Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 239 – Dicembre 2018 – Anno Ventesimo

1. Aramis **3**

2. Problemi **11**

2.1 Ricordi di un pianeta lontano 11

2.2 Non raccontatelo in giro 11

3. Bungee Jumpers **12**

4. Soluzioni e Note **12**

4.1 [237] 12

4.1.1 Speriamo che nevichi presto… 12

4.2 [238] 13

4.2.1 Problema di àtilibaborp 13

4.2.2 Generalizzare, ragazzi, generalizzare! 14

5. Quick & Dirty **17**

6. Pagina 46 ..... **17**

7. Paraphernalia Mathematica **18**

7.1 Alpinismo facile – Il Terzo Grado 18

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

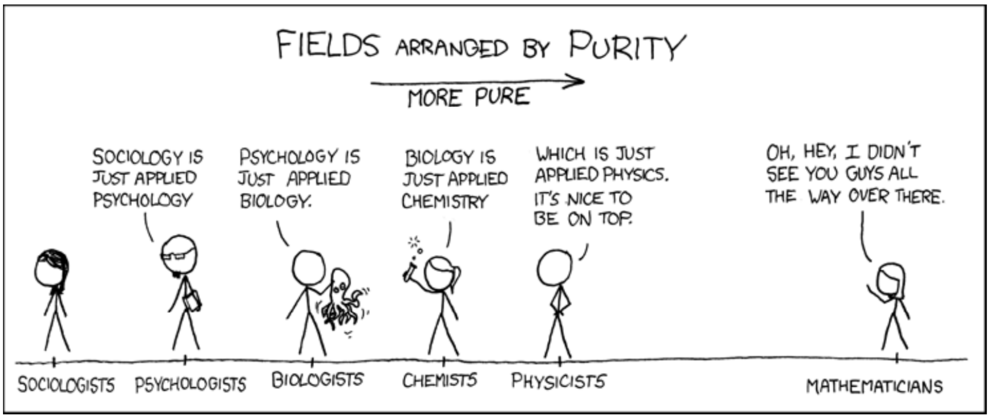
RM237 ha diffuso 3'285 copie e il 15/12/2018 per Google eravamo in 12'100 pagine.

Fin da piccoli avevamo il desiderio di scrivere libri. Il desiderio è poi diventato adulto, e quindi è cresciuto: sognavamo decine di titoli, centinaia di traduzioni, migliaia di edizioni e miriadi di ristampe. Non ci siamo andati neanche vicino, a cotanti desideri, ma qualche record ce l'abbiamo: ad esempio, quello del libro pubblicato all'insaputa dei suoi autori; o quello del libro senza nessuna ristampa, ma con tre edizioni diverse, o quello di un paio di libri che sono tornati sul mercato sotto mentite spoglie, insomma coi titoli cambiati. La verità è che siamo maramaldi perfino nell'editoria, e se li mettiamo bene in vista tutti insieme, qua in copertina, più che per farne l'ennesima pubblicità è per darci un po' di gomito, sghignazzando…

1. Aramis

"E che cosa ci troveresti mai di bello, in questa tua prova della trascendenza di π? E perché mai perdere tempo su questi problemi, visto che i numeri irrazionali non esistono neppure?"

I matematici sono tra le poche persone al mondo che si preoccupano davvero del concetto di "esistenza". La cosa suona certo paradossale, essendo unanimemente riconosciuto che la matematica è la più astratta delle scienze: anzi, a dire tutta la verità, è così astratta che spesso e volentieri si mette perfino in discussione il suo essere davvero una "scienza". Un po' come se il sapere – radice nobile da cui discende il termine "scienza" – fosse tale soltanto se messo a confronto con qualcosa di fisicamente verificabile, tangibile; e la matematica, pur avendo una pletora di applicazioni, appare spesso come un mero strumento, un metodo (forse l'unico autenticamente universale) per "conoscere" in via definitiva; come se fosse insomma una sorta di palinsesto sui cui il sapere prende forma. Un gran bel ruolo, certo: ma l'edificio in cui abitano le scienze non può essere, quasi per definizione, una scienza essa stessa.



1 *Al solito, **xkcd** sintetizza magnificamente concetti complessi con una sola vignetta*

Certo è che, scienza o meno, sul concetto di esistenza la matematica si interroga e lo fa, come al suo solito, metodologicamente. Gran parte dei teoremi sono recitati secondo il rituale schema "Dato l'ente W e la regola Y, allora *esiste* un numero X che…"; come a dire che, per procedere con ordine e garanzia di certezza, la prima cosa da verificare è che ciò di cui si parla esista davvero: solo dopo si potrà discettare sulle sue – eventuali e specifiche – proprietà. Sembra una banalità, e forse lo è davvero, come capita spesso quando si vuol iniziare un discorso lungo e coerente; ma è sorprendente vedere come gli esseri umani siano invece solitamente assai meno rigorosi e ben disposti a saltare le verifiche inziali, pronti a sospendere giudizi e ad avventurarsi in storie e leggende a prescindere dalla loro reale consistenza.

Niente di meglio della letteratura, della narrazione, per mettersi alla prova: una bella storia merita di essere raccontata e ascoltata, se è bella, la sua aderenza al reale è del tutto facoltativa. Spesso è facoltativa persino la sua coerenza interna, anche se normalmente gli scrittori stanno attenti a mantenere un buon grado di consistenza causale e sequenziale, in ciò che raccontano. Ma è la libertà la caratteristica principale di un racconto: e la libertà è prolifica e feconda, e tende facilmente a riprodursi, a celebrarsi sempre più (appunto) liberamente. Si pensi a uno dei classici più famosi del mondo, "*I Tre Moschettieri*" di Alexandre Dumas (padre): come ricordava Umberto Eco, ci sarebbe già da notare il sottile inganno del titolo, visto che afferisce a tre personaggi anche se, in realtà, il vero protagonista è un quarto (che, peraltro, moschettiere ancora non è). Un'altra curiosa anomalia – di cui però non si può certo far colpa a Dumas – è che nell'immaginario collettivo con il termine "moschettiere" si intende ormai un soggetto particolarmente abile nel tirare di scherma, un magistrale spadaccino, visto il gran numero di duelli e combattimenti all'arma bianca vinti dai tre (pardon, quattro…) eroi; mentre il termine "moschettiere" nasce proprio per evidenziare quei militari che, nei primi anni del Seicento, avevano l'abilità e l'indubbio onore di poter maneggiare alcune tra le prime armi da fuoco portatili: i moschetti, appunto. Infine, la narrazione popolare della saga ha avuto tante e tali coniugazioni che l'incauto lettore che volesse decidere di affrontare il romanzo originale si troverebbe prima spaventato dalla mole[1], e subito dopo dalla velocità narrativa, visto che la storia tradizionalmente ricondotta nei film – e che l'incauto lettore probabilmente pensava riportasse l'intero romanzo – si conclude già nel primo centinaio di pagine, o quasi.

2 *Vecchia copertina formalmente corretta, con D'Artagnan in seconda fila senza divisa da moschettiere*

Quello che però intriga i lettori (specialmente i più giovani) de "*I Tre Moschettieri*" è ciò che da sempre genera domande tra gli amanti dei romanzi storici, ovvero chi tra gli attori della scena sia realmente esistito, chi è pura invenzione, e se quel che di loro si racconta nel libro corrisponda o meno a realtà. Ed è qui che nascono i seri problemi di "esistenza", o quantomeno di corrispondenza alla realtà. Se è facile riconoscere Luigi XIII e il cardinale Richelieu come personaggi realmente esistiti e Costanza, l'amata di D'Artagnan, come personaggio inventato, ci sono una quantità di soggetti per i quali il "grado di esistenza" è più sfumato, perché ogni autore che si rispetti si delizia nel lasciarsi magari ispirare da esseri umani in carne e ossa, salvo poi trasformarli in soggetti che mantengono solo alcune caratteristiche dell'originale. A cominciare dai grandi protagonisti.

Nel discettare della reale esistenza dei personaggi de "*I Tre Moschettieri*" è inevitabile premettere che Alexandre Dumas, più che avventurarsi in complicate e difficili ricerche storiche, si è largamente basato sull'opera di Gatien de Courtilz de Sandras, vero ex-moschettiere e come tale turbolento, che pubblicò nel 1700 le "*Mémoires de M. d'Artagnan*". I critici francesi, non per niente, dicono che del principale personaggio del romanzo ne esistono almeno tre versioni: quello storico, quello descritto da Courtilz e quello di Dumas.

Una volta appurata l'esistenza di tanta fonte, non può più sorprendere molto che il personaggio che ha più attinenze con una persona realmente vissuta sia proprio quello che appare più romanzesco: il giovane guascone che Dumas chiama Charles D'Artagnan è infatti disegnato sulla reale figura di Charles de Batz de Castelmore d'Artagnan, nato tra il 1611 e il 1615, e ne conserva diligentemente il nome. Non troppo diverso dal personaggio del romanzo, il vero D'Artagnan è stato valoroso soldato, coraggioso e di

[1] La saga è composta da tre romanzi sequenziali: "*I tre moschettieri*", che quota (grosso modo, con le dovute cautele sulle diverse edizioni e metodi di foliazione) attorno alle 750 pagine; seguito da "*Vent'anni dopo*", che è ancora più grosso, e arriva oltre le 850; infine, la trilogia viene conclusa dal mastodontico "*Il visconte di Bragelonne*", che da solo arriva circa a 1300.

spirito nobile: inizia da cadetto nel Reggimento delle Guardie Francesi[2], poi diventa effettivamente moschettiere e intraprende una brillante carriera militare fino allo scioglimento del corpo voluto dal cardinale Mazzarino nel 1646[3]. Circa un decennio dopo, però, nel 1657, il corpo viene ricostituito e D'Artagnan vi rientra subito con il grado di sottotenente; parteciperà ad un gran numero di campagne militari, soprattutto nelle guerre contro l'Olanda, arriva a governare la città di Lille e infine, da vero eroe, muore in battaglia, colpito da una palla di fucile durante l'assedio di Maastricht del 1673, quando non aveva compiuto i sessant'anni d'età.


3 *Athos rappresentato nel libro di Courtilz*

Il più anziano e saggio dei tre moschettieri del romanzo è Athos, dall'animo nobile e grande come una montagna (ogni riferimento al Monte Athos è puramente voluto, conoscendo quella vecchia volpe di Dumas padre). Al pari di D'Artagnan, ha un suo corrispondente realmente esistito: Armand de Sillègue d'Athos d'Autevielle, nato nel 1615. Curiosamente, nella realtà storica D'Artagnan e Athos sono più o meno coetanei, mentre nel romanzo Athos e gli atri due moschettieri sono di un decennio circa più anziani del giovanotto guascone. La distanza tra l'Athos reale e quello (raramente) narrato da Courtilz de Sandras è poca, perché – seppur citato – Athos ha un ruolo abbastanza limitato nelle "Mémoires" e una vita reale non particolarmente esaltante: si arruola nei moschettieri per la solita ragione dei figli cadetti della piccola nobiltà, ovvero il dover trovare di che campare visto che l'eredità paterna è destinata solo al primo figlio maschio. È invece molta la distanza con l'Athos di Dumas, perché lo scrittore affida alla figura di Athos il più nobile degli animi e il maggior tormento interiore, oltre che il non trascurabile ruolo di vero e proprio "genitore adottivo" del giovane D'Artagnan.

4 *Aramis*

Porthos, l'allegro e buontempone Porthos, si richiama invece al reale Isaac de Porthau, altro cadetto nativo di Béarn che si arruola nei moschettieri invece di prendere la tonaca o ritirarsi a vita privata. Il Porthos reale è cugino dell'Athos reale, mentre il suo personaggio romanzesco è influenzato in parte anche da suo fratello Jean, anche lui moschettiere, che dà a Dumas qualche ulteriore elemento per disegnare un moschettiere schietto, fedele, dotato di grande forza fisica seppur meno dotato dei suoi compagni di acume intellettuale.

Henri d'Aramitz è la persona realmente esistita che ispira il personaggio di Aramis; è forse quello per cui la distanza tra l'eroe del romanzo e l'uomo realmente vissuto è maggiore: nella trilogia Aramis è una figura che mantiene sempre un'aura di mistero, elegante, piacente, ma sempre con qualche misteriosa capacità ignota anche ai suoi inseparabili amici. Nell'evoluzione della trilogia di Dumas, si arriva perfino a scoprire che Aramis, per proprie indubbie capacità e magistrali abilità d'intrigo, raggiunge perfino il massimo grado nella Compagnia di Gesù, il Preposito Generale. La sua imprevedibile – almeno nelle prime pagine

[2] Dumas, correttamente, termina il primo dei tre romanzi della trilogia narrando che D'Artagnan entra a far parte delle Guardie del Re: quello stesso corpo contro il quale per tutto il romanzo i moschettieri se le danno di santa ragione.

[3] Anche la ragione dello scioglimento del corpo dei moschettieri è ben allineata allo spirito della narrazione: Mazzarino decreta che i moschettieri erano "troppo turbolenti".

de "I tre moschettieri" – deviazione verso la carriera ecclesiastica è forse l'unico reale legame con l'Aramitz reale, che dopo aver esaurito l'esperienza tra i Moschettieri del Re si ritira nel 1648 a ricoprire la carica di "abate laico" dell'abbazia del suo natale villaggio di Aramitz.

Corrispondenze più o meno fedeli tra personaggi romanzeschi e uomini in carne ossa non aiutano granché a rispondere con pienezza al quesito iniziale sul concetto di esistenza. L'esistenza di un reale D'Artagnan aiuta realmente o meno rispondere alla fanciullesca domanda "Ma D'Artagnan esiste davvero"? Una risposta negativa sarebbe certo crudele e inesatta, ma una positiva rischierebbe di convincere il postulante che quanto narrato nei film tratti dai romanzi di Dumas sia vero in ogni aspetto, cosa altrettanto lontana dalla verità. Del resto, la "verità" stessa è un concetto davvero difficile da definire (matematicamente parlando, come insegna Tarski[4], è semplicemente impossibile), quindi possiamo serenamente proseguire senza ambasciarci troppo limitandoci a cercare flebili analogie e curiose somiglianze.

Ad esempio, può essere letta come una certa analogia la presenza di quattro protagonisti bearnesi nel romanzo, uniti nello spirito ma ben diversi nei caratteri, con la situazione della matematica berlinese della seconda metà dell'Ottocento. La libertà propria della narrazione può soffermarsi sulla somiglianza dei toponimi: Béarn per i guasconi moschettieri e Berlino per i matematici; ma se il legame sembra troppo flebile, è subito possibile rafforzarlo con il numero quattro. Ai quattro guasconi Aramis, Athos, Porthos e D'Artagnan si può contrappore il quartetto formato da Weierstrass, Kummer, Borchardt e Kronecker: dopo di che, se le somiglianze cominciano subito a scarseggiare, si può cominciare a scavare per trovarle. Le coincidenze abbondano sempre, e la prima a saltare agli occhi sono gli anni di nascita: i quattro moschettieri matematici nascono tutti nei dintorni del 1815, giusto un paio di secoli dopo i moschettieri spadaccini, che come si è visto addensano le loro date di nascita attorno al 1615.

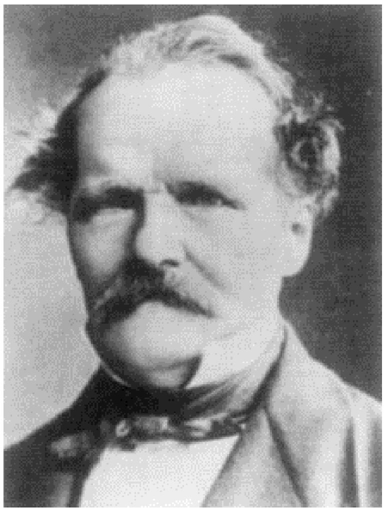
5 *Karl Theodor Wilhelm Weierstrass*

Il gioco dovrebbe poi proseguire con la ricerca di affinità individuali, per associare ad ogni personaggio di Dumas il matematico berlinese che più gli possa somigliare, e qui le difficoltà cominciano a farsi sentire, perché è difficile trovare similitudini che siano meno che soggettive. L'accoppiamento più facile è probabilmente quello tra Weierstrass e D'Artagnan: se non altro, perché ognuno di essi è il più famoso del rispettivo quartetto. Naturalmente, le discordanze sono almeno altrettanto significative quanto le analogie: bel lungi dall'essere il più giovane – come invece è D'Artagnan – Karl Weierstrass è quasi il più anziano dei berlinesi, secondo solo a Kummer; ma quantomeno è nato proprio nel '15, che è l'annata più probabile di nascita del "reale" guascone aspirante moschettiere. Ma è soprattutto l'animo cortese e attento verso il gentil sesso a facilitare l'analogia: D'Artagnan mette senza esitazioni a rischio la propria vita per amor di Constance, nelle storie di Dumas; e Weierstrass[5] non esita a rischiare di complicarsi vita e carriera accademica, pur di valorizzare le doti matematiche di Sof'ja Vasil'evna Kovalevskaja[6]; e probabilmente senza neppure realmente aspirare di goderne le muliebri grazie (cosa che però non si può certo dire per lo spadaccino).

[4] Maggiori dettagli in "La, tutta la, nient'altro che la", RM096, Gennaio 2007.

[5] Weierstrass si è naturalmente già meritato un compleanno, "Geometria dell'endecasillabo", in RM057, Ottobre 2003.

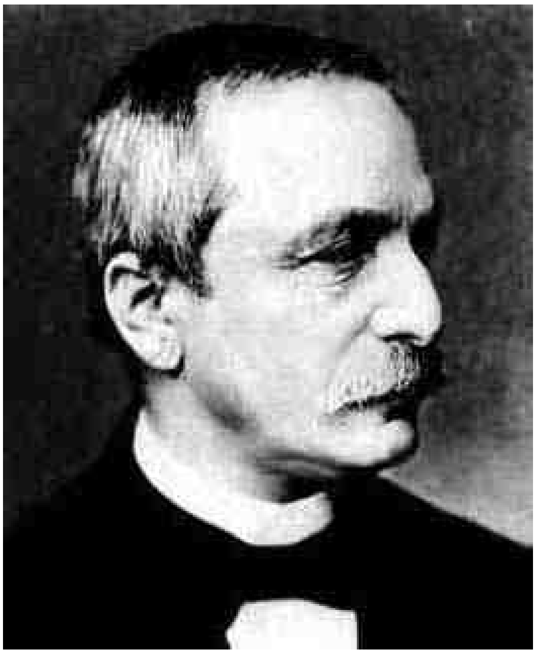
[6] Pur essendo ovviamente assai presente nel compleanno di Weierstrass, Sof'ja ha anche un compleanno tutto per sé: "Pregiudizi", RM144, Gennaio 2011.


6 *Ernst Eduard Kummer*

Quel che invece potrebbe facilitare l'associazione tra il corpulento Porthos ed Ernst Eduard Kummer è forse proprio la somiglianza fisica: con gli abiti adatti, dal cappello piumato al giustacuore, il matematico tedesco potrebbe ben interpretare il più forzuto dei moschettieri. Non è però difficile trovare anche altre somiglianze significative: nella trilogia di Dumas, Porthos è il moschettiere che forse più manifesta il desiderio di superare le sue origini non propriamente nobiliari e diventare "gentiluomo"; in altri termini, è quello che più esplicitamente riconosce di essere un uomo di popolo, seppur con palesi ambizioni di scalata sociale. Kummer, da parte sua, pur essendo uno dei maggiori matematici del suo tempo, restò per più di un decennio lontano dalle accademie, continuando ad insegnare nel liceo di Liegnitz, dove aveva iniziato la sua carriera di insegnante. E per quanto riguarda le ambizioni, beh… di certo non era spaventato dalle sfide, visto che è stato probabilmente colui che più si è impegnato, nella sua epoca, nel tentativo di dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat.


7 *Carl Borchardt*

Ad Athos tocca Borchardt: un po' per esclusione, un po' per oggettive e impreviste somiglianze. Nella saga di Dumas Athos è, tra i tre moschettieri del titolo, quello che più si lega e si affeziona a D'Artagnan: alla stessa maniera Carl Borchardt è il matematico berlinese che più si lega a Weierstrass, che di D'Artagnan abbiamo stabilito essere il corrispondente. Amico profondo, al punto di meritarsi d'essere chiamato con il pronome "tu" da parte del grande Karl (cosa oltremodo rara nell'Ottocento, in Germania e nel mondo accademico: figurarsi quanto fosse improbabile nell'intersezione dei tre insiemi), Borchardt divide con Athos anche un certo grado di malinconica e perseverante tragicità, come spesso capita alle persone grandi d'intelletto e fragili d'animo. Discepolo di Jacobi, non vede la sua tesi pubblicata perché il suo maestro si ammala e lui lo segue in un viaggio terapeutico in Italia. Più che curare le sue pubblicazioni, si fa carico del compito di dirigere il celebre Crelle Journal, la rivista matematica principe dell'Ottocento, quando lo stesso Crelle – inventore e primo direttore del giornale – decide di passare la mano: manterrà la carica per un quarto di secolo, verosimilmente rinunciando ad una promettente carriera di ricerca.


8 *Leopold Kronecker*

Nessuno dei tre matematici moschettieri citati è nato nel mese di Dicembre, ed è pertanto evidente che il vero protagonista di questo compleanno è il quarto: Leopold Kronecker; ed è altrettanto evidente che il suo alter-ego dovrà essere Aramis. Nasce il 7 Dicembre 1823 a Liegnitz[7], da una benestante famiglia di religione ebraica che può permettersi il lusso di fornirgli un'educazione privata eccellente fino all'ingresso nel Ginnasio della città natale. Non sarà una sorpresa scoprire che proprio nel Liceo Ginnasio di Liegnitz si ritroverà come insegnante di matematica Kummer, ed è grazie a cotanto professore che Leopold si deciderà a fare della matematica la sua carriera. Dopo il liceo si iscrive all'università di Berlino, dove ai quei tempi insegnavano giganti come Dirichlet e Jacobi. I suoi interessi non sono limitati alla matematica: si interessa molto di filosofia, ad esempio, e ancora più di astronomia, al punto di passare un'intera estate a Bonn per aggiornarsi sulla materia celeste. Un altro lungo periodo formativo lo passa a Breslau, e certamente lo fa per ricongiungersi con suo amato Porthos, pardon Kummer, che ha appena vinto una cattedra nella locale università.

Ricco di famiglia, Kronecker non ha l'ambascia di trovare un lavoro retribuito, e infatti non si danna l'anima per trovare un'università disposta a fornirgli una cattedra: può permettersi il lusso di studiare ed eccellere nelle materie che più gli piacciono, al punto di sostenere la discussione della tesi di laurea parlando di matematica, astronomia, teoria della probabilità (e fin qui, quasi nulla di strano) con l'aggiunta di considerazioni di pura filosofia ed esposizioni in greco antico. Certo è che ogni cosa che intraprendeva la faceva per puro diletto.

Rischia comunque di finire lo stesso dietro una cattedra nel notevole anno 1856 quando, per una serie di circostanze più o meno fortuite (Kummer che prende il posto di Dirichlet, Borchardt che accetta il compito di dirigere il Crelle Journal, Weierstrass che accetta un nuovo incarico) tutti e quattro i mate-moschettieri si ritrovano a Berlino. Kronecker non insegna, ma accetta l'elezione all'Accademia di Berlino, cosa che gli consentirebbe di tenere lezioni; e lo farà, invero, sotto la triplice pressione di Kummer, Weierstrass e Borchardt. Sono lezioni belle e apprezzate, anche perché, libero da vincoli contrattuali, Kronecker può divertirsi a concionare su argomenti d'avanguardia e interessanti per i ricercatori, come la teoria delle funzioni e la teoria dei determinanti. Così la sua fama cresce forte e grande, al punto che si vede offrire una cattedra niente meno che dall'università di Göttingen: Leopold, con aristocratico snobismo, può permettersi di ringraziare e cortesemente rifiutare. Rifiuto che però non intacca il suo prestigio, anzi: da Parigi gli arriva l'onore della nomina all'Accademia francese, e la fama delle sue lezioni continua a crescere, anche se ben presto si definiranno come lezioni ben difficili per lo studente medio, accessibili solo ai giovani più brillanti e agli stessi colleghi insegnanti. Insomma, Leopold Kronecker vive il suo massimo splendore proprio in questi anni,

[7] La stessa Liegnitz citata come sede del liceo ove ha insegnato Kummer. Si tratta di una di quelle città che la Storia sposta da una parte all'altra dei mobilissimi confini dell'Europa orientale, con il primo risultato che non si sa mai con certezza a quale nazione attribuirle (Liegnitz oggi è polacca, ma era prussiana quando ha visto i natali di Kronecker), e con il secondo risultato – ancora più imbarazzante – che non si sa mai come chiamarle esattamente: Liegnitz è la dizione tedesca, ma al giorno d'oggi è più facile trovarla sugli atlanti con il nome polacco di Legnica; senza dimenticare che in slesiano si chiama Ligńica e in ceco Lehnice.

immediatamente prima di un rapido deterioramento dei rapporti con gran parte dei colleghi matematici. Di mezzo mondo.

La ragione della perdita di popolarità è la medesima per cui è peraltro tra i matematici più citati della storia, nonché quella per cui ci siamo permessi di associarlo al più misterioso dei moschettieri, Aramis.

Il nome Kronecker, tra gli appassionati di matematica, è quasi inevitabilmente incontrato ben prima che ci si ritrovi a studiare e apprezzare i suoi pur indubbi contributi all'amata scienza: teoremi che prendono il suo nome; addirittura un simbolo, detto proprio "di Kronecker"; per non parlare del "delta di Kronecker", citata inevitabilmente come antesignana (e più generale) della celeberrima "delta di Dirac". Tutti elementi importanti che perpetuano il suo nome: ciò non di meno, ben prima di questi, anche il lettore più distratto finirà per leggere il suo cognome in calce ad una delle citazioni più famose della storia della matematica:

"Dio ha creato i numeri interi: tutto il resto è opera dell'Uomo"[8]

Si trova così spesso che forse c'è persino il rischio che abbia perso un po' dell'intensità che il suo autore vi ha inizialmente posto. In genere viene letta come fosse una sorta di iperbole, destinata a ricordare quale siano le profonde semplici radici della matematica: quasi un monito a ricordare come sia possibile, da poche regole semplici (anche se divine, o forse magiche) si possano erigere costruzioni elaboratissime, coerenti e inaspettate. Una bella sintesi epigrammatica, insomma, quasi parafrasabile con il concetto che il limite supremo dell'elaborazione è il ritorno alla semplicità delle origini, come fanno i grandi maestri delle arti marziali che, quando raggiungono davvero il sommo limite magistrale della loro arte, lo evidenziano con il ritorno alla cintura bianca dei neofiti.

Insomma, quasi una metafora, con la bella forza poetica che le metafore ben riuscite hanno spesso: e invece no. Leopold Kronecker con la sua celebre frase vuole affermare ben di più: qualcosa che va oltre al suo significato letterale, che è comunque presente e assertivo; Dio ha creato i numeri interi, il significato è letterale, né più né meno. E quando nomina Dio, Leopold lo fa seriamente: ha osservato la religione ebraica per quasi tutta la vita, per poi convertirsi al cristianesimo negli ultimissimi anni. Non sembra essere una conversione di convenienza sociale o accademica, probabilmente è autenticamente convinta. Bibbia o Vangelo, o entrambi, la convinzione religiosa di Kronecker non ha motivo di essere messa in discussione, e la divinità che nomina non ha niente di metaforico.

Ma il significato ultimo è davvero ancora più schietto e significativo: nella seconda parte dell'affermazione, quel "tutto il resto è opera dell'Uomo" è più di una semplice "diminuzione d'importanza", è quasi un'affermazione di non esistenza. Quasi come se, costruzioni divine a parte, tutto il resto non avesse dignità di esistenza, certo men che mai di eternità.

La dichiarazione di Kronecker giunge nel bel mezzo di una acre questione di filosofia della matematica: i suoi maggiori contributi teorici riguardano la teoria delle equazioni algebriche, delle funzioni ellittiche, della teoria dei numeri algebrici. Ottiene risultati davvero notevoli, ma costantemente sviluppati seguendo la convinzione che l'algebra, la matematica tutta dovesse svilupparsi attraverso una riconduzione ai numeri interi e attraverso un numero finito di passaggi. In altre parole, diffidava degli irrazionali come un moderno Pitagora; anzi, ne negava identità e esistenza. La frase riportata in testa a quest'articolo è proprio di Leopold Kronecker, ed è la sua risposta a Ferdinand von Lindemann quando quest'ultimo gli annunciò di aver dimostrato la trascendenza di π.

[8] Per i puristi, l'originale suona esattamente così: «*Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk*». All'interno della Redazione di RM c'è chi potrebbe facilmente verificare, ma persino il cialtrone che redige queste note riesce a notare come, nella tradizionale forma italiana sopra riportata, sembri mancare la traduzione del termine «*liebe*». Leopold Kronecker avrebbe forse preferito la più letterale «Il buon Dio ha creato i numeri interi: tutto il resto è opera dell'Uomo».

I suoi erano i tempi in cui la matematica tedesca correva velocemente e toccava vette mai immaginate: la posizione integralista[9] di Kronecker cozzò contro gli sviluppi più moderni portati avanti da Heine, Dedekind e – soprattutto – Cantor. La rivalità con Cantor rese la vita assai difficile a quest'ultimo, ma allontanò le simpatie di molti matematici da Kronecker: alla fine, perfino Weierstrass cominciò a ritenere troppo assolutiste le posizioni (non solo filosofiche) dell'amico.

Quando il lettore di Dumas ritrova nella trama Aramis ormai asceso al ruolo di massimo esponente della Compagnia di Gesù, rimane sorpreso, così come rimangono sorpresi i suoi stessi compagni d'avventure Porthos, Athos e D'Artagnan: lo ricordavano abile con la spada, attento all'eleganza, il migliore di loro nelle capacità sociali e diplomatiche, ma sembra che non sospettassero l'esistenza di una determinazione così forte nel perseguire l'Assoluto.

Potrebbe essere successo qualcosa del genere anche a Borchardt, Kummer e Weierstrass, a un certo punto della loro antica amicizia con Leopold Kronecker.

[9] Aggettivo che si confà a Kronecker in almeno un paio di significati diversi.

2. Problemi

2.1 Ricordi di un pianeta lontano

No, in realtà era un'isola (la Sardegna, per i curiosi), ma era comunque lontana (per uno squattrinato studente di Fisica), c'erano pecore e agnelli e all'epoca suonavo l'armonica. Quindi, il problema ve lo prendete nella versione originale, solo aggiornato agli euro.

Due pastori vendono x mucche ("Rudy, ma non avevi detto 'pecore'?" "Tranquilli, quelle arrivano dopo") a x euro l'una: con il ricavato, comprano delle pecore a 12 euro l'una ma, non essendo la cifra esattamente divisibile per 12, come "resto" viene dato loro un agnello.

In seguito, per motivi che non staremo ad esplorare, decidono di dividere il gregge, e ciascuno di loro ottiene lo stesso numero di animali; quello dei due che riceve l'agnello sostiene che la divisione non è equa, dato che questo vale meno di una pecora; l'altro, allora, propone di equilibrare il tutto aggiungendo la propria armonica[10]: entrambi, a questo punto, considerano perfettamente equa la transazione.

Domanda: quanto vale l'armonica?

OK, ammettiamo che il problema è "strano": se avete voglia di esplorare, potreste svolgere filosofiche considerazioni sull'influenza della "stranezza" sulla solubilità del problema *["...ma anche NO", dicono i miei Stimati Colleghi]*.

2.2 Non raccontatelo in giro

...ma c'è il grossissimo rischio che due di noi espatrino, nel prossimo futuro.

E se questa per voi era la bella notizia, la cattiva è che è solo per due giorni.

In realtà queste saranno certamente buona e brutta notizia per le *cervisiofore*[11] zurighesi, certe di fatiche grosse almeno quanto i guadagni; comunque, visto che il bere causa lunghe e meditative soste anche nell'oratoria di Doc, meglio avere qualche *food for the brain*, come dicono degli altri (aspiranti, anche se sembra l'entusiasmo stia calando) extracomunitari. E Rudy, per l'occasione, sta pensando di riciclare con variazioni un vecchio problema.

Io *[Rudy speaking]* metto sul tavolo *tre* foglietti con dei numeri scritti sopra (o meglio, *sotto*, visto che non li faccio vedere agli altri tre), chiamati x, y, z. Indi, enuncio le Due Leggi Della Persona Assolutamente Onesta *[Ma Anche Un Filino Str**za, se scusate il termine tecnico]*:

1. I valori sui foglietti sono distinti tra loro, e $[x]<[y]<[z]$ (le parentesi quadre indicano il "valore sul fronte della carta con sul retro quel simbolo").
2. La somma dei valori è minore di 13.

A questo punto, Dejan[12] senza far vedere niente agli altri guarda la carta x, e comunica al colto e all'inclita che non ha la più pallida idea di quali siano le altre due carte.

Indi, Alice guarda (sempre in privato) la carta y, ed enuncia il fatto che non può sapere il valore delle altre due carte.

Infine, Doc guarda senza far vedere niente a nessuno la sua carta, e comunica che, a costo di sembrare noioso, non riesce a scoprire il valore delle altre due carte. Ma...

La domanda la facciamo a voi: quanto vale la carta di Alice?

Siccome siamo tutti ancora "scarsi" di birre, siamo tutti perfettamente logici e in grado di far di conto, quindi le affermazioni sono veritiere.

Se volete un'espansione (solito *caveat* sul fatto che non abbiamo le risposte, chiaramente): se definiamo questo gioco come (3; 13), nel senso che si gioca in tre e la somma dei numeri è minore di 13, esiste un modo per determinare le coppie (a, b) per cui funziona in questo

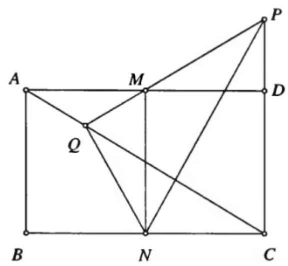
[10] Si presume la sappiano entrambi suonare, e quindi la valutino parimenti.

[11] A Rudy il termine *kellerina* non è mai piaciuto.

[12] Data la riservatezza tutta zurighese, Alice non ve lo ha detto, ma Dejan è diventato il *Signor Riddle*!

modo? Nel senso che se ve lo proponessi per numeri "grandi", sarebbe semplicemente più lungo?

3. Bungee Jumpers



Il lato CD del rettangolo ABCD è esteso di una lunghezza arbitraria oltre D sino ad un punto P. La retta che unisce P al punto medio M di AD incontra la diagonale AC in Q. Se N è il punto medio di BC, provare che MN biseca l'angolo QNP.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Dicembre!

In ritardo, RM, il calendario, i post sul blog, persino noi. Tutto in ritardo, ma meglio tardi che mai, arriviamo. E ci siamo anche visti, finalmente, a Zurigo. Ma non c'è tempo per le ciance autocelebrative, siamo in ritardo, cominciamo subito con le soluzioni.

4.1 [237]

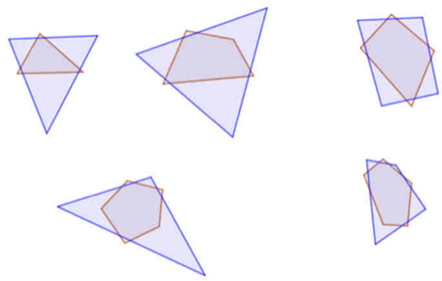
4.1.1 Speriamo che nevichi presto...

A questo problema il mese scorso aveva risposto solo ***Valter***:

> *Il Campo dei Chinotti ha una distribuzione di aiuole delle forme più svariate, ma tutti poligoni convessi, anche se non necessariamente regolari. Alcune coppie di aiuole hanno intersezioni che sono anch'esse dei poligoni e solo queste verranno considerate come nuove aiuole. Se due vecchie aiuole sono un m-agono e un n-agono, quanti lati avrà al massimo la loro intersezione? E se ci fosse un'aiuola non convessa, vale ancora il risultato trovato?*

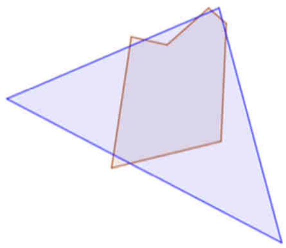
Ed è lo stesso ***Valter*** che ci manda un altro contributo sullo stesso argomento:

> Caso 2 poligoni convessi.
>
> Un segmento/lato poligono può attraversare al massimo 2 lati dell'altro poligono. Nel caso ne attraversi proprio 2 la sua parte interna forma un lato dell'intersezione.
>
> Dato $m \leq n$ costruisco un *m-agono* i cui lati attraversa tutti 2 lati dell'*n-agono*. Se l'intersezione contiene parte di tutti i lati dell' *n-agono* avrà $m+n$ lati. L'intersezione avendo $2m$ lati più i restanti n-m per quanto detto è il massimo cercato. Devo mostrare quindi che posso sempre costruire un tale *m-agono* per qualsiasi *n-agono*.
>
> Su un vertice dell' *n-agono* traccio una retta con stesso angolo con i 2 lati del vertice. Proseguo in modo analogo con i vertici adiacenti p.e. in senso orario per m-1 vertici. Le rette si incontreranno a 2 a 2 avendo somma degli angolo su stesso lato < di π. L'ultimo lato lo costruisco in modo che tocchi un altro vertice e contenga i restanti n-m. Per fare ciò cerco il vertice "più esterno" e su quello costruisco l'ultimo lato (adattando in lunghezza i suoi due lati adiacenti che sono rimasti aperti). Se poi risultasse per costruzione parallelo a uno dei 2 lo inclino leggermente. "Restringo" poi di quel poco che basta l' *m-agono* per ottenere l'intersezione desiderato. Non è una dimostrazione rigorosa ma è il meglio che riesco a fare. Forse alcune immagini spiegano meglio cosa intendo sempre che abbia un senso (non sono precise perché le ho buttate giù alla veloce solo per dare un'idea):



Caso di aiuola convessa.

Provo con il caso di un unico vertice convesso; se poi a senso si potrebbe generalizzare. Spiego come ho costruire l'intersezione di un esagono qualsiasi convesso con un triangolo:



Il primo lato del triangolo passa per i 2 vertici dei lati che formano l'angolo convesso. Lo abbasso di poco in modo che tutti i lati dell'esagono rimangano da parte. Da tale lato e con i restanti 4 lati dell'esagono si ottiene un pentagono convesso. Costruisco il triangolo su di esso come sopra che avrà quindi 6+3+1=10 lati (il lato in più è dato dal fatto che il primo lato costruito del triangolo ne forma 2). La costruzione però non è possibile nel caso in ciò *m* sia uguale a *n* (non ci sono lati sufficienti per ottenere quello aggiuntivo nell'intersezione).

Bene, con questo passiamo ai problemi del mese scorso.

4.2 [238]

4.2.1 Problema di àtilibaborp

La probabilità al contrario? Ci crede qualcuno? In ogni il caso era pressappoco questo:

> *D euro sono distribuiti in N buste identiche, che sono mescolate; voi decidete la distribuzione dei D euro nelle N buste prima di giocare, potete comprare, una per volta, una busta al prezzo di un euro, aprirla e vedere quanto avete vinto. E, eventualmente, comprare un'altra busta. Qual è la distribuzione che massimizza la vostra vincita?*

Vediamo subito la prima soluzione, quella di ***Alberto R.***:

> Molto bello, ma decisamente troppo difficile per le mie modeste capacità. Credo, però, di conoscere la soluzione: conviene mettere tutti i *D* euro nella stessa busta, lasciando vuote le restanti *N*-1 buste.
>
> Non lo so dimostrare, ma posso fornire un pesante indizio a sostegno della mia convinzione.
>
> È ovvio che la vincita media dipende solo dal fatto che i soldi siano distribuiti in modo più o meno uniforme nelle buste ed è ragionevole pensare che la vincita media sia una funzione monotona della "uniformità"[13].
>
> Con tale premessa basta verificare che la minima uniformità è più conveniente della massima. Ad esempio, con *D*=*N*=4, se tutte le buste contengono 1 euro, la

[13] L'uniformità/disuniformità è quantificabile in termini di scarto quadratico medio, o mediante il coefficiente di Gini, o con altri marchingegni matematici, ma qui ci possiamo accontentare del suo significato intuitivo.

> vincita è sempre zero; se invece i 4 euro sono tutti in una busta (ed ovviamente mi fermo una volta aperta quella busta) si presentano 4 casi equiprobabili:
>
> Caso 4, 0, 0, 0: pago 1, ricevo 4, vinco 3
>
> Caso 0, 4, 0, 0: pago 2, ricevo 4, vinco 2
>
> Caso 0, 0, 4, 0: pago 3, ricevo 4, vinco 1
>
> Caso 0, 0, 0, 4: pago 4, ricevo 4, vinco 0
>
> Vincita media = 6/4 = 1,50 euro

Bene, direi che si tratta di un risultato positivo. Lo stesso ragionamento sembra essere quello di ***Valter***:

> Metterei tutti gli euro in un'unica busta. Continuerei a comprare buste sino a che non trovo gli euro. Se mediamente risultasse una vincita negativa non compro alcuna busta.
>
> P.e., possibili vincite con 5 euro e 6 buste:
>
> - 4 euro se sono nella prima busta
>
> - 3 euro se sono nella seconda busta
>
> …
>
> - -1 euro se sono nella sesta busta.
>
> Vincita media: (4+3+2+1+0-1)/6 = 3/2.
>
> Se si giocasse con 3 euro e 6 buste verrebbe -1/2 euro.
>
> In casi come questo non comprerei alcuna busta e mi terrei i miei euro.
>
> Con altri tipi di distribuzione degli euro dovrebbe risultare che:
>
> - la busta a cui fermarsi varia in base agli euro presenti in quelle precedenti
>
> - lo si decide confrontando con quanto si vincerebbe in media continuando
>
> - nella busta in cui ci si ferma non sono presenti tutti gli euro
>
> - quindi, fermandosi su quella busta, si vince meno che nel caso precedente
>
> - anche la vincita media perciò dovrebbe essere inferiore.
>
> Vi sono casi particolari in cui non si arriverebbe mai all'ultima busta. P.e. il caso semplice di 2 buste ed un euro in ognuna. Ci si fermerebbe sempre alla prima busta non vincendo alcun euro. Però anche in questi casi conviene mettere tutti gli euro in una busta. P.e. con 2 buste e 2 euro in un'unica busta la vincita media è di ½ euro.
>
> Non sono riuscito ad approfondire ma ho la sensazione che si possa dimostrare per induzione.

Due soluzioni a sensazione che coincidono, che cosa ne dirà il Capo? Vedremo, mentre andiamo avanti con il secondo problema.

4.2.2 Generalizzare, ragazzi, generalizzare!

Anche qui, dadi che non sono dadi e probabilità che non è probabilità. Il Capo sta giocando con il fuoco, oppure con la geometria, chissà:

> *Definiamo come "dado" qualsiasi poliedro convesso con n facce, non necessariamente regolare. Ci chiediamo per quali valori di n sia possibile progettare almeno un dado onesto con n facce. Per dado onesto intendiamo che date due facce qualsiasi, esiste una simmetria che porta la prima nella seconda.*

E anche questa volta partiamo con ***Alberto R.***:

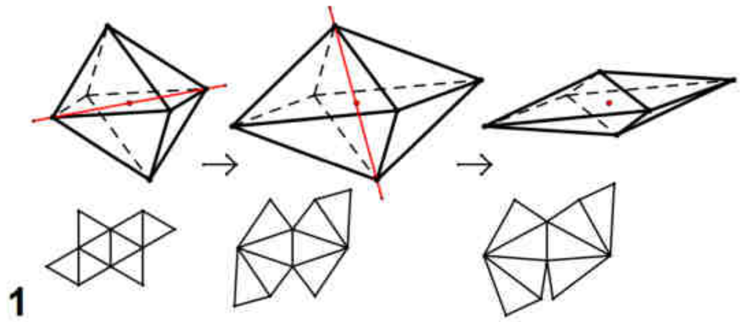
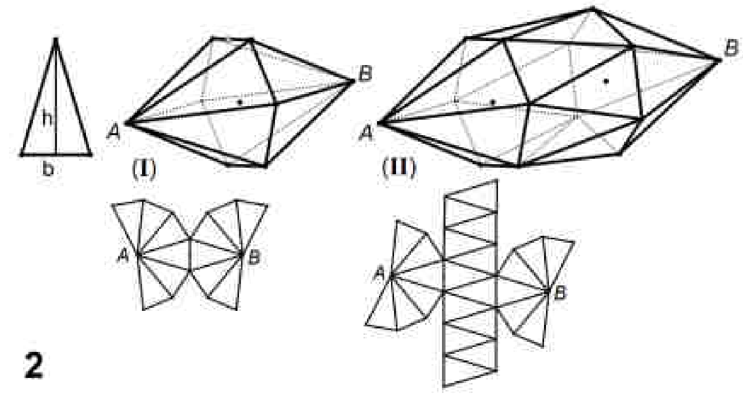
> Esiste un dado onesto a N facce per qualunque N.
>
> Costruiamo un prisma retto, sufficientemente alto, avente per base un N-agono regolare. Appiccichiamo sulle sue basi due piramidi rette aventi per base la base del prisma e di altezza sufficientemente grande da far sì che il solido non sia in equilibrio quando è posato sulla faccia di una piramide.

> Se N è pari numeriamo da 1 a N i rettangoli che formano le facce laterali del prisma. Se N è dispari, lanciando il dado, non comparirà in alto una faccia ma uno spigolo quindi dobbiamo numerare gli spigoli. Ciò si può fare riportando il numero dello spigolo sul margine destro della faccia alla sua sinistra e magari, per elegante simmetria, anche sul margine sinistro della faccia alla sua destra.
>
> In questo modo abbiamo costruito un dado equo a N facce, cioè un dado che, lanciato su un piano orizzontale, può fornire qualunque numero tra 1 e N con probabilità $1/N$.
>
> Se qualcuno pensa che sono stato disonesto, peggio di Colombo con il suo uovo, sappia che in guerra, in amore e in matematica qualunque sotterfugio è lecito.

Assolutamente vero. Vediamo la versione di ***Valter***:

> Se ho capito il discorso sulla simmetria. Direi per ogni n pari. Parto da una piramide avente come base un poligono regolare di n lati. La unisco ad una identica sovrapponendo le due basi. Ottengo un dado con $2n$ facce che dovrebbe essere "onesto".
>
> A questi dadi poi aggiungo il tetraedro e ho tutti i casi con n facce pari.

Secondo voi i due si sono parlati? Ancora una soluzione, quella di ***trentatre***:

> Indico con *PO* un poliedro convesso e *onesto*, dove due facce qualsiasi possono essere portate a coincidere con una *simmetria*, definita nella nota [1]. Tutte le facce di un *PO* sono lo stesso poligono, eventualmente, se visto dall'esterno, ribaltato.
>
> Per ogni *PO* siano *F*, *S*, *V* il n° di facce, spigoli, vertici, e *N* il n° di lati del poligono.
>
> 
>
>
> I *PO* comprendono i cinque poliedri regolari.
>
> In fig.1 altri *PO* ottenuti dilatando l'ottaedro lungo un asse; in basso lo sviluppo piano. Il triangolo è nei tre casi equilatero, isoscele, scaleno (purché ad angoli acuti). La trasformazione analoga non è possibile per gli altri poliedri regolari.
>
> 
>
>
> In fig. 2 ad altri *PO* basati su un triangolo isoscele, che può avere ogni proporzione purché $h/b > 1/2$.
>
> Se p è il n° di spigoli concorrenti nei vertici *A*, *B* si ha
>
> caso (I)

$p \geq 3$ ($p = 4$ è l'ottaedro in fig. 1)

n° di facce $F = 2p$

se *p* pari i triangoli possono non essere isosceli, purché ad angoli acuti

caso (II)

$p \geq 4$ purché pari

n° di facce $F = 4p$

i triangoli devono essere isosceli.

Basta variare $p \geq 3$ nel caso (I) per vedere che esistono tutti i *PO* con *F* pari ≥ 4 (4 è dato dal tetraedro).

Invece non esistono *PO* con *N* e *F* dispari (v. nota [2]).

Visto che si è parlato di *dadi*, numerando 1,2… *F* le facce di un *PO* si ottiene un *dado giocabile*. Deve essere *F* pari (escluso il tetraedro). In tutti i *PO* elencati, escluso il tipo (II), le facce sono equiprobabili. Per il tipo (II) le facce possono avere probabilità differenti, a seconda del rapporto *h/b* del triangolo – al disotto di un certo valore la probabilità si può ridurre a zero. Ma mi fermo qui.

[1] *simmetria*: trasformazione ottenuta con una o più rotazioni *nello spazio* – la faccia *a* può essere portata a coincidere con la *b* con una rotazione che le rende complanari, seguita da una rotazione con asse ortogonale al piano. Se *a* e *b* sono ribaltate basta aggiungere una rotazione con asse sul piano.

nb. - il gruppo delle rotazioni nello spazio include rotazioni, simmetrie e traslazioni nel piano.

[2] la dimostrazione riguarda i poliedri in cui con ogni faccia ha lo stesso n° *N* di lati, senza riguardo alla forma e dimensione; per estensione vale anche per i *PO*. Distinguo due casi di *N*

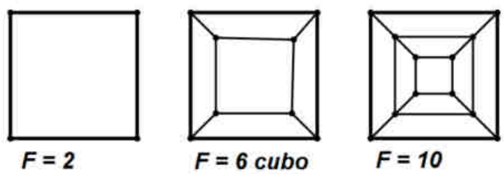
***N* dispari** – ogni faccia del poliedro è connessa a *N* spigoli e ogni spigolo è connesso a 2 facce, e quindi $N \cdot F = 2S$. Per *N* dispari *F* deve essere pari e

A) non esistono poliedri con *F* dispari.

***N* pari** – parto da $N = 4$ (poliedro composto da quadrilateri)

- un poliedro convesso può essere rappresentato nel piano da un grafo planare (senza archi che si intersecano) – i numeri *F*, *V*, *S* non variano salvo che *F* comprende le *F*-1 facce interne al grafo e la faccia esterna (bordo del grafo) – p.es. in fig. 3 compare il cubo

3



- con $N = 4$ si ha da [2] $S = 2F$ e per $F + V = S + 2$ (equazione di Euler) vale $V = F + 2$

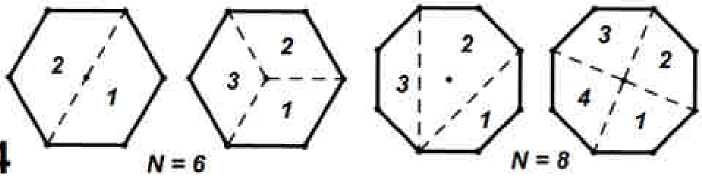
- partendo in fig. 3 da $F = 2$ (faccia interna + esterna) che non è propriamente un poliedro ma rispetta le formule, aggiungiamo al grafo alcuni vertici *V* con le condizioni a) ogni *V* cade in una faccia interna, collegato solo con i vertici di quella faccia (il grafo deve restare planare), b) le facce aggiunte devono essere quadrilateri, c) in ogni *V* devono concorrere almeno tre spigoli

- questo è impossibile se all'interno della faccia cadono 1 o 2 o 3 vertici, ma con 4 *V* nella stessa faccia si ha

$F, S, V = (2,4,4) \rightarrow (6,12,8)$ cioè il cubo

- ripetendo il processo su un'altra faccia si ha $(6,12,8) \to (10,20,12) \to (14,28,16)$, ecc.
- quindi in un poliedro con $N = 4$ il n° delle facce è $F = 2 + 4n,\ n \geq 1$ quindi pari e

B) non esistono poliedri con $N = 4$ e F dispari.



4

Gli altri casi pari con N=2p si possono sempre dividere in p oppure p–1 quadrilateri come in fig. 4

- scegliendo per ogni N la divisione dispari D il poliedro è composto di $D \cdot F$ quadrilateri, che per F dispari è un numero dispari, impossibile per B), quindi

C) non esistono poliedri con N pari e F dispari.

E con questo è tutto, a parte i nostri auguri, a tutti voi. Alla prossima!

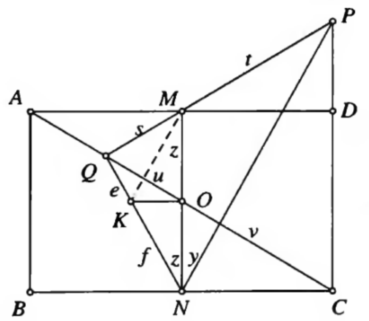
5. Quick & Dirty

Sia C l'insieme degli interi positivi che, scritti in base 3, non contengono il numero 2. Dimostrate che non esistono tre interi positivi (diversi tra loro) in C che si trovino in progressione aritmetica.

6. Pagina 46

Il segmento *MN* e la diagonale *AC* si incontrano nel centro *O* del rettangolo, che è anche il punto medio di entrambi i segmenti. Sia *K* il punto in cui la perpendicolare a *MN* per *O* incontra *QN*.

Allora, *OK* è il bisettore perpendicolare di *MN* e *KM*=*KN*, e il triangolo *KMN* è isoscele con angoli z alla base in *M* e *N* uguali tra loro.



Nel triangolo *PQC*, *MO* è parallelo a *PC*, e quindi deve essere:

$$s/t = u/v;$$

mentre nel triangolo *QNC*, *KO* è parallelo a *NC*, da cui

$$u/v = e/f.$$

Da cui si ricava che:

$$s/t = e/f$$

Il che ci permette di dedurre il parallelismo tra *KM* e *NP*: quindi, gli angoli alterni interni y e z in *N* e *M* sono uguali tra loro; l'angolo $QNP = z + y = 2y$ è allora bisecato dal segmento *MN*.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Alpinismo facile – Il Terzo Grado

Nel senso delle equazioni. Sapete risolverle? E sapete la storia? Ne abbiamo parlato (o meglio, ne abbiamo fatto parlare altri) quando eravamo ancora relativamente giovani, quindi se l'avete dimenticato siete scusati[14].

Non dovreste però aver mai sentito parlare dell'*Hauptmann* ***Eduard Lill***: il che, anche se giustificabile, è comunque grave. Ma cominciamo dal "giustificabile".

Eduard Lill nasce il 20 ottobre del 1830 a Brüx (oggi Most), in Boemia (oggi Repubblica Ceca), e muore il 30 luglio del 1900 a Görtz (nota anche come Gorica, o Gorizia): passa buona parte del suo tempo come (giustappunto) Capitano del Genio dell'imperialregio (K.u.K) esercito Austro-Ungarico e, se tornate un attimo a vedere gli anni di nascita e morte e ripassate un attimo di storia patria, potreste anche capire come mai qui da queste parti di lui si parli piuttosto poco.

Il che è un peccato.

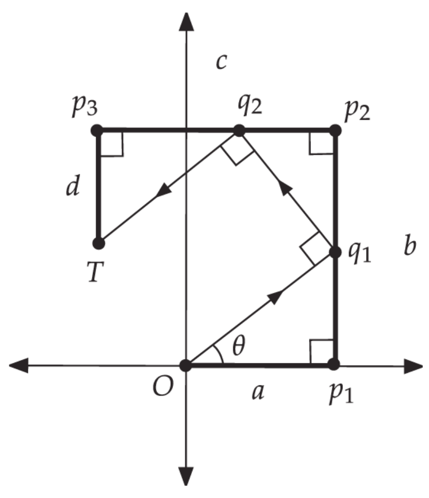
Il Nostro, nell'ambito dei propri doveri bellici, si trovava sovente a dover risolvere problemi di traffico e trasporto[15]: e, nonostante su tutte le tradotte ci fosse scritto "*Fünf Pferde oder Achtundvierzig Mann",* la cosa poteva risultare complessa, e Eduard si ritrovava sovente a dover risolvere in modo anche approssimato equazioni di terzo grado; la cosa era probabilmente talmente noiosa che il Nostro, non avendo bisogno di una precisione assoluta, si inventa un simpatico metodo per risolverle "alla svelta".

Sia data l'equazione (a coefficienti reali e, per ora, tutti positivi)

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Prendiamo due assi cartesiani e, partendo dall'origine:

1. tracciamo un segmento di lunghezza a in direzione degli x positivi
2. ruotiamo in senso antiorario di 90° e tracciamo un segmento di lunghezza b in direzione degli y positivi
3. ruotiamo in senso antiorario di 90° e tracciamo un segmento di lunghezza c in direzione degli x *negativi*
4. ruotiamo in senso antiorario di 90° e tracciamo un segmento di lunghezza d in direzione degli y *negativi*



9 *Il Disegno (caso facile).*

Il risultato è rappresentato in figura dalla spezzata a bordo più spesso: se qualche valore è negativo, si inverte la relativa direzione di percorrenza. Se qualche coefficiente ha valore nullo si effettui ugualmente la rotazione ma non il movimento.

Costruiamo (se possibile) la spezzata Oq_1q_2T indicata in figura a bordo più tenue, curando che gli angoli in q_1 e in q_2 siano angoli retti: la spezzata deve iniziare nell'origine e terminare nel punto finale della spezzata a bordo più spesso[16].

[14] Ma neanche poi tanto: se avete dimenticato, correte a leggervi "Requiem per una formula", in RM064, autore il mitico Dario Bressanini.

[15] E se la cosa vi pare noiosamente pratica, andate a rivedervi le motivazioni della Medaglia Fields di Alessio Figalli. Prima o poi ne parliamo, promesso.

[16] Si noti che *non* sono riflessioni.

Se θ è l'angolo formato da Op_1 con l'asse delle x, allora una delle soluzioni dell'equazione è:

$$x = -\tan\theta.$$

Per prima cosa, notiamo che tutti i triangoli della figura sono simili. Quindi, sarà:

$$\theta = q_1Op_1 = q_2q_1p_2 = Tq_2p_3$$

Possiamo dunque utilizzare uno qualsiasi di questi triangoli per esprimere il valore di $\tan\theta$. Per quanto riguarda il triangolo Op_1q_1, si ha:

$$-x = \tan\theta = \frac{p_1q_1}{a} = \frac{b - q_1p_2}{a}$$

il che implica $q_1p_2 = ax + b$

Per quanto riguarda il triangolo $q_1p_2q_2$, si ha:

$$-x = \tan\theta = \frac{p_2q_2}{q_1p_2} = \frac{c - p_3q_2}{ax + b}$$

il che implica $p_3q_2 = x(ax + b) + c$

Per quanto riguarda il triangolo q_2p_3T, si ha:

$$-x = \tan\theta = \frac{d}{p_3q_2} = \frac{d}{x(ax+b)+c},$$

il che implica

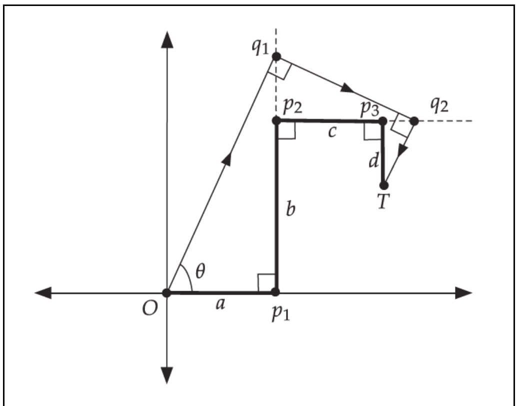
$$0 = x(x(ax + b) + c) + d = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

e quindi x è radice dell'equazione. Insomma, un disegnino e una rapida ricerca nelle tabelle trigonometriche e avete ottenuto la soluzione reale (se c'è) che vi interessava.

Decisamente carino e, se volete complicarvi la vita continuando i ghirigori antiorari, potete risolvere anche per gradi superiori al terzo, anche se tracciare quegli angoli retti (lo mettiamo in corsivo per essere sicuri che ve lo ricordiate: *non sono riflessioni, sono angoli retti!*) a questo punto diventa complicato, visto che sono uno in meno rispetto ai gradi dell'equazione.

Torniamo al terzo grado.

La dimostrazione che abbiamo visto è dipendente dall'aver considerato tutti i coefficienti positivi: se, ad esempio, il coefficiente di primo grado c fosse minore di zero, la costruzione si modificherebbe come indicato in figura qui a fianco, e i calcoli, pur portando allo stesso risultato, ne risulterebbero modificati.



10 *Di nuovo il disegno (caso più complesso).*

Seguendo le stesse linee, si possono dimostrare i diversi casi con altri coefficienti minori o uguali a zero o la correttezza del metodo anche per equazioni di grado superiore.

Nel metodo di Lill non è semplice costruire la spezzata Oq_1q_2T, anche se esistono[17] dei solutori meccanici in grado di risolverla: ci viene però in aiuto l'origami, con una elegante costruzione scoperta da Margherita Beloch[18] e basata sul sesto assioma di Huzita-Hatori.

La costruzione procede come in figura, supponendo di aver già tracciato i segmenti di lunghezza a, b, c, d.

[17] O meglio, esistevano: questi artifici, come il metodo, sembrano caduti completamente nel dimenticatoio.

[18] Margherita Piazzolla Beloch (Frascati, 12 luglio 1879 – 28 settembre 1976), allieva di Guido Castelnuovo.

1. Ad una distanza a dal punto p_1 e dal lato opposto ad $\boldsymbol{O}$ si tracci una perpendicolare all'asse x: sia essa L_1.
2. Ad una distanza d dal punto p_3 e dal lato opposto ad $\boldsymbol{O}$ si tracci una perpendicolare all'asse y: sia essa L_2.
3. Si porti il punto T su L_2 e, *contemporaneamente*, il punto $\boldsymbol{O}$ su L_1, piegando.

La piegatura contiene al suo interno il segmento q_2q_1: non è necessario tracciare la parte restante della spezzata, in quanto $\theta = q_2q_1p_2$.

...quando basta una soluzione approssimata, l'Origami la fa sempre da padrone.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms