutte le sfere, si potrebbe dire – ancora più esterna a quella delle stelle fisse: la chiama "Primo Mobile", e la sua natura protettrice e misteriosa la fa ascendere presto al ruolo più importante di tutte: è da essa che tutto il Cosmo acquista il suo movimento, ed è in essa – motore immoto – che ha origine tutto, come descrive perfettamente Dante nel XXVII canto del Paradiso:

«La natura del mondo, che quieta
il mezzo e tutto l'altro intorno move,
quinci comincia come da sua meta;

e questo cielo non ha altro dove
che la mente divina, in che s'accende
l'amor che 'l volge e la virtù ch'ei piove.

Luce e amor d'un cerchio lui comprende,
sì come questo li altri; e quel precinto
colui che 'l cinge solamente intende.

[3] "Fisse" suona un po' meglio di "inchiodate", ma il senso rimane lo stesso. Tra l'altro, "fisso" si dice "*firmum*" in latino, e da qui arriva quella bella parola italiana, spesso usata come poetico sinonimo di "universo" e di "cielo stellato": il "firmamento".

Non è suo moto per altro distinto,
ma li altri son mensurati da questo,
sì come diece da mezzo e da quinto.»

Abbiamo davvero fatto tanti errori, noi umani, nel tentativo di comprendere il cielo. Abbiamo perseverato negli sbagli, come fossimo animati da demoniaca perversione. Ma resta il fatto che il cielo è davvero misterioso e difficile da capire: non lo si tocca, è pieno zeppo di oggetti luminosi mossi da regole complicate, e sembra divertirsi ogni tanto a farne comparire di imprevisti e spaventosi, come le comete o le supernove; o anche, più semplicemente e frequentemente, a incupirsi fino al grigio più scuro, scatenando tempeste e uragani. È un inesplorabile ricettacolo di questioni e domande, a partire dalla più semplice e naturale di tutte: da dove diavolo ha preso quel fantastico colore azzurro?

3 *Persino alla scorbutica per eccellenza, Lucy Van Pelt, il cielo piace così com'è.*

La risposta a questa domanda – che è forse davvero tra le più antiche che si è posta l'umanità – si è fatta attendere a lungo. Ha più o meno la stessa età dell'Italia unita, essendo arrivata nel 1871. Va riconosciuto che era davvero impossibile dedurla senza avere un'idea abbastanza moderna della luce, e della sua natura elettromagnetica. Le Equazioni di Maxwell[4] che riepilogano tutto l'elettromagnetismo sono appena di sei anni prima, e ancora in quella forma complicata, diversa da quella, notoriamente più immediata, che gli dette Oliver Heaviside[5] qualche anno dopo.

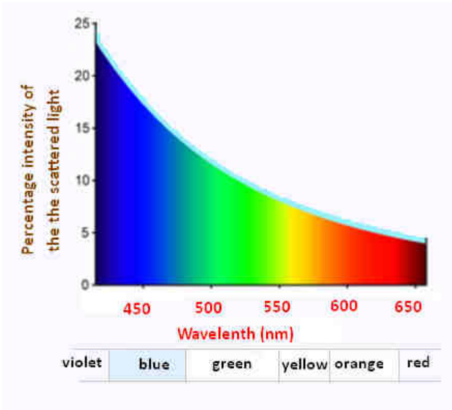
La risposta al mistero del cielo azzurro sta nello "Scattering di Rayleigh", che prende il nome da John William Strutt, barone di Rayleigh. Si tratta di uno "scattering elastico", ovvero di un urto tra particelle in cui l'energia delle stesse non è tale da far loro cambiare natura o caratteristiche: qualcosa di molto simile allo scontro tra palle da biliardo, insomma. Quando la luce attraversa un fluido torbido, come può essere considerata l'atmosfera terrestre, i fotoni che compongono la luce vengono deviati o, per essere un po' più precisi, diffusi. Già questo concetto di diffusione, anche se solo qualitativo e non ancora quantitativo, è importante: spiega perché il cielo della Terra è tutto luminoso, a differenza di quello della Luna. Gli astronauti delle missioni Apollo, tutti atterrati sulla faccia visibile della Luna, vedevano un sole accecante stagliarsi su un cielo "normalmente" nero: non c'è atmosfera sul nostro satellite, la luce del sole non rimbalza sulle particelle dell'atmosfera, e quindi sulla cara vecchia Selene non ci si può godere il bel cielo luminoso che ci dona madre Terra.

Luminoso, d'accordo: ma perché blu?

[4] Raccontiamo di James Clerk Maxwell in "Rappresentazioni e decimali", RM113, Giugno 2008.

[5] … e di Oliver Heaviside in "Rosso Malpelo", RM160, Maggio 2012.

La luce visibile del sole – ormai lo sanno anche i bambini – è data dai colori dell'arcobaleno. Per essere appena un po' più precisi, è data dalla somma di diverse lunghezze d'onda di radiazione elettromagnetica: a ogni lunghezza d'onda corrisponde quello che noi chiamiamo "colore". Ci sono un marasma di colori, nell'iride, anche se di solito ci limitiamo a distinguerne solo sei o sette[6]: e vanno da rosso al blu. Lunghezza d'onda maggiore (e quindi frequenza minore) per il rosso, lunghezza d'onda minore (e quindi frequenza maggiore) per l'estremità del violetto. Ebbene, usando la giovane teoria elettromagnetica della luce ed eseguendo i calcoli necessari per quantificare l'effetto della diffusione della luce solare nell'atmosfera, lord Rayleigh dimostrò (probabilmente con suo grande stupore) che la diffusione era in relazione con la frequenza (inverso della lunghezza d'onda); e non in semplice relazione inversa lineare inversa, ma addirittura alla *quarta* potenza. Insomma, la diffusione procede in ragione $(1/\lambda)^4$, e questo significa che la parte dello spettro solare con i fotoni a più alte frequenze viene diffusa in maniera estremamente maggiore rispetto alla zona delle grandi lunghezze d'onda, dove campeggiano i colori rosso e arancione.



4 *Ripartizione percentuale delle lunghezze d'onda dello spettro della luce solare*

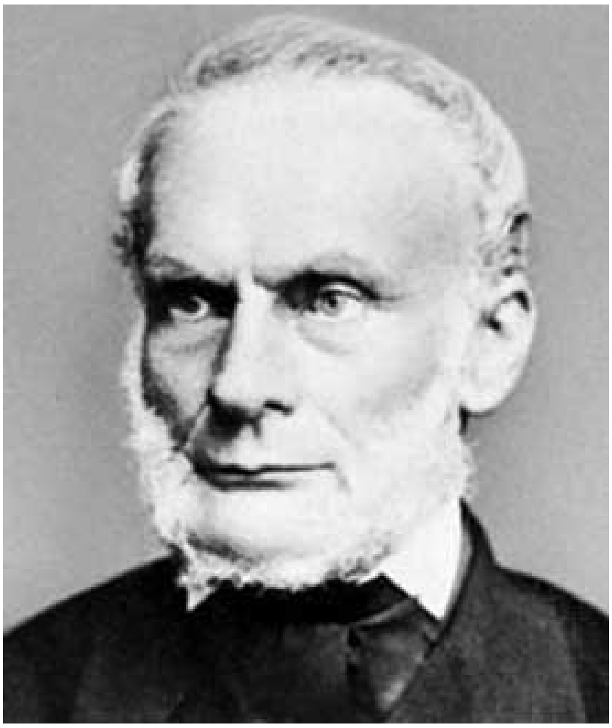
Dal punto di vista didattico, questa spiegazione è sempre un po' rischiosa, perché è inevitabile che qualche studente brillante chieda perché mai il cielo è allora "solo" azzurro e non proprio viola, visto che è il violetto il colore dello spettro visibile a minore lunghezza d'onda. L'obiezione è sacrosanta, lo studente è meritevole, anche se la spiegazione farà un po' perdere il fascino evocativo di quella sorprendente quarta potenza all'interno della formula dello scattering di Rayleigh. Semplicemente, nello spettro solare c'è "molto più blu" che viola; anche se il viola ha lunghezza d'onda un po' più piccola del blu, la "quantità di luce" dello spettro che noi chiamiamo "blu" è molto maggiore di quella che identifichiamo come "viola".

Il colore che vediamo nel cielo è insomma il risultato di una mescolanza dei colori (proprio come è già la luce solare non diffusa: la somma dei colori dell'iride lo percepiamo come "bianco") in cui sono spettacolarmente favorite, grazie all'esaltazione che ne fa la diffusione, i colori ad alte frequenze: quindi una mescolanza di verde, azzurro, blu, viola, tutte amplificate dalla diffusione; i colori come il giallo e il rosso praticamente scompaiono, mentre gli altri danno quel risultato "azzurro" che ci piace tanto.

Nel 1847, un quarto di secolo prima che Rayleigh esponesse il risultato dei suoi studi sulla diffusione, un giovane laureando tedesco espose la sua tesi di dottorato all'università di Halle-Wittenberg; tesi centrata proprio sul colore del cielo. Il laureando ottenne l'ambito dottorato, la sua dissertazione fu approvata e lodata, anche se il tempo ne avrebbe poi dimostrato la fallacia: si basava infatti su principi di riflessione e rifrazione, e non di diffusione, come poi venne dimostrato essere. A prescindere dall'esattezza o meno della tesi, certo è che il suo autore mostrava fin da allora un interesse specifico per i grandi temi della fisica, per le grandi domande sulla natura dell'Universo, e non si può certo dire che si sia poi smentito nel resto della sua carriera accademica. Fu infatti forse il primo a dedurre una caratteristica del tutto generale sull'Universo preso nel suo insieme: non siamo però del tutto sicuri che la cosa lo abbia

[6] C'è una sorta di leggenda sul numero dei colori dell'iride: il primo a classificarli, con il celeberrimo esperimento del prisma, è stato Newton. Nel descrivere lo spettro, Newton stava per elencare solo il rosso, l'arancio, il giallo, il verde, il blu e il viola: totale, sei. Sei è un bel numero, ma assai meno evocativo del magico sette: e così sir Isaac ha inserito, un po' a forza, anche il misterioso "indaco" ("*indigo*" in inglese) tra il blu e il violetto.

rallegrato, visto che la sua geniale deduzione suonava come l'inevitabile condanna a morte dell'Universo stesso.



5 *Rudolf Clausius*

Rudolf Julius Emmanuel Clausius nasce nella città prussiana[7] di Koslin il 2 Gennaio 1822. La famiglia è ragionevolmente benestante: suo padre è un ministro della chiesa protestante e un insegnante stimato al punto di far parte del consiglio nazionale per l'educazione, nonché proprietario e preside della scuola privata dove lo stesso Rudolf studia per i suoi primi anni.

Fin dall'adolescenza mostra una mente brillante e matura: si fa apprezzare da coetanei e insegnanti, si interessa con successo di diverse discipline, al punto che quando dovrà scegliere definitivamente dove dirigere i suoi sforzi, resterà a lungo in imbarazzo, essendo attratto anche dagli studi storici. Alla fine decide di dedicarsi alla scienza, ed entra all'università di Berlino nel 1840.

La citata tesi di dottorato sul colore del cielo del 1847[8] si distingueva non tanto per i risultati – che del resto abbiamo visto non aver superato la prova del tempo – ma per l'utilizzo diffuso e preciso deli strumenti matematici: Rudolf si mette subito in luce come un fisico teorico di prim'ordine, e dotato di coraggio innovativo.

Coraggio che deve aver usato in gran copia, nel presentare il suo primo articolo accademico, giusto un paio di anni dopo: il titolo della memoria, "*Sulla forza motrice del calore*"[9], non sembra particolarmente rivoluzionario, ma di fatto distrugge una teoria vecchia di secoli, quella del *calorico*, e fonda una scienza quasi del tutto nuova, la *Termodinamica*. Clausius la presenta all'Accademia di Berlino nel febbraio del 1850, e viene presto stampata sulla più autorevole rivista accademica di fisica, gli *Annalen der Physik*. Rudolf ha da poco compiuto ventott'anni, e già si staglia come uno degli scienziati più autorevoli del suo tempo. Nell'articolo confuta gli assiomi fondamentali della teoria del calorico, enuncia la relazione che lega calore e lavoro facendola assurgere a "Primo Principio"[10] della sua nuova scienza. Introduce il concetto fondamentale di "energia interna" e anche – sebbene senza ancora onorarla di un nome apposito – quella grandezza cruciale e tragica che misura il disordine del mondo. Dovranno passare ancora quattordici anni prima che, in un articolo del 1864, battezzi quel concetto con il nome evocativo di entropia.

[7] Come spesso succede, quando si parla dei mobilissimi confini della storia d'Europa, è bene specificare che l'allora prussiana Koslin è, al giorno d'oggi, la polacca Koszalin.

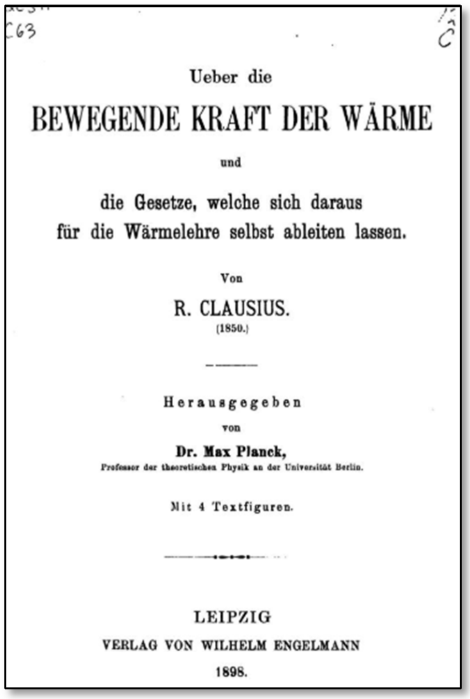
[8] È sempre difficile seguire tempi e luoghi: Clausius si iscrive a Berlino nel 1840, dove si laurea; nel 1846 entra al Reale Seminario di Boeck, ma nel 1847 è già ad Halle dove discute la tesi. Ciò non di meno, il dottorato gli viene assegnato solo nel luglio 1848; le tempistiche delle università tedesche del XIX secolo sono misteriose (anche se, forse, non quanto quelle delle università italiane del XXI).

[9] *Über die bewegende Kraft der Wärme*

[10] Per dirla in formule: $dQ = dU + dW$

Ma, in nuce, è già tutto presente nell'articolo del 1850, o quasi. I tre lustri che separano l'articolo del 1850 dalla definizione più classica del Secondo Principio della Termodinamica nel 1865 passano quasi tutti alla ricerca della migliore definizione di questo principio fondatore. Alla fine, prende la forma che ancora oggi di studia nelle scuole e nelle università, e che si fa notare anche e soprattutto per la sua esposizione essenzialmente verbale, concettuale, senza il ricorso a formule matematiche, anzi coniugando due asserzioni che possono perfino sembrare indipendenti l'una dall'altra, ma che insieme determinano il passato, presente e futuro dell'Universo intero:

> *L'energia dell'Universo è costante.*
> *L'entropia dell'Universo tende a un massimo.*



Ueber die
BEWEGENDE KRAFT DER WÄRME
und
die Gesetze, welche sich daraus
für die Wärmelehre selbst ableiten lassen.

Von
R. CLAUSIUS.
(1850.)

Herausgegeben
von
Dr. Max Planck,
Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin.

Mit 4 Textfiguren.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1898.

6 *L'atto di nascita della termodinamica*

L'avrà davvero sentita risuonare, nel suo intimo, come una condanna a morte dell'Universo? Sarà rimasto sorpreso, spaventato, annichilito dal risultato dei suoi calcoli e dei suoi ragionamenti? O l'avrà considerata solo come un piccolo contributo alla conoscenza della natura, normale prodotto di un ricercatore?

Gli esseri umani sono strani, contraddittori: Clausius era così affezionato alla sua patria tedesca che, pur insegnando spesso all'estero, come al celeberrimo ETH di Zurigo, tendeva a rifiutare offerte di cattedre che lo portassero lontano dalla sua patria. Quando scoppia la terribile guerra franco-prussiana del 1870, quella che stravolge gli equilibri europei e fa nascere, per la prima volta dai tempi di Carlo Magno, una grande nazione tedesca, Clausius non ha certo l'età per fare la recluta, ma non resiste all'idea di non contribuire in qualche modo al conflitto, e organizza un sistema di ambulanze per soccorrere i feriti al fronte, cosa che gli costerà anche una grave ferita a una gamba.

E probabilmente è del tutto normale che un professore tedesco che ama la sua patria si senta in dovere di dare il suo contributo in una guerra. Però è anche lecito chiedersi come sia possibile sentire ancora forti e pressanti le pulsioni dei piccoli, ridicoli interessi degli uomini e delle nazioni, quando sai d'essere stato l'uomo che ha tolto a quel cielo blu, lassù – anzi a tutto il firmamento visibile e invisibile – il diritto all'eternità.

2. Problemi

2.1 Un classico e una variazione.

Con calma. Il classico, una volta tanto, è "ambientato", ed è pure vero, almeno nelle sue premesse, che sono due (quasi tre)

1. Rudy ha trovato un problema che si spacciava come "variazione su un classico".
2. Rudy si è accorto che il suddetto "classico" non era mai stato presentato (quasi… abbiamo parlato di una cosa che gli somiglia).
3. Rudy, per motivi che non verranno trattati qui, si sta ritrovando a nominare spesso l'Ungheria.

[...poi non dite che sono egocentrico… RdA] La parte interessante è che le tre cose riescono ad andare d'accordo.

Allora, prima qualche disegnino:

Già, Budapest.

Nella foto sulla sinistra (*Google Street*), poteste riconoscere la statua situata in *Hősok Tere*, mentre nella seconda (*Wikipedia*), la *Socha Svobody*, che dovrebbe voler dire "Statua della Libertà". Ora, queste due statue hanno in comune la caratteristica di avere una figura in cima ad una colonna.

Qual è il punto *migliore* per vederle?

Supponiamo una statua stilitica generalizzata: la "figura umana" ha altezza h, la colonna ha altezza p, i vostri occhi sono ad altezza e dal terreno.

Quello che ci chiediamo è, una volta noti questi dati, da che distanza la statua appare "più grande", ossia la figura umana in cima sottende dal punto di vista scelto il maggior angolo?

Ignorando (tanto per cambiare) il mondo reale, oltre all'ovvio (almeno per i magiari: un mucchio di statue sono montate in questo modo) caso $p>e$, potreste studiare anche i casi $p<e$ e $(p+h)<e$ (nome in codice dell'ultimo caso, "Presepe")

Posto che vogliate fare qualche altro conto, vi raccontiamo la variazione (senza ambientazioni, anche se Rudy non riesce a togliersi di mente il concetto di "panoramica" con il furbofonino. Che non dovrebbe centrare niente. C'entra? No, fuori centro).

Sia C un punto (fisso) su un segmento AB, e sia Z un punto mobile su una retta r passante per B. Siano definiti gli angoli $\theta=ZBA$ e $\varphi=CZA$: al variare di Z su r, φ varierà; sia P la posizione di Z per cui φ assume il valore massimo.

Come varia P al variare di θ?

Se ritenete opportuno passare alle prove sul campo (in fondo, *Tere* dovrebbe voler dire "giardino"), ci pare di ricordare una buona birreria sulla collina: la stagione è quel che è, ma d'estate potete passeggiare sulle mura con il boccale, con sotto il panorama della città. Come dicono le cartine del Touring, "vale il viaggio".

2.2 Problema squisitamente teorico (per ora)

Nel senso che sta finendo il 2018, il Sole è al punto di massima della giornata e stiamo scrivendo in maniche corte sulla veranda (OK, esposta a sud, ma porca miseria…). Temperature degne di un settembre "frescolino": ieri, il nostro TOR (Termometro Ottimista di Rudy) segnava VENTISEI gradi, e non ha mai sballato più del 10%.

Comunque, siccome il problema non è facile, speriamo in una pronta nevicata, così potete fare qualche verifica sul campo (a coppie, e mettetevi d'accordo prima).

Avete appena fatto due bellissime e compatte palle di neve *[...l'avevo detto! Mettetevi d'accordo prima!]*, una con diametro il doppio dell'altra. Fieri del lavoro compiuto, ve le portate a casa. Dove, giustamente, i riscaldamenti sono accesi.

Essendo la neve un pessimo conduttore di calore (come ben sa chi se ne è presa una manciata nel collo), solo la superficie assorbirà calore, quindi lo scioglimento è proporzionale alla superficie esposta; dopo un certo tempo, senza lasciare rimpianti, il volume della palla più grande è dimezzato.

Quanto vale il volume della palla piccola?

Oh, se fate i conti per bene, ad un certo punto dovrebbe saltarvi fuori una "stranezza" mica male…

3. Bungee Jumpers

Il segmento che congiunge $A(p, 0)$ a $B(0, p)$ passa attraverso i p–1 punti del reticolo degli interi (1, p–1), (2, p–2), …, (p–1, 1). Le p–1 linee da questi punti all'origine O dividono il triangolo AOB in p piccoli triangoli.

I due piccoli triangoli aventi come uno dei lati uno degli assi non contengono punti del reticolo al loro interno. Se p è un numero primo, nessuno dei segmenti tracciati dall'origine degli assi conterrà un punto del reticolo.

Provate che, se p è primo, tutti i punti del reticolo all'interno del triangolo AOB sono all'interno dei piccoli triangoli più interni ed *equamente divisi* tra i triangoli.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Trentunesimo numero della rubrica più schizofrenica di questa augusta rivista di matematica ricreativa. Abbiamo più volte raccontato quali siano le condizioni perché questa rubrica, di tanto in tanto, torni alla luce: ma in realtà le condizioni sono varie e variabilissime, e spesso in reciproca contraddizione tra loro stesse. Ad esempio, la più frequente (e autentica) scusante addotta per la sua costante rarefazione è che non troviamo quasi mai il tempo di scriverla. Cosa vera, così vera che più vera non si può: ma allora, come spiegare che questo mese la facciamo uscire, nonostante il tempo dei redattori sia più ridotto che mai, e il ritardo di uscita della rivista sia ormai prossimo al record assoluto?

Non ne abbiamo idea. Forse è puro *cupio dissolvi*. Forse perché siamo un po' folli, e infatti ci piacciono le follie. A pensarci bene, è probabile che sia proprio quest'ultima la vera ragione: perché, se si parla di follie, il libro oggetto di questa EuNBeT non ha davvero nulla da invidiare a niente e a nessuno.

4.1 Teoria dei canti

«I punti dello spazio che sprigiono,
la pioggia che si vomita già stanca;
e tutto ciò fa solo quel che sono,
parola che mi attacca come malta,
il canto di persone in abbandono,
la lingua che sul tempo si ribalta. »

Innanzitutto, un avvertimento: questa recensione contiene uno scoop clamoroso, che ovviamente riveleremo solo alla fine. Per il momento, accontentatevi di sapere che la rivelazione esplosiva riguarda il nome dell'autore, che dimostreremo non essere quello che campeggia in copertina: e quel che riveleremo non sarà la mera denuncia di un artificio lezioso come l'utilizzo di uno pseudonimo o di un nome d'arte; non disveleremo un trito trucchetto editoriale, analogo al mistero autoriale della saga de "*L'amica geniale*", fatto apposta per esaltare misteri artefatti e scatenare commenti sia sulle note critiche sia sui rotocalchi che vivono di pettegolezzi. Alla fin fine, all'interno di quest'opera il nome vero dell'autore compare, e pertanto l'onestà intellettuale e la correttezza verso il lettore sono salvaguardate, anche se un po' nascoste. Ma lo abbiamo già detto, su questo torneremo più tardi: al momento, più che dell'autore, è importante parlare dell'editore che invece – questo sì – brilla proverbialmente per la sua assenza.

Sarebbe facile farsi subito forti del sacrosanto adagio che recita "gli assenti hanno sempre torto", e tutto sommato non abbiamo intenzione di contraddire la saggezza popolare, anche perché ne condividiamo appieno il messaggio: insomma, se un editore mostrasse di avere il giusto coraggio e si decidesse a stampare questo libro, ne saremmo davvero lieti. Però, essendo notoriamente più garantisti che giustizialisti, vi inviteremo prima a cimentarvi con un *Gedankenexperiment* o, se il termine teutonico vi suona un po' troppo impegnativo, quantomeno con un veloce esperimento mentale. Consiste in questa facile azione: mettetevi nei panni di un editore; un qualunque editore italiano, per la precisione.

Un editore è, per definizione, un attore importante nel panorama culturale e intellettuale del paese in cui opera: che pubblichi romanzi fondamentali della letteratura o opuscoletti scollacciati, è comunque uno snodo, un *hub* (come direbbero gli anglofoni e le hostess) della cultura nazionale. Gli editori, in genere, questa cosa la sanno benissimo, e i migliori se ne fanno anche carico. Il guaio però è che un editore è anche – e di questi tempi, soprattutto – un imprenditore, e come tale ha come compito primario quello di tenere in vita la sua azienda. È la solita vecchia storia: anche Michelangelo, tra un'arrampicata e l'altra sull'impalcatura che lo portava al soffitto della Cappella Sistina, ogni tanto scendeva e si sparava un panino al formaggio; e se non lo avesse fatto, col cavolo che adesso avremmo il suo Giudizio Universale. Il guaio è che ora, in questo surrettizio Terzo Millennio e qui, in questa sconcertante terra d'Italia, la sopravvivenza basata sull'imprenditoria culturale è affare complicatissimo, e il mantenimento in vita d'una casa editrice è cosa che assomiglia sempre di più ad una arrampicata del sesto grado artificiale su parete rocciosa e friabile.

Con queste condizioni al contorno un editore, anche fosse animato del sacro fuoco della propagazione della cultura sana e alta, non si esimerà dal fare un minimo di conti; e i conti sono sempre tristi. Nella lucente nazione che vede i lettori maschi tra i 25 e 55 anni divorare la media di zero libri all'anno; nel paese culla della civiltà che deroga dallo standard internazionale e definisce "lettori fortissimi" quelli che leggono un numero di libri che, in altri paesi, li qualifica al massimo come "lettori medi", che farà l'italico editore?

Userà prudenza: tanta prudenza.

Prudenza che inevitabilmente comporta almeno un minimo di preconcetta diffidenza: l'autore è alla sua prima opera o è almeno un po' conosciuto, foss'anche solo perché ha tirato in faccia una frittata al giudice di Master Chef? E l'argomento, almeno quello, è un po' di moda? No? E di cosa parlerà mai, allora, questo manoscritto?

E qui scatta subito una nuova selezione, tanto crudele quanto inevitabile: pubblicare un "romanzo opera prima" è un rischio, ma pubblicare qualcosa di diverso da un romanzo è addirittura temerario. E ovviamente ci sono argomenti più temerari di altri: ad esempio, la divulgazione scientifica è un territorio assai accidentato, ma al suo interno la matematica lo è più di altre discipline. Tanto per dire, la fisica quantistica se la cava un po' meglio anche se, purtroppo, questo spesso succede solo perché l'aggettivo "quantistico" (se non addirittura – gulp – "quantico") cade spesso preda di saccheggiatori, briganti e stampatori senza scrupoli.

Ma persino la divulgazione scientifica può guardare a chi sta peggio: solo poche, coraggiosissime case editrici (parliamo di quelle serie) si avventurano a mantenere vive delle collane di poesia. Anche qui imperversano, forse più che altrove, ingannatori e concorsi-farsa, mentre pubblicare un testo poetico tramite edizioni ordinarie è cosa tanto difficile che persino la metafora dello scalatore alle prese col sesto grado artificiale diventa riduttiva.

Chi ha voglia di leggere rime, ai tempi di Internet? Al massimo, vengono inoculate di nascosto nei testi delle canzoni di X-Factor. E cos'è poi la poesia italiana, nel XXI secolo? Un babau, un mostro policefalico: quasi nulla spaventa un lettore più dell'idea di leggere dei versi d'una moderna poesia, al giorno d'oggi. O forse sì, qualcosa di ancora più terrorizzante esiste: e cioè il dover fronteggiare forme di poesia così come venivano scritte un tempo: vincolate dalla metrica, dal conteggio delle sillabe, dalla posizione precisa e musicale degli accenti. Magari, addirittura, ritmate soprattutto dall'endecasillabo, verso principe della poesia italiana: quel verso rigoroso e tagliente come la spada d'un cavaliere medioevale, e che – come quell'arma – tutti oggi sperano che resti ben rinchiuso nei musei. Dio ne scampi, mormoreranno lettori ed editori al suo solo comparire; e scapperanno offesi e terrorizzati, senza un minimo sussulto di pietà verso la fatica erculea dell'autore: "*Chi è causa del suo mal pianga sé stesso*", urleranno da sopra le spalle fuggenti, e ribadiranno il concetto con sguardi cupi dagli occhi ridenti e fuggitivi, senza neppure rendersi conto che la forza persuasiva del loro crudele commento sta tutta nella bella struttura endecasillabica del proverbio che hanno appena strillato.

Riepilogando: non provate a presentare opere prime[11]; guardatevi dal proporre cose che non siano di narrativa; non siate tentati dalla divulgazione, soprattutto di cose astruse come la matematica, ma siate ben cauti anche con la scienza tout-court, con la filosofia, o addirittura con il linguaggio; non vi sfiori minimamente il pensiero di redigere opere di poesia, perché, come dice il saggio, chi scrive poesia o è ancora un adolescente o è un pazzo che vorrebbe restarlo. La raccomandazione di non cimentarsi con una struttura poetica di enorme complessità come quella dei poemi che hanno inventato e fondato la nostra lingua italiana è così pleonastica che non vale neppure la pena di ricordarla.

Adesso, prendete tutte queste raccomandazioni editoriali, e violatele. Anzi, rovesciatele proprio, dalla prima all'ultima: Fatto? Allora mescolate tutte insieme, soffriggete a fuoco lento, lentissimo, diciamo per almeno tre o quattro anni, ma senza lasciarvi prendere dalla pigrizia: che non siano anni accidiosi, anzi. Impegnatevi insomma anche a violare anche l'ultimo comandamento, quello che non abbiamo neppure citato, tanto è evidente ("*Siate brevi, sintetici, che nessun manoscritto osi superare la soglia fatale delle duecento pagine*"). Quando avrete il risultato di tutte queste operazioni rivoluzionarie, vi troverete orgogliosamente in mano l'arma-di-fine-di-mondo, il golem spaccatutto, il drago distruttore perfetto, l'incubo più oscuro e infernale di ogni editore: il MAI, ovvero il Manoscritto Assolutamente Impubblicabile. Accidentalmente, l'oggetto risultante sarà praticamente identico a questa "Teoria dei Canti" scritta (apparentemente) da Elena Tosato.

[11] Certo, certo che ci rendiamo conto del paradosso implicito in cotanto consiglio; come riuscire a proporre a un editore un'opera seconda, se non se ne può, prima, proporgli un'opera prima? Ciò non di meno il concetto resta abbastanza vero, un po' come il celebre "*Comma 22*" di Joseph Heller.

È un poema, nel senso più stretto del termine. Come la Divina Commedia è diviso in tre cantiche, ognuna delle quali contiene 32 canti. Trentadue perché? Perché non 34+33+33, che farebbe cifra tonda, proprio come la commedia dantesca? Per modestia, per una sorta rispetto nei confronti del padre della lingua; ma anche perché 32 è una bella potenza di 2, e i numeri – anzi il Numero – è sempre tenuto in altissima considerazione in quest'opera: non per niente si noma l'intera seconda cantica. I canti sono tutti in "terza rima", ancora come ha insegnato Dante: e questo significa che ogni canto è composto di terzine legate l'una all'altra da rime alternate, che ogni rima è triplice, a parte le due d'apertura e chiusura[12].

È un poema di endecasillabi: il fiorentino ne ha messi insieme, tra Inferno, Purgatorio e Paradiso, la bellezza di 14'233. Elena Tosato (continuiamo a chiamare l'autore così, per il momento), ha lasciato perdere le limitazioni dettate dalla modestia e di endecasillabi ne ha infilati un totale di 14'385. Significano 158'235 sillabe, ognuna delle quali deve avere o non avere un certo accento, una sua ragione ritmica, oltre che, ovviamente, un significato lessicale e narrante.

Dante, per riempire i suoi cento canti, ha usato tutto quanto aveva intorno: la sua vita, la sua lingua nuova, la Storia e le storie, la religione, la filosofia. Non si riempiono seicento pagine di versi narranti, sonanti e risonanti senza avere un intero universo da raccontare. Elena Tosato, che ci auguriamo abbia ora e sempre una vita meno complicata di quella dell'Alighieri, ha riempito la stessa quantità di fogli parlando di scienza e letteratura. La prima cantica si chiama "La Materia", ed è un trattato di fisica, ma non solo di fisica didascalica, classica: pensate che non si possa endecasillabizzare la QED? Sbagliato, si può:

> *"Quando all'indietro nel tempo s'irraggia*
> *la particella, si dice equivale"*
> *parla con voce ch'è sempre più saggia*
> *al propagarsi in avanti reale*
> *dell'antiparticella rispettiva.*

[12] Cosa che ovviamente comporta, sia in questa "Teoria dei Canti" che nella "Divina Commedia", che il numero totale dei versi di ogni canto dev'essere della forma 3N+1.

Or vedi per esempio quanto vale
l'interazione data relativa
tra il positrone e l'elettrone.
È fatto: la coppia in un canale s'inattiva
(dico, s'annichila, tutto d'un tratto).

Dopo la fisica, o meglio dopo "La Materia", ecco "Il Numero", già preannunciato. Insomma, matematica, e anche qui, non solo quella facile:

"La cardinalità si dà licenza,
per quest'insieme, d'essere maggiore
di quella dell'insieme di partenza
per l'argomento d'ardito rigore
ch'è detto diagonale: quello stesso
che spiega, nei reali, lo stupore
di farsi d'infinito per eccesso
ai naturali sui quali si conta."

…e qui a parlare è Felix Hausdorff, ma a scrivere è sempre lei, la sedicente autrice.

La terza cantica è "Il Linguaggio", e il gioco potrebbe sembrare meno duro, ma non lo è, affatto, perché il linguaggio è tutto: è linguaggio la letteratura, l'arte, la scienza, persino il Verbo con la maiuscola. Lo si rivela in tutta la cantica, o meglio in tutta l'opera; e allora sia lecito correre, come impaziente lettore di gialli, a sbirciare il finale:

"Mi sento finalmente permeabile
in quello in cui ragiono ed intuisco,
nella parola ancora incomputabile,
in quella ch'è già nitida e disposta
a farsi ancora amica e malleabile.
Da questa terra non viene risposta:
e la domanda pure resta zitta,
forse perché già nasceva mal posta.
Ma non è né vittoria, né sconfitta:
sull'incertezza si tiene il riserbo,
non è cosa che voglia darsi scritta.
Il suono si fa fragile ed acerbo,
si ficca per dormire dentro il grembo
di me che non lo chiedo. Corre il verbo,
come una bestia che vive di sghembo."

Ovviamente, dentro questa "Teoria dei Canti" si parla molto anche di logica, e non possiamo evitare di metterla in atto, nel chiudere la presentazione del libro. E allora, si ragioni: per scriverlo, l'autore deve aver fatto una fatica sovrumana, e intendiamo l'aggettivo in senso letterale. Nello scriverlo, deve aver sempre avuto ben presente la sua natura di MAI, perché è impossibile inanellare così tanti versi poetici senza conoscere lo scarso interesse del grande pubblico verso la poesia classica, e parimenti impossibile non sapere quanto sappia di sale, al pari dello pane altrui, anche la via della divulgazione scientifica. Certo conosce, l'autore o autrice, il detto che ogni formula in un testo divulgativo dimezza il numero delle copie vendute: e l'onniscienza che palesa nell'opera le avrà certamente prefigurato che trasformare quelle formule in endecasillabi incatenati in terza rima non ne disinnescava certo il potere dimezzante, anzi: lo amplificava. Quindi, cosa si può concludere? Che l'autore (o la supposta autrice) nulla sappia delle umane debolezze, dell'istintiva, naturale propensione alla fuga di fronte al più piccolo *divertissement* culturale dell'italica gente (figuriamoci di fronte a un'opera mastodontica come questa)? La conclusione è inevitabile: se si compie una fatica sovrumana per portare a termine un'opera che già si sa che non potrà essere diffusa agli altri esseri umani, allora, ovviamente, non si è umani. E infatti, ecco lo scoop: l'autore è un extraterrestre. Si è pure firmato, andate a vedere a pagina 15, dove finisce la breve introduzione: la firma splende nella sua sconvolgente rivelazione: E.T.

Non sarete mica così ingenui da pensare che si tratti davvero delle iniziali di Elena Tosato, no? O del piccolo E.T. del film di Spielberg, magari… no, questo è un extraterrestre adulto, che ci studia da secoli, forse da millenni. Ci guarda, ci analizza, forse ci trova persino simpatici, e ci scodella quest'opera grande e illogica, bella e sfacciata.

Ma poi, alla fine, non ha davvero questa grande importanza se a scrivere *Teoria dei Canti* sia stato un extraterrestre o davvero una giovin veneta che si è spostata verso sud lungo le coste dell'Adriatico, componendo un endecasillabo ogni cento metri calpestati durante la sua migrazione. Ha importanza invece dimostrare che nella nostra mente qualsiasi idea, dalla più metafisica e spirituale alla più utile e pragmatica, prende forma innanzitutto come parola. È fatta di parole la scienza, la letteratura, il progetto di un ponte, l'emozione nel guardare un sorriso, l'analisi funzionale, la forma di un apriscatole. Dalla mente alle mani e al cuore, attraverso immagini e con le parole che quelle immagini sanno spiegare e raccontare: perché le parole hanno questo potere magico di rafforzarsi, di ripetersi e chiarirsi ad ogni ripetizione, e a diventare più ricche ad ogni nuova declinazione.

E così, è piacevole vedere nello scaffale la costa spessa e blu di *Teoria dei Canti*, perché è il segnale di una saggia follia che nasce come una corsa a ostacoli, con l'ardita volontà di costringere la scienza dentro l'impietoso reticolo degli accenti poetici; e lo fa per puro istinto, senza davvero chiedersi se ci sia una buona ragione per farlo, e anche se è evidente che richiede una quantità di sudore tale che neppure Sisifo vi si cimenterebbe.

Ma se si può fare, allora è giusto farlo. Se davvero era un poema scrivibile, allora è stato sacrosanto scriverlo. E adesso che esiste ci si può ricercare la matematica e i suoi teoremi rimati, si può provare a comprendere una legge fisica facendo stupire retori e grammatici. Si può leggere *Teoria dei Canti*, si può studiarlo; o perfino usarlo come libro divinatorio, estraendo una terzina a caso, e decidere che abbia lo stesso potere de I Ching, per giocare con le rime e le formule, e subito dopo ridere dell'idea, perché questo libro è figlio della ragione, non della superstizione. Ed è un libro che tenta sempre, costantemente, per tre cantiche, novantasei canti, quattordicimila e rotti versi, di coniugare con continuità scienza e poesia, raziocinio ed emozione. Fosse anche solo per questo, si merita un bel posto centrale e dominante, da spartiacque, proprio là dove finisce lo scaffale di poesia e comincia quello scientifico.

Titolo	Teoria dei canti
Autore	Elena Tosato
Editore	Autopubblicazione Amazon
Data Pubblicazione	Novembre 2018
Prezzo	19 Euro
ISBN	978-17-3095-621-8
Pagine	613

5. Soluzioni e Note

Gennaio!

Ce l'abbiamo fatta anche stavolta, anche se spesso ne dubitiamo. Un nuovo anno è cominciato, e seppur in ritardo con tutto abbiamo licenziato il nostro ventesimo calendario. E partiamo con un po' di ritardo, ma dopotutto ci confortiamo con il fatto di esserci ancora.

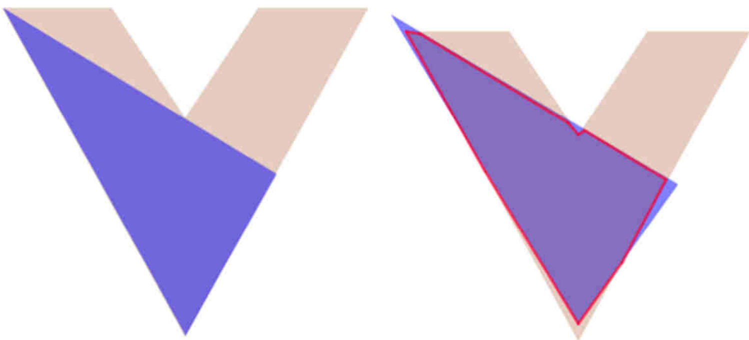
5.1 [237]

5.1.1 Speriamo che nevichi presto...

Continua l'interesse di ***Valter*** per questo problema:

> *Il Campo dei Chinotti ha una distribuzione di aiuole delle forme più svariate, ma tutti poligoni convessi, anche se non necessariamente regolari. Alcune coppie di aiuole hanno intersezioni che sono anch'esse dei poligoni e solo queste verranno considerate come nuove aiuole. Se due vecchie aiuole sono un m-agono e un n-agono, quanti lati avrà al massimo la loro intersezione? E se ci fosse un'aiuola non convessa, vale ancora il risultato trovato?*

Ed infatti ***Valter*** ci ha inviato contributi negli ultimi due mesi (riportati in RM238 e RM239) e questo ulteriore commento:

> Avevo scritto che da con un'aiuola convessa si poteva ottenere un poligono intersezione di $m+n+1$ lati.
>
> L'unica eccezione che pensavo ci fosse era se il numero dei lati delle due aiuole coincide. In quel caso ho cercato di mostrare che un poligono intersezione di $m+n$ lati si poteva almeno costruire. Mi pare ora di aver trovato un'altra eccezione per cui, però, si può costruire un poligono di $m+n$ lati.
>
> E' se i due lati adiacenti a quelli che formano l'angolo convesso giacciono sulla stessa retta. A causa di ciò non posso costruire il secondo poligono come avevo proposto per ottenere l'intersezione. Propongo un disegno esplicativo di come penso di poter sempre costruire il secondo poligono. Dovrebbe mostrare come modificando di quel poco che serve i lati si riesca comunque ad ottenerlo:
>
> 
>
> Quello che sembra un unico lato in basso a destra in realtà sono due lati. Il lato superiore segue il lato dell'esagono e quello inferiore quello del triangolo. Chiaramente in questo caso si poteva fare di meglio ingrandendo il triangolo.
>
> Ho voluto solo mostrare che anche in casi estremi con modifiche infinitesime si riesca sempre a farlo.

Non so bene perché, ma non sono certa che questa sia l'ultima puntata per questo argomento.

5.2 [238]

5.2.1 Ricordi di un pianeta lontano

Che bellezza un problemino con numeri interi o quasi:

> *Due pastori vendono x mucche a x euro l'una: con il ricavato, comprano delle pecore a 12 euro l'una ma, non essendo la cifra esattamente divisibile per 12, come "resto" viene dato loro un agnello. In seguito decidono di dividere il gregge, e ciascuno di loro ottiene lo stesso numero di animali; quello dei due che riceve l'agnello sostiene che la divisione non è equa, dato che questo vale meno di una pecora; l'altro, allora,*

propone di equilibrare il tutto aggiungendo la propria armonica : entrambi, a questo punto, considerano perfettamente equa la transazione. Quanto vale l'armonica?

La prima soluzione, arrivata al volo, è di ***Valter***:

- $M_{N€}$ = numero/prezzo di una mucca
- P_N = numero di pecore comprate
- 12€ = prezzo di ogni pecora
- $A_{g€}$ = prezzo dell'agnello
- $A_{r€}$ = valore dell'armonica.

Dal testo del problema ricavo che:

- P_N + 1 è il numero totale di animali acquistati: N pecore + 1 agnello
- P_N + 1 è un numero pari in quanto i due pastori si dividono il gregge
- P_N, di conseguenza, è un numero dispari
- $M_{N€}$ non può essere minore di 4 in quanto P_N sarebbe = 0 numero pari
- $A_{g€}$ è minore di 12€ dato che un agnello vale meno di una pecora
- il valore totale delle mucche è $M_{N€}^2$ coincidendo il loro numero/prezzo
- la differenza di valore dei due greggi divisi è: 12€ – $A_{g€}$
- togliendo/aggiungendo ai 2 greggi (12€ – $A_{g€}$)/2 ne pareggio il valore
- $A_{r€}$ deve, quindi, valere: (12€ – $A_{g€}$)/2.

Cerco ora di calcolare $A_{g€}$ e da esso ottenere $A_{r€}$.

Con "X" indico $M_{N€}$/12 e con "Y" il resto, per capirci: $M_{N€}$ = 12*X + Y.

"Y" è un intero minore di 12 ed è quanto vale $M_{N€}$ espresso modulo 12.

$M_{N€}^2$, sostituendo, vale $(12*X + Y)^2 = 144*X + 24*X*Y + Y^2$.

P_N è la parte intera di $M_{N€}^2/12$, e, quindi, di: $(144*X + 24*X*Y + Y^2)/12$.

Se $M_{N€}$ / $M_{N€}^2$ sono numeri dispari anche "Y" dovrà essere dispari.
Gli "Y" dispari minori di 12 sono: 1, 3, 5, 7, 9, 11.
Per tali numeri la parte intera del loro quadrato diviso 12 è sempre pari:
1=12***0**+1,3=12***0**+3,25=12***2**+1,49=12***4**+1,81=12***6**+9,121=12***10**+1.

Posso quindi scrivere Y^2 come 12*2*Z + W con W dispari minore di 12.

P_N quindi vale 12*2*(6*X + X*Y + Z)/12 in quanto W/12 è minore di 1.

Da tutto ciò noto che P_N è un numero pari essendo = 2*(6*X + X*Y + Z).

Ma ho mostrato che P_N deve essere dispari per cui $M_{N€}$ non lo può essere.

Se $M_{N€}$, e quindi $M_{N€}^2$, è pari anche "Y" è un numero pari minore di 12.
Considero quindi i casi di mucche in numero pari e maggiore di 2.
Gli "Y" pari minori di 12 sono: 0, 2, 4, 6, 8, 10.

Se il numero di mucche è multiplo di 6 $M_{N€}^2$ risulta divisibile per 12.
In questi casi non vi sarebbe il "resto" di un agnello da aggiungere.

Rimangono perciò, solo i casi il cui numero modulo 12 vale: 2, 4, 8. 10.

Per tutti si verifica che il loro numero al quadrato diviso 12 dà resto 4:

16=12*1+**4**, 64=12*5+**4**, 100=12*8+**4**, … si prosegue usando modulo 12.

4 è, quindi, quanto vale Ag€ e Ar€ = (12€ – Ag€)/2 vale pure sempre 4€.

Proseguiamo con ***Alberto R.***, che giunge alla stessa conclusione con un altro metodo:

Indicato con Va il valore dell'agnello, il numero di pecore acquistate è:

$$[1]\ \mathrm{Np} = (x^2 - \mathrm{Va}) / 12$$

Poiché x ed Np sono interi, anche Va lo è. Siamo dunque nel campo minato delle equazioni diofantee che si dividono in due categorie: le divertenti e le stronze. Speriamo bene!

Cominciamo col porre alcune limitazioni: Np è dispari (c'è voluto l'agnello per pareggiare il numero degli animali) e Va è compreso tra 1 e 11 (perché l'agnello vale meno della pecora).

Poiché x^2 mod 12 può valere solo 0, 1, 4, 9 affinché x^2–Va sia divisibile per 12 deve essere:

Va = 1 or 4 or 9 (Va=0 è ovviamente escluso)

Dimostriamo che per Va = 1 non ci sono soluzioni.

Se Va = 1 affinché x^2–Va sia divisibile per 12 deve essere

x^2 mod 12 = 1 il che comporta x=12k+1 oppure x=12k+5 oppure x=12k+11. Ma queste espressioni sostituite nella [1] danno un risultato pari mentre sappiamo che Np è dispari.

In modo perfettamente analogo si dimostra che non ci sono soluzioni per Va = 9

Invece per Va = 4 ci sono, come si verifica facilmente, le infinite soluzioni

x = 4N per qualunque N non multiplo di 3

Pertanto l'armonica vale 4 euro che è la semidifferenza tra il valore di una pecora (12 euro) e quello di un agnello (4 euro).

Dopo due risultati uguali, non ci dispiace proporne un terzo diverso, quello di ***trentatre***:

Le x mucche sono vendute a x euro l'una per un ricavato di x^2 euro

- x^2 non è divisibile per 12 e non può essere $x = 6n$, gli altri casi sono

$$\begin{array}{llll} a) & x=6n\pm1 & x^2=12p+1 & p=3n^2\pm n \\ b) & x=6n\pm2 & x^2=12p+4 & p=3n^2\pm2n \\ c) & x=6n+3 & x^2=12p+9 & p=3n^2+3n \end{array}$$

- dove 1, 4, 9 sono i residui quadratici modulo 12
- p è il numero di pecore, al prezzo unitario di 12 euro
- il costo dell' agnello dato in aggiunta può essere 1, 4 o 9
- il gregge è composto di $p+1$ animali divisibile per 2, quindi p è dispari
- questo è possibile solo nel caso b) con n dispari, quindi l'agnello costa 4
- la divisione è equa se (agnello + armonica) costano come una pecora
- quindi il costo dell'armonica è $12-4=8$.

Finalmente qualche differenza! A questo punto vediamo che cosa ne pensa ***Jeeves62***:

L'armonica vale 8 euro.

I dati rilevanti del problema sono:

a) Il ricavato della vendita delle mucche (che vale x^2) non può essere multiplo di 12

b) Il multiplo di 12 più prossimo per difetto ad x^2 deve essere della forma $12d$ con d numero dispari (pari al numero di pecore acquistate).

La differenza "a" fra questi due numeri ci dà il valore dell'agnello mentre l'armonica vale $12 – a$.

Cominciamo quindi a valutare i possibili valori di x alla luce di quanto sopra.

Cominciamo con il notare che tutti i multipli di 6, cioè per $x = 0 + 6p$ (con p interno positivo) x^2 sarà pari a $36p^2$ e quindi multiplo di 12: da scartare in base al punto a

Per $x= 1 + 6p$ avremo $x^2 = 1 + 12p + 36p^2 = 1 + 12(p +3p^2)$. Il numero risultante di pecore per qualsiasi valore di p è un valore pari (somma di due numeri pari o di due numeri dispari) perciò questo risultato è da scartare in base al punto b.

per $x = 3 + 6p$ avremo $x^2 = 9 + 36p + 36p^2 = 9 + 12(3p + 3p^2)$ idem come sopra

per $x = 5 + 6p$ avremo $x^2 = 25 + 60p + 36p^2 = 1 + 12(2 + 5p + 3p^2)$ anche qui il numero di pecore risultante è pari (somma di tre numeri p+d+d o p+p+p)

Per $x = 2 + 6p$ avremo $x^2 = 4 + 24p + 36p^2 = 4 + 12(2p+3p^2)$.

In questo caso per p dispari il numero di pecore acquistate è dispari e quindi compatibile con i dati del problema. Avremmo perciò un agnello valutato 4 euro e l'armonica del valore di 8 euro.

Verificando l'ultimo caso $x = 4 + 6p$ avremo $x^2 = 16 + 48p + 36p^2 = 4 + 12(1+4p+3p^2)$

Anche in questo caso il valore dell'agnello è 4 euro (e il valore dell'armonica 8 euro) ma i risultati validi per x sono solo quelli per valori di p pari.

Siamo d'accordo, la situazione è ingarbugliata. Nel dubbio ci teniamo l'armonica, che un valore ce l'ha di certo… gli altri animali sono già finiti in padella durante le feste. Andiamo a vedere quali sorprese ci regala il secondo problema.

5.2.2 Non raccontatelo in giro

Un bel giochino di logica, non vediamo l'ora di vedere le risposte al quesito:

Rudy mette sul tavolo tre foglietti con dei numeri scritti sotto x, y, z e tali che:

1. *I valori sui foglietti sono distinti tra loro, e x<y<z.*
2. *La somma dei valori è minore di* 13.

A questo punto, Dejan senza far vedere niente agli altri guarda la carta x, e comunica che non ha la più pallida idea di quali siano le altre due carte.

Indi, Alice guarda (sempre in privato) la carta y, ed enuncia il fatto che non può sapere il valore delle altre due carte.

Infine, Doc guarda senza far vedere niente a nessuno la sua carta, e comunica che non riesce a scoprire il valore delle altre due carte. Quanto vale la carta di Alice?

Se definiamo questo gioco come (3; 13)*, nel senso che si gioca in tre e la somma dei numeri è minore di* 13*, esiste un modo per determinare le coppie (a, b) per cui funziona in questo modo?*

E anche questa volta partiamo con ***Valter***:

Con somma dei valori inferiore a 13 non ho trovato soluzione. Anche per somme inferiori a valori più bassi niente di logico. Partecipo con le mie farneticazioni se, remotamente, servisse.

Le terne di valori ammessi dalle regole a mio avviso sono:

- 123 124 125 126 127 128 129
- 134 135 136 137 138
- 145 146 147
- 156
- 234 235 236 237
- 245 246

- 345

I tre deducono i valori delle altre carte se "la carta di":

- Dejan è il 3 le altre due valgono 4 e 5
- Alice è il 5 le altre due valgono 1 e 6
- Doc è il 3 le altre due valgono 1 e 2
- Doc è il 9 le altre due valgono 1 e 2.

Restano le terne:

- 124 125 126 127 128
- 134 135 136 137 138
- 145 146 147
- 234 235 236 237
- 245 246

La carta di Alice mi pare possa quindi valere 2,3 oppure 4. Anche se bastasse conoscere una delle altre 2 non funziona. Oltre alle terne precedenti si potrebbe scartare la carta di:

- Alice se vale 2: sa che quella di Dejan vale 1
- Doc se vale 8: sa che le altre due valgono 1 e 3
- Doc se vale 4: sa che quella di Alice vale 3.

Restano le seguenti terne:

- 135 136 137
- 145 146 147
- 235 236 237
- 245 246

Anche qui, mi pare, la carta di Alice può valere sia 3 che 4.

Ho trovato un problema che riesco a risolvere con queste regole:

- la somma dei valori delle 3 carte è 12 fisso
- i tre comunicano di non conoscere le altre 2 carte
- si chiede quale sia la carta di Doc.

Le terne possibili sarebbero: 129 138 147 156 237 246 345. Scarto, come prima, se "la carta di …":

- Dejan vale 3 le altre due valgono 4 e 5
- Alice vale 2 le altre due valgono 1 e 9
- Alice vale 5 le altre due valgono 1 e 6
- Doc vale 6 le altre due valgono 2 e 4
- Doc vale 8 le altre due valgono 1 e 3.

Restano: 147 237 per cui Doc non può conoscere le altre 2 carte.

Quindi il valore della carta di Doc può essere solamente 7.

E qui ci fermiamo, sperando in ulteriori contributi in futuro. Alla prossima!

6. Quick & Dirty

Sia C l'insieme degli interi positivi che, scritti in base 3, non contengono il numero 2. Dimostrate che non esistono tre interi positivi (diversi tra loro) in C che si trovino in progressione aritmetica.

Lasciando perdere C, consideriamo tre interi positivi a, $a + d$, $a + 2d$ in progressione aritmetica, espressi in base 3. Visto che $d\neq 0$, deve contenere alcune cifre diverse da zero: sia l'ultima nella n-esima posizione.

Allora, indipendentemente dall'ultima cifra di a, l'n-esima cifra di a deve essere 0, 1 *o* 2*, visto che non ha riporto.*

Costruendo la tabella dell'n-esima cifra dei tre numeri, si vede che per ogni caso almeno uno ha la cifra 2 *in qualche posizione, e quindi non può appartenere a C.*

7. Zugzwang!

Allora, se va bene così, siete distratti. Se invece no, siete distratti (ma un po' meno).

Avevamo appena trovato questo gioco, che ci è sorto il dubbio: "...ma non ne abbiamo già parlato?". Una (non tanto) rapida ricerca nei nostri archivi ha mostrato che no, non ne avevamo parlato, e lo stavamo confondendo con "Field of Action" (che noi ci ricordiamo solo per come trattava male le pedine). Qui abbiamo *qualche* vaga somiglianza (tipo il dover saper contare), ma nulla che possa impedirci di gustare una partita.

7.1 Line of Action

Allora, diamo credito all'inventore: a quanto ci risulta, nasce dalla mente di ***Claude Soucie***, che dovrebbe averlo inventato nel 1960: siamo dubitativi solo per il fatto che ci stupisce un francofono abbia dato un nome inglese ad un gioco, ma per il resto siamo ragionevolmente sicuri.

Cominciamo con il complicare le cose: vi serve una scacchiera e "un certo numero" di pedine da Dama. Claude parte deciso con una scacchiera 8×8 e 12 pedine per ogni colore, ma a noi sembra, dalle regole, che si possa tranquillamente giocare su una generica scacchiera N×N con $2\cdot(n-2)$ pedine per colore, quindi se volete lanciarvi in una 10×10 con 16+16 pedine, nulla ve lo vieta.

La disposizione è "a corona": $(n-2)$ pedine per ogni lato della scacchiera, con le caselle d'angolo lasciate libere e le pedine del medesimo colore che si fronteggiano.

Ogni pedina muove in orizzontale, verticale o diagonale *di tante caselle quante sono le pedine sull'intera linea di movimento*[13], sia proprie che avversarie, compresa quella che verrà mossa.

È permesso saltare le proprie pedine, ma non quelle avversarie; se una pedina atterra *esattamente* nella casella di una pedina avversaria, la pedina avversaria è "presa" e esce dal gioco. Non si può occupare una casella occupata da una propria pedina.

A questo punto poteste far notare che conviene sbrigarsi a prendere, visto che la pedina avversaria (se non succede nulla su quella linea d'azione) al suo turno avrà la possibilità di prendere la vostra pedina; ma siamo sicuri valga la pena, di "mangiare il più possibile"?

Infatti, scopo del gioco è radunare in un *gruppo* tutte le proprie pedine, e averne poche forse facilita la cosa. Oh, si definisce *gruppo* un insieme di pedine su caselle almeno a due a due adiacenti (quindi, ci vuole un lato della casella in comune, niente "adiacenze di vertice"): meno pedine avete, più dovrebbe essere facile "fare gruppo" (o, subdolamente, avere tutte le pedine raggruppate tranne una, e farsela mangiare).

8. Pagina 46

Sia $C(a, b)$ un punto del reticolo all'interno del triangolo AOB: il coefficiente angolare della retta passante per OC è allora b/a.

Supponiamo C giaccia su uno dei segmenti divisori, individuato dal punto su AB $(i, p-i)$: in questo caso, anche la pendenza di OC sarà $(p-i)/i$, ossia:

$$\frac{b}{a}=\frac{(p-i)}{i}$$

Ma essendo $i<p$ ed essendo p primo, questo significa che i e $(p-i)$ sono primi tra loro.

[13] Non ci risulta sia presa in considerazione la scacchiera *toroidale*. Se volete provare e dirci...

C è però più vicino ad *O* di *(i, p–i),* quindi *a* e *b* sono rispettivamente minori di *i* e (*p–i*). Ma l'equazione vista sopra mostra che (*p–i*)/*i* non è allora ridotta ai minimi termini, ma può essere ridotta a *b*/*a*: questo però contraddice l'ipotesi che i e (*p–i*) siano primi tra loro, quindi tutti i punti del reticolo all'interno di *AOB* sono all'interno di uno dei piccoli triangoli.

Il segmento *AB* è diviso in parti uguali dai punti (*i, p–i*) del reticolo: questo significa che tutti i triangoli hanno la medesima base e quindi (essendo l'altezza per ognuno dei triangoli pari alla distanza della retta *AB* dall'origine) anche medesima area: essendo ogni vertice di ogni triangolo un punto del reticolo, possiamo determinare la loro area utilizzando il:

> ***Teorema di Pick***: L'area di un poligono *semplice*[14] i cui vertici sono punti sul reticolo è data da:
>
> $$q + p/2 - 1$$
>
> dove q indica il numero dei punti all'interno del poligono e p il numero dei punti sulla frontiera, includendo nel computo i puti sui vertici.

Non essendoci punti del reticolo tra (*i, p–i*) e (*i*+1, *p–i*–1), l'area di ognuno dei triangoli vale

$$q + 3/2 - 1$$

Ma dovendo questa essere uguale per ogni triangolo, q deve essere uguale per ogni triangolo, e quindi i punti sono equamente suddivisi tra tutti i triangoli.

Il valore di q è facilmente calcolabile: ogni triangolo ha area pari a 1/*p-esimo* dell'area del triangolo *OAB*, e vale:

$$1/p \cdot (½ \cdot p \cdot p) = p/2$$

Quindi, deve essere:

$$q + 3/2 - 1 = p/2$$

il che implica:

$$q = (p - 1)/2.$$

[14] Si definisce *poligono semplice* un poligono che non incrocia sé stesso.

9. Paraphernalia Mathematica

Rudy e sua moglie stanno cercando di rinnovare on-line l'Abbonamento Musei, ma il sistema si sta rifiutando di accettare le loro carte di credito (che stanno funzionando alla grande per quanto riguarda l'acquisto di caffè, quindi non cominciate a pensare male del loro conto in banca). Dovranno quindi affrontare la solita, eterna e chilometrica coda che si snoda fuori dalla sede preposta al rinnovo[15]. Quindi, per mantenere la calma, parliamo di un elemento correlato.

9.1 Quadri da un'esposizione

Nessun riferimento a Mussorgsky, Ravel o EL&P: parliamo effettivamente di un'esposizione di quadri, e vorremmo risolvere un problema che, storicamente, è stato sempre posto in due forme.

Avete una sala "poligonale balorda" (maggiori dettagli in seguito), con un mucchio di quadri alle pareti: essendo in ristrettezze economiche, dovete sorvegliare tutti i quadri con il minor numero possibile di sorveglianti, i quali possono ruotare per 360° su sé stessi, ma *non possono spostarsi*: quanti sorveglianti vi servono, e dove li mettete?

Il problema è evidentemente equivalente a quello che mostra un po' più di fiducia nel genere umano e richiede di posizionare delle lampadine (il meno possibile, che costano…) in modo tale che tutte le pareti (eh? Sì, i quadri sono solo quadri – niente sculture – e sono appesi ai muri perimetrali) siano illuminate[16].

Posto che siate interessati alle note storiche, il problema è stato posto per la prima volta nel 1973 da ***Victor Klee*** a ***Vasek Chvátal*** (leggenda vuole Vasek all'epoca fosse un laureando) alle conferenze estive di Stanford.

Il Nostro ha rapidamente definito quello che è noto come il ***Teorema di Chvátal della galleria d'arte*** (o, se preferite, "Teorema del Guardiano"): la parte più divertente, secondo noi, non è però il teorema, ma il lavoro precedente di formalizzazione matematica che permette di "lavorarci sopra". Con pochissimi disegni, tra l'altro.

Un ***poligono P*** è normalmente definito come una collezione di n vertici $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e n "lati" $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ tali che nessuna coppia di lati non consecutivi abbia un punto in comune: tutto questo serve ad evitare poligoni con lati che si incrociano tra di loro, pur senza impedire che si generino dei poligoni concavi (con quelli convessi, la soluzione del problema è banale).

In realtà, in questo modo si definisce il *bordo* dell'oggetto che ci interessa: quindi, almeno in questo caso, la definizione di "poligono" viene estesa anche all'area contenuta dal nostro oggetto. Il quale oggetto prende il nome di ***confine*** e viene indicato di solito con ∂P. E sì, il confine appartiene al poligono, quindi $\partial P \supseteq P$.

Talvolta, i poligoni di questo tipo vengono detti "semplici", per distinguerli da quelli che intersecano sé stessi: siccome questi ultimi non vengono utilizzati per allestire gallerie d'arte *(...ma non ditelo alla GAM…)*, di solito il termine "semplice" viene lasciato cadere.

In termini "pratici", il confine del nostro poligono è una ***Curva di Jordan***, che divide il piano in una parte esterna e una interna.

Inoltre, si dice che un punto $x \in P$ "*vede*" (o "copre": ma non ci piace) un punto $y \in P$ se (il segmento di retta) $xy \supseteq P$: la parte interessante di questa definizione è che uno o più punti del nostro segmento possono *appartenere a* ∂P: insomma, se guardate "a filo del muro", continuate a vedere oltre, e il vostro segmento non si arresta: il fatto che il segmento debba essere completamente incluso nel poligono vi impedisce comunque di fare il Superman e "guardare attraverso i muri".

[15] …in una delle poche zone di Torino *senza portici.*

[16] Problema evidentemente *non* risolto dall'ultima mostra alla Galleria d'Arte Moderna: targhette grigio (poco) chiaro, scritte grigio (poco) scuro, muri grigio (molto) medio. Lampadine giallognole. No, non era bianco e nero. "I macchiaioli". *Lasoma perdi, a l'è mej…*

Adesso, per ogni poligono P definiamo $G(P)$ come il *minimo numero di punti in P che vede tutto P*, ossia, più formalmente, il minimo k per cui esiste un insieme di punti $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in P$ tali che, qualunque sia $y \in P$, uno o più x_i, $1 \leq i \leq k$ vedono y.

Aria complicata? Non è altro che quello che abbiamo detto prima. Quasi.

"Quasi" nel senso che definiamo, tra tutti i poligoni con n vertici, $g(n)$ come il massimo valore raggiunto da $G(P)$.

Siamo arrivati a riga uno, finalmente: il problema posto da Klee era di trovare $g(n)$: o, come si dice con una bellissima espressione, il numero di guardiani *occasionalmente necessari ma sempre sufficienti* a coprire l'intera area.

Una veloce visualizzazione dovrebbe convincervi che, se la sala di esposizione è triangolare, un guardiano vi basta sempre, quindi $g(3)=1$: un guardiano in un punto qualsiasi è sufficiente (ricordatevi che può ruotare di 360° ma non può camminare).

Se il quadrilatero è convesso, la situazione è sostanzialmente la stessa, e anche se aumenta il numero dei lati ma viene conservata la convessità non ci sono problemi: ogni punto va bene.

...e se cominciamo a inserire convessità? Per prima cosa, inventiamoci un termine: in un poligono, vengono definiti angoli ***reflex*** gli angoli interni maggiori di 180°.

Un quadrilatero avrà al più un angolo reflex (viene una cosa che somiglia a una "V"), quindi vi basta sempre un guardiano messo nell'angolo opposto a quello reflex: col che, possiamo dire che anche $g(4)=1$.

Pentagono? Pentagono. Qui possiamo avere tre "forme", con 0, 1 o 2 angoli reflex: per avere un'idea di come sono fatti gli ultimi due, prendete un pentagono con 0 angoli reflex e *riflettete* (...capito, da dove arriva il nome?) uno o due angoli all'interno (evitando le sovrapposizioni): vi basta comunque sempre un guardiano posizionato in un punto "strategico", quindi anche $g(5)=1$.

Prima di annoiarvi, aspettate di arrivare all'esagono, che qui ci sono un paio di casi balordi. Se il vostro esagono ha due angoli reflex, sono possibili due disposizioni: uno somiglia vagamente ad una "Z", mentre l'altro somiglia ad una "U". Nel caso della "Z", vi servono **due** guardiani, posizionati negli angoli in basso a sinistra e in alto a destra, mentre nel caso della "U" dovete posizionarli in basso a sinistra e in basso a destra: quindi $g(6)=2$. Estremamente inefficiente, tra l'altro, visto che c'è una zona di sovrapposizione.

Il caso "U", comunque, ci torna utile, se pensiamo da una sua generalizzazione: partiamo da un rettangolo "basso e largo", e appiccichiamo, sul lato superiore, una serie di triangoli, in modo da ottenere una specie di "pettine[17]" con i denti verso l'alto e appuntiti. A questo punto, vi serve una guardia per ogni "dente": riducendo al minimo i segmenti necessari per la parte rettangolare (uno deve farci da "base", ma le due altezze si formano prolungando i lati del primo e ultimo dente) e prevedendo un segmento tra un dente e l'altro (altrimenti potreste mettere un guardiano a guardare due triangoli con la schiena appoggiata alla "base"), vi accorgete che il vostro "pettine" ha $3k$ lati e k denti. Questo significa che, comunque, $g(n) \geq [n/3]$ dove le parentesi quadre rappresentano il quoto, senza approssimazioni.

Il focalizzarsi troppo sulla semplicità di questa formula può potare a pensare che "un guardiano ogni tre angoli" possa essere una buona soluzione: purtroppo, è possibile costruire dei casi (ad esempio una galleria d'arte a forma di "greca") in cui questa strategia lascia dei buchi.

Un'altra facile "falsa partenza" può essere data dall'idea che "...se i quadri sono appesi al muro, basta guardare il muro...": purtroppo, se vi andate a riguardare la definizione di "copertura", vi accorgete che è necessario anche controllare tutto il pavimento.

[17] La figura si chiama proprio così: *comb*.

Non vorremmo pensaste che tutto il lavoro di Chvátal si è limitato a questi giochetti da birreria postcongressuale: il suo lavoro è stato molto più generale.

Consideriamo un generico poligono: triangoliamolo (ossia, riduciamolo *tutto* a triangoli) tracciando diagonali *non intersecantesi* tra di loro: avremo che alcuni vertici del poligono "raccolgono" più vertici di triangoli: definiamo un vertice di questo tipo come "ventaglio[18]". Un guardiano messo in un ventaglio potrà evidentemente controllare tutto il sistema di muri che formano le basi dei triangoli del ventaglio, quindi un guardiano per ogni ventaglio permette una sorveglianza completa.

Ma quanti sono i ventagli? Questa è stata la grande idea di Chvátal: è riuscito a dimostrare che *da qualsiasi triangolazione è possibile ricavarne una con un numero di ventagli non maggiore di* [n/3].

…quindi, si direbbe che almeno si sia riusciti a trovare il minimo del massimo...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[18] Non mi sto inventando niente: "*fan*". E, in effetti, se guardate i triangoli, uniti per un vertice, vedete che ha una sua logica.