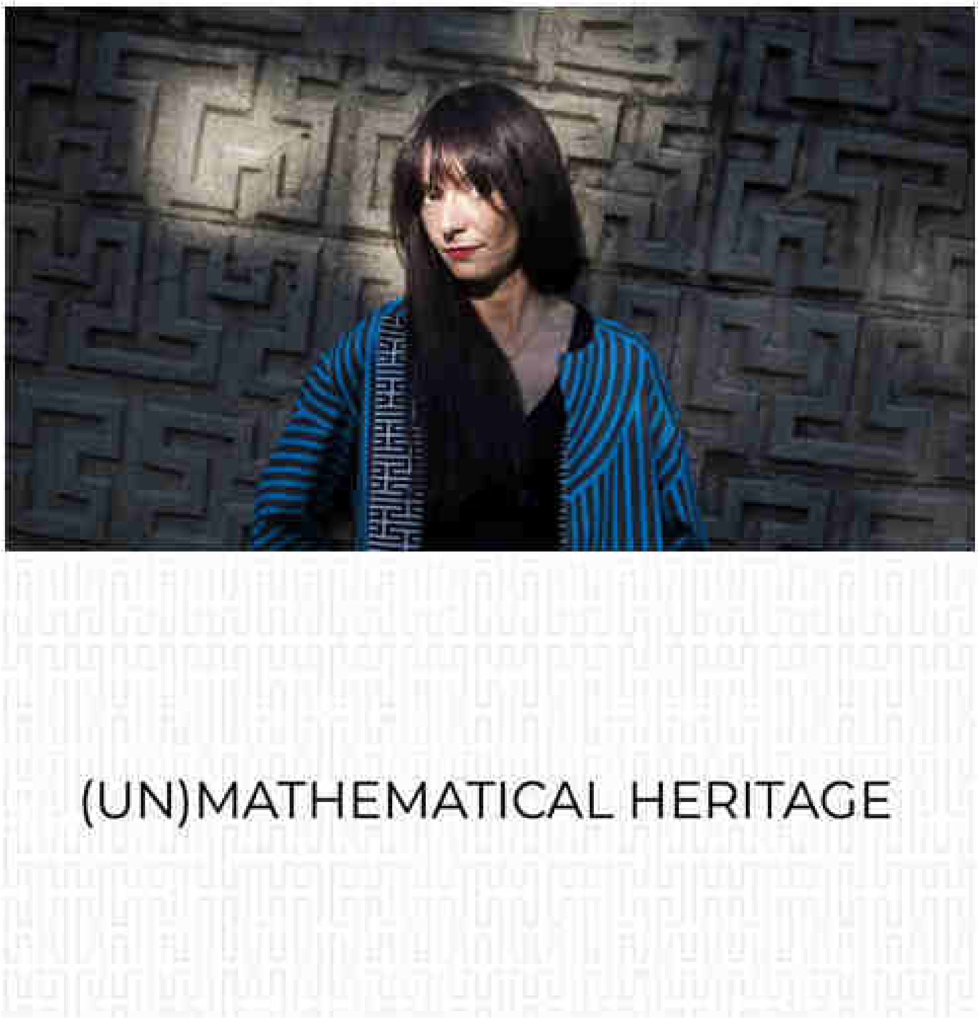
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 238 – Novembre 2018 – Anno Ventesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM237 ha diffuso 3'285 copie e il 04/11/2018 per Google eravamo in 12'600 pagine.

Carolina Peano, nipote di Giuseppe Peano, si è ispirata all'augusto progenitore per le sue creazioni. La inviteremo per la prossima edizione di "La matematica addosso", e aspettiamo la prossima sfilata. Più informazioni sul suo sito ufficiale www.delresto.com.

1. Dieci marchi e un anello di diamanti

"Non c'è bisogno che la vita sia facile,
l'importante è che non sia vuota."

"E Lise?"

Se lo chiedono in tanti, il 15 ottobre 1945. Tanti fra quelli che, a Stoccolma, sentono finalmente i nomi dei vincitori dei Premi Nobel relativi all'anno precedente, il 1944; e se lo chiedono certamente tutti quelli che, fra i presenti, si interessano di chimica e fisica. La guerra è appena finita; anche la Reale Accademia delle Scienze svedese deve faticare nel ritorno alla normalità, e solo a pace finalmente raggiunta può permettersi di tornare a celebrare le ultime volontà di Alfred Nobel. E lo fa, tutto sommato, con un certo spirito di pacificazione, se attribuisce il premio per la Chimica a un tedesco: Otto Hahn, con una motivazione chiara e comprensibile anche ai non addetti ai lavori: "*per la scoperta della fissione dei nuclei degli atomi pesanti*". Il premio è sacrosanto, meritato, perfino atteso dalla platea; la scoperta della fissione nucleare è un momento topico non solo della storia della scienza, ma della storia umana. Se dubbio può esserci, è probabilmente quello della disciplina a cui assegnarlo: fisica o chimica? Sono questi gli anni del grande matrimonio, delle nozze che si celebrano nella prima metà del Novecento tra le due grandi scienze: chimici e fisici hanno esplorato la natura della materia su percorsi a lungo diversi, ma ormai le ricerche – a lungo convergenti – si sono finalmente incontrate. Nella ricerca delle spiegazioni delle proprietà della materia i chimici hanno incontrato per strada i fisici che cercavano di capire la natura e struttura dei componenti fondamentali della stessa. Fisica, chimica, chiamatela pure come volete: gli esploratori degli atomi non perdono troppo tempo nel cercare di definirsi, hanno troppo da fare, hanno tanto da scoprire. E così, nella Svezia che ancora forse non riesce a convincersi pienamente che la catastrofe della Seconda Guerra Mondiale sia davvero finita, nessuno alza sopraccigli di sorpresa nel sentire l'annuncio che premia con la massima onorificenza scientifica uno studioso germanico che è sempre rimasto fedele alla sua patria sconfitta e colpevole. È normale, è giusto così. Ma è altrettanto normale, e suona altrettanto giusto lo stupore che percorre le fila degli addetti ai lavori, quelli che conoscono la lunga storia della comprensione dei meccanismi della fissione nucleare: e quello stupore sì che fa davvero alzare sopraccigli, e formulare domande. Quella domanda, soprattutto: "E Lise?"; subito seguita da un'altra, certo immaginata e pronunciata da chi meglio la conosceva: "E come si sentirà Lise, adesso?"


1 *Lise*

Come volete che si senta, Lise… lei è probabilmente la meno sorpresa. Quasi certamente è meno stupita degli altri, meno sconvolta, meno intristita. Ha ormai sessantasette anni e, nei due terzi di secolo passati da quando è nata a Vienna il 7 novembre 1878, ha già attraversato quasi ogni esperienza, avventura, sensazione possibile.

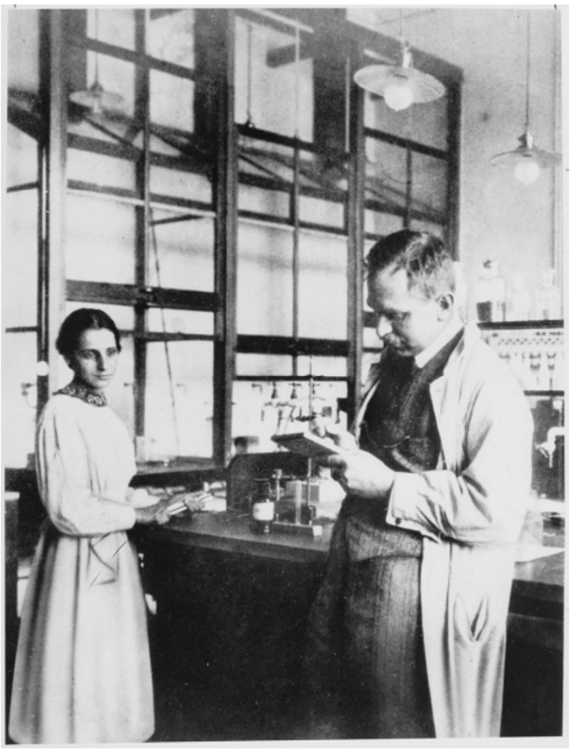
Forse si sente come si sentiva nel 1907, quando conobbe per la prima volta Otto Hahn, che l'aveva accolta nel laboratorio di Berlino. Per quanto entusiasta, felice di cominciare a far parte di una autentica squadra di ricercatori d'avanguardia, come poteva sentirsi se, per entrare in quel laboratorio, doveva arrangiarsi, quasi nascondersi, passando dalla porta su retro, perché nelle università del Brandeburgo le donne non erano autorizzate neppure ad entrare nei locali di servizio degli atenei, figuriamoci nelle aule e nei laboratori?

Lise, probabilmente, non ci faceva quasi caso. Già nella natia e civilissima Austria, già da giovanissima ha cominciato a fare i conti con le prevaricazioni naturali, perfino istituzionalizzate riservate al suo sesso. A quattordici anni le è impedito – a lei come a qualsiasi altra ragazzina – di frequentare il liceo, che è riservato solo ai maschi. Va quindi *all'Akademischen Gymnasium*, che nonostante il nome altisonante resta quello che erano le scuole superiori femminili di fine Ottocento: istituti che indirizzano le ragazze soprattutto verso lingue e letteratura, e quando Lise ne esce diplomata, tutto quel che le è consentito è insegnare il francese agli scolaretti austriaci. Ma a lei piace la fisica, le piace davvero tanto: "*amo la fisica con tutto il mio cuore: è una specie di amore personale, come quello che si prova per una persona a cui si è grati per molte e diverse ragioni*", dirà un giorno, più avanti negli anni. Ma la passione c'è già, c'è sempre stata, fin da quando era adolescente.

E come si sarà sentita felice allora, nel 1898, quando finalmente l'università di Vienna apre le porte anche alle donne? Così come non è obiettivamente possibile comprendere appieno il senso di frustrazione di chi è abituato da sempre ad essere prevaricato e segregato solo a causa del contenuto della propria biancheria intima, è impossibile anche comprendere il senso di gioia, la meraviglia, forse persino lo stupore nel vedersi dischiudere qualcosa che al giorno d'oggi non può non apparire altro che il riconoscimento di un ovvio, naturale – e quasi banale, benché sacrosanto – diritto.

È una battaglia continua, un continuo alternarsi di emozioni. Per andare all'università occorre la licenza liceale, e Lise non ce l'ha: non vale certo il suo diploma ottenuto al *Gymnasium*. Così si prepara all'esame da privatista, lo supera ed entra nell'ateneo viennese quando è già ventitreenne. Nel 1906 diventa la seconda donna a laurearsi in fisica all'università di Vienna, ma più che "laureata" resta soprattutto "donna", agli occhi del mondo: Max Planck, colui cha ha acceso la prima scintilla della Meccanica Quantistica, è un luminare della scienza, ma è pur sempre un uomo dell'Ottocento, e la sua opinione sull'educazione delle donne è quella sacramentata dalle convenzioni del tempo. Una donna che studia, che lavora, che fa ricerca, è qualcosa che può mettere in crisi la solidità dell'istituto più sacro e inamovibile, la famiglia; è meglio che le signore restino dove sono sempre state, accanto al proverbiale focolare. Eppure persino lui, quando conosce Lise, venuta a Berlino per seguire le sue lezioni dopo il fallito tentativo di aggregarsi al laboratorio di Marie Curie, deve rivedere le sue posizioni, riconoscere che lei è speciale, e accettarla tra i suoi allievi nonostante i suoi pregiudizi; e tutto nonostante che la Germania universitaria non si sia ancora aperta alle fanciulle come ha fatto l'Austria. La signorina Elise, detta Lise, potrà allora restare a Berlino, ma come al solito senza una precisa identità: studentessa? ricercatrice? frequentatrice di laboratori? Nessuna di queste parole è prevista dal vocabolario, a causa della sua desinenza femminile. Lise dovrà attendere il 1912, quando finalmente Planck avrà la possibilità di conferirle il titolo di "assistente". Titolo solo ufficioso e non retribuito, naturalmente: ma adesso poteva evitare di camminare rasente ai muri ed entrare in laboratorio di soppiatto, forse.

E allora cosa volete che sia il non sentir pronunciare con accento svedese, in quella mattina del 1945, il nome "Lise Meitner" accanto a quello di Otto Hahn? A Stoccolma non risuona neppure quello di Otto Frisch, figlio di sua sorella Auguste, che Lise (e non solo Lise) ritiene parimenti degno di quel riconoscimento. Forse è talmente abituata a non sentire pronunciare il suo cognome che potrebbe essere la mancata assegnazione del Nobel a suo nipote a ferirla più della dimenticanza del suo. Anche perché spesso il suo nome e cognome venivano usati a sproposito, in maniera per lei crudele e offensiva, quando li vedeva su giornali che la chiamavano "madre dell'atomica". Proprio lei che, negli anni di guerra, si era ribellata e aveva urlato con quanto fiato aveva in gola "*Non avrò niente a che fare con una bomba!*" a tutti quelli che la invitavano a Los Alamos e negli altri laboratori in cui i fisici lavoravano febbricitanti per raccogliere quell'energia che lei per prima aveva identificato, per trasformarla nella peggiore delle armi mai inventate. Meglio non sentire pronunciare mai il suo nome, piuttosto che udirlo in certi contesti.


2 *Lise Meitner e Otto Hahn*

Così, a Lise forse va bene essere anche quasi invisibile, lì a Berlino, dove regna Max Planck: perché in fondo è qui che può lavorare con Otto Hahn, è qui che può studiare la fisica più avanzata e misteriosa, quella che nasconde i segreti ultimi della materia; e questo è quanto ha sempre desiderato. Lise Meitner e Otto Hahn lavorano insieme, insieme scoprono un bel numero di isotopi radioattivi, tra il 1909 e il 1912. Scoprono anche un metodo per spiegare l'effetto del "rinculo atomico", scoperto da Harriet Brooks, la prima fisica nucleare canadese. Resta quasi invisibile, eppure presentissima: Hahn e Meitner producono risultati importanti, e il laboratorio viene in un certo senso "promosso" e spostato al Kaiser-Wilhelm-Institute nel 1912; l'anno successivo, il KWI, come lo chiamano affettuosamente coloro che ci lavorano, riesce addirittura a compiere qualcosa di inaudito: riconosce l'esistenza della dottoressa Meitner. Lise, alla verde età di trentasei anni, passati praticamente tutti studiando e ricercando, riceve il primo stipendio della sua vita.

E come volete allora che si senta, Lise, quando scopre di non essere neppure citata nel discorso di ringraziamento del Nobel dato alla scoperta delle fissione? A vederla così, listata su una pagina, la sua biografia ha l'aspetto di una inarrestabile, mozzafiato corsa a ostacoli; l'importante è correre, superarne uno alla volta, senza aspettarsi che possano realmente finire. Ha un lavoro, una professione, ma nel 1914 scoppia la guerra: Otto Hahn va sotto le armi, a fare ricerche sui gas asfissianti; e anche lei va al fronte, quello orientale: opera come infermiera specializzata in radiografie, e nel macello delle trincee della Grande Guerra non le mancheranno certo i pazienti. Torna poi al laboratorio, ma controvoglia, nel 1916, sentendosi in colpa per non poter essere di maggior aiuto ai feriti. L'anno dopo scopre il Pa91, l'isotopo del protoattinio con l'emivita più lunga, pietra miliare per gli studi sulla radioattività.

Poco dopo la fine della guerra, nel 1922, scopre un importante effetto della fisica atomica, osservabile quando gli atomi sono bombardati con elettroni o fotoni particolarmente energetici, tali da essere in grado di espellere degli elettroni delle orbite interne: ha qualche somiglianza nella dinamica con l'effetto fotoelettrico (che appena l'anno precedente era stata la motivazione per l'attribuzione del Premio Nobel ad Albert Einstein), ma è frutto di un meccanismo sostanzialmente diverso. Ci sono tutte le condizioni perché l'evento passi alla storia come la "scoperta dell'effetto Meitner", ma ormai sappiamo che il cognome Meitner è probabilmente vittima di un maleficio stregonesco, o forse addirittura da una *damnatio memoriae* che non per niente gli antichi romani, nella loro crudele saggezza, ritenevano la peggiore delle punizioni: un anno dopo, indipendentemente da Lise, è il francese Pierre Victor Auger a riscoprire e analizzare il fenomeno, e a renderlo ben noto alla comunità dei fisici. E, per quanto la primogenitura di Lise Meitner sia ben accertata, l'emissione di elettroni sotto determinate condizioni è ancora oggi – e per sempre sarà, verosimilmente – nota nella letteratura scientifica come "effetto Auger".

Come volete che si senta, Lise?

3 *La più bella foto di Lise*

Lise è abituata a lottare, e probabilmente a non aspettarsi niente in cambio. Anche quando è ormai diventata direttrice del KWI con il titolo di professore ordinario – ovviamente prima donna ad ottenere questo titolo nella storia degli atenei tedeschi – anche se si è in quel complicato periodo che è allo stesso tempo il dopoguerra del primo e l'anteguerra del secondo conflitto mondiale, Lise corrisponde con i colleghi fisici stranieri, che sono a un tempo ex e futuri nemici. Quando sente che James Chadwick, a Cambridge, sta cercando di dimostrare l'esistenza del neutrone, comincia a spedirgli campioni di polonio per i suoi esperimenti. Chadwick cattura la particella nel 1930, dando un'altra spinta cruciale alla comprensione del nucleo atomico, e ricorderà sempre l'aiuto datogli da Lise Meitner. Di più: affermerà sempre, con convinzione, che sarebbe stata lei a scoprirlo per prima, se avesse avuto le condizioni di studio e di ricerca di cui lui aveva goduto. Proprio la scoperta del neutrone dà il via agli anni in cui Hahn e Meitner si lanciano, come molti altri fisici[1] in tutto il mondo, alla cosiddetta "ricerca transuranica", lo studio del comportamento degli atomi pesanti, anche di quelli (ancora solo ipotetici) più pesanti dell'atomo più massivo mai trovato in natura, l'uranio. È la ricerca di punta sui misteri della natura, senza ancora nessun sospetto che possa avere alcuna ricaduta economica, men che mai militare. Nessun ricercatore pensava ancora alla bomba, nessuno scienziato lavorava pensando alla guerra. Era però la guerra che già pensava a loro.

Nell'infinita serie di oscillazioni delle emozioni di Lise, è immaginabile che la più dura e difficile sia quella del 13 luglio 1938, quando si decide a scappare. Sono cinque anni che lavora, un lustro intero durante il quale si stordisce e si droga di lavoro per non vedere cosa sta succedendo a Berlino: nel 1933 Adolf Hitler è diventato il padrone della Germania, e la Germania ha presto cominciato a comportarsi come la nazione guidata da Hitler. Gli ebrei sono insultati, picchiati, indicati come il male assoluto, perseguitati: quelli che ne hanno la possibilità cominciano a fuggire, a lasciare il paese finché possono. Lei è donna, forse attira meno l'attenzione; è ebrea, ma si è convertita, è luterana da trent'anni, è battezzata fin dal 1908; soprattutto, non è cittadina tedesca; è ancora austriaca, e la sua nazionalità la protegge dagli obblighi destinati ai cittadini tedeschi.

Ma è l'Austria a diventare Germania, e quindi a renderla di fatto una tedesca: l'Anschluss del marzo 1938 trasforma la luterana austriaca Lise Meitner in una tedesca di origini ebraiche, ed è allora tempo di dare ascolto a suo nipote Otto Frisch, che la implora di raggiungerlo in Olanda; di accettare i consigli dello stesso Otto Hahn, tedesco e fiero figlio di Germania, che le suggerisce di partire; e ad ascoltare altri amici preoccupati, come gli olandesi Dirk Coster e Adriaan Fokker, che la supplicano di raggiungerli oltre frontiera. E Lise parte, allora: anzi, scappa. Certo non sa che appena quattro mesi dopo la sua fuga

[1] E non sono fisici da poco: in Inghilterra partecipa alla "corsa transuranica" Rutherford, in Francia Irene Joliot-Curie, in Italia Enrico Fermi, in Germania, oltre a Hahn e a Lise, anche Leo Szilard. Curiosamente, tutti nomi immancabilmente finiti nell'elenco dei vincitori del Premio Nobel, tranne quello di Lise.

ci sarà la terribile "Notte dei Cristalli", ma non può non sentire la terribile urgenza dei tempi. Parte sotto falso nome, protetta dai buoni uffici di Coster che si fa in quattro per convincere l'Ufficio Immigrazione che sì, la signora ha l'autorizzazione a lasciare la Germania, come potete dubitarne? Parte senza bagagli, senza valigia, senza soldi: nella sua borsa ci sono solo dieci marchi. Ha però con sé un anello di diamanti, di grande valore: Otto Hahn glielo ha dato per corrompere, se fosse necessario, le guardie di frontiera; è un anello che apparteneva a sua madre, probabilmente il pezzo più importante dell'eredità di *frau* Hahn. Lise lo prende: non sarà necessario usarlo per lo scopo previsto, e Lise lo conserverà, intatto, per tutta la vita.

Nessuna speranza di tirare il fiato, nei Paesi Bassi; la ventilata possibilità di ottenere una cattedra dall'università di Groningen sfuma presto, ma Lise ha ormai ammiratori e amici, nel mondo scientifico. Si muove per lei Eva von Bahr (prima donna laureata in fisica della Svezia), si dà da fare per aiutarla Carl Wilhelm Oseen (membro della Reale Accademia Svedese delle Scienze e del Comitato per l'assegnazione dei premi Nobel: per inciso, è stata sua la candidatura, ripetuta due volte prima d'essere accettata, che ha fatto arrivare il Nobel del 1921 ad Albert Einstein), e insieme convincono Manne Siegbahn ad accettare Lise nel suo laboratorio di ricerca a Stoccolma. Siegbahn ha bisogno d'essere convinto perché condivide due caratteristiche con Max Planck: anche lui ha vinto un Nobel per la Fisica, nel 1924, e anche lui diffida assai delle donne nei laboratori scientifici.

Come può sentirsi allora Lise, quando vede il Nobel per la fissione arrivare senza neanche sfiorarla? L'annuncio avviene a Stoccolma, la sua nuova città; da sette anni è ospite della grande nazione svedese, e non ha certo intenzione di lasciarla, anzi: diventerà cittadina svedese, membro della Reale Accademia delle Scienze, e continuerà a vivere e lavorare a Stoccolma fino al 1960 quando, ormai più che ottantenne, deciderà di trasferirsi a Cambridge, dove risiede la maggior parte dei suoi parenti. E a Stoccolma è grata, e sette anni di distanza da quel drammatico giorno della fuga dai nazisti e dall'abbraccio svedese alla migrante disperata sono ben poca cosa, per generare risentimento, o anche solo tristezza. Lise è forte, e conosce tutto lo spettro delle emozioni: quei sette anni sono quelli in cui si è consumato il più disastroso eccidio del XX secolo, il più rovinoso, probabilmente, di tutta la storia umana. In quegli anni sono stati ammazzati milioni di persone, perseguitati e uccisi una moltitudine di uomini, donne e bambini che avevano la colpa di essere nati ebrei, colpa che condivide con loro. In quei sette anni sono state cancellate dalla carta geografiche intere città, sono state devastate e spostate nazioni, con tutto il carico di disperazioni individuali che questo comporta. In questi sette anni ha visto le immagini spaventose, grondanti lacrime, sangue e ustioni generati dalla liberazione dell'energia dei suoi amati atomi. Come volete che si senta, Lise? Credete davvero che una mente come la sua non abbia chiaro il senso della misura, esaurito il senso dello sdegno, consumato anche l'ultimo briciolo di sfiducia nella saggezza degli uomini? Che non abbia insomma ben presente che un riconoscimento scientifico, per quanto prestigioso, non è altro che polvere sulla polvere, su quella polvere che ricopre ancora le macerie fumanti d'Europa e del mondo?


4 *ancora Lise*

Lise, che ci piace immaginare addirittura presente durante l'annuncio del Nobel a Hahn, ha certamente annoverato le celebrazioni e i premi tra le cose irrisorie, voli leggeri di piume mossi dalle brezze di primavera, del tutto incommensurabili dopo la più violenta stagione degli uragani mai passata sul mondo.

5 *Francobolli per Lise*

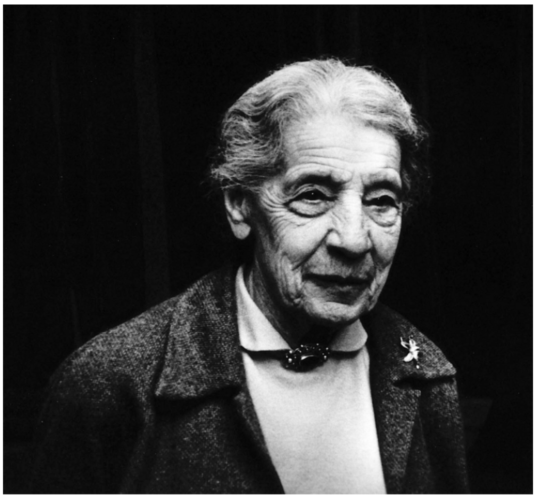
Certo, è difficile non pensare che l'annuncio di quel premio non l'abbia mandata indietro con la memoria, non abbia riportato la sua mente a quel pomeriggio passato sulla neve con suo nipote Otto Frisch. Era il 1939, camminava nei boschi intorno a Stoccolma insieme ad Otto, che era venuto a trovarla dalla non distante Copenaghen, dove lavorava con Niels Bohr. Otto studiava l'ipotesi del modello a "goccia" teorizzato da Ida Noddack[2], che pensava che un atomo pesante potesse spaccarsi in due un po' come fanno le gocce di liquido, lasciando al suo posto due gocce più piccole: in termini atomici e nucleari, in due atomi di elementi piazzati più o meno a metà della Tavola Periodica. Lise ricordava le lettere di Hahn che le chiedevano un parere sullo strano fenomeno osservato da lui e dal suo giovane collega Fritz Strassman: bombardando con neutroni lenti atomi di uranio, avevano trovato dei residui di bario. Come poteva essere? Non tornavano i conti, non tornava il bilancio delle masse, non tornava niente. Otto Frisch ricorda di aver visto la zia sedersi su un masso, prendere dalla tasca carta e matita, e cominciare a scribacchiare qualcosa. Lise sta pensando alle masse che non tornano, e pensa che c'è la più celebre equazione del mondo che stabilisce l'equivalenza tra massa e energia. Pensa che forse, nel processo di fissione, alcune particelle potrebbero annichilirsi del tutto secondo l'einsteiniana $E=mc^2$, e far tornare tutto: i calcoli, il modello, la logica della fissione nucleare. Probabilmente è già certa d'aver ragione quando è ancora seduta sul quel masso innevato, ben prima che Otto torni in Danimarca e racconti tutto a Bohr, che urlerà: "Ma certo che è così! Che scemi siamo stati, come può essere altrimenti?"; prima che Hahn riceva la sua risposta illuminante, prima d'ogni altro essere umano.

Forse Lise pensa solo a quel pomeriggio, a quel bosco non troppo lontano dall'Accademia delle Scienze dove si certifica che la fissione nucleare è un scoperta cruciale per la storia dell'uomo, dimenticando i contributi essenziali di una donna.

Poi, da allora in poi, a Lise arriveranno tutti i tentativi di riparazione possibili. Emula di Dorando Petri, c'è forse persino il rischio che l'inspiegabile eliminazione del suo nome dall'Albo d'Oro della Fondazione Nobel l'abbia resa più famosa e appetibile di quanto lo sarebbe stato l'ovvio, naturale inserimento del suo nome accanto a quello di Otto Hahn. Le giungono titoli accademici, premi di ogni tipo e natura, inviti alle prestigiose riunioni dei vincitori dei Premi Nobel pur non essendo ufficialmente nel novero; si susseguono articoli di scienziati che si chiedono la ragione dell'esclusione. Negli anni Novanta, la Reale Accademia di Svezia rivela i meccanismi che regolamentano le attribuzioni dei premi, e studiosi si lanciano nell'analisi delle cause che possano aver portato a una così clamorosa esclusione: i risultati sono strani, una commistione di ragioni e concause. Certo c'è stata una componente di natura sessista, ma sembrano aver contato di più cause ancora più ridicole, come l'incapacità, da parte del Comitato Nobel, di ben giudicare i contributi interdisciplinari: insomma, come se la Meitner fosse candidata più al premio per la Chimica che a quello per la Fisica, e i vari schieramenti del Comitato non fossero in grado di ben valutare l'importanza dei suoi contributi. "*Sembra che Lise Meitner non abbia condiviso il premio del 1944 con Hahn perché le commissioni esaminatrici non erano in grado di ben valutare il lavori interdisciplinari, e che i membri del comitato per la Chimica fossero incapaci di ben giudicare i suoi contributi o contrari […]. L'esclusione della Meitner dal premio per la Chimica può essere ben riepilogato come una miscela di*

[2] Marie Curie, Harriet Brooks, Eva von Bahr, Ida Noddack, Lise Meitner. I primi passi della fisica atomica sembrano quasi essere stati fatti più da femminucce che da maschietti

pregiudizi disciplinari, ottusità politica, ignoranza e fretta", scriverà nel 1997 Ruth Lewin Sime in un articolo su Physics Today, la rivista della Società Americana di Fisica.


6 *Lise con le rughe*

Certo è che adesso che la Fondazione Nobel ha aperto gli archivi e si possono vedere le cosiddette "nomination"[3] per i premi attribuiti più di mezzo secolo fa, è impressionante vedere come fosse davvero atteso il premio per Lise. I premi Nobel scientifici vengono candidati da membri del Comitato dopo che questi hanno raccolto le "nomination" di illustri personalità del campo di ricerca: ad esempio, da parte dei vincitori precedenti, o da autorità indiscusse: ormai è possibile ricercare in archivio tutte le volte che uno scienziato è stato nominato, per quale premio, e da chi. Le classifiche non sono mai asettiche come sembrano a prima vista: c'è sempre qualche elemento che occorre tenere in considerazione, come ad esempio il numero degli "invitati" ad esprimere una nomination. Si è detto che tra gli invitati compaiono quasi sempre anche coloro che hanno vinto in precedenza un premio Nobel, e già questo fa sì che grandi scienziati di inizio secolo possono avere relativamente poche nomination, per il semplice fatto che erano pochi coloro che potevano emetterle: ad esempio Marie Curie, che pure di Premi Nobel ne ha vinti ben due, annovera solo 7 nomination, 5 in Fisica e 2 in Chimica. Pur usando le dovute cautele, l'elenco delle nomination è comunque interessante: quantomeno è un certo "indicatore di stima" da parte dei colleghi, soprattutto se questi reiterano più volte la candidatura. Anche dal punto di vista quantitativo, l'elenco ha il suo peso: difficile arrivare più in alto delle 74 nomination per Max Planck o delle 62 di Albert Einstein, ad esempio: e in quest'ultimo caso è indicativo come, pur avendo vinto il Nobel nel 1921, abbia comunque ricevuto altre 17 nomination per il 1922, quasi a ribadire che la comunità dei fisici riteneva forse insufficiente il solo premio per la scoperta dell'effetto fotoelettrico.

E comunque, se è difficile trovare un grande nome della prima metà del Novecento assente dal registro dei vincitori del premio, e ancora più difficile, ovviamente, immaginarlo assente dall'elenco delle nomination: Niels Bohr 22; Werner Heisenberg 29; Wolfgang Pauli 29; Erwin Schrödinger 41. E che Otto Hahn si sia meritato il suo premio lo confermano la bellezza di 39 nomination.

E Lise? Lise che non poteva studiare, Lise che entrava di nascosto nei laboratori? Lise l'ebrea-non-ebrea che scappava, Lise che non marcava con il suo cognome gli effetti che scopriva: se lo meritava Lise? Facile rispondere di sì, dall'alto delle sue 48 nomination:

[3] Si possono vedere qui: https://www.nobelprize.org/nomination/. Come accennato, sono disponibili i dati solo per le attribuzioni vecchie più di cinquant'anni; le "nomination" più recenti non sono ancora accessibili. La situazione di Lise Meitner è accessibile direttamente da qui:

https://www.nobelprize.org/nomination/redirector/?redir=archive/show_people.php&id=6097

Nomination Database

Lise Meitner

Lastname/org:	Meitner
Firstname:	Lise
Gender:	F
Year, Birth:	1878
Year, Death:	1968

Nominee in 48 nominations:

- Physics 1937 by Werner Heisenberg
- Physics 1937 by Max von Laue
- Physics 1940 by Arthur Compton
- Physics 1940 by James Franck
- Physics 1940 by Dirk Coster
- Physics 1941 by James Franck
- Physics 1943 by James Franck
- Physics 1945 by Oskar Klein
- Physics 1946 by Max von Laue
- Physics 1946 by Niels Bohr
- Physics 1946 by Oskar Klein
- Physics 1946 by Egil Hylleraas
- Physics 1946 by James Franck
- Physics 1947 by Arthur Compton
- Physics 1947 by Max Planck
- Physics 1947 by Maurice de Broglie
- Physics 1947 by Oskar Klein
- Physics 1947 by Egil Hylleraas
- Physics 1947 by Prince Louis-Victor de Broglie
- Physics 1948 by Harald Wergeland
- Physics 1948 by Otto Hahn
- Physics 1949 by Georg Hettner
- Physics 1954 by Max Born
- Physics 1955 by Georg Hettner
- Physics 1956 by James Franck
- Physics 1959 by J Rotblat
- Physics 1961 by J Rotblat
- Physics 1964 by Max Born
- Physics 1965 by Max Born
- Chemistry 1924 by Heinrich Goldschmidt
- Chemistry 1925 by Kasimir Fajans
- Chemistry 1925 by Heinrich Goldschmidt
- Chemistry 1929 by Max Planck
- Chemistry 1930 by Max Planck
- Chemistry 1933 by Max Planck
- Chemistry 1934 by Max Planck
- Chemistry 1936 by Adolf Deissmann
- Chemistry 1936 by Max Planck
- Chemistry 1937 by Adolf Deissmann
- Chemistry 1937 by Max Planck
- Chemistry 1939 by Theodor Svedberg
- Chemistry 1941 by Frans Jaeger
- Chemistry 1942 by Wilhelm Palmaer
- Chemistry 1946 by Kasimir Fajans
- Chemistry 1947 by Niels Bohr
- Chemistry 1947 by Nil Dhar
- Chemistry 1948 by Oskar Klein
- Chemistry 1948 by Niels Bohr

Diciannove per la Chimica, ventinove per la Fisica. La prima nomination arriva nel 1924, l'ultima nel 1965 (e chissà, forse ce n'è ancora qualcuna ancora secretata). Il burbero, il misogino Max Planck la nomina sette volte; Niels Bohr tre; Max Born tre, e quelle del '64 e '65 già sembrano avere una sorta di carattere di urgenza; e si trovano in elenco anche i nomi di Heisenberg, Franck, Klein, von Laue, Compton, De Broglie. E naturalmente anche Hahn[4], nel 1948.

Difficile immaginare che qualcuno avrebbe protestato, se il nome di Elise (detta Lise) Meitner fosse stato annunciato, in quella mattinata svedese del dicembre 1945. Ancora più difficile pensare che Lise si sia dannata troppo l'anima, però, per questi giochini da maschietti. Era abituata alla vita difficile, Lise, e lo ripeteva spesso: non è poi così importante che la vita sia facile, è ben più importante che non sia vuota, inutile.

È ben difficile immaginare una vita più piena della sua.

[4] Otto Hahn era nato l'8 marzo 1879, quattro mesi e un giorno dopo Lise. Morirà il 28 luglio 1968, tre mesi meno un giorno prima di Lise, che saluta questo mondo il 27 ottobre dello stesso anno. Lise non saprà mai della morte dell'amico e collega, perché era ormai troppo debole e fragile, nell'estate del 1968, e i parenti temevano che la notizia potesse essere un colpo troppo gravoso per la vecchia scienziata.

2. Problemi

2.1 Problema di àtilibaborp

Scusate, ma Nyota (che sarebbe la sorella più giovane de L'ASUSina[5]) ha dei problemi con il touchpad… No, in realtà abbiamo trovato un problema di "quella cosa lì, ma al contrario", e siccome già fatichiamo a trovare problemi nuovi (...ridendo e scherzando, siamo a quota 508, questi esclusi: ormai, non festeggiamo neanche più…), il fatto che un titolo venga una volta tanto spontaneo dal problema ci rende, nel nostro piccolo, felici.

Perché è scritto al contrario? Semplice. Una volta tanto, dovete scegliere *come* mettere le cose, quindi poi lo sapete[6] e giocate. E dovete solo decidere *quanto* giocare. Ma andiamo con ordine.

D (è un numero! No, cioè, è una lettera ma è un numero. No, non è "cinquecento"… oh, insomma! Siate seri, su) euro sono distribuiti in N buste assolutamente identiche, che poi sono mescolate; voi (e qui sta la fregatura) sapete come sono distribuiti gli euro, e potete comprare, *una per volta*, una busta al prezzo di un euro, aprirla e vedere quanto avete vinto. E, eventualmente, comprare un'altra busta.

Sin qua, sembrerebbe una cosa vagamente imparentata con il paradosso di Pietroburgo, ma stiamo parlando di tutt'altro. In fondo, il croupier è vostro amico e, nei limiti della legalità, è fermamente intenzionato ad aiutarvi: infatti, vi chiede di *decidere voi* la distribuzione dei D euro nelle N buste, prima di giocare.

Essendo voi intenzionati a guadagnare il massimo possibile, cosa suggerite? Qual è la distribuzione che massimizza la vostra vincita?

2.2 Generalizzare, ragazzi, generalizzare!

Siccome il problema è brevissimo, vi raccontiamo che cosa è successo a Rudy qualche giorno fa nel "lavoro fuori di qui".

Si ritrovava a dover progettare un corso con una collega, e ha cominciato a mettere sul tavolone tutta una serie di piccoli foglietti con degli appunti sopra in un ordine cui ha dato il nome di "Triangolo non necessariamente triangolare di Tartaglia-Monge": una riga con pochi foglietti distanziati tra loro, con sotto una riga con più foglietti ma anche molti buchi, con sotto una riga con qualche foglietto (e un mucchio di buchi… e avanti in questo modo.

Allo sguardo stupito della collega (che riconosceva un vago senso nella cosa, visto che entrambi conoscevano l'argomento del corso in progettazione), dovendo giustificare la cosa, si esibiva in un "...era il metodo utilizzato dalla Signora dei Draghi di Thorn e dal suo scherano, l'Oscuro Stregone di Rün, nelle loro mirabolanti avventure".

Non ci sono state ulteriori domande[7].

La cosa, comunque, ci ha fatto tornare in mente D&D (e GURPS, e tutti gli allegri compagni del fantabosco… no, quello non c'entra. Insomma, i giochi basati sui dadi, tanti dadi. Ecco, appunto).

Per semplicità, ma senza perdere in generalità, definiamo come *dado* (...non abbiamo ancora detto "onesto") qualsiasi poliedro convesso con n facce, non necessariamente regolare.

Ci chiediamo per quali valori di n sia possibile progettare *almeno un* dado *onesto* con n facce.

[5] "...dai dati forniti, lo studente deduca cosa appare su entrambe le computere ai rispettivi screen setup"

[6] … a proposito di "508": a noi questo problema ricorda abbastanza "brutta cosa, un padre prof", pubblicato sul numero 6 di una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa che *sicuramente* conoscete.

[7] In realtà, il metodo è noto come "Microscope". E sarebbe, oltre che un modo per progettare giochi e gestire progetti (vagamene simile al Gantt, almeno come risultato finale: ma il "tempo" non c'entra niente), un gioco a sé stante, ma ne parliamo fuori di qui, OK? Comunque, i due tizi sono Rudy e signora (adesso, almeno: all'epoca, "signorina").

Siccome la parola "onestà" ad oggi è piuttosto inflazionata, abbiamo cercato una definizione matematicamente corretta (di quelle che sembrano non voler dire nulla, ma quando uno le capisce dicono tutto): per *onesto* intendiamo che "date due facce qualsiasi, esiste una simmetria che porta la prima nella seconda". Tra le altre cose, questo dovrebbe impedirvi sporchi trucchi quali appesantire una faccia "venuta piccola" o cose di questo genere. E se non vi ricordate cos'è una simmetria, potremmo consigliarvi un interessante volumetto, relativo a duelli, battiscopa, tappezzerie e portaerei.

3. Bungee Jumpers

Sia definita, in un qualche modo, una colorazione a due colori del piano, in modo tale che ad ogni punto sia attribuito un colore a scelta tra due. Si definisca inoltre, su questo piano, come *triangolo monocromatico* il triangolo avente i vertici tutti dello stesso colore.

Dimostrate che, dato un qualsiasi triangolo *PQR*, esiste, sul piano colorato, un *triangolo monocromatico* simile a *PQR*.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Novembre!

Si approssima la fine dell'anno e siamo tutti preoccupati perché da almeno un mese il Capo non si lamenta che il Calendario è in ritardo. Ora questa frase è un tormentone di RM: il Capo è sempre in tale anticipo che spesso arriva in tempo per prendere un treno precedente a quello che aveva previsto di prendere, ed è lui responsabile della produzione del famoso Calendario di RM. Normalmente dai primi di febbraio, ogni sua comunicazione si conclude con "…e il calendario è in ritardo!", ma ormai sono mesi che non ne parla. Il che può solo voler dire che è in ritardo veramente, o che è già pronto. E voi siete pronti a riceverlo? Avete già scelto su quale parete appenderlo? Trovato la stampante per stamparlo? Visto che la prima edizione è del Y2K, questo sarà il nostro ventesimo, una bella tradizionale strenna natalizia di Rudy.

Parlando di tradizioni, ci troviamo qui a notare il ritorno della tradizione più recente della nostra rivista, cioè il ritardo. Sappiate però che il motivo principale di tale ritardo è il tour-de-force di conferenze in giro per l'Italia delle ultime settimane. I Rudi sono stati a Cagliari, a Fermo, a Lucca, e in altri posti come semplici visitatori. Foto e cronache le trovate sulla nostra pagina FB, forse.

Ma bando alle ciance e le tradizioni, è tempo di soluzioni.

4.1 [235]

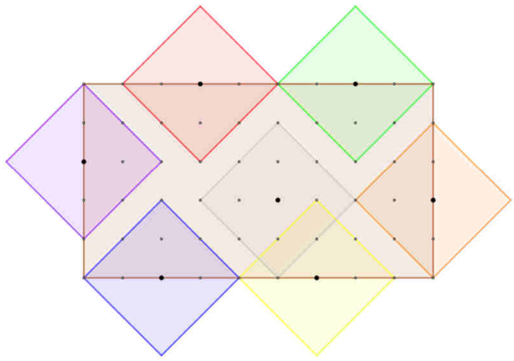
4.1.1 …caldo…

Con il freddo che ha cominciato a fare e le alluvioni che colpiscono un po' ovunque, questo problema sembra un po' fuori contesto, ma i lettori continuano ad esserne appassionati. Prima il testo:

> *In un'area della città, caratterizzata dal non avere piazze, formata da dieci strade in direzione est-ovest e sei in direzione nord-sud, con isolati perfettamente quadrati, si installano degli idranti. Gli idranti vanno piazzati agli incroci (considerati punti geometrici, esattamente come le vie sono considerate rette senza spessore) in modo tale da far sì che ogni incrocio abbia un idrante disponibile alla distanza di al più due lati-di-isolato. Come si procede per minimizzare il numero degli idranti?*

In RM236 avete trovato le soluzioni di ***Valter***, ***trentatre*** e ***Fabrizio***, ed il mese scorso ***Fabrizio*** aveva mandato una soluzione alternativa, ma non era contento della propria dimostrazione. A questo ha tentato di porre rimedio ***Valter***, che scrive:

> Vorrei ricollegarmi a quanto scrive Fabrizio: *"(a dire cioè che *sicuramente* servono almeno 7 idranti)... ma pur sempre di dimostrazione algoritmica parliamo eh…"*. Nel seguito mi rifaccio alla figura che avevo realizzato con GeoGebra. Gli propongo una "pseudo" dimostrazione geometrica basata sui quadrati in immagine.



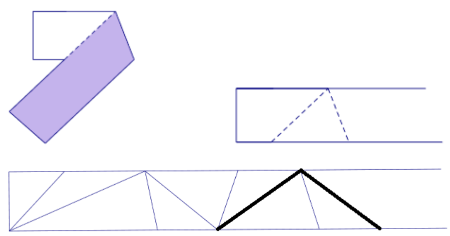
> Sui due lati del rettangolo vi sono rispettivamente 10 e 6 incroci.
>
> Le diagonali dei quadrati coprono 5 incroci e sono parallele a tali lati.
>
> Qualsiasi disposizione si scelga si è costretti, quindi, a "piazzare" almeno 6 quadrati sui lati.
>
> Quella in figura mi pare sia la disposizione ottimale dei 6 (vi sono solo 2 incroci che si sovrappongono su 2 quadrati; le altre possibili ne hanno di più).
>
> Comunque li disponga, inoltre, sono sempre costretto a inserirne un settimo interno.

Ottimo, a dimostrazione algoritmica risponde dimostrazione geometrica. Passiamo ora ai problemi del mese scorso.

4.2 [236]

4.2.1 End of Summer Contest: la congettura di Rudy

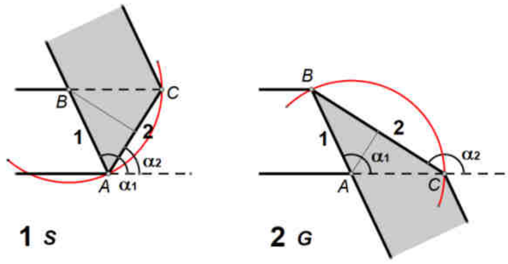
Il Capo è in grandi manovre per dimostrare teoremi con piegature su carta ed ha dimenticato di proporre il Summer Contest quest'anno. Per farsi perdonare ha proposto una bella sfida a fine estate, raccolta al volo dal grandissimo ***trentatre***. Ma cominciamo con la congettura:



7 S1G1 (sopra) e S2G2 (sotto).

> *Metodo S1G1: definiamo come a_1 l'angolo tra la base sotto della nostra striscia e la prima piegatura, con a_2 l'angolo tra la prima e la seconda piegatura, a_3 quello tra la seconda e la terza, eccetera. Come procede la successione degli a_n in funzione di n e a_1?*
>
> *Metodo S2G2: stesso procedimento con due piegature in su e due in giù. Che cosa succede con S3G3? e, genericamente, che cosa succede con SnGn? Esiste un modo per calcolare che cosa succede per SnGk, dove il numero delle piegature "su" è diverso dal numero delle piegature "giù"?*

Speriamo di essere riusciti a fare un sommario comprensibile, ma in caso andate a riprendervi RM236 dove si trovano tutte le figure. La soluzione è del grande ***trentatre***, che comincia con il commento: "*Non ho capito se questa cosa di settembre sia un problema proposto ai lettori. Di certo nessuno ha risposto e di certo non è una congettura. In ogni modo allego una soluzione, lunghetta ma non tanto difficile.*" Vediamola.



In fig. 1 e 2 la costruzione delle pieghe S e G (su e giù)

S : AB genera AC con il cerchio per A e centro B che interseca la riga alta in C

G : AB genera BC con il cerchio per B e centro A che interseca la riga bassa in C

- la sovrapposizione delle strisce è un triangolo ABC isoscele rispetto al centro del cerchio
- sia α_n (in radianti) l'angolo fra la piega n e la retta bassa, come in figura (gli α definiti nel problema si ricavano direttamente da questi)
- il passaggio $\alpha_n \to \alpha_{n+1}$ è dato dalle due funzioni s e g

[1] $S: \quad \alpha_{n+1} = \boldsymbol{s}(\alpha_n) = \alpha_n / 2$

$G: \quad \alpha_{n+1} = \boldsymbol{g}(\alpha_n) = (\pi + \alpha_n)/2$

- v. dimostrazioni riportate in fondo.

Le funzioni s e g si possono comporre

- p.es. $\boldsymbol{f}(\alpha) = \boldsymbol{gsg}(\alpha)$ - che sta per $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{s}(\boldsymbol{g}(\alpha)))$ - è

$$\boldsymbol{f}(\alpha) = \boldsymbol{gsg}(\alpha) = \boldsymbol{gs}((\pi+\alpha)/2) = \boldsymbol{g}((\pi+\alpha)/4) = (\pi + (\pi+\alpha)/4)/2 = (5\pi+\alpha)/8$$

Ogni funzione f composta di m funzioni semplici s e g ha la forma

[2] $\boldsymbol{f}(\alpha) = (p \cdot \pi + \alpha)/2^m = [p,m](\alpha)$

- dove $[p,m]$ è una forma contratta - in particolare

[3] $\boldsymbol{s} = [0,1]$, $\boldsymbol{g} = [1,1]$

- due funzioni in questa forma si possono comporre con

[4] $\boxed{\begin{array}{l} [p,m][p',m'] = [2^{m'} p + p', m+m'] \\ [p,m]^2 = [(2^m+1)p, 2m] \end{array}}$.

I casi proposti dipendono tutti da $SnGk$ - parto da questo e ne ricavo gli altri.

$SnGk$

- parametri usati : $n, k, w = n+k, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}^k \boldsymbol{s}^n$
- tutti gli angoli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sono funzione dell'angolo iniziale $\alpha \equiv \alpha_0$
- gli angoli $\alpha_n, n \geq 1$ sono divisi in gruppi alternati lunghi n e k - i primi due gruppi sono

$$\begin{array}{ll} \alpha_b = \boldsymbol{s}^b(\alpha) & b = 1 \ldots n \\ \alpha_{n+c} = \boldsymbol{g}^c \boldsymbol{s}^n(\alpha) & c = 1 \ldots k \end{array}$$

- questo comprende gli α_k, $k = 1 \ldots w$, l'ultimo è $\alpha_w = \boldsymbol{u}(\alpha)$
- proseguendo con i gruppi successivi e raggruppando le righe si ha

[5] $\boxed{\begin{array}{ll} \alpha_{wm+b} = \boldsymbol{s}^b \boldsymbol{u}^m(\alpha) & b = 1 \ldots n \\ \alpha_{wm+n+c} = \boldsymbol{g}^c \boldsymbol{s}^n \boldsymbol{u}^m(\alpha) & c = 1 \ldots k \end{array}}$

- che definisce, con $m = 0,1,2,\ldots$, tutti gli $\alpha_n,\ n \geq 1$.

Le [5] si possono ridurre alla forma [2], applicando [3] e [4]

[6] $\boldsymbol{s}^m = [0,m]$, $\boldsymbol{g}^m = [2^m - 1, m]$, $\boldsymbol{g}^c \boldsymbol{s}^n = [2^{n+c} - 2^n, n+c]$ $\rightarrow$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}^k \boldsymbol{s}^n = [2^w - 2^n,\ w]$

$\boldsymbol{u}^m = (\boldsymbol{g}^k \boldsymbol{s}^n)^m = [p_m, wm]$ con $p_m = (2^{wm} - 1)(2^w - 2^n)/(2^w - 1)$

- e le [5] diventano

[7] $$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_{wm+b} = [p_m, wm+b](\alpha) = (p_m\pi + \alpha)/2^{wm+b}, \quad b = 1\ldots n \\ \alpha_{wm+n+c} = [q_{m,c}, wm+n+c] = (q_m\pi + \alpha)/2^{wm+n+c}, \quad c = 1\ldots k \\ p_m = (2^{wm} - 1)(2^w - 2^n)/(2^w - 1) \\ \text{con } q_{m,c} = p_m + 2^{wm+n}(2^c - 1) \end{array}}\ .$$

angoli limite

In [7] per un dato m, $A_m = (\alpha_{mw+1}, \alpha_{mw+2}, \ldots \alpha_{(m+1)w})$ è un gruppo di w angoli consecutivi

- al crescere di m si ha

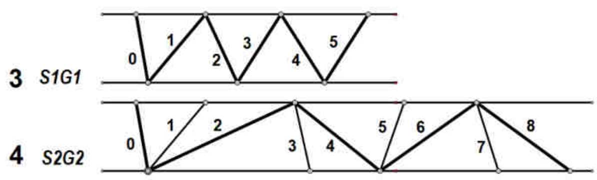
[8] $\boxed{A_{m\to\infty} \to A^\circ = (\alpha^\circ{}_1, \alpha^\circ{}_2, \ldots \alpha^\circ{}_w): \text{ costante}}$

- cioè si arriva a un gruppo di w pieghe che si ripete sempre uguale
- basta calcolare $\alpha^\circ{}_1$ e applicare le [5] cioè

[9] $\alpha^\circ{}_1 = \pi/2 \cdot (2^{n+k} - 2^n)/(2^{n+k} - 1)$

$\alpha^\circ{}_b = \boldsymbol{s}^b(\alpha^\circ{}_1) \qquad b = 2\ldots n$.
$\alpha^\circ{}_{n+c} = \boldsymbol{g}^c \boldsymbol{s}^n(\alpha^\circ{}_1) \quad c = 1\ldots k$

Applico le formule ai casi *S1G1* e *S2G2* - in fig. 3 e 4 le pieghe sono numerate come gli angoli α_n .



S1G1 - i parametri sono $n = k = 1$, $w = 2$, $p_m = 2/3 \cdot (4^m - 1)$, $q_{m,1} = 2/3 \cdot (4^{m+1} - 1) = p_{m+1}$

- le [7] diventano (con $b = c = 1$)

[10] $$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_{2m+1} = (p_m\pi + \alpha)/2^{2m+1} \\ \alpha_{2m+2} = (p_{m+1}\pi + \alpha)/2^{2m+2} \end{array}}$$

- gli angoli limite sono

[11] $\boxed{(\alpha^\circ{}_1, \alpha^\circ{}_2) = (\pi/3, 2\pi/3) \equiv (60^\circ, 120^\circ)}$

- i triangoli di fig. 3 diventano equilateri.

S2G2 - parametri $n = k = 2$, $w = 4$

- le [7] diventano (con $b = c = 1,2$)

[12] $\boxed{\begin{array}{l} \alpha_{4m+1} = (p_m\pi + \alpha)/2^{4m+1} \\ \alpha_{4m+2} = (p_m\pi + \alpha)/2^{4m+2} \\ \alpha_{4m+3} = (q_{m,1}\pi + \alpha)/2^{4m+3} \\ \alpha_{4m+4} = (q_{m,2}\pi + \alpha)/2^{4m+4} \end{array}}$

- dove $p_m = 4/5\cdot(16^m - 1)$, $q_{m,1} = p_{m+1} - 10p_m - 8$, $q_{m,2} = p_{m+1}$
- gli angoli limite sono

[13] $\boxed{\begin{array}{l} (\alpha°_1, \alpha°_2, \alpha°_3, \alpha°_4) = (2\pi/5, 3\pi/5, 3\pi/10, 4\pi/5) \\ \equiv (72°, 108°, 54°, 144°) \end{array}}$

- i triangoli isosceli finali in fig. 4 sono di due tipi diversi.

S3G3 - gli angoli limite sono

$\boxed{(\alpha°_1, \ldots \alpha°_6) \equiv (80°, 40°, 20°, 100°, 140°, 160°)}$.

<u>dimostrazioni</u>

[1] S : in A gli angoli sono $\alpha_1 = 2\alpha_2$

G : gli angoli del triangolo ABC sommano $\alpha_1 + 2(\pi - \alpha_2) = \pi$

[4] $[p,m][p',m'](\alpha) = (p\pi + (p'\pi + \alpha)/2^{m'})/2^m$
$= ((2^{m'}p + p')\pi + \alpha)/2^{m+m'} = [2^{m'}p + p', m + m'](\alpha)$

[6] da [3] e [4]

$$\boldsymbol{g}^c\boldsymbol{s}^n = [2^c - 1, c][0, n] = [2^{n+c} - 2^n, n + c]$$

- calcolo p_m - con $\boldsymbol{u}^m = (\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{s}^n)^m = [p_m, mw]$

- dalla prec. $\boldsymbol{u} = [p_1, w] = \boldsymbol{g}^k\boldsymbol{s}^n = [2^w - 2^n, w] \rightarrow p_1 = 2^w - 2^n$

$$\boldsymbol{u}^{m+1} = [p_{m+1}, (m+1)w] = [p_1, w][p_m, wm] = [2^{mw}p_1 + p_m, w(m+1)]$$

$\rightarrow p_{m+1} = 2^{mw}p_1 + p_m$ e sommando

$$\rightarrow p_m = p_1(1 + 2^w + 2^{2w} + \ldots 2^{(m-1)w}) = (2^w - 2^n)(2^{mw} - 1)/(2^w - 1)$$

[7] sostituendo [6] in [5]

- $q_{m,c}$ si ottiene componendo $\boldsymbol{g}^c\boldsymbol{s}^n\boldsymbol{u}^m$ con [4]

[8], [9] dalle [12]

$\alpha°_1 = \lim_{m\to\infty} \boldsymbol{s}\boldsymbol{u}^m(\alpha) = [p_m, wm+1](\alpha)$
$= p_m\pi/2^{wm+1} + \alpha/2^{wm+1} \rightarrow \pi/2\cdot(2^w - 2^n)/(2^w - 1)$

Interessante vero? Ma vediamo ora i problemi del mese scorso.

4.3 [237]

4.3.1 Speriamo che nevichi presto...

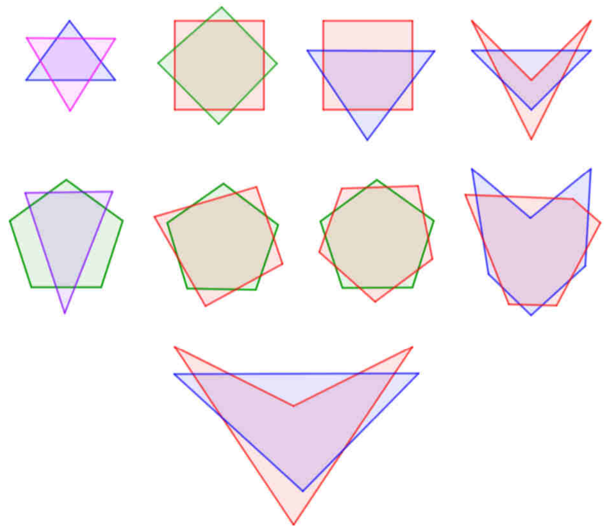
Due problemi geometrici, ambientati nel Campo dei Chinotti, vediamo il primo:

> *Il Campo dei Chinotti ha una distribuzione di aiuole delle forme più svariate, ma tutti poligoni convessi, anche se non necessariamente regolari. Alcune coppie di*

aiuole hanno intersezioni che sono anch'esse dei poligoni e solo queste verranno considerate come nuove aiuole. Se due vecchie aiuole sono un m-agono e un n-agono, quanti lati avrà al massimo la loro intersezione? E se ci fosse un'aiuola non convessa, vale ancora il risultato trovato?

Il primo risultato è quello di ***Valter***:

> Mi sembra $n+m$ (è possibile che mi sbagli in quanto non vi ho pensato su troppo). I lati dell'intersezione dovrebbero poter essere un pezzo di ogni lato dei due poligoni.
>
> Se un'aiuola non è convessa si sfrutta l'angolo concavo per ottenere un lato in più (si hanno così due lati dell'intersezione con un unico lato dell'altro poligono).
>
> Allego alcune immagini esplicative che ho realizzato con GeoGebra. Il concetto di intersezione che ho utilizzato per i disegni è quello geometrico. Forse bisognerebbe definire regole più restrittive per rendere più reale la cosa.
>
> Più che l'intersezione di due paiono un'unica aiuola con alcuni degli angoli concavi:



In qualche modo il ragionamento non ci è parso tanto chiaro, ma è l'unica soluzione ricevuta, quindi... passiamo al secondo problema.

4.3.2 Anzi, speriamo che nevichi prima...

Ancora piani per aiuole, ancora forme geometriche:

Si vogliono aiuole a forma di triangoli rettangoli con tutti i lati interi costruiti con seguente procedimento:

1. *Si costruisca l'aiuola triangolare retta di cateti a e b, con ipotenusa c.*
2. *Indi, si costruisca nelle vicinanze l'aiuola triangolare di cateti b e c, con ipotenusa d.*
3. *Si iteri poi il procedimento.*

Richiedendo che a, b, c, d,... siano tutti interi, per quanto potete andare avanti? Quali a e b vi garantiscono la sequenza più lunga?

E anche questa volta partiamo con ***Valter***:

> Mi pare non si riesca mai ad arrivare al secondo passaggio.
>
> La formula di Euclide per le terne pitagoriche primitive è:
>
> $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ con $m>n>0$ interi coprimi e non entrambi dispari.
>
> Moltiplicando poi per un interno k i tre valori si ottengono le altre terne.
>
> Inizio assumendo che la terna iniziale sia primitiva. Sostituisco con le corrispondenti lettere maiuscolo i valori per la terna successiva. Se fossero di una terna primitiva dovrebbe valere uno dei seguenti due casi:
>
> $A = b = 2mn = M^2 - N^2$

$B = c = m^2 + n^2 = 2MN$

$C = (2mn)^2 + (m^2 + n^2)^2 = M^2 + N^2$

oppure:

$A = c = m^2 + n^2 = M^2 - N^2$

$B = b = 2mn = 2MN$

$C = (2mn)^2 + (m^2 + n^2)^2 = M^2 + N^2$.

Dalle equazioni mi pare si deduca facilmente che m/n non sono uguali a M/N. Si nota che nel primo caso per i valori di A e B si ha una contraddizione (A/B dovrebbero essere contemporaneamente interi sia pari che dispari).

Nel secondo caso è per il valore per B che si ha una contraddizione. Mi pare lo si possa dedurre dal teorema fondamentale dell'aritmetica (m/n e M/N essendo diversi non potrebbero essere entrambi coprimi fra loro).

Ma anche se la seconda non è una terna primitiva si avrebbe una contraddizione (anche la prima terna non dovrebbe essere primitiva contro l'assunzione iniziale).

Assumo ora che la prima terna non sia primitiva. Posso, però, anche in questo caso, ricondurmi alla prima assunzione (dividendo i valori delle prima e successiva terna per un opportuno intero k).

A quanto pare il problema non ha soluzione. Ne sembra convinto anche ***trentatre***:

Con (a,b,c) triangolo pitagorico, di cateti a, b e ipotenusa c, si chiede di costruire la successione

[14] $(a,b,c) \to (b,c,d) \to (c,d,e) \ldots$ da cui

[15] $c^2 = a^2 + b^2$
$d^2 = b^2 + c^2 = a^2 + 2b^2$
$e^2 = c^2 + d^2 = 2a^2 + 3b^2 \ldots$

Si può dimostrare in modo semplice che il processo si blocca dopo il secondo triangolo.

Se $m = MCD(a,b) > 1$ le [15] si possono dividere tutte per m^2 – i lati restano tutti interi e la terna iniziale è primitiva con a e b coprimi – la parità di (a,b,c) può essere solo

1) $(pari, pari, pari)$
2) $(pari, disp, disp)$
3) $(disp, pari, disp)$
4) $(disp, disp, ?)$

- 1) è proibito per a e b coprimi
- 4) è proibito perché $a^2 + b^2 = 4n + 2$ non è un quadrato (che è solo $4n$, $4n+1$)
- applicando il processo [14] ai casi restanti si ha

2) $\to$ 4)
3) $\to$ 2) $\to$ 4)

- poiché 4) è proibito, il processo si ferma al massimo al secondo triangolo, e solo nel caso 3) con $(a,b,c,d) : (disp, pari, disp, disp)$.

Più in generale tutte le terne pitagoriche (a,b,c) sono date dalle formule

[16] $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$

- dove m, n : interi con $m > n > 1$ (se m e n sono coprimi la terna è primitiva)

- la prima equazione [15] , cioè $c^2 = a^2 + b^2$ è rispettata e dalla seconda $d^2 = b^2 + c^2$ si ha

[17] $d^2 = m^4 + n^4 + 6m^2n^2$.

Ma questa equazione, per $m, n > 0$, non ha soluzioni intere.

Occorre naturalmente una dimostrazione analitica, ma ho verificato che l'espressione a destra non è un quadrato per ogni valore *m*, *n* fino a 10000. Questo basta per ritenere che la costruzione si ferma al primo triangolo (e il giardino risulta piuttosto banale).

Come vedete i nostri solutori si sono appellati alle stesse formule. A questo punto ci fa piacere introdurre un nuovo solutore a cui diamo un caloroso benvenuto, ***Jeeves62***:

Quale che sia la terna pitagorica $a^2+b^2 = c^2$ scelta non ci sarà nessuna coppia di interi *a* e *b* che riuscirà ad arrivare al 2 secondo passaggio della serie.

Infatti dovrebbero essere soddisfatte le seguenti due equazioni:

$a^2+b^2 = c^2$

e

$b^2 + c^2 = d^2$

con $a < b < c < d$ interi positivi.

Scrivendo al (1) come

$c^2 - b^2 = a^2$

moltiplicando termine a termine la (4) e la (3) avremmo

$(c^2+b^2)(c^2-b^2) = d^2a^2$

Considerando le proprietà del prodotto notevole e ponendo

$e = ad$

Avremo infine

$c^4 - b^4 = e^2$

Espressione ben nota e per la quale è stato ampiamente dimostrato da valenti matematici a partire da Fermat la non esistenza di soluzioni intere non banali!

Un nuovo solutore che cita Fermat è senz'altro già uno dei nostri. Ci fermiamo qui per questo mese e vi ringraziamo per le belle soluzioni. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

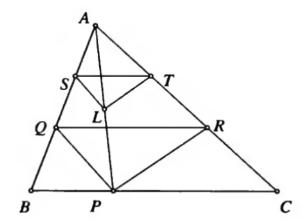
Se P è un punto arbitrario sul lato BC del triangolo ABC, come posso tracciare un segmento Q attraverso il triangolo che sia parallelo a BC e sottenda un angolo retto in P?

Un cerchio di diametro QR passa per P.

Da un punto qualsiasi S su AB si tracci il segmento ST parallelo a BC e segmento AP.

Il semicerchio di diametro ST incrocia AP in L e il triangolo SLT è retto.

Il punto Q è individuato dalla parallela ad SL passante per P.



8 *La soluzione (senza il cerchio).*

6. Pagina 46

Per semplificare la notazione, ogni volta che indicheremo un angolo con una singola lettera starà ad indicare l'angolo nel punto dato (indicato nelle figure dalla medesima lettera all'interno dell'angolo) e in caso di ambiguità utilizzeremo l'usuale notazione triletterale.

Ogni triangolo ha almeno due angoli acuti: nel triangolo *PQR*, sia *P* uno di questi angoli.

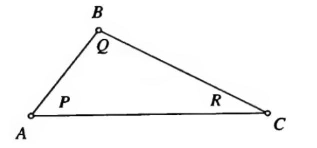
Costruiamo un triangolo *ABC* secondo le seguenti regole:

1. I vertici *B* e *C* sono su due punti dello stesso colore;
2. In *B* e *C*, gli angoli *Q* e *R* sono tali da completare il triangolo.

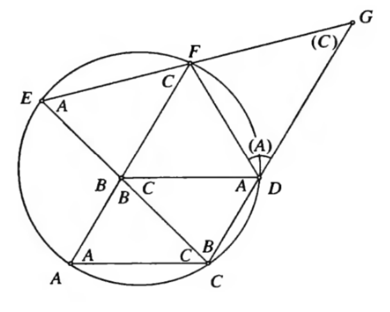
Allora, il triangolo *ABC* ha le seguenti caratteristiche:

1. È simile a *PQR*
2. Ha un angolo acuto in *A* (indicato in figura come *P*)
3. Ha i vertici *B* e *C* dello stesso colore.

Ovviamente, ogni triangolo simile ad *ABC* è simile a *PQR*.



9 *Costruzione di ABC.*



10 *La rete di triangoli.*

Essendo l'angolo in *A* acuto, possiamo costruire la rete di triangoli della figura a fianco.

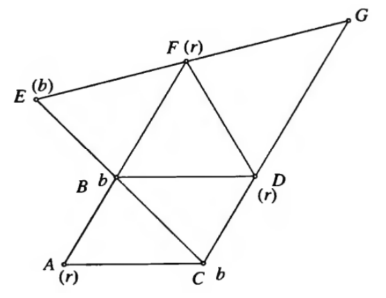
Iniziamo con il completare il parallelogramma *ABCD* e con il tracciare la circonferenza circoscritta al triangolo *ACD*. *AB* e *CD* incontrino il cerchio rispettivamente in *F* e *E*. Nel parallelogramma tracciato, deve essere *BCD*=*B* e, nello stesso segmento del cerchio, *E*=*A*. La somma degli angoli *A*+*B*+*E*+*C* è minore di due angoli retti, quindi *EF* e *CD* devono incontrarsi in qualche punto *G* dallo stesso lato di *EC* di *F* e *D*.

Gli angoli del triangolo *ABC* ricorrono in diversi punti del disegno, e non è difficile mostrare che i triangoli:

BCD, *EFB*, *ECG*, *AED*, *FDG*

sono simili al triangolo *ABC*.

Infine, aggiungiamo i colori a questa rete di triangoli, indicando con *r* i vertici *rossi* e con *b* i vertici *blu*.



11 *La rete di triangoli, colorata.*

B e *C* erano stati scelti in modo tale da avere entrambi lo stesso colore, ad esempio *blu*: siccome almeno due vertici di un triangolo devono avere lo stesso colore, possiamo evitare il monocromatismo attribuendo al terzo vertice il colore restante.

Quindi, per evitare di ottenere un triangolo monocromatico, essendo *B* e *C* *blu*:

- *A* e *D* devono essere *rossi* (nei triangoli *ABC* e *BCD*).
- *E* deve essere *blu* (nel triangolo *AED*).
- *F* deve essere *rosso* (nel triangolo *EFB*).

A questo punto, non resta che decidere il colore di *G*, ma *G* non può evitare di formare un triangolo monocromatico: infatti, se *G* è *rosso*, allora *FDG* è tutto *rosso*; di converso, se *G* è *blu*, allora *ECG* è tutto *blu*. Ma entrambi questi triangoli sono simili al triangolo originale, quindi uno dei due rappresenta la soluzione al nostro problema.

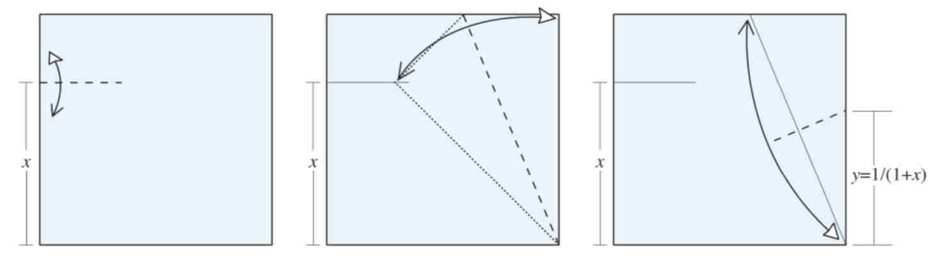
7. Paraphernalia Mathematica

A quanto pare, l'altra volta ci siamo riusciti. Come sanno i più sto(r)ici lettori di questa rubrica[8], una delle sue prime apparizioni è stata quella relativa alla divisione del segmento con metodi geometrici, e nel numero passato ce l'abbiamo fatta ad affrontarla in un modo "nuovo". Proseguiamo su questa linea, e vediamo se riusciamo a rinverdire qualche altro vecchio argomento.

7.1 Divide et Impera – [2] – Le cose si complicano

Andate a rivedervi il numero scorso, che diamo un mucchio di cose per scontate.

Shuzo Fujimoto ha trovato un interessante metodo per una costruzione basata sui reciproci: in figura, si vede lo schema generale di costruzione.

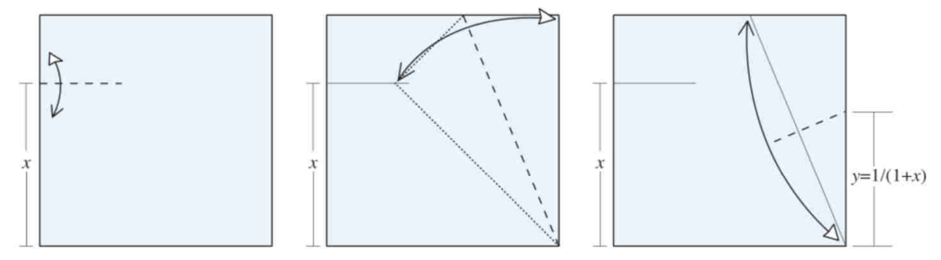


12 *La costruzione di Fujimoto.*

La costruzione si basa sul fatto che, ottenuta una divisione x su un lato, è piuttosto semplice, attraverso le due operazioni indicate nella seconda e terza immagine, ottenere il reciproco di $(1+x)$: quindi, cercando il reciproco di un numero y, attraverso la costruzione della proporzione $(y–1)$ sul lato sinistro, diventa possibile costruire $1/(1+y–1)=1/y$.

Per ottenere la frazione a/b, sia come sopra $x=m/p$ la frazione binaria opportuna; dalla costruzione di Fujimoto si ricava che $y=p/(m+p)$. Prendendo per p il valore della più grande potenza di 2 minore di b e $m=b–p$, si ha che $y=p/b$, il che ci fornisce il denominatore cercato.

Essendo però p una potenza di 2, possiamo usare l'algoritmo binario per ridurre la frazione di un fattore a/p, ottenendo che $z = (a/p)\ y = (a/p)\ (p/b) = a/b$, che è il risultato cercato.



13 *La costruzione di Fujimoto.*

In pratica:

1. Definire p come la massima potenza di 2 minore di b.
2. Definire $x=(b–p)/p$.
3. Costruire x utilizzando il metodo delle frazioni binarie, estendendo la marcatura del suo valore.
4. Applicare la costruzione di Fujimoto ottenendo la frazione p/b sul lato destro.

[8] Rudy, che la scrive; Alice, che corregge le bozze. Doc dice di leggerla, ma accampa sempre le scuse del ritardo per rinviare la lettura (anche bisogna ammettere che si sta impegnando: le ultime, questa inclusa, le ha lette di sicuro).

5. Ridurre la distanza dal lato di base di un fattore a/p, sempre utilizzando il metodo delle frazioni binarie.

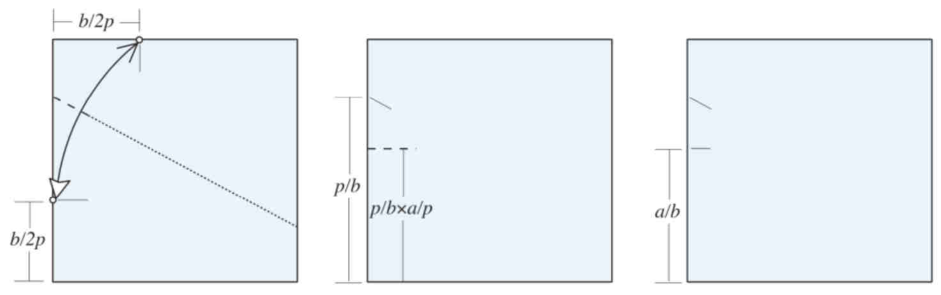
Il metodo di Fujimoto, pur presentando dei ranghi particolarmente interessanti, presenta il problema di richiedere delle piegature triangolari (la seconda immagine della sequenza) con dei triangoli molto acuti, che si rivelano molto complesse da eseguire con precisione; i due metodi (quello delle diagonali e quello di Fujimoto) sono per certi versi complementari, e quando uno di loro presenta passaggi difficilmente sormontabili, di solito l'altro è più semplice.

Successivamente alla pubblicazione della costruzione di Fujimoto, negli specialisti di origami ha iniziato a farsi strada l'idea che in questi sistemi di costruzione esistesse un potenziale irrealizzato.

In sostanza, le azioni utilizzate sono due:

1. Il portare un punto su un lato su un altro punto sullo stesso lato.
2. Il portare un punto su un lato su un altro punto su un altro lato.

La prima ci ha portato alle frazioni binarie, ma non è detto che della seconda siano state esplorate tutte le possibilità. E questo, infatti, è stato quanto ha proposto Masamichi Noma: nella figura che segue, si vede il metodo.



14 *La costruzione di Noma.*

L'algoritmo è:

1. Definite p come la più grande potenza di 2 minore di b.
2. Costruite le frazioni $w=b/2p$, $x=b/2p$ sui lati sinistro e superiore.
3. Portate il punto w sul punto x, tracciando la piegatura opportuna (incrocerà il lato sinistro del quadrato nel punto $y=p/b$).
4. Costruite la frazione a/p relativa a questo segmento

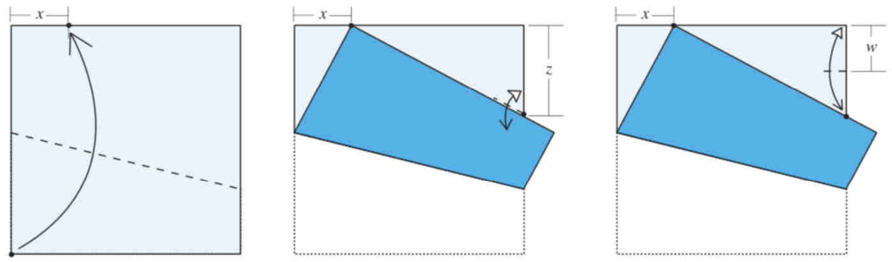
Il risultato è la frazione cercata a/b.

Nonostante la sua eleganza, il metodo ha un rango piuttosto alto: infatti, l'algoritmo di divisione binaria va applicato tre volte (sul lato sinistro, sul lato superiore e sul segmento risultante).

Un altro metodo per la divisione secondo parti razionali di un segmento è stato trovato da Kazuo Haga e pubblicato per la prima volta nel 1979. Questo metodo ha il pregio di non richiedere la riapertura del foglio dopo ogni piega.

Supponiamo, come negli altri casi, di aver ottenuto (sul lato superiore) una divisione di lunghezza x; effettuando la piegatura indicata nella figura qui sotto, otteniamo:

$$z = \frac{2x}{1+x}, \qquad w = \frac{x}{1+x}$$



15 *La costruzione di Haga.*

Quindi, secondo le usuali linee, il metodo si può esprimere come:

1. Sia p la più grande potenza di 2 minore di b.
2. Sia $m=p-b$.
3. Si costruisca con il metodo binario il punto $x=m/p$ sul lato superiore.
4. Piegare l'angolo in basso a sinistra sul lato superiore, portandolo in coincidenza del punto ottenuto.
5. Piegare l'angolo in alto a destra sul punto di incrocio tra il lato destro e il lato inferiore piegato[9], ottenendo la distanza $y=p/b$.
6. Riducete il segmento ottenuto attraverso la frazione binaria a/p, ottenendo la divisione a/b.

Questo metodo è, di solito, più semplice del metodo di Noma e, se la piegatura diagonale non è schiacciata[10], permette di ottenere la divisione senza impegnare con piegature la zona centrale del foglio.

I metodi per l'ottenimento di frazioni irrazionali sono evidentemente metodi approssimati, ma anche qui, a prescindere dagli algoritmi basati sulla forza bruta quali ad esempio: "effettua 10 divisioni binarie, poi contane 591 dal lato sinistro[11]", esistono dei metodi di costruzione piuttosto eleganti che permettono in molti casi di raggiungere l'approssimazione voluta.

Una frazione continua (aritmetica) è un'espressione nella forma:

$$r=a+\cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{b_3+\dots}}}=[a;b_1,b_2,b_3,\dots]$$

dove i vari b sono numeri interi positivi.

Un interessante teorema[12] relativo alle frazioni continue sostiene che lo sviluppo in frazione continua di un qualsiasi intero sommato alla radice quadrata di un razionale è periodico, ossia nella sequenza delle b esiste una ripetitività.

Ottenere la ridotta della frazione continua di un numero irrazionale di cui siano note un certo numero di cifre dopo la virgola non è difficile, con l'aiuto di una calcolatrice anche non molto potente:

1. Scrivete la parte intera del numero.
2. Calcolate il reciproco della parte decimale
3. Ripetete i passi (1) e (2) sul numero ottenuto.

---

[9] Nella seconda figura dell'immagine, il punto viene identificato con una piccola piegatura.

[10] Serve unicamente ad individuare il punto sul lato destro e, eseguendo la piccola piegatura indicata nella seconda immagine, non è necessario pressare la piegatura.

[11] Il metodo fornisce una buona approssimazione dell'inverso della radice quadrata di 3, in quanto: $1/\sqrt{3}=0{,}1001001111_{[2]}\approx\frac{591}{1024}$.

[12] La dimostrazione si può trovare nel capitolo 3 di OLDS, Frazioni Continue, Zanichelli, Bologna, 1968 (Tr. it. di *Continued Fractions*, Yale University, 1963).

Ossia[13], ad esempio:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{293 + \cfrac{1}{10 + \dots}}}}$$

Le frazioni continue possono sembrare null'altro che una complicazione rispetto al troncamento dello sviluppo binario, ma hanno un indubbio pregio: ogni ridotta ha il minimo denominatore per un dato livello di precisione. Ad esempio, 22/7 (seconda ridotta) è la miglior approssimazione di pigreco con denominatore minore di 106 (che sarà il denominatore della terza ridotta), e quindi approssima pigreco con una precisione di 1/106[14].

Individuato il grado di precisione richiesto, calcolata la ridotta della frazione continua che la fornisce, una qualsiasi delle divisioni razionali viste precedentemente ci darà la divisione richiesta.

...ce l'abbiamo fatta!

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[13] Nel calcolo delle ridotte di questa espressione sono riconoscibili molte delle approssimazioni "classiche" del valore; 3/1, 22/7, 333/106, 335/116, 104348/33215, ...

[14] Motivo per cui, come recita una famosa battuta, nelle frazioni continue "meglio fermarsi subito prima di un numero grosso".