



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 237 – Ottobre 2018 – Anno Ventesimo



1. Occhio non vede	3
2. Problemi.....	9
2.1 Speriamo che nevichi presto.....	9
2.2 Anzi, speriamo che nevichi prima.....	9
3. Bungee Jumpers	10
4. Soluzioni e Note	10
4.1 [235].....	10
4.1.1 ...caldo...	10
4.2 [236].....	11
4.2.1 Errata Corrige	11
4.2.2 “Doppiamente casuale”	11
4.2.3 Un tot di sfumature di grigio	23
5. Quick & Dirty.....	24
6. Pagina 46.....	25
6.1 Soluzione	25
6.2 Appendice	25
7. Paraphernalia Mathematica	26
7.1 Divide et impera [1] – La parte “facile”	26

	Rudi Mathematici Rivista fondata nell'altro millennio da <i>Rudy d'Alembert</i> (A.d.S., G.C., B.S) rudy.dalembert@rudimathematici.com
	<i>Piotr Rezierovic Silverbrahms</i> (Doc) piotr.silverbrahms@rudimathematici.com <i>Alice Riddle</i> (Treccia) alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com	
RM236 ha diffuso 3'280 copie e il 30/09/2018 per  eravamo in 14'300 pagine.	
Tutto quanto pubblicato dalla rivista è soggetto al diritto d'autore e in base a tale diritto <i>concediamo il permesso di libera pubblicazione e ridistribuzione</i> alle condizioni indicate alla pagina diraut.html del sito. In particolare, tutto quanto pubblicato sulla rivista è scritto compiendo ogni ragionevole sforzo per dare le informazioni corrette; tuttavia queste informazioni non vengono fornite con alcuna garanzia legale e quindi la loro ripubblicazione da parte vostra è sotto la vostra responsabilità. La pubblicazione delle informazioni da parte vostra costituisce accettazione di questa condizione.	

Purtroppo il CdR di RM ha un debole per l'esposizione dei Redattori al pubblico ludibrio. La dimostrazione del fatto è in copertina questo mese con Alice che dimostra in quanti modi si possono dare indicazioni di posizione al centro di una capitale europea. Foto matematiche con il resto dei redattori sono in preparazione.

1. Occhio non vede

“Se desideri vedere le valli, sali sulla cima della montagna. Se vuoi vedere la cima della montagna, sollevati fin sopra la nuvola. Ma se cerchi di capire la nuvola, chiudi gli occhi e pensa.”
(Kahlil Gibran)

“Solo coloro che possono vedere l’invisibile, possono compiere l’impossibile.”
(Patrick Snow)

“La nostra meta non è mai un luogo, ma piuttosto un nuovo modo di vedere le cose.”
(Henry Miller)

“Ho visto un angelo nel marmo e l’ho scolpito finché non l’ho liberato.”
(Michelangelo)

“Rendete visibile quello che, senza di voi, forse non potrebbe mai essere visto.”
(Robert Bresson)

“Non basta guardare, occorre guardare con occhi che vogliono vedere, che credono in quello che vedono.”
(Galileo Galilei)

“Per vedere cosa c’è sotto il proprio naso occorre un grande sforzo.”
(George Orwell)

“Un talento colpisce un bersaglio che nessun altro può colpire; un genio colpisce un bersaglio che nessun altro può vedere.”
(Arthur Schopenhauer)

“L’amore non vede con gli occhi, ma con la mente.”
(William Shakespeare)

“Ciò che si vede dipende da come si guarda. Poiché l’osservare non è solo un ricevere, uno svelare, ma al tempo stesso un atto creativo.”
(Søren Kierkegaard)

“Tutto ciò che sentiamo è un’opinione, non la realtà. Tutto ciò che vediamo è una prospettiva, non la verità.”
(Marco Aurelio)

“Ogni uomo confonde i limiti del suo campo visivo con i confini del mondo.”
(Arthur Schopenhauer)

“Il fatto è che lei vede ma non osserva; qui sta la differenza!”
(Arthur Conan Doyle)

“Io chiudo i miei occhi per poter vedere.”
(Paul Gauguin)

“Sono molto meravigliato di sapere che c'è gente che non ha mai visto uno gnomo, non posso fare a meno di provare compassione per costoro. Qualcosa non va. La loro vista non funziona bene.”
(Axel Munthe)

“La pittura è una professione da cieco: uno non dipinge ciò che vede, ma ciò che sente, ciò che dice a se stesso riguardo a ciò che ha visto.”
(Pablo Picasso)

“L'occhio non vede cose ma figure di cose che significano altre cose.”
(Italo Calvino)

“Nessun grande artista vede mai le cose come veramente sono. Altrimenti non sarebbe più un artista.”
(Oscar Wilde)

“In questo mondo non vediamo le cose come sono. Le vediamo come siamo, perché ciò che vediamo dipende principalmente da ciò che stiamo cercando.”
(John Lubbock)

“Niente inganna più della vista.”
(Proverbio)

You don't see what you're seeing until you see it but when you do see it, it lets you see many other things¹.

Ci sono parole troppo cariche di significati, incapaci di contenerli tutti. Inevitabilmente, sono parole importanti, essenziali, quasi realmente prive di sinonimi, perché un sinonimo necessariamente limita, circoscrive proprio il novero dei significati possibili. Parole come “libertà”, “Dio”, “natura”: parole usate continuamente, parole di cui tutti sanno il significato, eppure – o forse proprio per questo – ognuno lo declina un po' a proprio modo, con sfumature particolari.

In parte, è una caratteristica di quasi tutte le parole di uso comune: sono parole di immediata comprensione, che consentono di identificare istantaneamente l'oggetto della comunicazione, ma che inevitabilmente, proprio per l'immane contenuto che veicolano, richiedono precisazioni e distinguo quando il discorso si approfondisce. Le conversazioni sono quasi sempre condotte con un certo grado di approssimazione, con confini di significato un po' sfumati; e quando si è costretti ad approfondire spesso si interrompono, con gli interlocutori che prendono una pausa per chiarirsi il contenuto semantico di questo o di quel termine. È per questo che i trattati, i manuali, i documenti scientifici dedicano tanto spazio e tanta cura alle definizioni: per ridurre al minimo (possibilmente, per annullare del tutto) il rischio di fraintendimenti. Ed è probabilmente per la stessa ragione che nei testi scientifici quelle parole così forti, così cariche di significati sono usate con molta cautela, quando non sono del tutto assenti.

Il verbo “vedere” può rientrare facilmente in questa categoria. Apparentemente innocuo, creato per descrivere l'azione sensoriale che fanno gli occhi, è presto caricato di altri significati profondi, decisivi. Certo dipende dall'importanza che gli esseri umani riconoscono al senso della vista: per quanto sia odioso stilare delle classifiche, è abbastanza evidente che *Homo sapiens* riserva un culto particolare per le informazioni

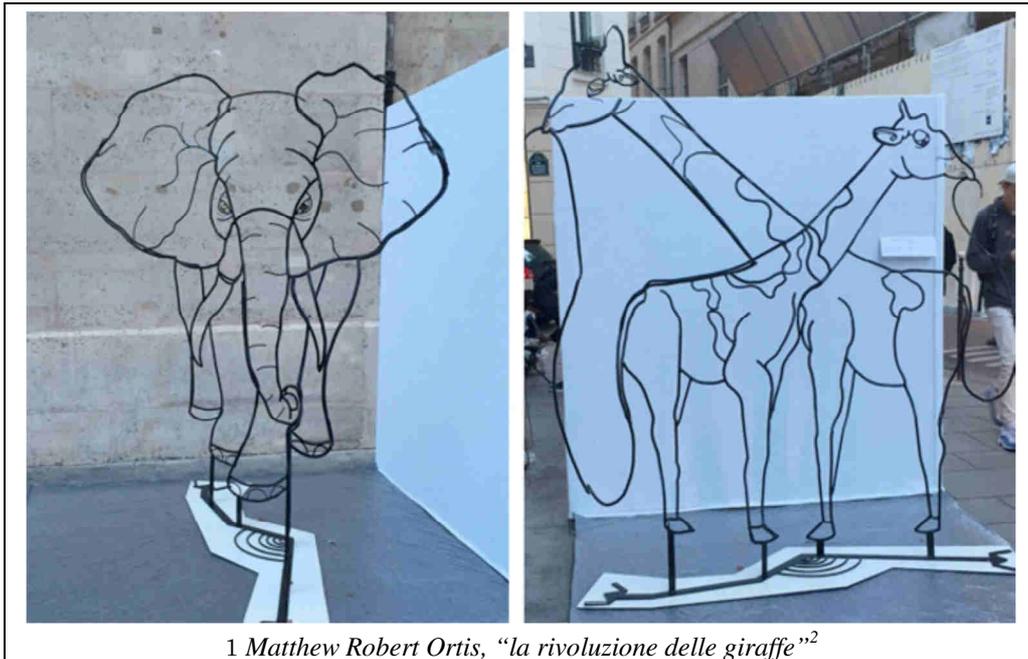
¹ “Non vedi quello che stai vedendo finché non lo vedi, ma quando lo vedi, ti fa vedere molte altre cose”.

che raggiungono il suo cervello attraverso il nervo ottico. Senza nulla togliere ai preziosissimi altri sensi, l'azione del "vedere" è sempre stata considerata la via principale per la conoscenza del mondo esterno. Lo dimostra bene la lingua classica per eccellenza, il greco antico, che trasforma il significato del verbo ὀράω ("vedo") quando è coniugato al perfetto ("οἶδα", ovvero "ho visto"), fino a farlo diventare la forma più comune per affermare semplicemente "lo so". E se "οἶδα" sembra ricordare molto da vicino la splendida parola "idea", non sarà certo un caso: l'idea è l'immagine che si forma nella mente, quando la mente comprende qualcosa di nuovo.

E infatti, il primo dei significati traslati di "vedere" è "capire". Se una cosa è visibile, evidente, allora si presuppone che sia anche compresa, posseduta. Se si è talmente bravi e intelligenti da capire in anticipo cosa accadrà in futuro, allora si possiede il dono della previsione, di "vedere prima". E i significati traslati crescono, si accumulano, e sempre con connotazioni positive: coloro che sanno ben leggere il mondo e i suoi sviluppi hanno "visione"; i grandi geni riescono a "visualizzare" i concetti più astrusi. Viene spontaneo notare, pur riconoscendo pienamente che ogni gruppo di persone ha il sacrosanto diritto di essere denominato come preferiscono gli appartenenti al gruppo medesimo, che la scelta di farsi chiamare "non vedenti" anziché "ciechi" potrebbe non essere la più corretta, né semanticamente né politicamente. "Cieco" è parola nobile e antichissima, presente in ogni linguaggio, e solitamente con un percorso etimologico che richiama solo l'ombra, l'oscurità, senza troppe altre implicazioni: "non vedente", oltre ad essere una definizione creata per diminuzione, cosa che non risulta mai particolarmente efficace, subisce forse ancora più facilmente la negazione di tutti i sensi traslati di "vedere": non vedente, impossibilitato a capire. Conclusione quanto mai sciocca, oltre che totalmente falsa.

Perché la capacità di capire, anzi proprio la capacità di "visualizzare" è verosimilmente assai meno imparentata all'azione del "vedere" di quanto comunemente si creda. In matematica, poi, forse i termini "visualizzare" e "vedere" non sono neppure sinonimi. Certo, non è trascurabile l'importanza di costruire immagini mentali dei vari concetti: buona parte del fascino della geometria euclidea sta proprio nelle figure, siano esse disegnate su carta con l'ausilio della matita o direttamente sulle meningi con l'aiuto dei neuroni. Visualizzare un triangolo inscritto dentro un cerchio familiarizza subito, accelera la comprensione delle proprietà dei cerchi e dei triangoli: agire fisicamente con riga e compasso nella soluzione di un problema geometrico rivela caratteristiche insospettite, chiarisce rapporti di uguaglianza, apre la via alla soluzione che inizialmente appariva impossibile da raggiungere; ma in ultima analisi la riga e il compasso non fanno altro che ribadire, amplificare e mostrare su carta specifiche "proprietà" già note a chi disegna; un po' come un abaco velocizza i conti a coloro che i conti, comunque, sanno ben farli da soli.

E appena si abbandona la geometria euclidea, specialmente quella bidimensionale dell'euclideo foglio di carta, si vede come il processo di visualizzazione comincia a prendere le distanze da quello che siamo soliti chiamare semplicemente "vedere". Perché bisogna fare subito i conti con la fisicità del mondo che abitiamo: la Relatività ci assicura che è almeno quadrimensionale, la Teoria delle Stringhe ventila la possibilità che di dimensioni ce ne siano una dozzina, ma noi siamo fatti di carne e sangue, e la nostra carne e il nostro sangue sono abituati a leggere il mondo come uno spazio tridimensionale. Anzi, peggio: la vista, il nostro adorato e prezioso senso guida, ci ruba una delle tre dimensioni, e ci dà informazioni sul cosmo schiacciando su una proiezione 2D quanto raccoglie dagli stimoli di un mondo 3D. E questa perdita "naturale" di dimensione già disinnescava l'osannato senso di "visualizzazione": basta guardare la figura della "Rivoluzione delle Giraffe" di M.R. Ortis per averne una prova diretta. E non è che un esempio.



1 Matthew Robert Ortis, “la rivoluzione delle giraffe”²

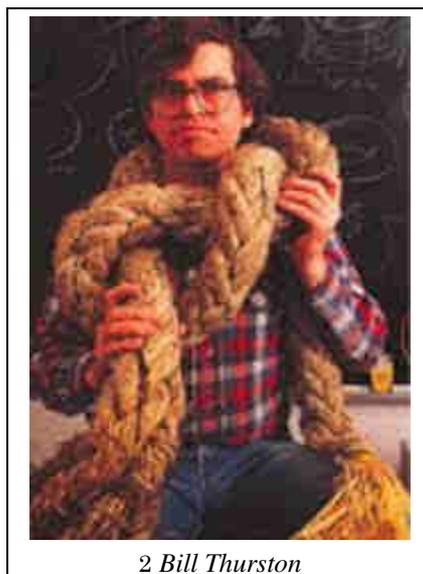
Una delle cose più sorprendenti, quando si decide di affrontare dei corsi di laurea scientifici, è scoprire come la parola “geometria” sembri cambiar significato nel trimestre scarso che separa l’ultimo anno di liceo dal primo di università³. Già il quasi inevitabile accoppiamento con la misteriosa “algebra lineare” suscita perplessità in chi ancora si immagina di giocare con bisettrici, prolungamenti di segmenti e perpendicolari che rallegrano la vista (gli angoli retti sono sempre una benedizione); poi arriva l’aggrottarsi preoccupato delle sopracciglia quando si sfoglia il testo fresco di libreria e lo si trova pieno zeppo di coefficienti, griglie di numeri, elenchi di proprietà e – soprattutto – quasi del tutto vergine di amichevoli figure.

È lo scotto del primo grande salto, quello che senza preavviso racconta allo studente che “No, guarda, i disegni con riga e compasso non sono il vero nocciolo della questione, è ora che togli definitivamente le rotelle dalla bicicletta e cominci sul serio a pedalare”. Ed è solo il “primo” dei grandi salti, perché poi ce ne sono altri, e probabilmente ancora più grandi e decisi: se un matematico decide di diventare un “geometra” si avventura in territori oscuri anche a gran parte degli altri matematici. Giunge in luoghi – anzi, in spazi – magici e inconfondibili, dove il salto iperspaziale da una dimensione all’altra è all’ordine del giorno, e senza bisogno del Millennium Falcon; dove crescono concetti come le foliazioni, che hanno ben poco da spartire con i problemi dei tipografi e degli editori; dove “varietà” non significa affatto spettacolo di intrattenimento; e dove termini come “omotetia” e “isometria” la fanno da padrona, magari stravolgendo lungo il percorso anche parole apparentemente innocue come “affinità” e “gruppo”. Un vero giardino magico, dove i pochi che sanno muoversi hanno percorsi mentali imprevedibili, vedono senza stupirsi l’identità tra la tazzina di caffè e la ciambella, e magari fanno un salto alle dimensioni 5 o 6 con la convinzione che così sarà più facile comprendere qualche ambiguità della banale natura tridimensionale (e hanno quasi sempre ragione). Un giardino magico in cui l’azione del “visualizzare” forse ha ancora un senso, ma se davvero ce l’ha è riservata solo a pochi privilegiati, e non certo ai comuni mortali.

² Se non credete che si tratti di una sola scultura presa da due punti di vista diversi, vale la pena fare un giro qui: www.youtube.com/watch?v=DcIZ3EsE7CI

³ Forse è necessario qualche *caveat*: l’umile estensore di queste note ha consumato quel trimestre nel passaggio dal Liceo Classico alla Facoltà di Fisica, ed è certo possibile che altri passaggi – ad esempio quelli che partivano dal Liceo Scientifico – fossero un po’ meno stravolgenti. Ancora e soprattutto, quello specifico passaggio, per il medesimo estensore, è avvenuto eoni fa, in un millennio diverso, e forse le cose adesso sono cambiate. Forse.

Uno che non era certo un comune mortale, almeno nel senso testé descritto, era William Paul Thurston, Bill per gli amici. Nasce il 30 ottobre del 1946 nella capitale degli Stati Uniti, e i genitori si accorgono subito che i suoi occhi non funzionano come dovrebbero. Non che sia cieco: vede, e vedrà per tutta la vita, senza eccessivi problemi. Ma è strabico: ha anzi una forma particolarmente forte di strabismo che gli impedisce di mettere a fuoco entrambi gli occhi sullo stesso soggetto. Quale che fosse la sua percezione della “profondità”, quella dimensione che perdiamo nelle proiezioni bidimensionali sulle nostre retine e alla quale riusciamo parzialmente a supplire grazie alla piccola parallasse di cui ci gratifica il fatto che di occhi ne abbiamo due, era per William qualcosa di diverso dal normale. I suoi genitori, in particolare sua madre Margaret, passano molto tempo con lui sfogliando libri e riviste pieni di immagini colorate, forse nella speranza che l’esercizio alla visione potesse in qualche modo ridurre il difetto congenito.



2 Bill Thurston

Forse è per questo che Bill sviluppa una capacità di visualizzazione così insolita, così eccezionale; o forse Eulero non scherzava poi troppo quando, perdendo in vecchiaia completamente⁴ la vista, affermò “Meglio. Avrò meno distrazioni.”

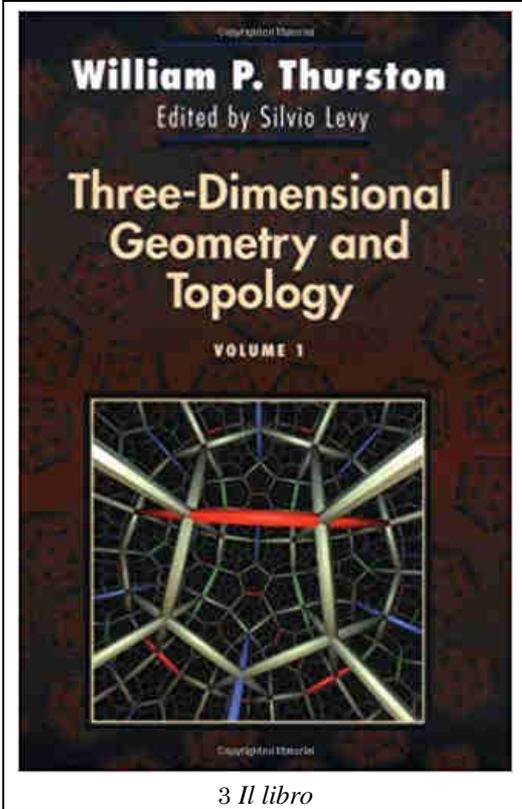
Fatto sta che Bill vede la geometria del mondo con una chiarezza del tutto particolare: forse è una capacità comune tra gli artisti, ma William Paul Thurston è un matematico, e come tale è in grado di raccontare, spiegare, rendere condivisibile e ripetibile dagli altri il suo modo di vedere. Era ancora solo un giovane dottorando nel 1971, quando a Berkeley partecipa ad un seminario sui sistemi dinamici; e probabilmente era anche un po’ timido quando, a valle della presentazione di quello che appariva essere l’importante risultato per il quale era stato istituito il seminario stesso, si alza dal fondo dell’aula e rivela la sua perplessità sulla dimostrazione appena mostrata. Si portò alla lavagna, e cominciò a proporre un controesempio: aveva appena sentito parlare dei contenuti di quel seminario, ma aveva subito visto – visualizzato, capito, intuito, immaginato, scegliete voi il verbo giusto – un caso in grado di demolire la dimostrazione.

Erano anni strani, densi di ribellioni e contestazioni, e Billy ci si trovava benissimo. Contestava la guerra in Vietnam, respingeva l’offerta di un assegno di ricerca perché poteva avere delle implicazioni militari, e nel contempo lasciava la sua mente vagare da una dimensione all’altra. Una delle cose più controintuitive, se non si è matematici e geometri, è scoprire che aumentare il numero delle dimensioni non necessariamente rende le cose più complicate: succede spesso, anche se certo non sempre. E il nostro caro, vecchio spazio in 3D pare essere una bestia particolarmente difficile da trattare: non sono infrequenti i casi in cui problemi insolubili o difficilissimi in tre dimensioni risultano più facilmente abordabili in spazi di dimensione superiore. Thurston però, forse per il suo congenito strabismo, forse per il suo animo un po’ hippy e un po’ ribelle, forse per qualcos’altro ancora che non ci è dato sapere, riusciva a leggere la geometria in maniera profonda; e in una maniera particolarissima.

Perché è proprio il suo modo di vedere e raccontare la geometria che è rivoluzionario, e che probabilmente ne trasmetterà il nome ai posteri. Non che gli manchino i risultati oggettivi, anzi: nel 1982 vince la Medaglia Fields; la sua “Congettura di Geometrizzazione” è un passo fondamentale per la risoluzione della Congettura di Poincaré, ottenuta poi da Grigorij Perel’man (a sua volta vincitore – per quanto sdegnoso

⁴ Eulero perde quasi completamente la vista dall’occhio destro già prima dei trent’anni d’età, tant’è che Federico il Grande lo chiama (forse affettuosamente, chissà) “il mio Ciclope”. Poi, più tardi, la cataratta gli renderà inservibile anche l’occhio sinistro.

– della Medaglia Fields e unico risolutore di uno dei “Problemi del Millennio” del Clay Institute); la Teoria delle Foliazioni, a giudizio della maggior parte dei matematici e dei topologi, è da considerarsi praticamente conclusa, dopo che Thurston l’ha sviscerata tra il 1972 e 1973; eppure, probabilmente di lui resterà soprattutto un libro, “*Three-Dimensional Geometry and Topology – Vol. I*”.



Libro che nasce come una raccolta di appunti per le lezioni del corso che Thurston tiene all’Università di Princeton nel 1978, sulla geometria e topologia tridimensionale. Solo appunti, neppure delle vere e proprie “dispense”, che però riproducono il modo in cui Bill “vede” la geometria dello spazio. E siccome è un modo nuovo, inesplorato, efficace, quei foglietti d’appunti cominciano presto a circolare tra gli studenti. Studenti prima, colleghi poi; poi escono velocemente dal recinto dell’Università, e fanno in fretta il giro del mondo.

Se ne parla molto, tra gli addetti ai lavori: se ne parla al punto che diventa colloquiale, tra di loro, l’espressione “geometria tipo Thurston”. Così gli appunti devono essere organizzati, raccolti, diventare un libro: ma un libro che mantiene lo stile, l’approccio, per quanto possibile proprio la “visione” che William Paul Thurston ha della geometria e della topologia.

Quel “Volume I” che completa il titolo dell’opera è una promessa, o quantomeno una speranza. Billy se ne va il 21 agosto 2012

senza che il secondo volume veda la luce: ma c’è un’intera generazione di geometri e topologi che ha imparato la sua lezione, che prova a riprodurre il suo modo di vedere. Che il secondo volume esca o meno, è solo questione di carta, edizioni, perfino di “foliazioni” nel senso strettamente editoriale; in tutti gli altri sensi, quello matematici, l’opera di William Paul Thurston resta fondamentale e, come tale, completa.



2. Problemi

2.1 Speriamo che nevichi presto...

...che qui stanno venendo strane idee.

Data l'ormai palese impossibilità di utilizzare il Campo dei Chinotti come centro deputato alla perdita delle frecce (certo, con Rudy e Doc che tirano, l'attività principale è quella: si perdevano un numero di frecce leggermente maggiore di quelle tirate, visto che ogni tanto riuscivamo a farle cadere dalla faretra), da qualche tempo si è optato per una sana distribuzione di aiuole delle forme più svariate, anche se si cerca di tenere una certa regolarità, o meglio "normalità": sono sempre poligoni convessi, anche se non necessariamente regolari.

Ora, alla perenne ricerca di qualcosa di nuovo, anzi d'antico, si sta pensando di riciclare i vecchi bordi delle aiuole, e ci si è accorti di uno strano fenomeno, relativamente ad alcune coppie di aiuole: le loro intersezioni (ossia la parte comune ad entrambe le aiuole) sono anch'esse dei poligoni, in molti casi. E le Signore e Padrone del giardino vorrebbero riciclare l'esistente ma con qualche variazione, trasformando in aiuole unicamente le intersezioni.

Un volta tanto, Rudy e Doc sono entusiasti dell'idea: infatti, pare loro di ricordare che l'intersezione di due poligoni abbia al più area pari al poligono di area minore [almeno sin quando le Signore non scoprono le "aiuole gestaltiche" (RdA)], il che significa che ci sarà comunque meno da zappare; visto che comunque se ne parlerà la prossima primavera, Rudy si sta ponendo degli interessanti quesiti. Ad esempio, relativamente all'idea di fare i bordi di queste "aiuole intersecate" in un blocco unico: quanti ce ne serviranno? Posto in forma leggermente migliore: se due vecchie aiuole sono un m -agono e un n -agono, quanti lati avrà al massimo la loro intersezione?

Poi, a Rudy sembra di ricordare che ci fosse un'aiuola non convessa... in questo caso, vale ancora il risultato che avete trovato alla domanda qui sopra?

2.2 Anzi, speriamo che nevichi prima...

...che le Signore stanno già cambiando idea...

Appena visto il catalogo dei cordoli, le Signore sono andate in brodo di giuggiole⁵, sostenendo che "sarebbe un peccato, doverli tagliare per farli stare a misura sui lati": ben sapendo a chi sarebbe toccato il ruolo di spaccapietre, Rudy e Doc si sono affrettati ad annuire vigorosamente.

Sta prendendo piede l'idea di avere aiuole a forma di austeri triangoli rettangoli aventi tutti i lati interi (per non rompere i cordoli); siccome però la troppa uniformità viene a noia, l'idea è di farli "uguali ma diversi" (copyright una Paola qualunque), secondo il seguente procedimento:

Si costruisca l'aiuola triangolare retta di cateti a e b , con ipotenusa c (no, il Teorema di Pitagora non ve lo scrivo: cercatelo su wikipedia, se non ve lo ricordate).

Indi, si costruisca nelle vicinanze l'aiuola triangolare di cateti b e c , con ipotenusa d .

Si iteri poi il procedimento sino ad esaurimento degli interi, dell'area giardino o della pazienza di Rudy e Doc.

In un modo un po' più chiaro: richiedendo che a , b , c , d ,... siano tutti interi, per quanto potete andare avanti? Quali a e b vi garantiscono la sequenza più lunga? È abbastanza evidente che (3,4) non arriva neanche al secondo passaggio ($4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$, che non è un quadrato perfetto), ma per amor di pace bifamiliare, riuscite a trovare quelli che funzionano?

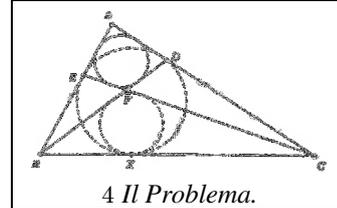
⁵ Che, caso mai non lo sapeste, sono il frutto dello *Ziziphus jujuba*, Famiglia delle Rhamnacee, Classe Magnoliopsida. Adesso vi sentite molto meglio, sì?

3. Bungee Jumpers

All'interno del triangolo ABC, un piccolo cerchio è tangente ai lati AB e BC, e le sue tangenti CE e BD si incrociano in F.

Provate che il cerchio inscritto al triangolo ABC e quello inscritto al triangolo FBC sono tangenti a BC nello stesso punto X.

La soluzione, a "Pagina 46"



4. Soluzioni e Note

Ottobre!

Grazie per le molte soluzioni! Anche questo mese manterrò questa parte introduttiva molto breve, ci tengo solo a dire che le soluzioni di **Valter** questo mese mancano non perché lui non ne abbia mandate, ma per pigrizia dell'estensore di queste note (sono sempre io, Alice) che con tutti i problemi di probabilità è salita esponenzialmente. Buona lettura.

4.1 [235]

4.1.1 ...caldo...

Del secondo problema del mese scorso abbiamo ricevuto un nuovo contributo di **Fabrizio**. Riprendiamo il testo:

In un'area della città, caratterizzata dal non avere piazze, formata da dieci strade in direzione est-ovest e sei in direzione nord-sud, con isolati perfettamente quadrati, si installano degli idranti. Gli idranti vanno piazzati agli incroci (considerati punti geometrici, esattamente come le vie sono considerate rette senza spessore) in modo tale da far sì che ogni incrocio abbia un idrante disponibile alla distanza di al più due lati-di-isolato. Come si procede per minimizzare il numero degli idranti?

Il mese scorso avete potuto leggere la soluzione di **Valter**, **trentatre** e dello stesso **Fabrizio**, che ci scrive ora:

dopo aver visto le altre soluzioni sul numero di settembre ho immaginato le grasse risate e i commenti di scherno che avrebbero accompagnato la cestinatura della mia proposta da parte della commissione dell'ipotetica gara d'appalto "un idrante per tutti". Sì, ho clamorosamente confuso la condizione „ogni incrocio con un idrante a distanza ≤ 2 ” con “ogni coppia di idranti a distanza ≤ 2 ”.

Volendo parzialmente rimediare alla cialtroneria di cui sopra (o quantomeno per non passare definitivamente da ciarlatano dispensatore di fake results) propongo la seguente formulazione alternativa del problema che, come nel mio primo tentativo, è in termini di ottimizzazione su grafo ...quantomeno lo strumento usato era valido.

Definiamo un grafo $G = (V, E)$ con un nodo per ogni incrocio e un arco (u, v) per ogni coppia di nodi u e v i cui rispettivi incroci siano a distanza ≤ 2 .

Un insieme dominante di cardinalità minima è la soluzione del problema (un insieme dominante è un insieme di nodi S tali che ogni nodo v del grafo sia in S oppure sia adiacente a un nodo di S).

Certo, i calcoli in generale non sarebbero più tanto agevoli (il minimo insieme dominante è un problema NP-completo), ma a mia parziale discolta posso dire che nel caso specifico ho ottenuto una soluzione col mio notebook in poco meno di un secondo; potrei addirittura spingermi nel certificare l'ottimalità della soluzione di Valter (a dire cioè che ***sicuramente*** servono almeno 7 idranti)... ma pur sempre di dimostrazione algoritmica parliamo eh...

Beh, lungi da noi cestinare, anche perché troviamo ogni approccio interessante. Soprattutto rivedere un problema sotto un'altra luce porta sempre dei risultati, grazie **Fabrizio!**

Passiamo ora ai problemi del mese scorso, ma prima una correzione.

4.2 [236]

4.2.1 Errata Corrige

Il “compleanno” del numero scorso si apriva con una citazione a memoria di una striscia dei Peanuts di Charles M. Schulz, nella quale Linus si lamentava con Charlie Brown del fatto che l’umanità avesse inventato prima la mitragliatrice della macchina per scrivere. Con un po’ di pudore, si confessava però di non essere riusciti a ritrovare in rete la striscia in questione, cosa che aveva indotto la stesura di una lunga nota a piè di pagina che recitava:

¹ Nonostante il virgolettato, la citazione va presa con cautela, perché riportata interamente a memoria. Google è stato messo sotto stress per un bel po’, nel tentativo di recuperare la striscia in questione e pubblicarla (confidando nella ignara e tacita benevolenza dei possessori del copyright), ma la ricerca è stata infruttuosa. Siccome la memoria in questione è chiamata ad un esercizio pluridecennale, è possibile che la frase non sia esattamente quella riportata e, in ultima analisi, che persino i personaggi potrebbero essere altri dell’universo di Peanuts. Restano comunque i seguenti indizi, evidentemente significativi: 1) Solo Linus Van Pelt è in grado, tra i personaggi di Schulz, di entrare in depressione per un motivo del genere; 2) sembra assai improbabile che Linus esprima una preoccupazione del genere ad altri che a Charlie Brown; 3) si verifica facilmente che il brevetto della prima mitragliatrice anticipa davvero di pochi anni quello della prima macchina per scrivere prodotta industrialmente. Last but certainly not least; 4) se una striscia a fumetti rimane impressa nella testa di qualcuno per quasi dieci lustri, è improbabile che la memoria, così profondamente folgorata, sia totalmente priva di affidabilità.

Nota che resterà a futura e imperitura memoria sull’ineluttabile decadimento delle facoltà intellettuali dell’estensore della stessa. L’unica cosa saggia che contiene è infatti quel “persino i personaggi potrebbero essere altri”, come ci ha splendidamente dimostrato **Dave**, che è riuscito a ricostruire il ricostruibile.

E la ricostruzione certifica che: 1) Non era Linus. 2) Non era Charlie Brown. 3) Non erano i Peanuts. Si tratta invece di un’altra – meritatamente celebrata – striscia: Mafalda, di Quino. Il testo delle vignette non era poi troppo lontano da quanto a suo tempo riportato, e a volere tentare una difesa a oltranza si può anche provare a dire che, nell’universo di Quino, Felipe riveste un ruolo abbastanza simile a quello che ha Linus nei Peanuts. Ma queste sono chiacchiere, l’importante è che **Dave** ha risolto la magagna, e ci ha anche inviato la striscia in questione; e per questo gli vanno tutti i nostri ringraziamenti.



4.2.2 “Doppiamente casuale”

Cominciamo subito dal brutto problema che contiene già parolacce nel titolo:

Sul tavolo c’è una quantità non numerabile di piatti di plastica vuoti, quando dall’albero che lo sovrasta cade un insetto, il quale va a finire in un punto casuale di un ben preciso piatto, sceglie una direzione a caso e procede in linea retta per uscire dal piatto. Se tutti i piatti hanno un raggio R , qual è la distanza media percorsa sul piatto dall’animaletto?

Ci viene subito in soccorso **Alberto R.** con la sua inconfondibile prosa:

Scusatemi, ma per me fare una figura con GeoGebra e trasferirla in Word è un supplizio. Chi vuole seguirmi si munisca di un foglio di carta, di una matita e di un pizzico di pazienza e disegni la figura – molto semplice – man mano che la descrivo.

Il piatto è assimilato a un cerchio di centro O e di raggio R .

Un insetto cade sul piatto in un punto I distante D da O e di qui, presa una direzione qualsiasi, va diritto fino a uscire dal piatto attraversando la circonferenza nel punto P .

La direzione scelta dall'insetto è individuata dall'angolo α che la semiretta OI fa con la semiretta IP .

Sia S la distanza percorsa dall'insetto sul piatto, cioè la lunghezza del segmento IP .

Con un po' di sgradevoli smanettamenti si ottiene che la distanza S in funzione di D e di α è data dalla seguente formula oscena:

$$S(D, \alpha) := \sqrt{(D \cdot \cos(\alpha))^2 + (R^2 - D^2)} - D \cdot \cos(\alpha)$$

S è una variabile aleatoria funzione delle variabili aleatorie α e D . Esaminiamo quest'ultime.

α ha una distribuzione uniforme nell'intervallo $0 - 2\pi$ perché, per ipotesi, l'insetto ha preso una direzione a caso senza preferenze. Quindi la prob che l'angolo sia compreso tra α e $\alpha+d\alpha$ è semplicemente $d\alpha/2\pi$. Sarebbe invece un grave errore logico supporre che anche D abbia distribuzione uniforme nell'intervallo $0 - R$; infatti l'insetto colpisce a caso il piatto, come una goccia di pioggia, cioè con probabilità **uniforme su tutta la superficie**. In altre parole, se sul piatto disegniamo un'areola, la prob che l'insetto vi cada dentro è uguale al rapporto tra l'areola e l'area del cerchio, indipendentemente dalla forma e dalla posizione dell'areola nell'ambito del cerchio. Ora dire che l'insetto è caduto a una distanza dal centro compresa tra D e $D+dD$ significa che è caduto nella sottile corona circolare di raggio D e larghezza dD , quindi di area $2\pi D \cdot dD$. La densità di probabilità è dunque $2\pi D \cdot dD / \pi R^2 = 2D \cdot dD / R^2$, con andamento triangolare nell'intervallo $0 \dots R$.

Riassumendo le funzioni densità di probabilità che ci interessano sono:

$$F(D) = 2D/R^2 \text{ con } F(D)=0 \text{ fuori dell'intervallo } 0 \dots R$$

$$G(\alpha) = 1/2\pi \text{ con } G(\alpha)=0 \text{ fuori dell'intervallo } 0 \dots 2\pi$$

Quindi:

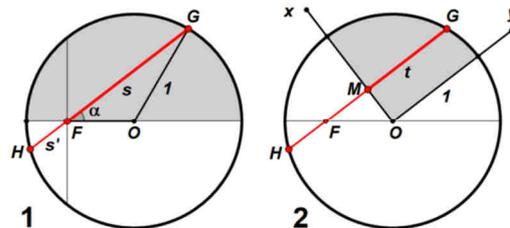
$$S_{medio} := \int_0^R \int_0^{2\pi} S(D, \alpha) \cdot F(D) \cdot G(\alpha) d\alpha dD$$

Il calcolo numerico dell'integrale – ovviamente col computer – fornisce

$$S_{medio} = 0,849 \cdot R$$

E così finalmente, con i fuochi d'artificio di un integrale doppio, siamo giunti alla fine della festa!

Se non siete riusciti a visualizzare il racconto di **Alberto**, provate a leggere la soluzione di **trentatre**, che la figura l'ha prodotta:



Si può assumere che tutte le cadute avvengano in un unico piatto di raggio 1 (anziché R). Siano (fig. 1) O : centro del piatto, F : punto di caduta, s : percorso FG .

Gli elementi casuali sono il punto F e la direzione del percorso, definita dall'angolo α .

Per simmetria rispetto alla retta FO si può limitare α all'intervallo $[0 \dots \pi]$ (zona in grigio).

A ogni $s = FG$ corrisponde sempre un valore opposto $s' = FH$ e la media cercata di s equivale alla media di $t = (s + s') / 2$ che è la metà della corda HG cioè il segmento MG in fig. 2. Il calcolo si può quindi limitare al quadrante di cerchio (in grigio). Al variare di α e della distanza OF , t si sposta nel settore, cioè le variabili casuali sono combinate nel valore di t .

Dato il sistema cartesiano (O, x, y) con y parallelo a t , le coordinate di G sono $x = OM$ e $y = t$.

Poiché OF e α sono indipendenti, la probabilità P del valore t è data dal rapporto fra l'area della striscia di lunghezza t e larghezza dx e l'area $\pi / 4$ del settore, cioè $P = y \cdot dx / (\pi / 4) = 4 / \pi \cdot y \cdot dx$. La media t_m cercata è quindi

$$t_m = \int_{x=0}^1 y \cdot P \cdot dx = \frac{4}{\pi} \int_{x=0}^1 y^2 \cdot dx \text{ e per } x^2 + y^2 = 1$$

$$t_m = \frac{4}{\pi} \int_{x=0}^1 (1 - x^2) \cdot dx = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{8}{3\pi} = 0.84882636}$$

(questo valore va moltiplicato per R se questo è il raggio del piatto).

Bene. Fin qui sono stati tutti piuttosto concisi. Ma vediamo il gran lavoro di **BR1**, praticamente un trattato sugli insetti sui piatti di plastica, intitolato “Quintuplamente casuale”:

Questa è stata una tenzone coi fiocchi e controfiocchi; da pipe, birre e coniglietti/e a gogò...

Mi sono incatastato numerose volte sbattendo il naso contro infiniti che non avevano nessuna voglia di farsi elidere vicendevolmente, e contro limiti di integrazione che si arzigogolavano anzichè... Però alla fine qualcosa di coerente e presentabile è venuto fuori, quindi passo all'esposizione. Avvertendo preventivamente che sarò prolisso come o anche più del solito (peggio per voi – o Rudi – che proponete quesiti simili: poi dovete beccarvi le risposte!).

Suddivido la trattazione in *Parti*; che non sono ordinate nell'ordine temporale in cui le ho personalmente elaborate, ma che nell'ordine in cui sono esposte rendono più leggibile la faccenda.

Parte 1: L'appiattaggio dell'insetto

Il nostro insetto generico casca nell'altrettanto generico piatto di raggio R in una posizione generica; il piatto lo piazziamo al centro di un sistema di coordinate cartesiane, e l'insetto piomba (suo malgrado) nella posizione $P(X, Y)$, come illustrato nella **Figura 1** qui sotto:

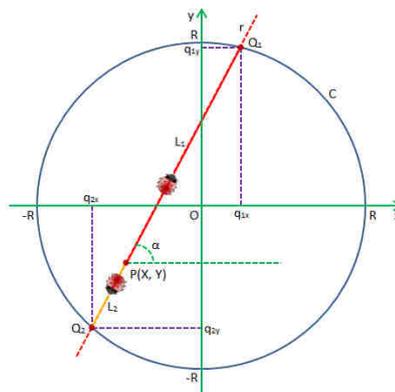


Figura 1: l'appiattaggio della coccinella

Siccome il testo del Problema in RM236 suggerisce che trattasi di „*un insetto non particolarmente disgustoso*”, si è preferita una comune coccinella (*Coccinella septempunctata*: *Linnaeus, 1758*); si spera possa essere gradita a chiunque. Questa scelta risolve il primo dei 5 gradi di casualità del problema; per gli altri 4 gradi, più interessanti matematicamente:

- la coccinella casca nella *posizione* di ascissa X, a caso, ma comunque nel piatto
- la coccinella casca nella *posizione* di ordinata Y, a caso, ma comunque nel piatto
- la coccinella sceglie una *direzione* a caso su cui indirizzare la sua fuga dal piatto; ad esempio lungo la corda Q₁Q₂ che attraversa il piatto circolare passando per il punto P di *appiattaggio*, come in **Figura 1**. Questa *direzione* è definita dall'angolo α
- la coccinella sceglie poi un *verso* fra i due possibili sulla *direzione* scelta; può andare indifferentemente e casualmente da P a Q₁ percorrendo la distanza L₁, oppure da P a Q₂ percorrendo la distanza L₂

Cominciamo col calcolare le due distanze percorribili dalla coccinella per il generico punto di *appiattaggio* P(X, Y), ed una generica inclinazione α della corda su cui l'insetto possa dirigersi; l'equazione della circonferenza del piatto è:

$$1) C \equiv x^2 + y^2 = R^2$$

Quella della retta r che passa per il punto di *appiattaggio* P(X, Y) si ricava essere:

$$2) r \equiv y = xt + (Y - Xt)$$

Dove si è posto, per alleggerire un po' le formule che seguono:

$$3) t \stackrel{\text{def}}{=} \tan(\alpha)$$

Dopo una serie di calcoli (qui non esposti), viene fuori che le coordinate dei punti di intersezione Q₁ e Q₂ fra circonferenza e retta date dalle 1) e 2) sono:

$$4) \begin{cases} q_{(1,2)x} = \frac{Xt^2 - Yt \pm \sqrt{R^2(1+t^2) - (Y - Xt)^2}}{1+t^2} \\ q_{(1,2)y} = \frac{Y - Xt \pm t\sqrt{R^2(1+t^2) - (Y - Xt)^2}}{1+t^2} \end{cases}$$

Quello che occorre fare per dare risposta al Problema, è calcolare la *media complessiva* M_C fra tutti i possibili percorsi da P a Q₁ sulla distanza L₁, e da P a Q₂ sulla distanza L₂; ciò per ogni possibile punto P ed ogni possibile inclinazione α. Prendendo spunto dalla **Figura 2** qui sotto, si può abbozzare una prima espressione per M_C scrivendo:

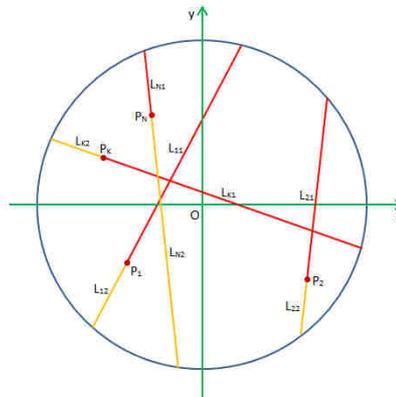


Figura 2: un po' di distanze percorse dalla coccinella

5) M_C

$$= \lim_{N \rightarrow \text{Tutto il piatto}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=-\pi}^{\pi} \left[\frac{(L_{11} + L_{12}) + (L_{21} + L_{22}) + \dots + (L_{K1} + L_{K2}) + \dots + (L_{N1} + L_{N2})}{2N} \right] d\alpha \right\}$$

La 5) è per il momento parzialmente *qualitativa*; tuttavia essa esprime che, per ogni punto P_K di *appiattaggio*, vi sono da conteggiare:

- 2π direzioni α
- 2 *versi*, associati ai 2 possibili percorsi L_{K1} ed L_{K2}

Adesso, definiamo la quantità:

$$6) C_K(P_K, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L_{K1} + L_{K2}}{2}$$

In pratica, C_K è il *contributo* fornito alla media complessiva da un dato punto P_K con una data direzione α , e tiene conto di entrambe i versi; osservando la **Figura 1**, si può scrivere:

$$\begin{aligned} 7) C_K(P_K, \alpha) &= \frac{L_{K1} + L_{K2}}{2} = \frac{\overline{P_K Q_{K1}} + \overline{P_K Q_{K2}}}{2} = \frac{\overline{Q_{K1} Q_{K2}}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(q_{K1x} - q_{K2x})^2 + (q_{K1y} - q_{K2y})^2} \end{aligned}$$

Si vede che C_K è la semi-lunghezza della corda $Q_{K1}Q_{K2}$; si noti che facendo scorrere il punto P lungo la medesima corda, con altri valori di K , si ottengono identici contributi alla 5).

Utilizzando le 4), si ha poi:

$$8) \begin{cases} q_{K1x} - q_{K2x} = 2 \frac{\sqrt{R^2(1+t^2) - (Y_K - X_K t)^2}}{1+t^2} \\ q_{K1y} - q_{K2y} = 2 \frac{t\sqrt{R^2(1+t^2) - (Y_K - X_K t)^2}}{1+t^2} \end{cases}$$

Dalle 7) e 8), e ricordando la 3):

$$\begin{aligned} 9) C_K(P_K, \alpha) &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(2 \frac{\sqrt{R^2(1+t^2) - (Y_K - X_K t)^2}}{1+t^2}\right)^2 + \left(2 \frac{t\sqrt{R^2(1+t^2) - (Y_K - X_K t)^2}}{1+t^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{R^2 - \frac{(Y_K - X_K t)^2}{1+t^2}} = \sqrt{R^2 - [Y_K \cos(\alpha) - X_K \sin(\alpha)]^2} \end{aligned}$$

Possiamo adesso riscrivere la 5) come segue:

$$10) M_C = \lim_{N \rightarrow \text{Tutto il piatto}} \left\{ \frac{1}{2\pi N} \int_{\alpha=-\pi}^{\pi} \sqrt{R^2 - [Y_K \cos(\alpha) - X_K \sin(\alpha)]^2} d\alpha \right\}$$

Un piccolo ritocco alla 10) si può eseguire se si considera quanto illustrato nella **Figura 3** che segue: per un dato punto P_K , quando si immagina di far variare l'angolo α fra 0 e π , le corde $Q_{K1}Q_{K2}$ si dispongono come nella parte sinistra della **Figura 3**, con i percorsi L_{K1} della coccinella mostrati in rosso e quelli L_{K2} in arancio.

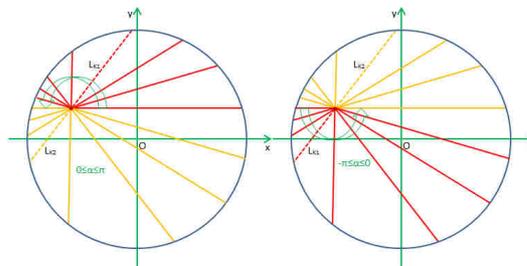


Figura 3: il doppio giro delle corde...

Quando invece si considerano le corde corrispondenti ai valori dell'angolo α fra $-\pi$ e 0, si ha quanto mostrato nella parte destra della **Figura 3**. In pratica, con lo stesso P_K , tutte le corde $Q_{K1}Q_{K2}$ si ripetono *due volte*, per valori positivi e negativi di α . Ad esempio, le corde rappresentate in tratteggio sono in effetti *la stessa corda*, che va

quindi conteggiata *due volte*. Semplicemente, nei due casi si scambiano *di colore* i percorsi L_{K1} e L_{K2} .

Possiamo quindi riscrivere la 10) dimezzando l'intervallo di variazione dell'angolo α , e raddoppiando il peso dei contributi:

$$11) M_C = \lim_{N \rightarrow \text{Tutto il piatto}} \frac{1}{\pi N} \int_{\alpha=-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{R^2 - [Y_K \cos(\alpha) - X_K \sin(\alpha)]^2} d\alpha$$

In pratica, la rotazione della corda potrà avvenire come mostrato di seguito in **Figura 4**:

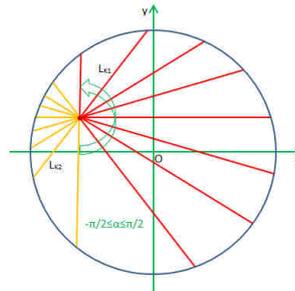


Figura 4: ... riportato ad un giro singolo

In seguito, si vedrà che è opportuno cambiare ancora i limiti di variazione dell'angolo α .

A questo punto però, occorre decidere come *disporre e contare le corde*, cioè come tradurre il “*lim per N → Tutto il piatto*” in termini più concreti...

Parte 2: Divagazione storica

... e ragionando sul come piazzare corde su una circonferenza, è tornato alla mente un *Testo Sacro* di qualche decennio fa... Sono riuscito a ripescarlo frugando nei polverosi scaffali, e lo ripropongo qui di seguito; non so se potete pubblicarlo senza incorrere nelle ire della Sansoni⁶, ma fate voi...

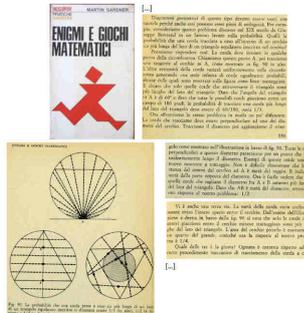


Figura 5: Il Testo Sacro

In effetti, avevo azzardato quattro o cinque ragionamenti diversi per definire i limiti di integrazione della 11) e poterne calcolare il risultato. Ogni volta, veniva fuori un risultato differente, con difficoltà di calcolo che andavano da espressioni risolvibili in una riga a quelle che richiedevano pagine e pagine, per approdare a forme implicite colme di funzioni esoteriche...

Non so se tutti i metodi si possano dire in qualche senso *corretti* (secondo l'accezione che dà Gardner a questo termine), comunque uno bisognava sceglierne, per poter rispettare il requisito del Problema „*Cercate di non dare dei risultati casuali*”...

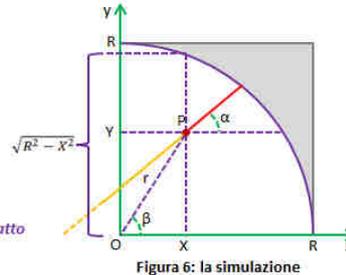
Parte 3: Scelta del risultato...

⁶ Lo riportiamo piccolo piccolo, dovrebbe andare...

Dato che impostazioni diverse portano a risultati diversi, mi sono chiesto: ma che risultato *vogliamo avere*? A quale puntare? Per deciderlo, ho lanciato la seguente simulazione sul *Picci*:

```

N=0
loop
  X = numero a caso fra 0 ed 1
  Y = numero a caso fra 0 ed 1
  if (X2 + Y2) ≤ 1 then
    N = N + 1
    α = numero a caso fra -π/2 e π/2
    CN = contributo calcolato tramite la 9)
    M = media di tutti gli N contributi
  else
    la coccinella è cascata nell'area grigia fuori dal piatto
  endif
until (basta così)
    
```



Con un milioncino di iterazioni, la media converge pressappoco a 0,8488+, e, ripetendo più volte la faccenda, l'esito è sempre quello...

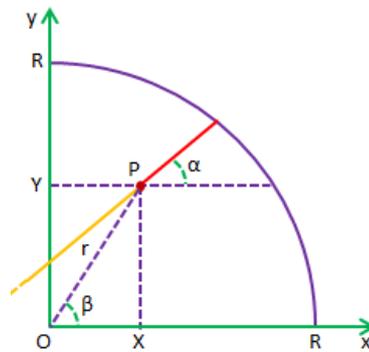
Per provare a far venir fuori questo valore, la 11) può essere riscritta come segue:

$$12) M_C = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2 - X^2}} \int_0^{\sqrt{R^2 - X^2}} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - [Y \cos(\alpha) - X \sin(\alpha)]^2} d\alpha dY dX$$

Nella 12), l'integrale in verde è quello che già appariva nella 11); quelli in rosso e nero calcolano la media nel primo quadrante del cerchio che rappresenta il piatto. Trattandosi di una media, ed essendo i 4 quadranti identici dal punto di vista del Problema, ci si può limitare ad eseguire il calcolo nel solo primo quadrante, così come fatto nella simulazione.

Ma così com'è impostata la 12), la cascata di integrali è inaffrontabile (almeno per me)...

Parte 4: Cambio di coordinate...



Se si passa alle coordinate polari, ponendo cioè:

$$13) X = r \cos(\beta) \quad Y = r \sin(\beta)$$

la 9) diviene:

$$14) C(r, \beta, \alpha) = \sqrt{R^2 - [Y \cos(\alpha) - Y \sin(\alpha)]^2} = \sqrt{R^2 - r^2[\sin(\beta - \alpha)]^2}$$

e la 12), a sua volta, può essere riscritta come segue:

$$15) M_C = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{R^2} \int_{r=0}^R r \sqrt{R^2 - r^2[\sin(\beta - \alpha)]^2} dr d\beta d\alpha$$

Da notare bene la *r* indicata in blu nell'integrale più interno: si tratta dell'indispensabile (e malefico...) *Jacobiano* della trasformazione di coordinate:

$$16) J(r, \beta) = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial \beta} & \frac{\partial Y}{\partial \beta} \end{bmatrix} \right| = |r[\cos(\beta)]^2 + r[\sin(\beta)]^2| = r$$

Averne trascurato l'esistenza mi ha fatto perdere un paio di settimane di sonno...

I termini $1/\pi$, $2/\pi$ e $2/R^2$ nella 15) nascono dal fatto che ciascuno dei tre integrali è una *media*, per cui il risultato di ciascun integrale va diviso per *l'estensione del dominio d'integrazione* (non saprei come chiamarlo altrimenti, e non so dire se la terminologia sia corretta). I primi due fattori, relativi alle medie nera e rossa, si giustificano facilmente osservando i limiti di integrazione.

Per quello più interno, in verde, le cose sono più ingarbugliate. Si può dire in generale che la media M di una certa funzione f(w) da eseguire su un dominio W si può calcolare come segue:

$$17) M = \frac{\int f(w)dw}{\int 1 \cdot dw}$$

dove i due integrali si intendono eseguiti sul dominio W, e quello a denominatore rappresenta appunto – con la terminologia adottata - *l'estensione del dominio d'integrazione*. Ad esempio, l'ordinata media della parabola f(w)=w² nell'intervallo W≡[0,2] è data da:

$$18) M = \frac{\int_0^2 w^2 dw}{\int_0^2 1 \cdot dw} = \frac{\left. \frac{w^3}{3} \right|_0^2}{\left. w \right|_0^2} = \frac{4}{3}$$

Nel caso dell'integrale verde della 15), *l'estensione del dominio d'integrazione* si deve valutare come segue:

$$19) \int_{r=0}^R 1 \cdot r dr = \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^R = \frac{R^2}{2}$$

Dove, di nuovo, la *r* indicata in blu è il *malefico Jacobiano*; ancora, per giorni e giorni mi è mancato il *fattore 2*: continuavo a ripetere i calcoli dividendo l'integrale verde semplicemente per R², ed ottenevo sempre *esattamente* la metà di quello che mi sarei aspettato che dovesse risultare, in base alla *simulazione*...

Una volta chiarito l'equivoco, l'integrale più interno della 15) si sviluppa come segue:

$$20) \frac{2}{R^2} \int_{r=0}^R r \sqrt{R^2 - r^2 [\sin(\beta - \alpha)]^2} dr = 2 \frac{\sin(\beta - \alpha)}{R^2} \int_{r=0}^R r \sqrt{\left[\frac{R}{\sin(\beta - \alpha)} \right]^2 - r^2} dr$$

$$= -2 \frac{\sin(\beta - \alpha)}{3R^2} \left[\left[\frac{R}{\sin(\beta - \alpha)} \right]^2 - r^2 \right]^{3/2} \Big|_0^R = \frac{2R}{3} \frac{1 - [\cos(\beta - \alpha)]^3}{[\sin(\beta - \alpha)]^2}$$

E la 15) diviene:

$$21) M_c = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2R}{3} \frac{1 - [\cos(\beta - \alpha)]^3}{[\sin(\beta - \alpha)]^2} d\beta d\alpha = \frac{4R}{3\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - [\cos(\beta - \alpha)]^3}{[\sin(\beta - \alpha)]^2} d\beta d\alpha$$

Invertiamo adesso l'ordine di integrazione:

$$22) M_c = \frac{4R}{3\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - [\cos(\beta - \alpha)]^3}{[\sin(\beta - \alpha)]^2} d\alpha d\beta$$

Ora, per l'integrale più interno ci si agevola la vita con la seguente osservazione: far variare α fra $-\pi/2$ e $\pi/2$ vuol dire considerare tutte le possibili coppie di percorsi della coccinella, a partire dalla coppia verticale col percorso rosso in basso fino a quella altrettanto verticale col percorso rosso in alto (**Figura 8** qui sotto).

Possiamo però anche pensare di far variare α fra $\beta - \pi/2$ e $\beta + \pi/2$, come mostrato in **Figura 9**: i percorsi della coccinella considerati nell'integrale saranno esattamente gli stessi. Ciò che cambierà sarà semplicemente il fatto che alcuni dei percorsi muteranno colore: quelli in arancio con α compreso fra $\beta - \pi$ e $-\pi/2$ diventeranno rossi, quelli rossi con α compreso fra β e $\pi/2$ si coloreranno di arancio; verranno soltanto computati in un ordine differente.

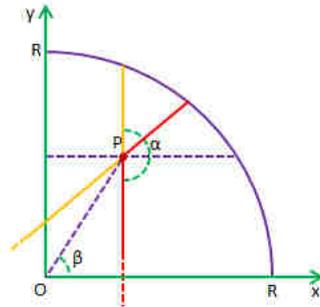


Figura 8: limiti standard per α

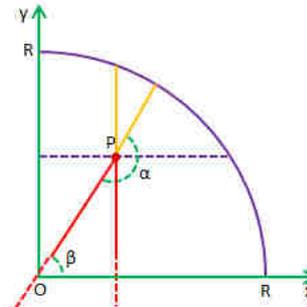


Figura 9: limiti ruotati per α

Con questo truccetto, l'integrale interno della 22) si può calcolare come segue, utilizzando la sostituzione $\gamma = \beta - \alpha$:

$$\begin{aligned}
 23) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - [\cos(\beta - \alpha)]^3}{[\sin(\beta - \alpha)]^2} d\alpha &= \int_{\beta - \pi/2}^{\beta + \pi/2} \frac{1 - [\cos(\beta - \alpha)]^3}{[\sin(\beta - \alpha)]^2} d\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - [\cos(\gamma)]^3}{[\sin(\gamma)]^2} d\gamma \\
 &= \left[\sin(\gamma) + \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4
 \end{aligned}$$

Ed infine, per la media complessiva si ha, dalle 22) e 23):

$$24) M_c = \frac{4R}{3\pi^2} \int_0^{\pi/2} 4d\beta = \frac{8}{3\pi} R \cong 0,8488 \cdot R$$

Che è il sospirato risultato atteso, identico a quello della *simulazione*...

Parte 5: Una semplificazione...

Torniamo indietro all'espressione per M_c data dalla 22) (cioè prima di integrare su α e β), e adottiamo il truccetto visto sopra di traslare l'intervallo di integrazione del valore β :

$$25) M_c = \frac{4R}{3\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_{\beta - \pi/2}^{\beta + \pi/2} \frac{1 - [\cos(\beta - \alpha)]^3}{[\sin(\beta - \alpha)]^2} d\alpha d\beta$$

Per ciascun valore di β , si è detto che nell'integrale interno si fa ruotare la corda variando α su un intervallo ampio complessivamente π , e questo garantisce che i percorsi rossi ed arancio siano effettivamente tutti quelli relativi al punto P.

Ma, a parità di raggio r , e per qualsiasi altro valore di β , la situazione si ripete identicamente: è solo la scelta del sistema di coordinate fatta inizialmente che rende distinguibili i punti fra loro. Una coccinella che si *appiattasse* nei punti P' o P'' della **Figura 10** qui accanto, in assenza del sistema di coordinate sotto le zampette non potrebbe distinguerli fra loro, né dal punto P. Quindi il contributo alla media dei percorsi di tutti i punti che si trovano sull'arco azzurro tratteggiato in figura è sempre lo stesso.

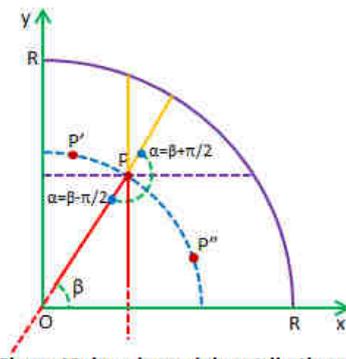


Figura 10: invarianza dei contributi con β

Questo significa che per il calcolo della media complessiva è superfluo eseguire la „media su β ”: è invece sufficiente quella sulla differenza $\beta - \alpha$, facendo come sempre variare questo angolo fra $-\pi/2$ e $\pi/2$.

La 25) si può allora riscrivere come segue:

$$26) M_C = \frac{2R}{3\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - [\cos(\beta - \alpha)]^3}{[\sin(\beta - \alpha)]^2} d(\beta - \alpha)$$

L'integrale della 26) è sostanzialmente identico a quello della 23), per cui:

$$27) M_C = \frac{2R}{3\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - [\cos(\gamma)]^3}{[\sin(\gamma)]^2} d\gamma = \frac{2R}{3\pi} 4 = \frac{8}{3\pi} R$$

Che è lo stesso risultato fornito dalla 24).

Parte 6: Appendice: altre medie...

Se, invece che la media aritmetica sopra trattata si vuole calcolare la *media quadratica* dei percorsi, le cose diventano molto più semplici... Ripartendo dalle 3) e 4), si ricava con qualche passaggio algebrico:

$$28) \frac{\overline{PQ_1^2} + \overline{PQ_2^2}}{2} = R^2 + (X^2 - Y^2) \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 4XY \frac{t}{1 + t^2}$$

L'equivalente *quadratico* della 12) è allora:

$$29) M_Q = \sqrt{\frac{1}{R} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2 - X^2}} \int_0^{\sqrt{R^2 - X^2}} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha = -\pi/2}^{\pi/2} \left\{ R^2 + (X^2 - Y^2) \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 4XY \frac{t}{1 + t^2} \right\} d\alpha dY dX}$$

E da qui, con qualche passaggio si ricava:

$$30) M_Q = R$$



Adesso cambiamo un po' il criterio di *appiattaggio* della coccinella:

- la coccinella casca nel piatto ad una *distanza* r a caso dal centro
- la coccinella sceglie una *direzione* α a caso su cui indirizzare la sua fuga dal piatto
- la coccinella sceglie poi un *verso* fra i due possibili sulla *direzione* scelta

Diciamo che in questo caso vogliamo calcolare la *media radiale* M_R :

$$31) M_R = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{R} \int_{r=0}^R \sqrt{R^2 - r^2} [\sin(\beta - \alpha)]^2 dr d\beta d\alpha$$

Somiglia alla 15), vero? Solo che adesso sono spariti lo *Jacobiano* ed i suoi effetti collaterali...

Adottiamo anche qui la semplificazione descritta in precedenza, evitando di mediare su β :

$$32) M_R = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{R} \int_{r=0}^R \sqrt{R^2 - r^2 [\sin(\gamma)]^2} dr d\gamma$$

Per l'integrale verde si ha:

$$\begin{aligned} 33) \frac{1}{R} \int_{r=0}^R \sqrt{R^2 - r^2 [\sin(\gamma)]^2} dr &= \frac{\sin(\gamma)}{R} \int_{r=0}^R \sqrt{\left[\frac{R}{\sin(\gamma)}\right]^2 - r^2} dr \\ &= \frac{\sin(\gamma)}{2R} \left\{ r \sqrt{\left[\frac{R}{\sin(\gamma)}\right]^2 - r^2} + \left[\frac{R}{\sin(\gamma)}\right]^2 \sin^{-1} \left[\frac{r}{R} \sin(\gamma)\right] \right\}_0^R \\ &= \frac{R}{2} \left[\cos(\gamma) + \frac{\gamma}{\sin(\gamma)} \right] \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} 34) M_R &= \frac{R}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos(\gamma) + \frac{\gamma}{\sin(\gamma)} \right] d\gamma = \frac{R}{2\pi} \left\{ 2 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\gamma}{\sin(\gamma)} d\gamma \right\} \cong \frac{R}{2\pi} \{2 + 3,66386\} \\ &\cong 0,9014 \cdot R \end{aligned}$$

Per il secondo integrale della 34) si è un po' *barato*; il sito:

<https://www.youmath.it/ym-tools-calcolatore-automatico/analisi-1/calcolare-gli-integrali-indefiniti.html>

fornisce la soluzione per l'integrale indefinito:

$$35) \int \frac{\gamma}{\sin(\gamma)} d\gamma = j[Li_2(-e^{j\gamma}) - Li_2(e^{j\gamma})] + \gamma[\log(1 - e^{j\gamma}) - \log(1 + e^{j\gamma})] + c$$

Dove $Li_2(x)$ è l'integrale dilogaritmico:

$$36) \int_0^x \frac{\log(1-t)}{t} dt$$

La 35) è inaccostabile; per fortuna, il sito:

<https://www.youmath.it/ym-tools-calcolatore-automatico/analisi-1/calcolare-gli-integrali-definiti.html>

produce il risultato desiderato:

$$37) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\gamma}{\sin(\gamma)} d\gamma \cong 3,66386$$

Comunque, se si riesegue la simulazione vista sopra nella Parte 3, utilizzando come contributo per ciascun campione la quantità:

$$38) \sqrt{R^2 - r^2 [\sin(\gamma)]^2}$$

il risultato corrisponde a quello fornito dalla 34).



Altro approccio: per qualsiasi posizione su cui vada ad *appiattarsi* la coccinella, se la cogliamo sul fatto dopo che ha scelto anche la direzione sulla quale dirigersi (ma non ancora il verso), possiamo sempre immaginare di ruotare il piatto fino a rendere orizzontale la direzione, come a sinistra ed al centro nella **Figura 11** qui sotto:

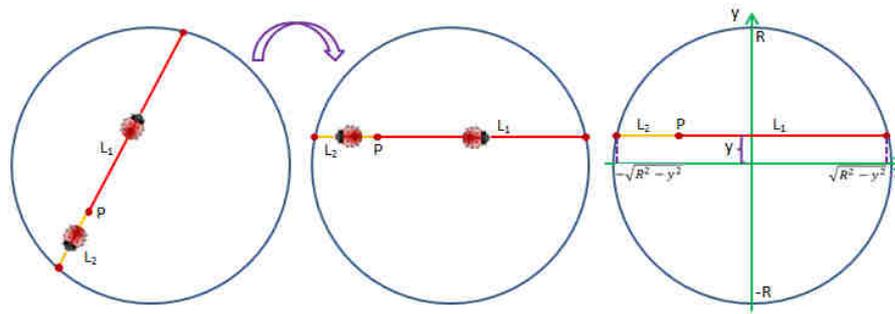


Figura 11: la media *simplicistica*

I percorsi L_1 ed L_2 relativi ai due versi di percorrenza saranno quindi disposti su tutte le possibili corde orizzontali; per una data corda di ordinata y (lato destro della **Figura 11**), la media dei due percorsi è:

$$39) \frac{L_1 + L_2}{2} = \sqrt{R^2 - y^2}$$

E la media *simplicistica* complessiva su tutte le possibili corde sarà:

$$40) M_S = \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - y^2} dy = \frac{1}{4R} \left[y\sqrt{R^2 - y^2} + R^2 \sin^{-1} \left(\frac{y}{R} \right) \right]_{-R}^R = \frac{\pi}{4} R \cong 0,7854 \cdot R$$



Alla media provvista dalla 40) qui sopra si può obiettare il fatto che la probabilità che la coccinella percorra una corda breve (una *parte*, di corda breve...) è inferiore a quella che la corda coinvolta sia più lunga. Le corde dovrebbero essere valutate ciascuna in base ad un proprio *peso*; peso dato dalla loro lunghezza (rapportata al diametro del piatto), visto che più una corda è estesa più punti contiene, cioè maggiore è il numero di punti della corda su cui la coccinella può essersi *appiattata*. La media *simplicistica pesata* sarebbe quindi (col *peso* fra parentesi tonde):

$$42) M_{SP} = \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \left(\frac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{2R} \right) \sqrt{R^2 - y^2} dy = \frac{1}{2R^2} \int_{-R}^R (R^2 - y^2) dy = \frac{2}{3} R \cong 0,6666 \cdot R$$



Secondo un'altra scuola di pensiero, la probabilità di scelta di una data lunghezza di corda dipende dalla distanza della corda stessa dal centro del piatto; la *quantità* di corde il cui centro giace sulla circonferenza tratteggiata in verde nella **Figura 12** qui sotto è doppia rispetto a quella violetta, che ha raggio metà. Per cui il *peso* relativo delle corde distanti y dal centro sarebbe y/R ; e la relativa media *simplicistica pesata circolarmente* sarebbe:

$$42) M_{SPC} = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{y}{R} \sqrt{R^2 - y^2} dy = -\frac{1}{3R^2} \left[(R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R = \frac{R}{3} = 0,3333 \cdot R$$

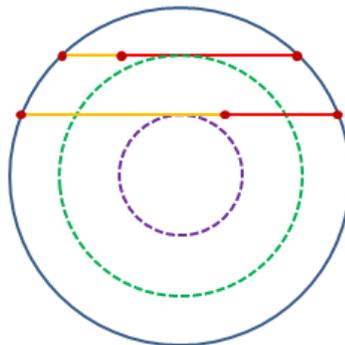


Figura 12: il peso delle varie corde



Con un'ulteriore passaggio logico, si può sostenere che il *peso* delle corde debba tenere conto sia della loro lunghezza che della distanza dal centro; la *media semplicistica bi-pesata* sarebbe allora:

$$43) M_{SB} = \frac{1}{R} \int_0^R \left(\frac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{2R} \right) \frac{y}{R} \sqrt{R^2 - y^2} dy = \frac{1}{R^3} \int_0^R (R^2 y - y^3) dy = \frac{1}{R^3} \left[R^2 \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^R = \frac{R}{4}$$



E, per finire, la **Figura 13** qui sotto ricapitola ed illustra per confronto tutte le possibili medie viste in precedenza, compresa M_M , la *media delle medie*:

$$44) M_M = \frac{M_C + M_Q + M_R + M_S + M_{SP} + M_{SPC} + M_{SB}}{7} = \frac{\frac{8}{3\pi} + 1 + 0,9014 + \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{7} R \cong 0,6837 \cdot R$$

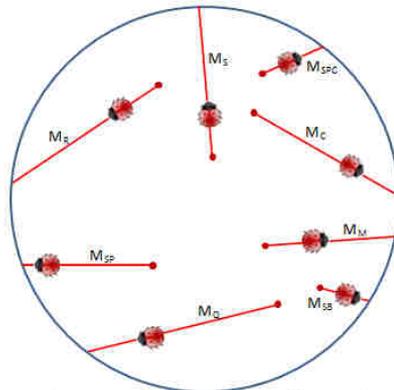


Figura 13: coccinelle mediamente discordanti

La scelta della *media giusta* da selezionare *casualmente* fra quelle sopra menzionate è lasciata all'attento lettore...

Il Capo è ovviamente andato fuori di sé per la gioia alla citazione storica che tira in ballo il Paradosso di Bertrand, ma lo stesso con questo facciamo un grosso sospiro per non rispondere alla provocazione e passiamo al secondo problema.

4.2.3 Un tot di sfumature di grigio

Ancora probabilità purtroppo. Ecco il problema:

Avete dieci paia di calzini in dieci sfumature di grigio; prendete due calzini a caso e li accettate se non differiscono per più di una sfumatura. Quante sono le probabilità di prendere una coppia di calzini „compatibile”? E per un „n” generico di calzini, con „k” gradi di tolleranza?

Cominciamo subito dalla soluzione del **Panurgo**:

Come ci spiega mirabilmente Gianni Rodari, „di notte tutti i gatti sono bigi”⁷: ciò significa che la penombra aiuta più al tramonto (twilight) che all'alba. Evidentemente, lo stesso vale per i calzini ed chiaro che, allo scuro, le sfumature devono somigliarsi sempre di più, all'aumentare del loro numero: non porremo dunque limiti al tale numero (n) mentre limiteremo la soglia che rende compatibili tra loro le sfumature stesse ($k < n$).

	1	1	2	2	3	3	4	4
1								
1								
2								
2								
3								
3								
4								
4								

⁷ Cfr. Vecchi Proverbi, in Favole al telefono.

Mettiamo dunque i nostri calzini in ordine di „grigiosità” crescente e facciamone il prodotto cartesiano in modo da generare tutte le possibili coppie di calzini (la diagonale principale va, ovviamente, esclusa). Per semplicità contiamo le coppie che la differenza di colore rende inutilizzabili: vediamo nella figura a fianco un esempio con $n = 4$ e $k = 1$.

Le coppie possibili sono $P = 2n(2n - 1)$ mentre le coppie inutilizzabili sono, contare per credere,

$$I = 2 \times \sum_{i=1}^{n-k-1} 4(n-k-i) = 4 \times 2 \sum_{i=1}^{n-k-1} i = 4(n-k)(n-k-1)$$

La frequenza relativa di coppie utilizzabili sarà dunque

$$f(n, k) = 1 - \frac{4(n-k)(n-k-1)}{2n(2n-1)}$$

Come? Volevate la probabilità?

Vabbè, sia \top la disgiunzione logica di tutte le proposizioni che definiscono il problema: tra queste poniamo in evidenza

$n =$ „vi sono n paia di calzini”

$k =$ „è così buio che non si distinguono k livelli di grigio”

Inoltre, sia $U =$ „la coppia pescata è utilizzabile”: dato che non possediamo alcuna informazione ulteriore che possa darci un’indicazione sul valore di verità di U , assegniamo come valore della probabilità la frequenza relativa di coppie utili, in base al Principio di Indifferenza

$$\Pr(U|n \wedge k \wedge \top) = 1 - \frac{4(n-k)(n-k-1)}{2n(2n-1)}$$

Cerea!

Come dite? Sì l’ultimo è un saluto piemontese, e le favole di Rodari sono una bellissima citazione, ma lo stesso il problema non mi interessa, nemmeno con la veloce risposta di **Aberto R.**:

Mettiamola così: Nella classica urna ci sono i numeri da 1 a 10 ciascuno ripetuto due volte, per un totale di 20 foglietti.

Estratti due foglietti si chiede la prob che i relativi numeri non differiscano per più di un’unità.

Con prob $4/20$ il primo estratto sarà un numero di estremità (1 o 10). In tal caso la prob che il secondo estratto sia accettabile è $3/19$.

Con prob $16/20$ il primo estratto non sarà un numero di estremità. In tal caso la prob che il secondo estratto sia accettabile è $5/19$.

In totale $4/20 \cdot 3/19 + 16/20 \cdot 5/19 = 23/95$

Sulla falsariga di quanto innanzi generalizzare diventa banale.

Certo, banale, come no. Chiudiamo qui e vi rimandiamo al prossimo mese.

5. Quick & Dirty

Se P è un punto arbitrario sul lato BC del triangolo ABC , come posso tracciare un segmento Q attraverso il triangolo che sia parallelo a BC e sottenda un angolo retto in P ?

6. Pagina 46

6.1 Soluzione

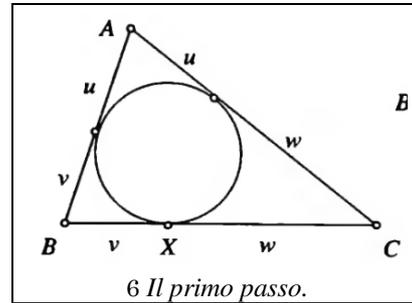
Dato che le tangenti ad una circonferenza da un unico punto esterno hanno la stessa lunghezza, dalla figura a fianco è evidente che, se s rappresenta il semiperimetro e $AC=b$:

$$BX = v = (u + v + w) - (u + w) = s - b.$$

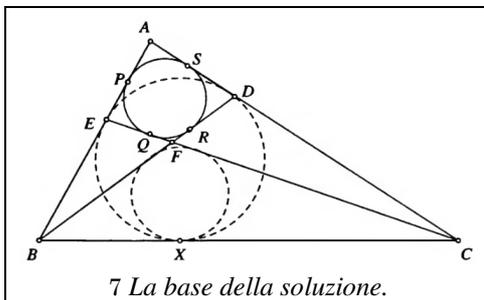
Quindi il nostro scopo è mostrare che $s - b$ è lo stesso sia per il triangolo ABC che per il triangolo FBC, ossia che:

$$(AB+BC+AC)/2 - AC = (FB+BC+FC)/2 - FC,$$

che si riduce a $AB - AC = FB - FC$.



6 Il primo passo.



7 La base della soluzione.

Se imponiamo che il nostro cerchio sia tangente nei punti P, Q, R, S (come da figura), si ottiene facilmente che:

$$\begin{aligned} AB - AC &= (AP + PB) - (AS + SC) = \\ &= BP - CS = \\ &= BR - CQ = \\ &= (FB + FR) - (FC + FQ) = \\ &= FB - FC, \end{aligned}$$

che era il nostro scopo.

6.2 Appendice

Esiste una forma equivalente di quanto abbiamo appena dimostrato:

In un quadrilatero ciclico le cui diagonali siano perpendicolari, la perpendicolare a un lato passante per il punto di intersezione delle diagonali biseca il lato opposto

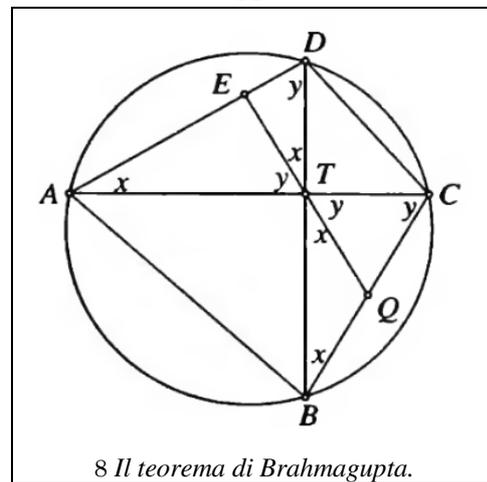
Che non è altro che la versione (leggermente rimaneggiata) del *Teorema di Brahmagupta*.

Questa versione del teorema si dimostra considerando la figura a fianco. Sia TE perpendicolare ad AD, e siano gli angoli acuti nel triangolo rettangolo AET x e y .

Essendo le diagonali perpendicolari, l'angolo DTE vale x , e nel triangolo DTE l'angolo in D vale y : le coppie di angoli opposti in T sono quindi dei valori indicati, e gli altri angoli indicati si possono ricavare in modo banale.

Ma la corda CD sottende angoli uguali in A e in B sulla circonferenza, e la corda AB svolge lo stesso ruolo per gli angoli in C e in D.

Quindi i triangoli TQC e TQB sono entrambi isosceli, e QC e QB sono uguali, in quanto ognuno di loro è uguale al lato comune QT.



8 Il teorema di Brahmagupta.



7. Paraphernalia Mathematica

Tranquilli, la matematica sta bene e vi saluta tutti.

Semplicemente, abbiamo trovato qualcosa di nuovo su quello che è stato il *secondo* Paraphernalia Mathematica di questa rivista, e abbiamo deciso di parlarne, per qualche puntata. E non è detto che prima della fine non si riesca a “mettere dentro” anche il primo (o il terzo).

7.1 Divide et impera [1] – La parte “facile”

Nel caso non fosse ancora chiaro, Rudy e Doc stanno facendo un “lavorone” sull’origami: siccome non ci pare giusto tenervi all’oscuro, ricicliamo spudoratamente qui.

Dividere un lato di un foglio (non necessariamente quadrato) in 2, 4, 8,... parti non presenta particolari problemi se non, oltre un certo livello, quelli dati dall’inevitabile imprecisione delle piegature; raggruppando a m a m queste piegature possiamo costruire la frazione $m/2^n$ della lunghezza del lato. Evidentemente, questo metodo non è particolarmente efficiente, in quanto richiede, per ottenere un singolo punto, l’esecuzione di $2^n - 1$ piegature⁸; un metodo alternativo è però stato sviluppato da **Brunton**, con la generazione di un algoritmo di rango n basato sulla notazione binaria.

Ricordiamo che dato un numero⁹ $m_{|2|}$, la divisione per un qualsiasi numero nella forma 2^n si può ottenere spostando la virgola verso sinistra di n posizioni e aggiungendo eventualmente degli zeri alla sinistra del numero e alla destra della virgola; questo significa che comunque le frazioni di questo tipo possono essere espresse come numeri decimali *finiti*, mente ciò non è detto nel caso il denominatore non sia un quadrato perfetto di 2.

Il metodo di Brunton per dividere un foglio secondo frazione binaria è condensabile in questa sequenza di istruzioni:

1. Trasformate la frazione in numero binario.
2. Procedendo dal lato *destro* del numero ottenuto (che sarà sicuramente un 1), portate il lato *superiore* del foglio sul lato *inferiore*; marcate¹⁰ la piegatura e riaprite.
3. Prendendo poi la cifra alla sinistra di quella utilizzata:
 - a. Se è un 1, portate il lato *superiore* del foglio sul segno ottenuto al passaggio precedente, marcate e riaprite
 - b. Se è uno 0, portate il lato *inferiore* del foglio sul segno ottenuto nel passaggio precedente, marcate e riaprite
4. Se sono presenti ancora cifre nel numero, riprendete dal punto (3), in caso contrario fermatevi.

La dimostrazione della correttezza di questo metodo si basa sul metodo di Hörner, ben noto a chiunque abbia dovuto calcolare ripetutamente il valore di un polinomio all’interno di un programma. Supponiamo di voler ottenere la frazione $25/32$:

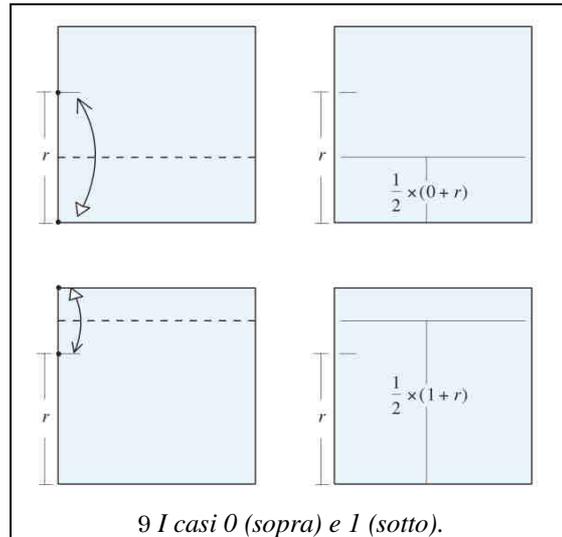
$$\begin{aligned} \frac{25}{32} &= 0,11001_{[2]} \\ &= 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2} \times \left(0 + \frac{1}{2} \times \left(0 + \frac{1}{2} \times (1) \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

⁸ Il numero di piegature necessarie per risolvere con un determinato metodo un problema è detto *rango* del metodo: lo scopo di buona parte dell’origami (non solo matematico) è di minimizzare il rango per la risoluzione di un problema.

⁹ Con questa notazione intendiamo “il numero m scritto in notazione binaria”.

¹⁰ Con questo termine si intende una piccola piegatura, da utilizzarsi solo come punto di riferimento nei passaggi successivi.

Da un punto di vista pratico, detto r un qualsiasi risultato intermedio, il nostro calcolo diventa la ripetizione dell'istruzione "Se la cifra è 0, moltiplica per $\frac{1}{2}$, altrimenti aggiungi 1 e moltiplica per $\frac{1}{2}$ ". Il fatto che il metodo di piegatura visto sopra sia l'implementazione di questo algoritmo è evidente dalla figura a fianco: avendo ottenuto al passo precedente il segno nella posizione r , applicare il metodo nei due casi ci permette di identificare il nuovo punto, e l'intero algoritmo è implementato con un numero di piegature pari al numero delle cifre dell'espressione binaria del numero dato che, per costruzione, è pari a n .



9 I casi 0 (sopra) e 1 (sotto).

Se nella nostra frazione il numero a denominatore non è una potenza di 2, la nostra espressione in forma binaria diventa infinita; essendo però qualsiasi risultato di una divisione un numero *periodico*, possiamo quantomeno determinare l'algoritmo e ripeterlo sino alla precisione richiesta: ad esempio, essendo $1/5 = 0,(0011)$, possiamo riassumere l'algoritmo come "piega due volte dall'alto, poi due volte dal basso, poi ricomincia da capo"¹¹.

Il fatto che si possa ottenere l'approssimazione di ogni frazione con il grado di precisione richiesto, anche se di estrema utilità nella pratica, è scarsamente soddisfacente dal punto di vista matematico; il metodo più utilizzato nell'origami "reale" è quello dell'incrocio delle diagonali.

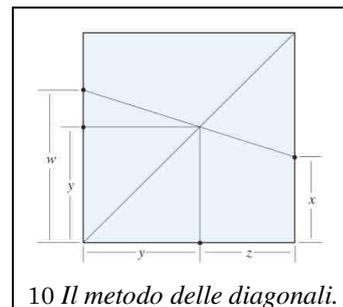
Partendo da un quadrato, tracciamo per prima cosa la diagonale che unisce l'angolo in basso a sinistra con quello in alto a destra.

Supponiamo quindi di poter costruire, marcandoli, i due punti a distanza rispettivamente w e x dal lato in basso del quadrato, e di tracciare la piegatura congiungente questi due punti.

Sempre considerando il lato unitario e considerando che $z = 1 - y$, possiamo ricavare che:

$$y = \frac{w}{1+w-x},$$

$$z = \frac{1-x}{1+w-x}$$



10 Il metodo delle diagonali.

L'idea soggiacente al metodo che vogliamo utilizzare è quella di trovare due proporzioni iniziali w e x ragionevolmente facili da costruire (ad esempio, attraverso frazioni binarie) tali da poter costruire la frazione $y = a/b$ (o $z = 1 - a/b$).

Per fare questo, portiamo w e x nelle due frazioni $w = m/p$ e $x = n/p$, in cui m e n sono minori di p e p è una potenza di 2.

In questo modo, otteniamo:

$$y = \frac{m}{p+m-n}$$

$$z = \frac{p-n}{p+m-n}$$

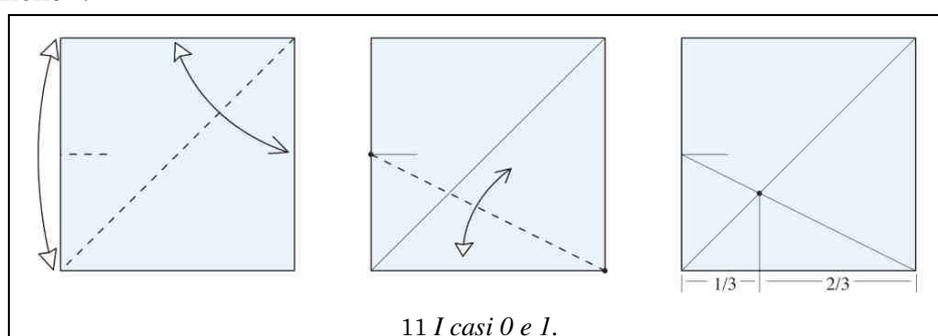
¹¹ Il problema inverso (data la sequenza, trovare la frazione) si risolve applicando lo stesso metodo utilizzato in notazione decimale per ricavare dal numero periodico la frazione originale, ma qui il ruolo del 9 è giocato dall'1.

Ponendo quindi $y = a/b$ otteniamo il seguente algoritmo:

1. Sia p la potenza di 2 maggiore sia di a che di $b - a$.
2. Definiamo $m = a$, $n = p + a - b$.
3. Costruiamo i due punti $w = m/p$, $x = n/p$ sui lati rispettivamente sinistro¹² e destro del quadrato, collegandoli con una piegatura.
4. Costruiamo la diagonale del quadrato da in basso a sinistra a in alto a destra.

Il punto di incrocio, opportunamente riportato su un lato, definisce la frazione a/b . Per chiarire il metodo, consideriamo la divisione in terzi di un foglio: il metodo utilizzato in tutti gli uffici, pur avendo un rango basso (solo due piegature), non è molto soddisfacente dal punto di vista matematico. Se applichiamo il metodo dato, abbiamo $a/b = 1/3$, e quindi $p=4$, $m=1$, $n=2$. Il che ci porta alla sequenza mostrata nella figura qui sotto.

Si noti che la divisione è applicabile anche a fogli genericamente rettangolari, quindi fornisce una divisione “da ufficio” più soddisfacente, anche se aumenta il rango della costruzione¹³.



Un metodo simile a quello illustrato prevede, anziché tracciare la diagonale del quadrato e quindi unire i due punti dai lati opposti con una piega, di identificare due punti opportuni (uno sul lato sinistro e uno sul lato destro del quadrato) e di tracciare le due pieghe che uniscono questi punti all'angolo sulla base dal lato opposto.

Da un punto di vista operativo, la procedura diventa:

1. Sia p la potenza di 2 maggiore sia di a che di $b - a$.
2. Definiamo $m = a$, $n = b - a$.
3. Costruiamo i due punti $w = m/p$, $x = n/p$ sui lati rispettivamente sinistro e destro del quadrato, utilizzando il metodo binario.
4. Colleghiamo i punti w e x con due piegature rispettivamente ai vertici destro e sinistro in basso del quadrato.

L'altezza del punto di incrocio dal lato in basso (o, alternativamente, della sua proiezione sulla base dal vertice in basso a destra) rappresenta la frazione richiesta.

...e non crediate che sia finita qui... Ve l'avevamo detto, che è un lavorone!

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

¹² Qui e nel seguito, “sinistro” e “destro” sono riferiti all'operatore.

¹³ Un divertente e famoso problema di matematica ricreativa relativo a questo metodo chiede per quali formati del foglio la diagonale del quadrato e quella del “mezzo quadrato” si incontrino a 90° . Lasciamo ai lettori la piacevole scoperta di quali siano.