Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 236 – Settembre 2018 – Anno Ventesimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM231 ha diffuso 2'357 copie e il 02/09/2018 per Google eravamo in 50'300 pagine.

Merete RASMUSSEN (http://www.mereterasmussen.com) dice, a proposito delle sue sculture: "Cerco di creare delle forme che non riuscite a capire sin quando non ci girate attorno. E che dovete guardare per un po' prima di capire come sono connesse". Obiettivo pienamente raggiunto, secondo noi.

1. Corri, ragazza, corri

"She opened the door."[1]

In una vecchia striscia dei *Peanuts* l'autore, Charles M. Schulz, disegna un Charlie Brown preoccupato per Linus, che ha un'aria delusa e sconvolta. Interrogato dall'amichetto sulla ragione di tale sconforto, Linus spiega di aver scoperto che la mitragliatrice è stata inventata prima della macchina per scrivere: "*Ti rendi conto, Charlie Brown? L'uomo ha inventato la macchina per uccidere velocemente prima della macchina per scrivere velocemente!*"[2].

Come accade di fronte a tutte le sintesi geniali, si rimane stupiti dalla semplicità e dalla forza dell'affermazione. Forse è sufficiente ricordare questo sconforto di Linus per perdere la fiducia – o quantomeno per ridimensionarla seriamente – sull'illusione di Jean-Jacques Rousseau in merito alla naturale bontà dell'Uomo. Ma in fondo ribadire il concetto è un po' come sparare sulla Croce Rossa, tante sono le dimostrazioni gratuite dell'impossibilità che Rousseau avesse ragione: così tante che il filosofo svizzero ne esce anzi nobilitato, ammirabile come è ammirabile Don Chisciotte mentre si lancia contro i mulini a vento. Con la probabile e significativa differenza che Don Chisciotte scambia i mulini per giganti, mentre Rousseau verosimilmente aveva piena consapevolezza dell'inanità della battaglia.

1 *Filosofia linusiana*

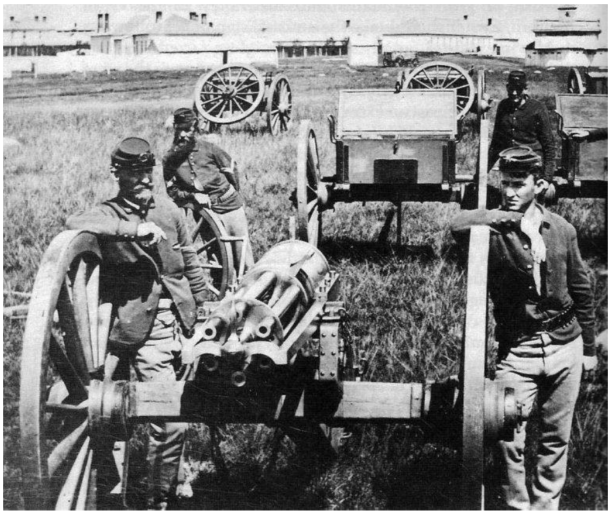
A riprova della crudeltà umana, si può aggiungere che quella "macchina per uccidere velocemente" è stata inventata nel bel mezzo di una guerra fratricida. Se è vero che tutte le guerre, da un certo (ma sicuramente corretto) punto di vista, sono "guerre fratricide", è pur vero che alcune lo sono più di altre, quanto meno perché come tali erano vissute perfino da coloro che le combattevano.

---

[1] Lei aprì la porta.

[2] Nonostante il virgolettato, la citazione va presa con cautela, perché riportata interamente a memoria. Google è stato messo sotto stress per un bel po', nel tentativo di recuperare la striscia in questione e pubblicarla (confidando nella ignara e tacita benevolenza dei possessori del copyright), ma la ricerca è stata infruttuosa. Siccome la memoria in questione è chiamata ad un esercizio pluridecennale, è possibile che la frase non sia esattamente quella riportata e, in ultima analisi, che persino i personaggi potrebbero essere altri dell'universo di Peanuts. Restano comunque i seguenti indizi, evidentemente significativi: 1) Solo Linus Van Pelt è in grado, tra i personaggi di Schulz, di entrare in depressione per un motivo del genere; 2) sembra assai improbabile che Linus esprima una preoccupazione del genere ad altri che a Charlie Brown; 3) si verifica facilmente che il brevetto della prima mitragliatrice anticipa davvero di pochi anni quello della prima macchina per scrivere prodotta industrialmente. Last but certamente not least:, 4) se una striscia a fumetti rimane impressa nella testa di qualcuno per quasi dieci lustri, è improbabile che la memoria, così profondamente folgorata, sia totalmente priva di affidabilità.

La mitragliatrice Gatling viene messa in produzione nel 1862[3] durante la Guerra di Secessione Americana. Il nome discende ovviamente dall'inventore, Richard Jordan Gatling, che oltre a una indiscutibile inventiva meccanica doveva essere dotato anche di una (pindarica) inventiva etica, se riuscì a giustificare così la validità morale del suo marchingegno: «*Mi venne in mente che, se avessi creato una macchina – un'arma – che avrebbe permesso, grazie alla sua rapidità di fuoco, ad un uomo soltanto di compiere in battaglia il dovere di cento uomini, avrebbe sostituito in gran parte la necessità di grandi eserciti e, di conseguenza, l'esposizione in battaglia alle malattie sarebbe notevolmente diminuita*». È vero che la Guerra di Secessione ha mietuto più vittime di tutte le altre guerre degli USA messe assieme, ed è anche vero che le morti per malattia erano comparabili, se non superiori, a quelle dovute agli scontri a fuoco, ma la logica sottesa nella giustificazione di Gatling ci sembra comunque un po' farraginosa, per non dire di peggio.



2 *Una delle prime mitragliatrici Gatling*

Non è comunque il caso di infierire troppo sulla povertà di spirito dell'americano: la stupidità è patrimonio splendidamente condiviso da tutta l'umanità. Anche noi italiani, tanto per dirne una, in quello stesso anno 1862, per non essere da meno degli statunitensi, abbiamo imbastito una piccola guerricciola fratricida.

Il Risorgimento è forse la parte di storia italiana peggio studiata nelle patrie scuole. È possibile che buona parte del Novecento possa contendergli il primato, ma c'è quantomeno la scusante della relativa prossimità temporale. Il Risorgimento, invece, è affetto da vizi di altra natura. Il problema principale è che si tratta del momento sacro della storia nazionale, il suo atto di nascita: come tale, più che studiato, va celebrato. Un altro problema, quasi altrettanto impattante, è che la politica risorgimentale è spaventosamente complicata, una sovrapposizione di attori, valori, interessi in cui forse riescono a districarsi solo gli storici professionisti, e certo non senza fatica.

I due fattori non solo agiscono contro una buona comprensione degli eventi italiani nel periodo compreso – più o meno – tra il 1848 e il 1870, ma interferiscono anche fra di loro, generando distorsioni spettacolari nella comprensione degli studenti. Se le cose non sono cambiate troppo negli ultimi anni[4], accadeva che nel raccontare degli eventi risorgimentali i docenti fossero in qualche modo tenuti a mostrarne gli aspetti patri ed eroici (che indubbiamente non sono mancati) per osannare la realizzazione finale di quello stato unitario di cui gli stessi discenti fanno parte. In estrema e volgare sintesi, lo

[3] Allineandoci a Linus, registriamo che prima macchina per scrivere prodotta industrialmente e abbastanza efficace (in sostanza, tale da riuscire a produrre testi scritti più velocemente di quanto è possibile fare a mano) è la "*Sholes and Glidden Type-Writer*", brevettata dai tre inventori e poi ceduta e messa in produzione dalla Remington nel 1868. Sono comunque moltissimi i "prototipi" di macchine per la scrittura antecedenti, tra i quali brillano gli ingegni italiani: quello di Piero Conti, il cui "tacheografo" è riconosciuto come il primo prototipo in assoluto, ad esempio; o il famoso "cembalo scrivano" di Giuseppe Ravizza.

[4] Forse avremmo dovuto dire "decenni". È possibile che al giorno d'oggi le cose siano cambiate, ma nella memoria di chi scrive la storia risorgimentale insegnata alle elementari (pardon, scuola primaria) era per forza di cose solo una raccolta di aneddoti variamente ammantati di orgoglio nazionale; alle medie inferiori le cose non risultavano in fondo troppo diverse, mentre infine al liceo, con l'assillo della maturità incombente e un programma di storia che copre gli ultimi due o tre secoli, densissimi di eventi e stravolgimenti, era già tanto se si riusciva a ricordare qualche nome e qualche data. Ma, ripetiamo, sono ricordi vecchi: forse oggi le cose stanno in modo migliore.

studente medio usciva dalla scuola con la convinzione che, a meno di qualche piccola distonia tra fautori della repubblica e difensori dell'unificante monarchia sabauda, tutti gli italiani si sono eroicamente uniti e hanno cacciato dal patrio suolo i dominatori stranieri.

3 *Padri della patria*

Difficile, del resto, riuscire a dare una visione più articolata, viste le condizioni al contorno. In tutte le città d'Italia c'è una statua di Garibaldi, un corso Vittorio Emanuele II, almeno un grande viale dedicato a Mazzini e quasi certamente una bella piazza Cavour, per non parlare di svariate altre targhe toponomastiche. Come riuscire a spiegare a un bambino che, almeno in certi momenti storici, qualcuno di questi personaggi non avrebbe disdegnato l'idea di mandarne qualcun altro al creatore? Come riassumere in poche parole la questione meridionale, la questione romana, la questione veneziana? Come far capire che la Terza Guerra d'Indipendenza è stata vinta perdendo tutte le battaglie? O che a Mentana ci sparavano contro quegli stessi francesi grazie ai quali i Piemontesi hanno liberato la Lombardia dagli austriaci? Per non parlare dell'evento più incredibile di tutti, quello in cui un migliaio di volontari, perlopiù privi di addestramento militare, sono riusciti ad avere la meglio su un esercito professionale cinquanta volte superiore.

È accettabile o blasfemo provare a raccontare a un quattordicenne che per quasi tutta la sua vita Giuseppe Mazzini è stato visto da buona parte degli stati e dalle polizie d'Europa in maniera non troppo dissimile da come Osama Bin Laden è stato visto dagli stati occidentali all'inizio del nuovo millennio? Che Giuseppe Garibaldi avrebbe potuto certo dare lezioni di guerriglia (e rivoluzione) a Ernesto Che Guevara? Che Cavour usava con diplomatica perizia sia i battaglioni di bersaglieri che le grazie ricoperte di crinoline delle più affascinanti nobildonne torinesi, pur di accattivarsi gli alleati?

Troppo complicato, davvero. Bisogna rassegnarsi a sintesi più o meno edulcorate, e quindi a facce più o meno stupite quando si provano ad incastrare gli aneddoti che, a differenza delle cause storiche, si attaccano facilmente alla memoria, anche se in maniera poco organica. Tutti ricordano il garibaldino "*Obbedisco*."[5], ma molti di meno sono quelli in grado di ricordare in quale situazione la parola fu detta. Non c'è italiano che non sappia canticchiare la storica canzone "*Garibaldi fu ferito, fu ferito a una gamba, Garibaldi che comanda…*", ma è già parecchio più arduo rammentare in quale occasione il generale si prese la pallottola: men che mai chi fu ad impiombare l'Eroe dei Due Mondi.

A sparare contro l'eroe più celebrato d'Italia è stato Luigi Ferrari, tenente del Regio Esercito Italiano, inquadrato nel corpo dei bersaglieri agli ordini del colonnello Emilio Pallavicini di Priolo. A dimostrazione della complessità delle tensioni politiche nei primi anni del Regno, forse potrebbe bastare l'immagine del più celebrato eroe risorgimentale che viene preso a fucilate da un ufficiale dell'esercito dello stato che ha così significativamente contribuito a formare. Naturalmente, appena si scalfisce un po' la

[5] Il punto fermo subito dopo la parola "obbedisco" è parte fondamentale della citazione, a nostro modesto parere.

semplificazione da memoria di scuola elementare, tutto assume una luce più chiara, anche se inevitabilmente più complessa: e si scopre che Garibaldi non è sbarcato a Marsala per risalire dalla Sicilia solo nel 1860, ma anche nel 1862, con l'unità nazionale già (quasi del tutto) ottenuta; ci si ricorda che a Roma il papa si era grossomodo dichiarato prigioniero politico e affidato alla protezione della cattolicissima Francia; si rammenta che il Regno d'Italia, nella persona di re Vittorio Emanuele II, non ha nessunissima intenzione di litigare con i francesi, e quindi manda il regio esercito in Aspromonte per fermare, prima che si avvicino troppo a Roma, le soldataglie quel guerrigliero repubblicano in camicia rossa e poncho sudamericano.

4 *Lo stivale di Garibaldi col foro della palla che lo colpì in Aspromonte il 29 Agosto 1862.*

Quindi Luigi Ferrari spara per dovere, e non certo per sbaglio: e naturalmente si tratta di una schioppettata che segnerà per sempre la sua vita. Quasi a consolidare la tesi che la natura e la storia aborriscono le semplificazioni, le conseguenze saranno per lui di diversa valenza e colore. Tanto per cominciare, ci si mette l'ironia del destino: nello stesso scontro a fuoco – che, sia detto per inciso, è stato breve e interrotto assai presto proprio per volontà di Garibaldi[6] – anche il tenente Ferrari viene colpito, e riporta una ferita sostanzialmente identica a quella dell'eroe: alla gamba, poco sopra il malleolo. Finirà con la gamba amputata. Poi, a ribadire la correttezza del comportamento militare di Ferrari ci pensa lo stato: al tenente, che peraltro aveva già ottenuto diverse decorazioni in altre occasioni, viene assegnata la massima decorazione per un soldato, la medaglia d'oro al valor militare. Decorazione che inorgoglisce il suo paese d'origine, Castelnuovo Magra, che lo nomina sindaco praticamente a furor di popolo; non sono molti i paesi che possano vantarsi d'aver dato all'Italia un soldato decorato con una medaglia d'oro, due medaglie d'argento e una medaglia di bronzo al valor militare. Solo che alla popolazione non erano note le motivazioni della più prestigiosa delle medaglie, e quando si venne a sapere che il sindaco era quello che aveva azzoppato Giuseppe Garibaldi, scoppiò un putiferio tale che costrinse Ferrari a cambiare aria, almeno per un po'.

Se c'è un briciolo di verità nel detto che, visto da vicino, nessuno è normale, probabilmente è possibile estendere il principio anche ai tempi, non solo alle persone. Un manuale di storia opera necessariamente delle mastodontiche sintesi, cesure e censure, al fine di riassumere in una narrazione leggibile un crogiolo di eventi che sono riassumibili, semplificabili, storicizzabili solo a distanza di tempo. Quando si è nel bel mezzo di quegli eventi, senza una guida a posteriori, è ben arduo distinguere il grano dal loglio, il vero dal falso, il memorabile dal trascurabile.

Il passato è inconoscibile, quasi fosse al di fuori del cono spaziotemporale di einsteiniana memoria. Uno sguardo alla cronologia di un anno qualsiasi già confonde le idee, come se si fosse di fronte ad una singola immagine di TAC che mostra una sezione sottilissima, senza spessore, degli organi interni, senza nessuna delle sezioni consorelle che, tutte insieme, riescono a dare una visione tridimensionale degli organi. Lo sguardo veloce al 1862, alla misera cronologia che riepiloga quell'anno che, tutto sommato, è abbastanza vicino su scala storica ai nostri tempi, già spiazza e confonde: allinea cronologicamente le decisioni di Lincoln alle battaglie di Garibaldi, cosa che può sorprendere perché siamo abituati a leggerle come su scomparti ben separati; segnala la salita al potere di Bismarck, ovvero, di fatto, la nascita di una nazione ancora inesistente, la Germania, che

[6] "*No, fermi. Non fate fuoco. Sono nostri fratelli*". Non è la citazione di Garibaldi più famosa, ed è un peccato, perché lo meriterebbe.

però segnerà indelebilmente la storia del mondo degli anni seguenti; fa inconsapevolmente sorridere il lettore accostando, come eventi temporalmente vicini e quindi quasi concausali, la nascita della Lira Italiana e la pubblicazione de "*I Miserabili*". Miliardi e miliardi di accadimenti, di sensazioni, di drammi, di vite totalmente trascurati, dimenticati, lasciati sullo sfondo, privi di significato che non sia quello, inevitabile e scontato, di dare continuità, contatto e comunicazione tra gli anni passati e quelli ancora a venire.

E del resto, noi siamo finiti a sbirciare gli eventi del 1862 soltanto per inquadrare un po' l'anno di nascita della nostra protagonista.

5 *Winifred Edgerton Merrill*

Winifred Edgerton Merrill nasce il 24 settembre 1862 a Ripon, una cittadina nello stato americano del Wisconsin che oggi ospita meno di settemila abitanti, che all'epoca della nascita di Winifred non raggiungeva neanche i tremila. Il paese è molto piccolo, l'epoca non propriamente la migliore per le fanciulle che non abbiano intenzione di rassegnarsi al destino che la società regolamentata da ottiche prettamente maschili riserva loro; ma Winifred ha almeno la fortuna di nascere in una famiglia benestante. Mamma Clara e papà Emmet riescono infatti a garantirle una buona istruzione tramite insegnanti privati, com'era d'uso per le ragazze di buona famiglia. A giudicare dai dati dei censimenti del 1860 e 1870, la famiglia Edgerton doveva avere anche un altro figlio, Eger, di una decina d'anni più vecchio della sorella, probabilmente scomparso in giovane età[7]. Sempre in deduzione dai dati dei censimenti si scopre che la famiglia si trasferisce a New York, dove Emmet diventa agente immobiliare; ed è inoltre possibile dedurre che tra gli insegnanti privati di Winifred ci fosse una signora che risiedeva stabilmente in casa Edgerton.

Quel che è certo è che Winnie ha una grande passione per l'astronomia e, forse di riflesso, per la matematica. I suoi genitori riescono a permettersi il lusso di costruire per lei un osservatorio astronomico in una loro casa del New Jersey. Nel 1875 aveva aperto i battenti il Collegio Wellesley, una delle primissime scuole statunitensi aperte anche alle ragazze: Winifred vi entra sedicenne, e vi si diploma con tutti gli onori. L'emozione della scuola non la distoglie comunque dalla sua antica e maggiore passione: l'astronomia. È una ventenne coraggiosa, calcola da sola l'orbita della cometa Pons-Brooks che solca i cieli nel 1883, e probabilmente l'osservatorio casalingo comincia a essergli un po' stretto, se trova il coraggio di avere accesso al telescopio della Columbia University.

Non è una richiesta da poco: anche se alcune università americane stanno lentamente (e molto cautamente e limitatamente) aprendo i corsi alle femmine, le difficoltà e le preoccupazioni sono molte: tra i componenti del senato accademico c'è chi – e non poteva certo mancare – semplicemente ritiene le donne troppo fragili e inferiori per poter

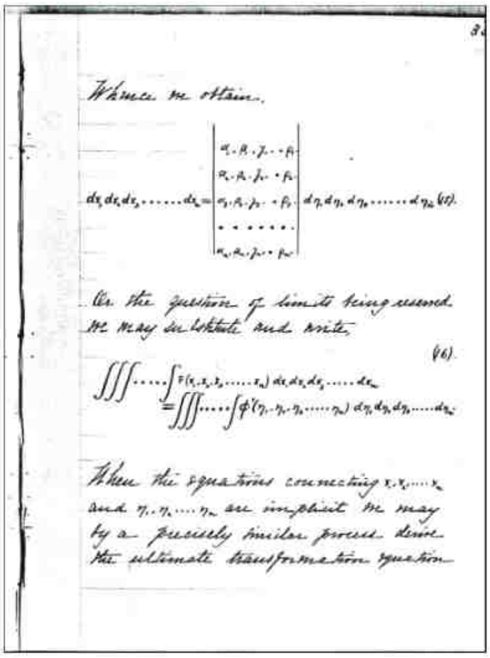
[7] Ovviamente, non siamo certo in grado di accedere ai dati dei censimenti americani del XIX secolo; queste informazioni e molte altre che riportiamo in quest'articolo, le abbiamo rubate al 59° volume, numero 4 di "*Notices of the AMS*", che con un inaspettato colpo di fortuna siamo riusciti a scovare in rete.

affrontare studi superiori; chi, più prosaicamente, teme che le ragazze possano distrarre troppo gli studenti maschi; chi, forse con motivazioni un po' meno irrazionali e più pratiche, teme che l'apertura alle ragazze in una città grande come New York, con le famiglie che naturalmente amerebbero avere le figlie vicine piuttosto che inviarle in lontani educandati, e a così poca distanza temporale dalla fine della Guerra di Secessione, trasformerebbe presto la Columbia in una università quasi esclusivamente femminile.

A favore delle richieste di Winifred non c'è molto: un po' di sollecitazione dei primi movimenti egualitari e femministi, qualche accademico non troppo ottuso e un paio di ragioni tecniche un po' più significative: i suoi calcoli sull'orbita della cometa Pons-Brooks sono eccellenti, e solo la Columbia ha il telescopio adatto per gli scopi che la signorina Edgerton si prefigge. Non si può semplicemente dire alla signorina Edgerton di rivolgersi ad altri.

Come sempre, sia nella Storia che nelle piccole storie, i dettagli in gioco sono troppi per ricostruire pienamente e fedelmente quanto accade: la Columbia consentiva già a qualche ragazza che intendeva dedicarsi all'insegnamento di studiare (sostanzialmente a casa propria) e persino di sostenere qualche esame (se non disturbava troppo), ma le richieste di Winnie erano del tutto nuove. Sia come sia, alla fine la ragazza ottiene il permesso di accedere al telescopio, ma sotto qualche precisa condizione: tanto per cominciare, non deve assolutamente distrarre o infastidire gli studenti maschi; poi deve considerarsi in un certo senso "assistente di laboratorio", cosa che comporta, in maniera più o meno evidente, che dovrà preoccuparsi di mantenere l'osservatorio pulito e in ordine.

Non si può dire che sia il raggiungimento della parità dei diritti, ma è indubbiamente una vittoria: anche perché, unitamente all'accesso al telescopio, Winifred Edgerton ottiene la possibilità di frequentare i corsi di astronomia e matematica nella classe del professor John Rees. Questa conquista di status, questo potersi chiamare con piena dignità "studentessa" è però solo l'inizio di altre battaglie: i maschietti che siedono in aula accanto a lei non sono probabilmente contenti della sua compagnia, ed è per metterla in difficoltà che chiedono esplicitamente al docente di adottare come libro di testo per il corso Meccanica Celeste il manuale più completo e difficile. La scelta cade sul rigoroso "*Celestial Mechanics*" di Watson; è probabile che Winifred si sia davvero molto divertita, a tale notizia. Il Watson, per quanto arduo e difficile, era il testo con cui Mrs. Hayes, la sua insegnante al Collegio Wellesley, aveva istruito le sue allieve liceali. I suoi compagni di corso non avevano speranze di superarla in profitto; e probabilmente non l'avrebbero mai avuta con qualunque libro di testo.


Whence we obtain

On the question of limits being assumed we may substitute and write

When the equations connecting $x_1 x_2 \dots x_n$ and $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n$ are implicit we may by a precisely similar process derive the ultimate transformation equation

6 *Pagina della tesi "Integrali Multipli" di Winifred Edgerton*

Così, Winifred studia sui libri, e studia in osservatorio. Non ha la compagnia dei colleghi studenti, resta spesso in osservatorio fino a notte fonda. Soffre un po' di solitudine, come racconta in una intervista del 1944, che combatte grazie al suo grande cesto di bambole; ne ha venti, sono solo loro a farle compagnia.

Così, tra bambole, formule e telescopi, Winnie arriva al 7 giugno 1886, quando consegna la sua tesi di laurea. La commissione della Columbia University riconosce che la signorina Winifred Edgerton, che ha varcato la soglia dell'ateneo appena due anni e mezzo prima, ha mostrato capacità e brillantezza straordinarie nei suoi studi, e pertanto le conferisce, con lode, il Ph.D. in Astronomia e Matematica. È la prima donna laureata alla Columbia University, e anche la prima donna ad ottenere il Ph.D. in Matematica di tutti gli Stati Uniti d'America. Si presenta alla cerimonia di consegna delle pergamene con un vestito semplice e dimesso; è così intimidita che solo i più vicini riescono a sentire la sua flebile voce: e sarà certo rimasta stupita, frastornata dal lunghissimo e fragorosissimo applauso che tutti – professori, pubblico e soprattutto i suoi compagni di corso, forse alla fine ricondotti alla ragione e alla buona educazione – le tributano insieme a un paio di grandi mazzi di fiori che la mettono in imbarazzo perché non sa neppure come tenerli tra le mani già impegnate a sostenere la pergamena di laurea. È in quella stessa grande aula che ancora oggi campeggia una targa che la ricorda, con l'epigrafe "*Lei aprì la porta*".

7 *Ritratto di Winifred Edgerton Merrill*

Basterebbe anche solo questo, per conservare memoria della ragazzina nata durante la Guerra di Secessione che amava inseguire le stelle. Ma in realtà è bene almeno accennare al resto della sua vita, che l'ha vista sempre combattere – ma quietamente, senza strepiti – contro gli infiniti ostacoli della condizione femminile di quegli anni. Nel settembre 1887 sposa Frederick Merrill, e da quel momento si farà chiamare, da brava moglie americana, Winifred Edgerton Merrill. Il matrimonio è unione di due persone benestanti e acculturate: Frederick otterrà il Ph.D. in geologia nel 1890, e dalla famiglia di Winifred arriveranno lasciti e donazioni assai sostanziose. Nasceranno ben quattro figli (Louise, Hamilton, Winifred e Edgerton[8]), che allietano una famiglia che è indubbiamente di prestigio, della buona società americana: tra i molti amici ospitati dai Merrill spicca l'intera famiglia del presidente Theodore Roosevelt.

Eppure, anche in una situazione così idilliaca e privilegiata, la condizione femminile è sovrastata dai pregiudizi. Subito dopo la laurea una coraggiosa università le offre un posto da insegnante, ma Winnie rifiuta per paura che il passo sia eccessivo, e potrebbe essere mal visto dalla società. Il marito Frederick, del resto, è il primo a pretendere che rifiuti anche altre offerte simili, perché l'idea che "una donna abbia un ufficio in centro come gli uomini" è cosa che ritiene scandalosa. Così, con il passare degli anni Winifred si concentra sempre più sulla famiglia e meno sul suo desiderio di lottare per un miglioramento della condizione femminile.

Almeno finché non arrivano le crisi: quella matrimoniale, che sfocia in un divorzio nel 1904, e quella finanziaria, che vede la famiglia già in difficoltà nel 1902. Buona parte della colpa del disastro finanziario è proprio di Winifred, che si appassiona troppo facilmente ai progetti e non bada mai troppo a spese per realizzarli. Ma le crisi nascondono opportunità, e la separazione dal marito e la necessità di ottenere denaro spingono Winifred ad accettare quanto prima si vedeva costretta a rifiutare: diventa preside della "*Anne Brown's School for Girls*" di New York, poi contribuisce alla fondazione del college "Oaksmere School for Girls" di New Rochelle. La sua scuola per ragazze, chiamata confidenzialmente "la scuola di Mrs. Merrill" ha successo, al punto che apre anche delle succursali e cambia sede, per ingrandirsi. Ma se le capacità

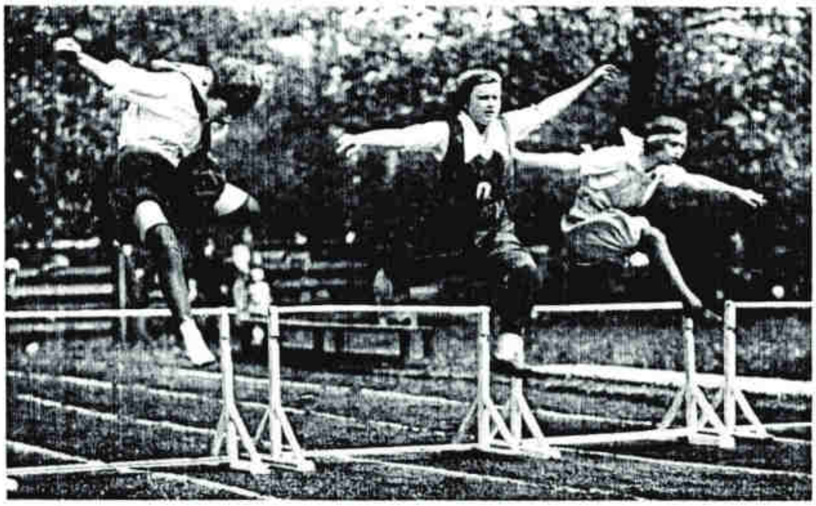
[8] Spesso, negli USA, il primo figlio maschio riceve lo stesso nome del padre. Abbastanza stranamente, nella famiglia Merrill, questa tradizione non sembra essere rispettata, ma in compenso la terzogenita prende il nome della madre e – davvero curiosamente – l'ultimogenito prende come nome di battesimo il *cognome* della mamma.

organizzative di Winnie sono indubbie, quelle amministrative sono sempre un mezzo disastro, e le difficoltà economiche all'ordine del giorno.

Ma non spende per sé; spende per le ragazze. Una piscina scolastica finisce con il costare il triplo del preventivo, e questo è niente. Gran parte dei fondi della scuola finiscono nelle spese necessarie per far allenare la Squadra di Atletica. Winnie lo sa, che la difesa dei diritti delle donne passa anche per percorsi apparentemente fatui, secondari. Ritiene importante, cruciale consentire alle studentesse di potersi allenare e gareggiare pienamente, senza remore e pregiudizi: di avere la libertà di vivere lo sport, oltre che lo studio.

Oggi può perfino sembrare strano ripensarci, ma la prima volta che si è tenuto un meeting internazionale di atletica con partecipazione femminile è stato a Parigi, nel 1922: meno di un secolo fa. Una cosa del tutto nuova, che sarà stata guardata, come sempre in questi casi, con sospetto, o con sorrisi di sufficienza. Ma è una nuova porta che si apre, che si deve aprire. In quel meeting parigino, tra le poche atlete che ebbero la fortuna, il coraggio e la possibilità di partecipare, c'erano anche loro, le ragazze dell'Oaksmere School.

Le ragazze di Winifred.



INTERSCHOLASTIC TRACK MEET—OAKSMERE, 1921

2. Feste d'Agosto

Il mondo matematico italiano ricorderà il mese di Agosto 2018. Se alla comunità scientifica nazionale qualcuno avesse predetto che il Premio Poincaré, massimo riconoscimento per la fisica matematica, sarebbe andato per la prima volta a un fisico italiano e che nonostante questo il clamore e la soddisfazione per cotanto alloro sarebbero stati offuscati da un'altra vittoria ancora più prestigiosa, quel qualcuno non sarebbe stato preso molto sul serio. Ciò non di meno, Giovanni Gallavotti ha davvero vinto il Premio Poincaré, che gli vale anche come riconoscimento a un'intera carriera lunga e fruttuosa; il settantasettenne fisico napoletano, membro dell'INFN e dell'Accademia dei Lincei, già vincitore della Medaglia Boltzmann e titolare di cattedre in università prestigiose (per non parlare di quelle offertegli da altre, come l'ETH di Zurigo), ha avuto infatti la sfortuna di ricevere il trionfale annuncio appena qualche giorno dopo la notizia della conquista della Medaglia Fields da parte di Alessio Figalli.

L'eccezionalità dell'evento probabilmente non deve essere spiegata ai lettori più affezionati di questa rivista: la Medaglia Fields[9] *non è, come tutti i notiziari nazionali hanno declamato, il "Premio Nobel della Matematica": le differenze tra i due premi sono tante e tali che rendono l'accostamento improprio. Ma è certo vero che non esiste per i matematici premio più prestigioso, anche se ce ne sono ormai di decisamente più "ricchi" dal punto di vista meramente monetario. Parte della redazione di RM era sintonizzata su RadioTre Scienza, il primo di Agosto, quando la trasmissione era dedicata proprio all'imminente annuncio dei quattro vincitori del quadriennio. Enrico Arbarello e Roberto Natalini, ospiti in studio, divulgavano per l'etere l'importanza del premio (col senno di poi, viene il sospetto che i due nutrissero quantomeno "grandi speranze" per quell'annuncio che invece ha colto di sorpresa la nazione), mentre forse buona parte degli addetti ai lavori si interrogava soprattutto sulle nazionalità, più che sui nomi, dei quattro vincitori.*

Dopo l'esaltante notizia la redazione di questo giornaletto, egocentrica e vanitosa come sempre, si è subito interrogata su quello che per essa resta ancora il quesito fondamentale: Alessio, novello medagliato, ha 34 anni, e quindi un'età (oltre che una nazionalità) compatibile con quella dei primi giovani lettori di RM: avrà mai sfogliato, una delle Medaglie Fields 2018, la Prestigiosa Rivista Italiana di Matematica Ricreativa? Abbiamo lettori "giovani e d'antica data" che con Alessio Figalli hanno condiviso formazione e percorsi (e che da soli giustificano e gratificano vent'anni di faticosa redazione della rivista, visto che adesso non sono più liceali ma accademici che spargono insegnamenti matematici in giro per il mondo) e l'idea che una Medaglia Fields ci possa aver letto prima di diventare tale ci manda in brodo di giuggiole.

Fatto sta che, presi da cotanta e cruciale ambascia, non abbiamo pensato a sacramentare degnamente il grande evento, e questo RM di Settembre stava per uscire senza la necessaria celebrazione. Ma Rudi Mathematici ha l'incoscienza dei giovani e la fortuna dei vecchi sopravvissuti: un amico di lunga data di RM, amante della matematica e delle arti, ci ha scritto raccontandoci che la premiazione di Alessio Figalli lo ha quasi costretto a

[9] Della Medaglia Fields abbiamo parlato così tante volte che è impossibile dare tutti i riferimenti. Probabilmente, il momento in cui dettagliamo maggiormente l'argomento è in "Diventare padrone dell'universo", RM100, Maggio 2007, il compleanno dedicato proprio a John Charles Fields, da cui la Medaglia prende il nome.

scrivere qualcosa sull'argomento. La congiuntura si è pertanto felicemente realizzata: **Gyro Gearloose** *– come si fa chiamare il nostro vecchio amico, secondo la consolidata tradizione di RM che prevede l'uso degli allonimi – aveva insomma bell'e pronto un articolo sulla Fields 2018, e a Rudi Mathematici mancava un articolo sulla Fields 2018. Indovinate com'è finita…*

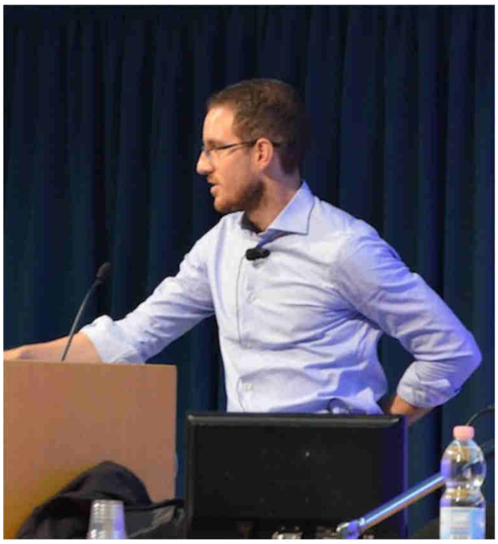
2.1 Medaglia Fields 2018 – di Gyro Gearloose[10]

Transire suum pectus
mundoque potiri[11]

Questo intervento muove da un fatto di cronaca recentemente salito alla ribalta nazionale.

> "*Italiano vince la medaglia Fields, il Nobel della matematica: non succedeva da* 44 *anni. Alessio Figalli, la seconda medaglia Fields italiana. Assegnata ad Alessio Figalli,* 34 *anni, romano e professore al politecnico di Zurigo. Premiati gli studi sul trasporto ottimale, sulla frontiera libera e le probabilità*"[12].

C'è voluto l'evento straordinario per portare all'attenzione generale un premio misconosciuto al grande pubblico nostrano, attribuito ogni quattro anni, in occasione del Congresso internazionale dei matematici della *International Mathematical Union* (IMU), a matematici che non abbiano superato l'età di 40 anni nell'anno di assegnazione del premio. Il primo atto dovuto quindi è quello di rendere omaggio al vincitore, un talento noto già da tempo agli addetti ai lavori.



8 *Alessio Figalli*

Alessio Figalli[13] è nato a Roma nell'aprile del 1984 e, dopo essersi diplomato al liceo classico Vivona di Roma, si è iscritto nel 2002 alla Scuola Normale Superiore dell'Università di Pisa, conseguendo la laurea in matematica in anticipo di un anno sul piano di studi. Ha conseguito il dottorato di ricerca nel 2007 sotto la supervisione di Luigi Ambrosio della Normale di Pisa e di Cédric Villani della *École Normale Supérieure* di Lione. Nello stesso anno è stato nominato ricercatore (*chargé de recherche*) al Centro Nazionale per la Ricerca Scientifica francese (CNRS). Nel 2008 ha insegnato alla *École Polytechnique* di Parigi con la qualifica di «*Professeur Hadamard*»; nel 2009 negli Stati Uniti all'Università del Texas ad Austin come professore associato e, dal 2011, come professore ordinario. Nel 2013 è

[10] Come probabilmente i lettori fumettologi già sanno, Gyro Gearloose è il nome originale di Archimede Pitagorico. È abbastanza curioso notare come il supremo inventore paperopolese abbia un nome americano che lo caratterizza fortemente con un taglio ingegneristico, mentre la geniale traduzione italiana (fin troppo efficace, visto che non sono pochi coloro che credono che "Pitagorico" sia davvero una sorta di cognome o soprannome del vero Archimede) lo declina in connotati esclusivamente matematici. Questo "nostro" Gyro Gearloose, comunque, non è un papero né un'aquila (lo sapete, vero, che Archimede Pitagorico è un'aquila, no?), ma un vero amante della matematica e della cultura tout court, che da anni diffonde e difende: si tratta di Felice Costanti. Tra le molte altre cose che ha fatto e che fa, ha organizzato nel maggio 2012 il festival scientifico e culturale "Lievito" a Latina, dove ha avuto l'incoscienza di invitarci [*N.d.PRS*].

[11] Frase di Archimede incisa sul recto della medaglia Fields: "*Elevarsi al di sopra di sé stessi e conquistare il mondo*".

[12] Intervista esclusiva di Alessio Sgherza, 1 agosto 2018, la Repubblica.

[13] Per maggiori informazioni: pagina web personale presso l'ETH Zürich (https://people.math.ethz.ch/~afigalli)

titolare della cattedra «*Robert Lee Moore*». Dal 2016 è docente in Svizzera dove ha ottenuto una cattedra presso il Politecnico Federale di Zurigo.

La prima volta che, chi vi scrive – modesto cultore delle matematiche in campagna – ebbe notizia del «nostro» fu quando, alle finali dei Campionati Internazionali dei Giochi Matematici del 17 maggio 2003 a Milano, Alessio si conquistò un gradino del podio nella categoria L2 (studenti di quinta superiore e del primo biennio universitario).

La seconda fu quando Roberto Natalini, sulla rubrica *Dueallamenouno* dell'*Unità*, riferì la notizia che Alessio Figalli e Corinna Ulcigrai, proprio nei giorni della deludente finale degli Europei di calcio del 2012, erano stati premiati tra i migliori matematici europei under 35 in Polonia, in occasione del Sesto Congresso dell'EMS (*European Mathematical Society*).

La terza ancora nel 2012, dopo l'attribuzione del premio Wolf a Luis Caffarelli, quando il comitato di redazione di *Maddmaths!* (il blog gestito dalla SIMAI, Società Italiana di Matematica Applicata e Industriale) chiese proprio ad Alessio (a soli 27 anni già professore ordinario presso la University of Texas ad Austin), di fargli un'intervista[14] in esclusiva.

> "La Commissione Internazionale dei matematici lo ha premiato per i «*suoi contributi alla teoria del trasporto ottimale e alle sue applicazioni nelle equazioni differenziali alle derivate parziali, alla metrica geometrica e alla probabilità*». Il lavoro di Figalli ha permesso di risolvere un'equazione complessa che risponde a questa domanda: qual è il modo più economico di trasportare una massa da un luogo a un altro, supponendo che il costo dipenda dalla distanza percorsa? Domanda che racchiude un rompicapo geometrico, antico quanto la leggenda di Didone sulla fondazione di Cartagine e che Figalli ha risolto studiando la forma delle bolle di sapone. Con le stesse tecniche basate sul trasporto ottimale ha studiato come la forma dei cristalli si trasformi sotto l'azione di forze esterne e ha dimostrato che è possibile descrivere fronti atmosferici su larga scala. «*Con i miei collaboratori* – spiega Figalli – *ho sviluppato la teoria e l'ho applicata per risolvere equazioni legate alla meteorologia, cui seguiranno poi le applicazione dirette*». Lui spiega che i suoi studi sono la prova che la matematica non è arida e astratta. «*Le applicazioni possono andare ben oltre le aspettative ma è solo lasciando la possibilità ai matematici di far galoppare la fantasia, che si possono ottenere questi risultati*»."[15]

A dispetto di chi considera i matematici avulsi dai problemi reali,

> "il problema del trasporto ottimale consiste nello studio di come trasferire una distribuzione di massa da un luogo a un altro «in maniera ottimale». Storicamente, il problema emerse per la prima volta nel 1781, con la *Mémoire sur la Théorie des Déblais et des Remblais* ("Trattato sulla teoria degli scavi e terrapieni") del matematico e disegnatore Gaspard Monge: in tempo di continue guerre, al servizio prima della Rivoluzione Francese e poi di Napoleone Bonaparte, per spostare nel modo migliore il materiale necessario a costruire le fortificazioni, suppose che il costo del trasporto fosse proporzionale alla distanza (in realtà, si è ora capito che il costo del trasporto è proporzionale al quadrato della distanza, anzichè alla distanza). «*L'idea di fondo» spiega Figalli, «è che, una volta noto come trasportare una distribuzione di massa, la teoria si può applicare a qualsiasi tipo di massa», gassosa o cristallina […]*" e inoltre, «*negli ultimi dieci anni, sono stati scoperti legami con la teoria delle equazioni alle derivate parziali, la geometria differenziale e altri campi: questo continuo emergere di legami con altri settori della matematica hanno reso, e continuano a rendere, il trasporto*

[14] "*Tieni la mente aperta*" Alessio Figalli intervista Luis Caffarelli.
(http://maddmaths.simai.eu/divulgazione/tieni-la-mente-aperta-alessio-figalli-intervista-luis-caffarelli).

[15] Valentina Arcovio, 2 agosto 2018, La Stampa.

> *ottimale un argomento tra i più affascinanti ed attivi della matematica contemporanea*».”[16]
>
> “Alessio Figalli è un *problem solver* di eccezionale talento. In lui sono presenti, tutte al massimo livello, le doti fondamentali per avere successo nel mondo della ricerca matematica: velocità e profondità nell'assimilazione dei lavori dei grandi matematici del passato, grande originalità, capacità “tecniche”, le giuste dosi di gusto e ambizione nella scelta dei propri temi di ricerca. L'Accademia dei Lincei può vantarsi di averne già saputo riconoscere il valore conferendogli, nel 2017, il premio «*Antonio Feltrinelli Giovani*» per la Matematica, uno dei più importanti tra quelli assegnati dai Lincei.”[17]

La notizia però non ha solo reso noto il vincitore ma ha fatto più luce anche sul premio. La medaglia Fields è considerata il più alto riconoscimento che un matematico possa ricevere, una sorta di «Premio Nobel per la Matematica».

L'accostamento tra i due premi è però improprio per varie ragioni: innanzitutto il Fields viene assegnato ogni quattro anni mentre l'attuale Nobel ogni anno; in secondo luogo per via del limite di età, il Fields premia solo i matematici di età inferiore ai quarant'anni; infine la medaglia Fields è accompagnata da un assegno di 15.000 dollari canadesi mentre l'assegnazione del Nobel da 8 milioni di corone svedesi, un valore 100 volte maggiore.

A proposito di Nobel e dell'assenza di un riconoscimento per la matematica, è molto diffusa la tesi secondo cui Alfred Nobel non avrebbe istituito un premio per la matematica, avendo scoperto che la sua amante lo tradiva con Gösta Mittag-Leffler, il più celebre matematico svedese che, se il premio per la matematica fosse stato istituito, lo avrebbe probabilmente vinto, per i suoi studi sulle funzioni analitiche, sul calcolo delle probabilità e sulle equazioni differenziali omogenee. Semmai è il premio Abel, istituito nel 2001 e assegnato la prima volta nel 2003, con un ammontare in denaro di circa un milione di dollari e una cadenza annuale di attribuzione, a somigliare maggiormente al Nobel, rimediando così alla strana omissione di Alfred Nobel.

A dispetto però dell'esiguità dell'assegno, almeno se paragonato a quello del Nobel, la medaglia Fields è comunque la massima onorificenza per i matematici anche se, chiariamolo definitivamente, non è il «Nobel per la matematica», che non esiste!

9 *Recto della Medaglia Fields con il profilo di Archimede e la sua frase*

Quello che si contendono i matematici – e rende così affascinante questa competizione – è il valore simbolico dell'onorificenza, simile a quello della medaglia d'oro olimpica. Al pari dell'oro olimpico, il titolo è assegnato ogni quattro anni, in competizione vi sono solo i migliori atleti e tutti nel pieno della loro vigoria intellettuale. Vi è un'opinione abbastanza diffusa sulla precocità del talento e sulla naturale tendenza al declino delle energie, sia fisiche che mentali, man mano che si avanza negli anni: «*c'est la vie*». Il ritiro degli atleti alla soglia degli «anta», che è ovvio nella pratica sportiva, è condiviso largamente anche tra i pessimisti e i malinconici: «*muor giovane chi al cielo è caro*»[18].

E seppur pare meno scontata per i cultori degli «sport della mente», tra cui i più puri ed estremi sono sicuramente i matematici, l'opinione è talmente radicata che, fin dal 1936, il loro

[16] Sandro Iannacone, 1 agosto 2018, Wired.

[17] A cura di Antonio Ambrosetti e Luigi Ambrosio, 3 agosto 2018, Accademia dei Lincei – blog.

[18] Giacomo Leopardi, “Amore e morte” – epigrafe.

Congresso Internazionale l'ha recepita nel regolamento del premio più significativo, sebbene ciò comporti, talvolta, qualche inconveniente; come nel caso di Andrew Wiles, forse il più celebrato matematico del XX secolo, che pur avendo dimostrato il cosiddetto «ultimo teorema di Fermat»[19], una dimostrazione che i matematici inseguivano da oltre 350 anni, non ha potuto ricevere la medaglia, avendo da poco superato 40 anni. Sia quel che sia, i matematici sono ben consci del fatto che la vecchiaia gli porterà via la brillante acutezza intellettuale della gioventù, confinandoli all'insegnamento.[20]

Il primo italiano a ottenere la medaglia Fields era stato Enrico Bombieri[21] nel 1974. Ad oggi sono stati premiati 63 matematici provenienti da 21 paesi diversi e, tra di loro, vi è stato pure un apolide – Alexander Grothendieck – che, a Mosca nel 1966, rifiutò di ritirare il premio per protesta contro la politica di riarmo sovietica.

Benché i matematici italiani si siano aggiudicati finora 2 medaglie, soltanto 5 paesi hanno fatto meglio: Giappone (3), Regno Unito (6), Russia (9), Francia (11) e USA (13). Le istituzioni accademiche più medagliate sono state le seguenti: Princeton University, Sorbonne Université, Institute for Advanced Study, Institut des Hautes Études Scientifiques, University of Cambridge, Harvard University e University of Oxford.

Il più giovane vincitore della medaglia Fields (a 27 anni) è stato Jean-Pierre Serre nel 1954; Edward Witten è stato l'unico fisico a riceverla, nel 1990; mentre la matematica iraniana Maryam Mirzakhani[22], nel 2014, è stata finora l'unica donna.


10 *Maryam Mirzakhani*

Detto dei matematici, detto dei premi e delle istituzioni accademiche, in cui sono maturati gli studi che hanno valso ai loro autori quei premi, è il caso di dire pure qualcosa sui percorsi di formazione e sul sistema culturale.

È degno di nota che Alessio Figalli si sia formato e maturato in un liceo classico romano. L'ennesima dimostrazione che esiste una sola cultura e non vi è alcuna incompatibilità o separazione culturale netta tra saperi scientifici e umanistici e che la cultura umanistica è funzionale alla formazione di un matematico o di un tecnico. Sebbene la frattura tra sapere umanistico e sapere scientifico sia stato uno dei *leitmotiv* nel dibattito culturale[23] del secolo scorso in Europa e Nord America, è probabile che questa contrapposizione non sia mai esistita e che si tratti piuttosto di un luogo comune talmente radicato da essere comunemente accettato.

> "I giovani europei conoscono sempre peggio le lingue morte, eppure questo non li ha resi affatto più vivi. Una colossale idiozia propalata dal luogo comune è che Pindaro e Virgilio non servano a nulla. Come dire che la cyclette è inutile perché al termine dello sforzo non ti sei mosso di un millimetro. Ora, è evidente che in nessun colloquio di lavoro ti chiederanno il quinto canto dell'Eneide (magari nemmeno per diventare insegnanti di latino) e che nessuna ragazza pretenderà di essere corteggiata con i versi dei lirici greci, per quanto più struggenti di tante frasette che si trovano nei cioccolatini. Dal punto di vista di un'utilità immediata, quindi, Pindaro e Virgilio non producono risultati. Però allenano a pensare. Attività fastidiosa e pesante ma ancora utile. Anche per trovare un lavoro o una

[19] Sarebbe più corretto dire «ultima congettura di Fermat», dal momento che è diventato teorema solo dopo la dimostrazione di Wiles.

[20] cfr. Godfrey H. Hardy, "Apologia di un matematico".

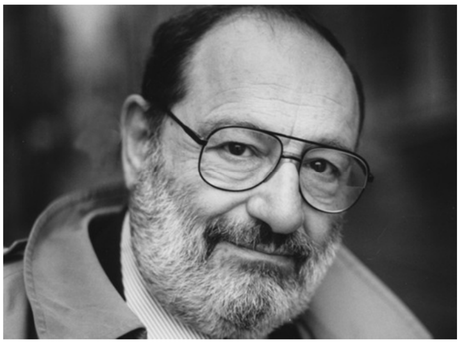
[21] Per la risoluzione del problema di Bernstein, nel 1969, insieme ad Ennio De Giorgi ed Enrico Giusti.

[22] Vincitrice di ben due medaglie d'oro alle Olimpiadi internazionali della matematica, nel 1994 e 1995.

[23] Charles P. Snow, "Le due culture e la rivoluzione scientifica".

ragazza. Latino e greco sono codici a chiave, che si aprono soltanto con il ragionamento e un'organizzazione strutturata del pensiero. Insegnano a chiedersi il perché delle cose. Chi impara a districarsi fra Tacito e Platone assimila una tecnica che potrà applicare a qualunque ramo del sapere e della vita. Non è un caso se i migliori studenti delle facoltà scientifiche provengono dal liceo classico."[24]

Eppure ogni volta che si parla dei limiti della scuola italiana, il primo imputato è il liceo classico. Qualcuno forse ricorderà, il 14 novembre 2014, al Teatro Carignano di Torino, andò in scena addirittura un «Processo al liceo classico», con interventi tra gli altri di Luciano Canfora, Andrea Ichino, Tullio De Mauro, Gabriele Lolli, Marco Malvaldi e con Umberto Eco nella parte dell'avvocato difensore.


11 *Umberto Eco*

"Si legge che diminuiscono sensibilmente le iscrizioni al liceo classico Quello che rende perplessi è la ragione addotta, cioè che non offre sbocchi professionali. Mi pare che, se uno intende arrestarsi alla maturità senza entrare all'università, il classico offra le stesse possibilità di ogni altro liceo. Se si cerca un lavoro immediato dopo le medie superiori allora è meglio un buon diploma di ragioniere o di geometra, professioni di cui si ha sempre bisogno. Se invece si pensa all'università, il classico offre la possibilità di fare qualsiasi facoltà, ingegneria compresa, e quindi il problema non esiste, ovvero si sposta sugli sbocchi professionali dopo l'università, ed è certo che forse diventare dentista piuttosto che professore di filosofia apre maggiori possibilità di comperarsi una barca. Ma so di gente laureata in lettere che ha fatto grandi carriere, in banca e alle massime magistrature dello Stato, si veda, tanto per dirne una, Ciampi. Pertanto nasce il sospetto che la differenza non sia tra l'educazione classica e quella no, bensì tra avere la testa di Ciampi o quella di qualcun altro. Chi ha fatto buoni studi, se non è capace di fare bene i mestieri esistenti, è più aperto ai mestieri di domani e forse in grado di idearne alcuni."[25]

"Maledetto liceo classico, tutta colpa sua: il degrado del Paese, l'inconcludenza dei politici, la poca competitività delle aziende, la credulità della gente... tutti i mali d'Italia nascono da qui, anche se ormai lo sceglie solo il sei per cento degli studenti (e per la maggioranza ragazze, statisticamente destinate a una carriera da insegnanti). Benedetto liceo classico, è l'anima dell'Italia migliore: prepara alle professioni del futuro, insegna a ragionare e a resistere perché, grazie alle «lingue morte» propone veri «problemi da risolvere» e non semplici «esercizi da eseguire». Gli dobbiamo gran parte di quello che di buono ha ancora l'Italia: da Fabiola Gianotti (direttrice generale del CERN) a Daniele Dorazio (fisico incompreso, chiamato dal CERN ma bloccato dal suo liceo di Brindisi), ben più del sei per cento degli italiani che fanno fortuna all'estero hanno in tasca una maturità classica. […] Con buona pace e alla faccia del finanziere renziano Davide Serra, uno dei «rottamatori» dell'Italia di oggi, che a margine di un raduno alla Leopolda, ha trovato modo di spiegare la sua visione dell'istruzione: «La cultura umanistica ha fatto il suo tempo. Lo dico sempre ai miei bambini: bisogna essere *cool*, diventare matematici». […] «Giappone, Cina, Corea studiano i loro greci e latini», nota De Mauro. «La tradizione dei loro classici viene studiata e rispettata, si appoggia ad un sistema che non lascia per strada nessuno. La matematica va

[24] Massimo Gramellini, "Il latino e la cyclette", 31 ottobre 2006.

[25] Umberto Eco, "Elogio del classico", 3 ottobre 2013, L'Espresso – La bustina di minerva

> studiata bene: non invece della formazione storica, letteraria e umanistica, ma insieme. Niente a che vedere con le proposte di analfabeti che riecheggiano, con trent'anni di ritardo, l'anti-umanesimo all'americana.». Del resto, le critiche al liceo classico nascono dall'esterno, non dall'interno: chi lo ha scelto, in 74 casi su cento lo rifarebbe. Plutarco diceva: «I giovani non sono vasi da riempire ma fiaccole da accendere». Ecco, su come accendere queste fiaccole, il dibattito è aperto in tutti i paesi occidentali. Il dato di fondo è che nessuno sa definire cosa sia utile far studiare ai ragazzi. Materie che formano la mente come il latino e il greco o quelle richieste dal mercato del lavoro?"[26]

E, giusto per ribadire ancora il debito che abbiamo verso le «lingue morte», è il caso di citare quel che scrive un altro degli *enfant prodige* del liceo classico, il fisico Carlo Rovelli:

> "Intorno al 750 a.e.v.[27], poco più di un secolo prima della nascita di Anassimandro, i Greci apprendono l'alfabeto fenicio. L'alfabeto fenicio, probabilmente per rispondere alle esigenze di efficienza ed elasticità di un popolo dedito al commercio, semplifica drasticamente la scrittura: invece di centinaia di simboli ne bastano una trentina. Essendo la fonetica indoeuropea più semplice di quella semitica, i Greci hanno meno consonanti rispetto ai Fenici (come l'italiano ha meno consonanti rispetto alle diverse gutturali dell'arabo), restano quindi inutilizzati alcuni caratteri dell'alfabeto, quelli corrispondenti ai suoni che non esistono nella lingua greca, i caratteri *α*, *ε*, *ι*, *ο*, *υ*. Qualcuno ha l'idea di utilizzare questi caratteri per rappresentare le vocali, distinguendo così tutte le diverse inflessioni vocaliche della lettera *β*, ad esempio, che ora si possono distinguere tra loro, scrivendole *βα*, *βε*, *βι*, *βο*… […] E' nato il primo alfabeto fonetico della storia umana ma, con lui, è nata anche la prima tecnologia, che preserva una copia della voce umana. […] Nelle società antiche la scrittura era competenza esclusiva degli scribi e il sapere legato alla scrittura era tenuto gelosamente segreto. […] Anassimandro affida a un libro in prosa tutto il suo sapere. Durante il VII e il VI secolo a.e.v. in Grecia, per la prima volta nella storia del mondo, la scrittura viene semplificata e resa accessibile a molti, non più patrimonio esclusivo di una chiusa confraternita di scribi ma patrimonio condiviso da una larga classe dominante. E' l'antecedente storico alle parole immortali di Saffo, Sofocle e Platone."[28]
>
> "Solo «menti aperte» costituiscono il presidio più sicuro di una «società aperta», quindi che dire dei burocrati, esperti e consulenti, che avanzano proposte tese a cancellare l'insegnamento di quelle materie da loro ritenute inattuali e/o inutili?
>
> Alle «ideazioni» di questi «fantasmi» pare addirsi alla perfezione un pensiero di Goethe: «nulla è più funesto dell'ignoranza attiva». Spegnere la luce […] dalle menti dei nostri giovani equivale a perpetrare un furto nei loro confronti e a renderli facili prede del primo imbonitore. Non si deve essere complici di questi «ladri di formazione», «barbari non più ai confini ma in mezzo a noi», veri «scassinatori» di quei tesori che fortunatamente rimangono ancora nella nostra scuola."[29]

In conclusione: Alessio Figalli è un tesoro della nostra scuola, che non è poi così male…

---

[26] cfr. Angiola Codacci-Pisanelli, "Il liceo classico non deve morire", 17 novembre 2014, L'Espresso – Cultura

[27] Ante Era Volgare. Gli acronimi EV (Era Volgare) e AEV (Ante Era Volgare) sono spesso usati, soprattutto dagli scienziati, nelle indicazioni degli anni al posto delle tradizionali (per l'Occidente) sigle "a.C." e "d.C.", al fine di renderle indipendenti da riferimenti religiosi, e quindi "politicamente corrette". In inglese le sigle corrispondenti sono CE (Common Era) e BCE (Before Common Era). Non c'è rischio di confusione con la Banca Centrale Europea, perché in inglese la sigla relativa è ECB [*N.d.PRS*].

[28] Carlo Rovelli, "Che cos'è la scienza. La rivoluzione di Anassimandro". Mondadori – Saggi

[29] Dario Antiseri, "Contro l'ignoranza attiva", 9 marzo 2014 – Associazione MondoDomani.

3. Problemi

3.1 "Doppiamente casuale"

...così, Alice si incavola doppiamente. Anzi, triplamente, visto che a quanto pare mentre voi gozzovigliavate in un prato lei asciugava temporali sul balcone.

In realtà, il "casuale" c'entra doppiamente poco, tant'è che non specifichiamo nessuna distribuzione; a noi ricorda un problema risolto in trattoria tempo fa, ma ci pare ci siano interessanti complicazioni (...e già quello, erano tre pipe del suo...).

Comunque, siete al termine del gozzovigliaggio (non si dice? Non mi interessa, ve lo meritate), circondati da una quantità non numerabile di piatti di plastica vuoti, quando dall'albero che vi sovrasta cade un insetto non particolarmente disgustoso (perché siamo dei buoni... Ma che non si ripeta più), il quale va a finire in un punto casuale di un ben preciso piatto.

Disgustato dal luogo in cui si trova (per non parlare della vostra compagnia), sceglie una direzione a caso (da cui, il "doppiamente") e procede in linea retta per uscire dal piatto.

Siccome siete degli originaloni, tutti i vostri piatti hanno un raggio $\boldsymbol{R}$; quello che vorremmo sapere è quale sia (visto che, mentre dormite, l'esperimento viene ripetuto innumerevoli volte) la distanza media percorsa sul piatto dal vostro animaletto.

Punto casuale, direzione casuale... Cercate di non dare dei risultati casuali.

3.2 Un tot di sfumature di grigio

È che "cinquanta" allungava i calcoli in modo noioso. Facciamo dieci? OK, vada per dieci. Ma se preferite "n", va bene lo stesso.

Vi ricordate il vecchio Q&D (di quando eravamo giovani e scapestrati) sui calzini? "Avete calzini di tre colori nel cassetto, cinque paia per colore, e raccattate il necessario al buio: quanti calzini dovete prendere per essere sicuri di averne almeno due dello stesso colore?". Sembra incredibile, ma c'è ancora gente che ci casca. Sembra incredibile, ma continuate a non voler spostare la cassettiera in un'altra parte della casa, dove potreste accendere la luce senza rompere le scatole a chi continua a dormire.

Solo che, adesso, siete diventate delle persone serie. E le persone serie portano i calzini grigi.

Siete quindi i felici possessori di dieci paia di calzini in, giustappunto, "dieci sfumature di grigio"; non vi sognate neanche di prendere (SPOILER!) undici calzini dal cassetto, quindi ammorbidite la vostra *weltanshauung* in merito ai colori e vi limitate a prendere due calzini a caso (...ma mettere ordine no, vero?), a portarli in un luogo vagamente illuminato e a verificare se vanno bene.

Il problema è tutto nell'avverbio "vagamente": siccome oltre che seri siete anche diventati tirchi, la lampadina è fioca, e secondo voi sono diversi solo calzini che differiscano per più di una sfumatura (insomma, "5" va bene con "4" e "6", ma con "3" e "7" non se ne parla neanche). Quante sono le probabilità di prendere una coppia di calzini "compatibile"?

Oh, se volete fare un "n" generico, con magari "k" gradi di tolleranza, fate pure. Visto il titolo, tollereremo queste perversioni.

4. (End of) Summer Contest

Non nel senso che è finito il Summer Contest, nel senso che è finita l'estate. E che "Fall Contest" non ci piace.

4.1 La Congettura di Rudy

...che a noi, Goldbach "ce spiccia casa". Nel senso che dimostrarla dovrebbe essere difficile uguale.

Scusate se siamo un po' criptici, ma vorremmo affermare la paternità di questo contributo alla conoscenza senza spiattellarvelo lì e rovinarvi il problema: il prossimo paragrafo ha l'ambito onore di contenerle tutta la congettura.

Secondo Rudy, quanto segue è collegato alla "prima volta" di un importante momento della matematica.

Prendiamola alla larga.

Il problema, in realtà, sono due di cui abbiamo la risposta ma non la soluzione. Più uno di cui ci piacerebbe tanto avere la soluzione ma non abbiamo neanche la risposta. Più un altro che non sappiamo neanche se esista la risposta.

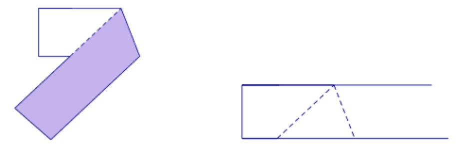
Forse si è notato che in questo periodo ci stiamo interessando di origami.

Se riuscite a procurarvi un rotolo di calcolatrice, ottimo: anche dividendo in otto parti "per il lungo" un foglio A4, i casi estremi (il terzo e il quarto) non vengono molto bene.

12 *Il Primo passo.*

Data la vostra striscia, piegatela "all'insù", possibilmente vicino al bordo sinistro (per avanzare striscia), di un angolo a vostra scelta (minore di un angolo retto ma non troppo) e poi riapritela: dovreste ottenere qualcosa di simile a quanto illustrato in figura.

Adesso, portate il lato superiore sulla piegatura testé ottenuta, piegate "all'ingiù" e riaprite: il risultato dovrebbe essere quello nella seconda figura.



13 *Il secondo passo.*

Ora ricominciate da capo, nel senso che portate il lato inferiore (piegando in su) sulla piegatura, piegate e riaprite, poi portate il lato superiore (piegando in giù) sulla nuova piegatura, piegate e riaprite... insomma, "su uno, giù uno"; e con indubbia fantasia abbiamo chiamato questo metodo S1G1. Se avete la pazienza, andate avanti per un po' (fine dell'A4 va benissimo). Altrimenti, passate alla prima domanda.

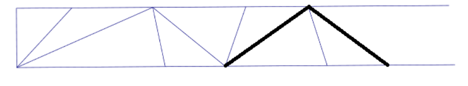
Definiamo come α_1 l'angolo tra la base sotto della nostra striscia e la prima piegatura, con α_2 l'angolo tra la prima e la seconda piegatura (nella figura qui sopra, l'angolo tra le due righe tratteggiate, α_3 quello tra la seconda e la terza, eccetera.

Come procede la successione degli α_n in funzione di n (e dell'angolo iniziale α_1, evidentemente)?

Il fatto che si sia chiamata questa sequenza S1G1 dovrebbe avervi messo la pulce nell'orecchio.

Partendo da un'altra striscia, provate a costruire la S2G2, ossia: piegatura in alto, riaprite, piegatura in alto (con il bordo basso sulla piega precedente), riaprite, piegatura in basso (con il bordo alto sulla piega precedente), riaprite, piegatura in basso, riaprite... e avanti così. Qui, la striscia ricavata dall'A4 basta a malapena per pochi giri.

Qui, l'angolo di cui trovare la successione non è facile da descrivere: ve lo indichiamo in linee ingrossate nella figura, che serve anche a mostrare come dovrebbero venirvi fuori le piegature; attenzione che ne esiste uno anche sul lato inferiore della striscia, ma non ve lo abbiamo indicato.



14 *L'angolo che ci interessa.*

Anche qui, ci interessa la successione, ma se non la fate dipendere dal numero della piegatura va benissimo lo stesso: quello evidenziato è il terzo angolo della successione che ci interessa, ottenuto dalla sesta e ottava piegatura: vedete voi in funzione di quale elemento definirlo. Dovrebbe (ma qui siamo nel campo delle ipotesi) esserci una certa qual parentela tra l'angolo indicato e l'angolo ottuso formato dalle piegature corte con i bordi della striscia.

Fatto? Bravi, siamo fieri di voi. Adesso, però, cominciano le cose difficili. Sorvoliamo su α_1 (diamolo per fisso), e focalizziamoci sul procedimento.

Cosa succede con S3G3? e, genericamente, cosa succede con SnGn?

Esiste un modo per calcolare cosa succede per SnGk, dove il numero delle piegature "su" è diverso dal numero delle piegature "giù"?

Siccome non abbiamo un nastro da calcolatrice, non abbiamo provato, e i calcoli li lasciamo volentieri a voi.

5. Bungee Jumpers

Provate che, fissato il valore di n, la funzione:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos\left(x\sqrt{k}\right)$$

non è periodica per tutti gli x reali.

La soluzione, a "Pagina 46"

6. Soluzioni e Note

Settembre!

Tante soluzioni e pochissime note, visto che il numero è già grassottello…

6.1 [235]

6.1.1 Scalenità

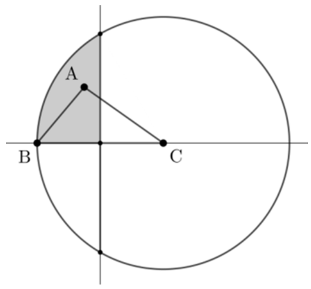
Il primo problema del mese scorso ha divertito moltissimo i nostri lettori. prima di farvi leggere gli studi sui triangoli distorti, vi passiamo la definizione del Capo:

> *Tracciato un triangolo, prendiamo un vertice A; tracciamo la bisettrice dell'angolo A che avrà piede sul lato a (quello opposto ad A). Diciamo Z il punto di piede. Calcoliamo la distanza dal punto medio di a a Z, e dividiamola per la lunghezza di a. Il numero che otterremo sarà compreso tra 0 e ½. Ripetiamo la procedura anche per gli angoli B e C, ottenendo in tutto tre numeri: di questi, teniamo il minore tra i tre numeri, che definiamo "scalenità". Qual è il valore massimo raggiungibile dalla "scalenità"? Come è fatto, il triangolo "più scaleno di tutti"?*

Bene, andiamo a cominciare. Come spesso accade, partiamo con ***Valter***:

> Provo a esporre la mia farneticazione (se mai avesse un senso).
>
> Chiamo "numero" il rapporto ottenuto sui 3 lati. Si sta cercando il massimo di un minimo (il massimo ottenibile del minimo dei 3 "numeri"). Mi pare che si stia cercando un punto di equilibrio.
>
> Considero il rapporto delle lunghezze fra 2 lati. Da esso dipende il "numero" del restante lato. Più le due lunghezze divergono più esso è grande.
>
> Il punto di piede Z sarà più vicino al lato corto. Lo si nota facilmente con un disegno (triangoli sovrapposti col lato corto crescente). Ora devono ottenere il massimo dei minimi.
>
> Immagino di averlo ottenuto e verifico. Se riduco il lato corto ne otterrei uno migliore (cioè aumento il valore del massimo dei minimi). … a meno che il minimo passi su un altro lato (e sia inferiore al massimo dei minimi).
>
> Gli spostamenti che faccio sono infinitesimali. Quindi i 3 "numeri" devono coincidere (quasi). Questo mi fa pensare alla sezione aurea.
>
> Il triangolo dovrebbe essere (quasi) un retta (col rapporto lati a crescere in lunghezza = φ).
>
> Ho provato a disegnarlo con geogebra. Gli ho fatto calcolare i "numeri". Ho poi spostato in vari modi i lati. Non sono riuscito a trovare di meglio. Il "mio" massimo dei minimi è ≈ 0.118.

Direi che è un ottimo modo di cominciare quando si parla di sezione aurea, un tormentone che è spesso apparso su queste pagine. Ma non c'è tempo da perdere, andiamo avanti con il ***Panurgo***:



Sia ABC un triangolo, non propriamente equilatero, di lati $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{CA}}$ e $c = \overline{\mathrm{AB}}$ con $a > b > c > 0$. Fissiamo, senza perdita di generalità, un sistema di assi cartesiani ortogonali tali che $\mathrm{B} \equiv (-1; 0)$ e $\mathrm{C} \equiv (1; 0)$: il terzo vertice, A, giace nel quarto quadrante all'interno del settore circolare evidenziato in figura.

Se A giacesse sull'arco del settore circolare sarebbe $a = b$ mentre sarebbe $b = c$ se giacesse sul segmento verticale, base del segmento circolare: A può giacere sull'asse delle ascisse. Ci limitiamo a studiare solo la parte del settore circolare che si trova nel quarto quadrante perché l'altra metà produce risultati identici essendo simmetrica alla prima.

Le coordinate di A sono dunque soggette ai vincoli

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \\ 0 \leq y < \sqrt{3} \\ (x-1)^2 + y^2 < 4 \end{cases}$$

Come sarebbe a dire "senza perdita di generalità"? Beh, la misura oggetto del nostro studio è il rapporto di due segmenti e, come tale, è invariante per traslazione, rotazione riflessione e omotetia: per ogni possibile triangolo basta 1) identificare il punto medio del lato più lungo e traslare il triangolo in modo che tale punto coincida con l'origine, 2) ruotare il triangolo in modo che il lato più lungo giaccia sull'asse delle ascisse, 3) applicare le riflessioni necessarie per portare il terzo vertice nel quarto quadrante, 4) applicare un'omotetia centrata nell'origine in modo che la base sia lunga 2 e il gioco è fatto.

Scriviamo le equazioni in forma implicita della retta per AB

$$r_{\mathrm{AB}} \quad : \quad \frac{y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{B}}}{c} x - \frac{x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}}}{c} y + \frac{x_{\mathrm{A}} y_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{B}} y_{\mathrm{A}}}{c} = 0$$

e della retta per CA

$$r_{\mathrm{CA}} \quad : \quad \frac{y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{A}}}{b} x - \frac{x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}}}{b} y + \frac{x_{\mathrm{C}} y_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{A}} y_{\mathrm{C}}}{b} = 0$$

inseriamo i valori delle coordinate e otteniamo

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{AB}} \quad &: \quad \frac{y_{\mathrm{A}}}{c} x - \frac{x_{\mathrm{A}} + 1}{c} y + \frac{y_{\mathrm{A}}}{c} = 0 \\ r_{\mathrm{CA}} \quad &: \quad -\frac{y_{\mathrm{A}}}{b} x + \frac{x_{\mathrm{A}} - 1}{b} y + \frac{y_{\mathrm{A}}}{b} = 0 \end{aligned}$$

I coefficienti y_{A}/c e $(x_{\mathrm{A}} - 1)/c$ sono rispettivamente seno e coseno dell'angolo (β) formato dalla retta r_{AB} e dall'asse delle ascisse; lo stesso vale, *mutatis mutandis*, per i coefficienti della retta r_{CA}: osserviamo che, con i coefficienti così normalizzati, la funzione $f(x, y) = \sin\vartheta\,(x - x_0) - \cos\vartheta\,(y - y_0)$ fornisce direttamente la misura della distanza del punto $(x; y)$ dalla retta; le bisettrici (interna e esterna) delle due rette passanti per i lati di un triangolo costituiscono il luogo geometrico dei punti equidistanti dalle rette stesse e basta quindi eguagliare tali distanze per ottenere le equazioni delle bisettrici, $d_{AB} = \pm d_{\mathrm{CA}}$. Scrivendo le equazioni con gli indici presi in modo circolare (AB, BC, CA) al segno positivo corrisponde l'equazione della bisettrice interna di α

$$\frac{y_{\mathrm{A}}}{c} x - \frac{x_{\mathrm{A}} + 1}{c} y + \frac{y_{\mathrm{A}}}{c} = -\frac{y_{\mathrm{A}}}{b} x + \frac{x_{\mathrm{A}} - 1}{b} y + \frac{y_{\mathrm{A}}}{b}$$

cioè, dopo pochi passaggi di facile algebra,

$$(b + c) y_{\mathrm{A}} x - (b + c)(x_{\mathrm{A}} + 1) y + (b - c) y_{\mathrm{A}} = 0$$

Il piede delle bisettrice è l'intersezione con l'asse delle ascisse che si ha per

$$(b+c)y_A x+(b-c)y_A=0 \Rightarrow x=-\frac{b-c}{b+c}$$

Il punto medio della base è l'origine per cui la scalenità rispetto al lato a è data da

$$s_a=\frac{0-x}{a}=\frac{1}{2}\frac{b-c}{b+c}$$

Per gli altri due lati l'unica cosa che cambia è il numero dei passaggi di facile algebra che occorrono: scriviamo direttamente

$$s_b=\frac{1}{2}\frac{a-c}{a+c}, \quad s_c=\frac{1}{2}\frac{a-b}{a+b}$$

"La" scalenità è $s=\min(s_a,s_b,s_c)$: quale delle tre sarà la minore?

Cominciamo da

$$a>b \Rightarrow 2ac>2bc \Rightarrow ac-bc>bc-ac \Rightarrow ab-c^2+ac-bc>ab-c^2+bc-ac \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a-c)(b+c)>(a+c)(b-c) \Rightarrow \frac{a-c}{a+c}>\frac{b-c}{b+c}$$

l'ultimo passaggio è possibile perché tutte le quantità sono positive e il verso della disuguaglianza non cambia: abbiamo dunque $a>b \Rightarrow s_b>s_a$.

Un'analoga manipolazione algebrica dimostra che $b>c \Rightarrow s_b>s_c$; sfortunatamente, $a>c \Rightarrow s_a>-s_c$ e dobbiamo confrontare le due scalenità in modo più diretto: otteniamo, dopo la solita facile algebra, $s_a>s_c \Rightarrow b^2>ac$.

Dobbiamo quindi studiare il segno delle derivate, che sono

$$s'_a=\frac{cb'-bc'}{(b+c)^2}, \quad s'_c=\frac{ba'-ab'}{(a+b)^2}$$

con

$$a=2, \quad b=\sqrt{(x-1)^2+y^2}, \quad c=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

da cui

$$\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{\partial a}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial b}{\partial x}=\frac{x-1}{b}, \quad \frac{\partial b}{\partial y}=\frac{y}{b}, \quad \frac{\partial c}{\partial x}=\frac{x+1}{c}, \quad \frac{\partial c}{\partial y}=\frac{y}{c}$$

Per s_a

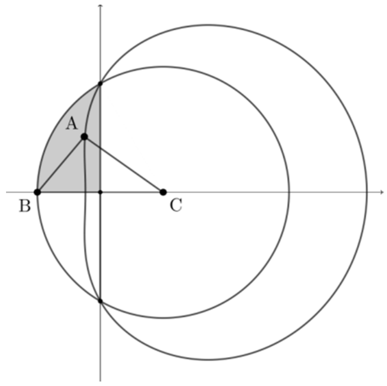
$$\begin{cases} \dfrac{\partial s_a}{\partial x}=\dfrac{c\dfrac{x-1}{b}-b\dfrac{x+1}{c}}{(b+c)^2}=\dfrac{2(x^2-y^2-1)}{bc(b+c)^2} \\ \dfrac{\partial s_a}{\partial y}=\dfrac{c\dfrac{y}{b}-b\dfrac{y}{c}}{(b+c)^2}=-\dfrac{(b^2-c^2)y}{bc(b+c)^2} \end{cases}$$

Eguagliando a zero la prima derivata otteniamo $x^2-y^2=1$, l'equazione di un'iperbole i cui rami giacciono entrambi fuori dalla fascia di piano che contiene il terzo vertice quindi la derivata stessa non si annulla; inoltre, è già $x^2-1<0$ quindi lo è a più forte ragione x^2-y^2-1 e la derivata è sempre negativa.

La seconda derivata è negativa tranne che per $y=0$: $s_a(x,y)$ è una superficie monotona decrescente sia in x sia in y.

Per s_c

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s_c}{\partial x}=\dfrac{-a\dfrac{x-1}{b}}{(a+b)^2}=\dfrac{a(1-x)}{b(a+b)^2} \\ \dfrac{\partial s_c}{\partial y}=\dfrac{-a\dfrac{y}{b}}{(a+b)^2}=-\dfrac{ay}{b(a+b)^2} \end{cases}$$



La prima derivata è sempre positiva mentre la seconda è negativa tranne che per $y = 0$: $s_c(x,y)$ è una superficie monotona decrescente in y e crescente in x, quindi si interseca necessariamente con s_a e precisamente nei punti per i quali $b^2 = ac$: diamo un occhio alla curva data da questa intersezione nella figura a fianco.

Evidentemente, per tutti i punti che giacciono fuori dalla curva o è vero che $s_a > s_c$ o è vero il contrario quindi, avvicinandosi il vertice A alla curva avremo che l'una dovrà crescere e l'altra calare in modo da divenire uguali: precisamente per questo motivo il massimo valore di s si potrà avere solo quando $s_a = s_c$.

Inoltre s, come s_a e s_c, cresce al diminuire di y e raggiunge il valore massimo quando A giace sulla base e deve quindi essere

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ a = b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \sqrt{5} - 1 \\ c = 3 - \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \boxed{s_{\max} = \frac{\sqrt{5} - 2}{2} = 0{,}118\ldots}$$

Neppure se ce la mettesse tutta, Rudy potrebbe ottenere una scalenità simile nel disegnare un triangolo equilatero.

Che bello! lo stesso numero visto sopra! Concludiamo con ***BR1***:

In tempo d'agosto, ci occupiamo di *scalenità*, come suggerito in RM235. Per prima cosa, scegliamo il sistema di riferimento cartesiano qui sotto, sul quale è possibile rappresentare tutti i possibili triangoli, di lati a, b e c:

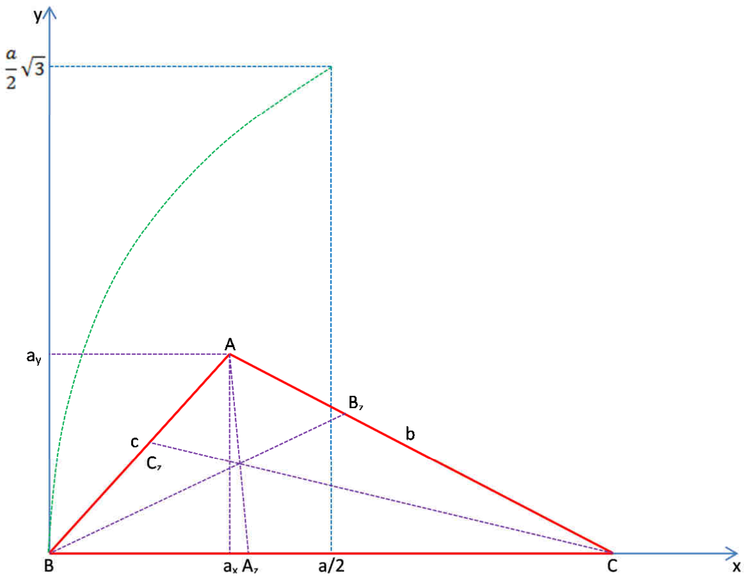


Figura 1: tutti i possibili triangoli

Stabiliamo di disporre sempre i triangoli in modo che il lato più lungo (BC) sia disposto sull'asse x, ed il più corto (AB) sulla sinistra; con opportune riflessioni e rotazioni, ogni triangolo concepibile può essere rappresentato in modo che il vertice A giaccia sempre nell'area compresa fra l'asse x, l'asse y con ordinate positive, la retta di equazione $x = a/2$, e la curva tratteggiata in verde. Le coordinate dei tre vertici – ed i loro vincoli – saranno quindi:

$$1)\ \begin{cases} A(a_x, a_y) \qquad B(0,0) \qquad C(a,0) \\ 0 \le c \le b \le a \quad 0 \le a_x \le {}^{a}/_{2} \quad 0 \le a_y \le \textit{Curva Verde} \end{cases}$$

Il limite in verde deriva dal fatto che non si vuole che il lato AC sia maggiore in lunghezza di quello BC (altrimenti, si potrebbe ruotare e/o riflettere il triangolo, per piazzarlo in modo che il lato più lungo giaccia sull'asse *x*) ; ciò si esprime scrivendo:

$$2)\ b \le a \to \sqrt{(a-a_x)^2 + a_y^2} \le a \to a_y \le \sqrt{a_x(2a-a_x)}$$

dove l'ultima espressione della 2) rappresenta appunto la curva in verde, che è un arco della circonferenza di centro C e raggio a.

Si ha poi, data la 2):

$$3)\ c = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \le \sqrt{a_x^2 + a_x(2a-a_x)} = \sqrt{2aa_x} \to a_x \ge \frac{c^2}{2a}$$

Dalla prima eguaglianza della 3) si deduce anche che:

$$4)\ c \ge a_x$$

Facendo muovere il vertice A all'interno dell'area suddetta, con le convenzioni adottate si descrivono come sopra indicato tutte le possibili *forme* di triangolo; e come incognite del problema abbiamo i due gradi di libertà del punto A, ma anziché scegliere le due coordinate di A, utilizzeremo a_x assieme alla lunghezza c del lato AB, assumendo costante la lunghezza a del lato BC. La lunghezza del lato AC può quindi venire espressa come segue in funzione delle due variabili scelte:

$$5)\ b = \sqrt{(a-a_x)^2 + a_y^2} = \sqrt{(a-a_x)^2 + (c^2 - a_x^2)} = \sqrt{a^2 + c^2 - 2aa_x}$$

● ● ● ● ●

In base alle prescrizioni del quesito, i tre *coefficienti di scalenità* sono definibili come segue:

$$6)\ \begin{cases} \omega_A = \dfrac{{}^a/_2 - BA_Z}{a} = \dfrac{a - 2a_Z}{2a} \\ \omega_B = \dfrac{{}^b/_2 - AB_Z}{b} = \dfrac{b - 2b_Z}{2b} \\ \omega_C = \dfrac{{}^c/_2 - AC_Z}{c} = \dfrac{c - 2c_Z}{2c} \end{cases}$$

Dove a_z, b_z e c_z sono rispettivamente le lunghezze dei segmenti BA_Z, AB_Z ed AC_Z; applicando il teorema della bisettrice si può scrivere:

$$7)\ \begin{cases} \dfrac{BA_Z}{c} = \dfrac{A_Z C}{b} \\ \dfrac{AB_Z}{c} = \dfrac{B_Z C}{a} \\ \dfrac{BC_Z}{a} = \dfrac{AC_Z}{b} \end{cases} \to \quad 8)\ \begin{cases} \dfrac{a_Z}{c} = \dfrac{a - a_Z}{b} \\ \dfrac{b_Z}{c} = \dfrac{b - b_Z}{a} \\ \dfrac{c - c_Z}{a} = \dfrac{c_Z}{b} \end{cases}$$

Ricavando a_z, b_z e c_z dalle 8), e ricordando la 5), dopo qualche passaggio si arriva alle seguenti espressioni per i *coefficienti di scalenità*:

$$9)\ \begin{cases} \omega_A = \dfrac{1}{2}\dfrac{b-c}{b+c} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{a^2+c^2-2aa_x} - c}{\sqrt{a^2+c^2-2aa_x} + c} \\ \omega_B = \dfrac{1}{2}\dfrac{a-c}{a+c} \\ \omega_C = \dfrac{1}{2}\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{1}{2}\dfrac{a - \sqrt{a^2+c^2-2aa_x}}{a + \sqrt{a^2+c^2-2aa_x}} \end{cases}$$

Con la convenzione adottata $c \le b \le a$, i tre coefficienti risultano sempre positivi; sono inoltre sempre tutti inferiori ad ½, tranne che nel caso limite $c = 0$, quando il triangolo degenera ed il punto A va a coincidere con B, per cui $\omega_A = \omega_B = ½$ ed $\omega_C = 0$.

Grazie alla stessa convenzione, in tutti i casi risulta poi sempre:

$$10)\ \begin{cases}\omega_B \ge \omega_A \\ \omega_B \ge \omega_C\end{cases}$$

La relazione fra ω_A ed ω_C è invece mista:

$$11)\ \begin{cases}\omega_A \ge \omega_C & Se\ a_x \le \dfrac{a^2+c^2-ac}{2a} \\ \omega_A < \omega_C & Se\ a_x > \dfrac{a^2+c^2-ac}{2a}\end{cases}$$

Per valutare l'andamento qualitativo dei tre coefficienti al variare di a_x e c, ne studiamo le derivate; premesso che:

$$12)\ \begin{cases}\dfrac{db}{dc} = \dfrac{d}{dc}\sqrt{a^2+c^2-2aa_x} = \dfrac{2c}{2\sqrt{a^2+c^2-2aa_x}} = \dfrac{c}{b} \\ \dfrac{db}{da_x} = \dfrac{d}{da_x}\sqrt{a^2+c^2-2aa_x} = \dfrac{-2a}{2\sqrt{a^2+c^2-2aa_x}} = -\dfrac{a}{b}\end{cases}$$

Si ha:

$$13)\ \begin{cases}\dfrac{d\omega_A}{dc} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dc}\left[\dfrac{b-c}{b+c}\right] = -\dfrac{1}{b}\dfrac{b-c}{b+c} < 0 \\ \dfrac{d\omega_B}{dc} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dc}\left[\dfrac{a-c}{a+c}\right] = -\dfrac{a}{(a+c)^2} < 0 \\ \dfrac{d\omega_C}{dc} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dc}\left[\dfrac{a-b}{a+b}\right] = -\dfrac{1}{b}\dfrac{ac}{(a+b)^2} < 0\end{cases}$$

Tutti i tre coefficienti decrescono al crescere di c; l'indicazione fornita dalle 13) è quindi di mantenere c il più piccolo possibile. Poi:

$$14)\ \begin{cases}\dfrac{d\omega_A}{da_x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{da_x}\left[\dfrac{b-c}{b+c}\right] = -\dfrac{1}{b}\dfrac{ac+b^2}{(b+c)^2} < 0 \\ \dfrac{d\omega_B}{da_x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{da_x}\left[\dfrac{a-c}{a+c}\right] = 0 \\ \dfrac{d\omega_C}{da_x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{da_x}\left[\dfrac{a-b}{a+b}\right] = \dfrac{1}{b}\dfrac{a^2}{(a+b)^2} > 0\end{cases}$$

Dalle 14), si conferma che ω_B è il coefficiente meno interessante: già dalle 10) si poteva notare che sono gli altri due coefficienti a determinare il massimo della *scalenità*, inteso come valore più grande ottenibile per il minore fra primo e terzo coefficiente delle 9). Se si rappresentano in grafico le curve relative a questi due coefficienti al variare di c/a e parametrate per diversi valori di a_x/a (avendo normalizzato i valori per renderli visualizzabili con Excel™), viene fuori quanto segue:

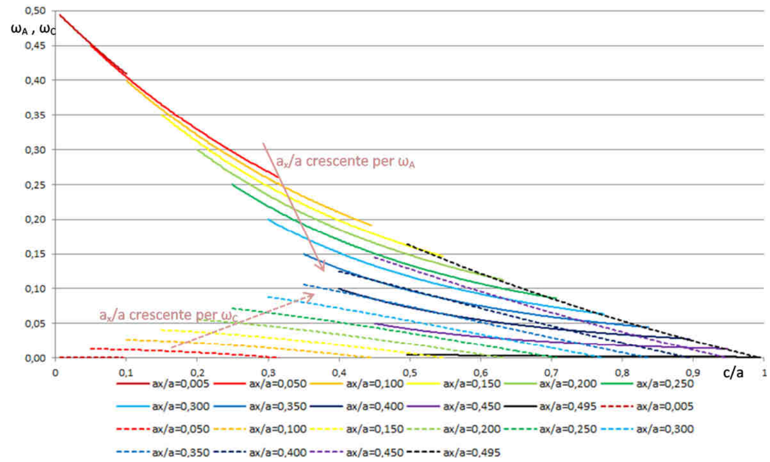


Figura 2: i coefficienti ω_A (linee continue) ed ω_C (linee tratteggiate)

Nel grafico, va osservato che:

- le varie curve hanno un inizio ed un termine: per *c/a* piccolo, le curve non sono definite per via della 4)
- analogamente, esse non sono definite per c/a elevato, come indicato dalla 3)
- come espresso dalle 11), per valori piccoli di a_x/a le curve relative ad ω_A giacciono al di sopra di quelle relative ad ω_C, viceversa per valori elevati. Per un valore compreso fra $a_x/a = 0{,}3$ ed $a_x/a = 0{,}4$ avviene lo *scavalco*
- tutte le curve, come espresso dalle 13), sono decrescenti; quindi qualunque sia il valore di a_x/a che si sceglie, il valore *migliore* per il minore dei coefficienti è quello più a sinistra, dove (purtroppo…) $c = a_x$

Adesso, consideriamo uno *zoom* della Figura 2 per la parte in basso a destra dell'immagine, dove le due famiglie di curve si *scavalcano*:

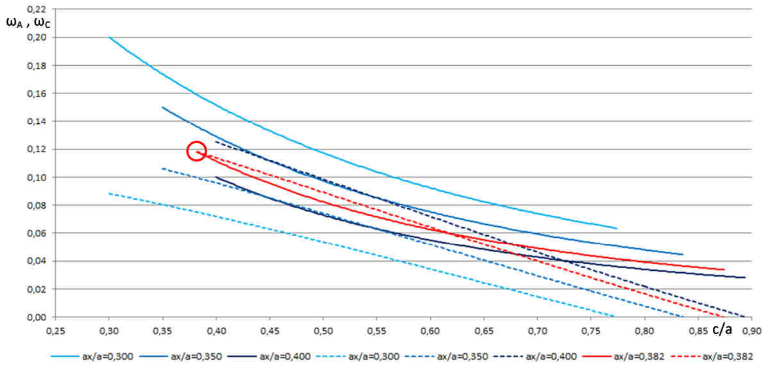


Figura 3: lo *scavalco*, ed il punto *migliore*

Qui, si è aggiunta in rosso la coppia di curve in corrispondenza delle quali avviene lo *scavalco*; il punto di contatto fra esse, sulla sinistra nel cerchietto, indica l'*ottimo di scalenità*. Se infatti a_x/a fosse appena minore, la curva tratteggiata si sposterebbe in basso, portando ad una riduzione di ω_C; con a_x/a appena maggiore, sarebbe la curva continua a scendere, facendo ridurre ω_A.

Quindi, il punto cercato soddisfa le due condizioni:

$$15)\ \begin{cases} \omega_A = \omega_C \\ c = a_x \end{cases}$$

Utilizzando la condizione espressa a destra nella prima delle 11), si ottiene:

$$16)\ c = \frac{a^2 + c^2 - ac}{2a}$$

Da cui si ricava:

$$17)\ \begin{cases} \dfrac{c}{a} = \dfrac{a_x}{a} = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0{,}381966 + \\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac}}{a} = \dfrac{a - c}{a} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0{,}618033 + \end{cases}$$

E quindi:

$$18)\ \begin{cases} \omega_A = \dfrac{1}{2}\dfrac{b - c}{b + c} = \dfrac{\sqrt{5} - 2}{2} = 0{,}118033 + \\ \omega_B = \dfrac{1}{2}\dfrac{a - c}{a + c} = \dfrac{\sqrt{5}}{8} = 0{,}279508 + \\ \omega_C = \dfrac{1}{2}\dfrac{a - b}{a + b} = \dfrac{\sqrt{5} - 2}{2} = 0{,}118033 + \end{cases}$$

Il *purtroppo* di qualche riga più sopra si giustifica perché, essendo $c = a_x$, il lato AB del triangolo è schiacciato sulla parte sinistra del lato BC, e di conseguenza il lato AC sulla parte destra; quindi il triangolo è *degenere*:

Figura 4: il *triangolo* più scaleno che vi sia, versione 1

● ● ● ● ●

Il *triangolo* di Figura 4, se tale può dirsi, non è per niente soddisfacente; si è provato allora a ridefinire il concetto di *scalenità*, lasciando intatte le definizioni dei tre coefficienti, ma cercando adesso di massimizzare non il più piccolo dei tre, bensì la loro media geometrica, e cioè:

$$19)\ \omega_{ABC} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[3]{\omega_A \omega_B \omega_C}$$

Dalle 9):

$$20)\ \omega_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{(b+c)(a+c)(a+b)}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\left(\sqrt{a^2+c^2-2aa_x}-c\right)(a-c)\left(a-\sqrt{a^2+c^2-2aa_x}\right)}{\left(\sqrt{a^2+c^2-2aa_x}+c\right)(a+c)\left(a+\sqrt{a^2+c^2-2aa_x}\right)}}$$

Con le solite convenzioni sui valori di a, b e c, ω_{ABC} si annulla in due casi nell'intervallo di interesse (in funzione di a_x), cioè per:

$$21)\ \begin{cases} a = \sqrt{a^2+c^2-2aa_x} \\ \sqrt{a^2+c^2-2aa_x} = c \end{cases}$$

Da cui:

$$22)\ \begin{cases} \dfrac{a_{x01}}{a} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a}\right)^2 \\ \dfrac{a_{x02}}{a} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Nell'intervallo fra questi due valori, ω_{ABC} è sempre positivo, e deve quindi presentare almeno un massimo. Per trovarlo, occorre annullare la derivata della 20) rispetto ad a_x, o anche – essendo la funzione radice monotona – la derivata dell'argomento della radice:

$$23)\ \frac{d\omega_{ABC}}{da_x} = 0 \rightarrow \frac{d}{da_x}\left[\frac{\left(\sqrt{a^2+c^2-2aa_x}-c\right)(a-c)\left(a-\sqrt{a^2+c^2-2aa_x}\right)}{\left(\sqrt{a^2+c^2-2aa_x}+c\right)(a+c)\left(a+\sqrt{a^2+c^2-2aa_x}\right)}\right] = 0$$

Eseguendo il calcolo, dopo vari passaggi si trova che la derivata si annulla per:

$$24)\ ac = a^2 + c^2 - 2aa_x$$

Cioè:

$$25)\ ac = b^2$$

La 25) sembra un risultato elegantissimo; purtroppo (di nuovo…) le cose non sono così splendide…; guardiamo infatti che aspetto abbia la famiglia di curve espressa dalla 20), parametrate al variare di c/a:

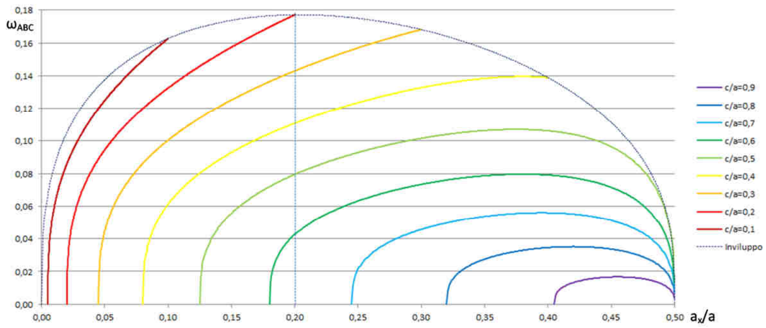


Figura 5: il coefficiente ω_{ABC}, per svariati valori di c/a

Anche stavolta, molte delle curve sono tronche, e si interrompono in alto verso destra quando si ha $a_x = c$; la prima a potersi completare fino al punto di ascissa $a_x/a = ½$ è quella in verde chiaro, quando anche $c/a = ½$. La brutta notizia è che pur avendo ridefinito il coefficiente di *scalenità*, il triangolo che comporta l'*ottimo di scalenità* è ancora *degenere*, dato che dalla figura si vede che il massimo della famiglia di curve si trova nei pressi della curva rossa (quella con $c/a = 0{,}2$), che è una di quelle tronche, e per le quali vale ancora $a_x = c$ nel punto culminante. Quindi di nuovo il lato AB del triangolo è schiacciato sulla parte sinistra del lato BC, eccetera.

Avendo iniziato il calcolo, però, portiamolo in fondo. Le curve che si interrompono sono quelle per cui $a_x = c$; sostituendo ciò nella 20), possiamo definirne l'*inviluppo*, che sarà il nuovo coefficiente di *scalenità*. Si ha:

$$26)\begin{cases} c = a_x \\ b^* = \sqrt{a^2 + c^2 - 2aa_x} = \sqrt{a^2 + a_x^2 - 2aa_x} = a - a_x \end{cases}$$

E quindi:

$$27)\ \omega^*_{ABC} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{(b^* - a_x)(a - a_x)(a - b^*)}{(b^* + a_x)(a + a_x)(a + b^*)}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{(a - 2a_x)(a - a_x)a_x}{a(a + a_x)(2a - a_x)}}$$

La curva che rappresenta questo coefficiente – l'*inviluppo* – è mostrata con linea tratteggiata in Figura 5; il suo massimo si ottiene derivando rispetto ad a_x; basta ancora derivare azzerando l'argomento della radice:

$$28)\ \frac{d}{da_x}\frac{(a - 2a_x)(a - a_x)a_x}{a(a + a_x)(2a - a_x)} = 0$$

Calcolando la derivata, dopo svariati passaggi si arriva alla risolvente:

$$29)\ a_x^4 - 2aa_x^3 - 5a^2a_x^2 + 6a_xa^3 - a^4 = 0$$

E, dopo qualche telefonata a Cardano e Ferrari[30], si possono trovare le quattro radici della 29):

$$30)\begin{cases} {}^{a_{x1}}/_{a} = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} - \sqrt{2} = -2{,}03224 - \\ {}^{a_{x2}}/_{a} = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} = 0{,}796179 + \\ {}^{a_{x3}}/_{a} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} - \sqrt{2} = 0{,}203820 + \\ {}^{a_{x4}}/_{a} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} = 3{,}032247 + \end{cases}$$

Dati i soliti vincoli sul valore di a_x, l'unica determinazione accettabile è quella in rosso; carino che appaia il rapporto aureo nella soluzione…

Si ha quindi, dopo svariati passaggi algebrici:

$$31)\ \omega^*_{ABC\,MAX} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{(a - 2a_{x3})(a - a_{x3})a_{x3}}{a(a + a_{x3})(2a - a_{x3})}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{8\sqrt{2} - 5\sqrt{5}}{3}} = 0{,}177125 +$$

Da notare che la media geometrica dei risultati ottenuti col criterio di *scalenità* precedente era ovviamente più bassa; utilizzando infatti la 18):

$$32)\ \omega_{ABC} = \sqrt[3]{\omega_A\omega_B\omega_C} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}\frac{\sqrt{5}}{8}\frac{\sqrt{5} - 2}{2}} = 0{,}157326 +$$

Nel caso corrente si ha infine:

$$33)\begin{cases} {}^{c}/_{a} = {}^{a_x}/_{a} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} - \sqrt{2} = 0{,}203820 + \\ {}^{b}/_{a} = 1 - {}^{c}/_{a} = 0{,}796179 + \end{cases}$$

[30] In realtà, sono bastate la pagina web https://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_di_quarto_grado, ed un po' di pazienza…

Figura 6: il *triangolo* più scaleno che vi sia, versione 2

● ● ● ● ●

Ma non disperiamo; proviamo adesso a massimizzare il prodotto fra il coefficiente definito dalla 19) e l'area ATN del triangolo (normalizzata rispetto all'area del triangolo equilatero di lato BC, così da ottenere ancora un coefficiente adimensionale), cioè la quantità:

$$34)\ \omega_S \stackrel{\text{def}}{=} A_{TN}\sqrt[3]{\omega_A\omega_B\omega_C}$$

Dove:

$$35)\ A_{TN} = \frac{\frac{aa_y}{2}}{a^2\frac{\sqrt{3}}{4}} = 2\sqrt{\frac{c^2-a_x^2}{3a^2}}$$

Quindi c'è da trovare il massimo di:

$$36)\ \omega_S = \sqrt{\frac{c^2-a_x^2}{3a^2}}\sqrt[3]{\frac{\left(\sqrt{a^2+c^2-2aa_x}-c\right)(a-c)\left(a-\sqrt{a^2+c^2-2aa_x}\right)}{\left(\sqrt{a^2+c^2-2aa_x}+c\right)(a+c)\left(a+\sqrt{a^2+c^2-2aa_x}\right)}}$$

Se si calcola la derivata della 36) rispetto ad a_x e la si azzera, si arriva al seguente polinomio di settimo grado:

$$\begin{aligned}37)\ 288a^3a_x^7 - 32a^2(13a^2-ac+13c^2)a_x^6 + 8a(25a^4-2a^3c+72a^2c^2-2ac^3+25c^4)a_x^5\\ -4(8a^6+71a^4c^2+14a^3c^3+71a^2c^4+8c^6)a_x^4\\ +2ac^2(34a^4+16a^3c+45a^2c^2+16ac^3+34c^4)a_x^3\\ -c^2(8a^6-7a^4c^2-16a^3c^3-7a^2c^4+8c^6)a_x^2\\ -16ac^4(a+c)(a^3+c^3)a_x+4c^4(a^3+c^3)^2=0\end{aligned}$$

E qui ci arrendiamo… Oltre che notare l'elegante simmetria dei coefficienti della 37), altro non si può fare per via algebrica. Possiamo però rappresentare, sempre grazie ad Excel™, anche la famiglia di curve espressa dalla 36), ancora parametrate al variare di c/a:

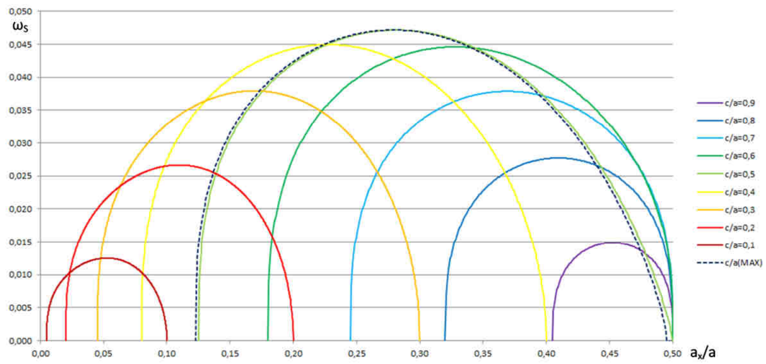


Figura 7: il coefficiente ω_S , per svariati valori di *c/a*

Si vede che stavolta un massimo decente c'è, con *c/a* circa pari ad ½ e ben diverso da a_x; procedendo per via numerica si ricava:

$$38)\ \begin{cases}\frac{c}{a} = 0{,}495162+\\ \frac{a_x}{a} = 0{,}279071+\\ \frac{b}{a} = 0{,}828879+\end{cases}$$

La curva corrispondente alle 37) è rappresentata tratteggiata in Figura 7; il relativo triangolo è mostrato qui sotto in Figura 8:

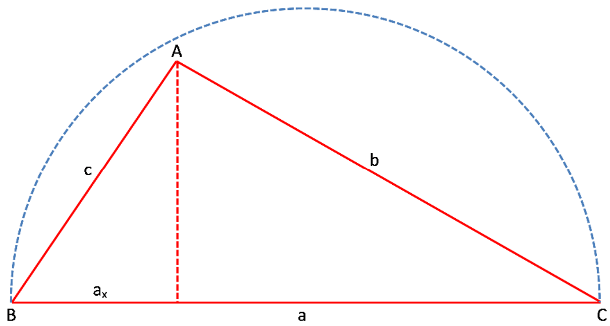


Figura 8: il triangolo più scaleno che vi sia, versione 3

Si tratta di un triangolo ottusangolo, in quanto il vertice A giace all'interno della semicirconferenza di diametro BC; in questo caso si ha infine:

$$39)\ \begin{cases} \omega_A = \dfrac{1}{2}\dfrac{b-c}{b+c} = 0{,}126022+ \\ \omega_B = \dfrac{1}{2}\dfrac{a-c}{a+c} = 0{,}168823+ \\ \omega_C = \dfrac{1}{2}\dfrac{a-b}{a+b} = 0{,}046782+ \\ \omega_{ABC} = \sqrt[3]{\omega_A\omega_B\omega_C} = 0{,}099844+ \end{cases}$$

Ed è tutto; saluti.

In effetti qui ci fermiamo, per passare al secondo problema.

6.1.2 …caldo…

Secondo problema che è ambientato come al solito in una città che assomiglia a Torino, con intenzioni di migliorie stradali:

In un'area della città, caratterizzata dal non avere piazze, formata da dieci strade in direzione est-ovest e sei in direzione nord-sud, con isolati perfettamente quadrati, si installano degli idranti. Gli idranti vanno piazzati agli incroci (considerati punti geometrici, esattamente come le vie sono considerate rette senza spessore) in modo tale da far sì che ogni incrocio abbia un idrante disponibile alla distanza di al più due lati-di-isolato. Come si procede per minimizzare il numero degli idranti?

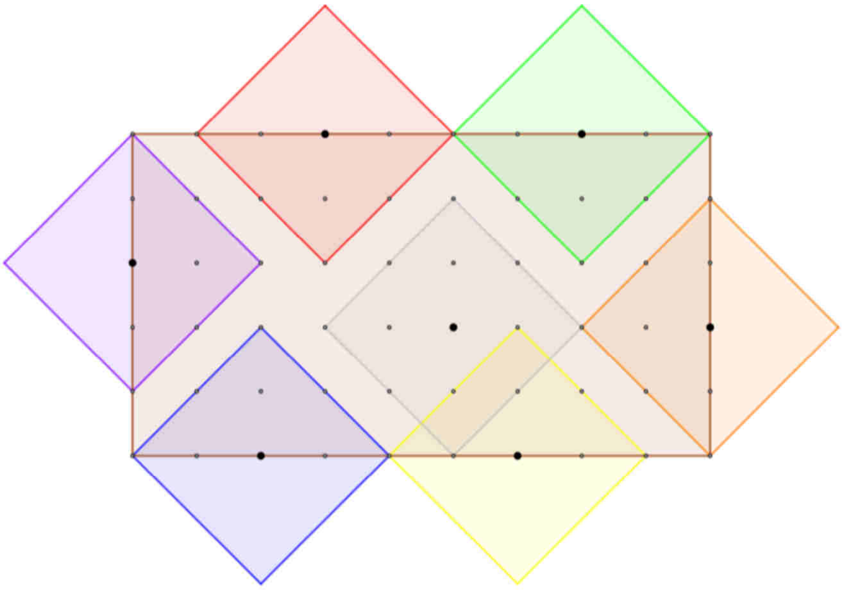
Anche qui partiamo subito con la soluzione di ***Valter***, che parte da ricordi di gioventù:

Non so se sia il modo per avvicinarsi alla soluzione (e nemmeno se sia quella corretta). Mi ha fatto venire in mente un ricordo di gioventù. Quando arrivava la fiera i miei di solito mi ci portavano. C'era un gioco che attirava sempre la mia attenzione. Si trattava di coprire completamente un cerchio con dei dischi. Ho provato a cercare in rete se c'era qualcosa. Ho trovato solo un riferimento a questo link: https://www.youtube.com/watch?v=VBZ715Y5lVY&app=desktop .

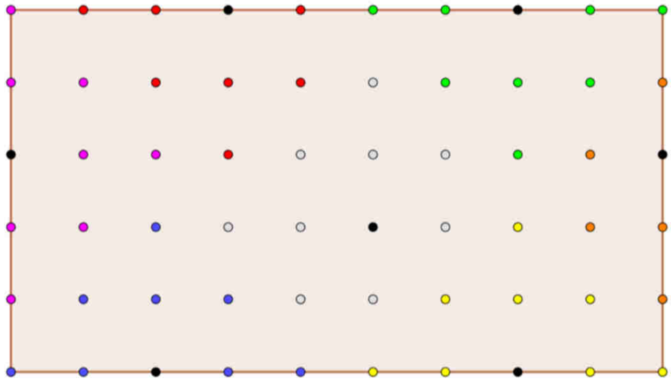
Data la disposizione degli incroci invece di dischi o pensato a quadrati. Li ho fatti in modo che delimitino i 13 incroci "coperti" da un idrante. Ho poi provato a muoverli e sovrapporli per coprire tutti gli incroci. Il minimo numero di idranti che sono riuscito ad ottenere è 7. Ogni idrante copre 13 incroci e ce ne sono in tutto 60. Si potrebbe arrivare quindi, in teoria, ad un minimo di 5 idranti. I quadrati hanno però le diagonali parallele ai lati degli isolati. Questo costringe almeno a "portare fuori"/sovrapporre alcuni incroci (p.e. quelli ai vertici dei quadrati, un po' come per i dischi di cui sopra).

Propongo due immagini che dovrebbero essere un po' esplicative (almeno questa sarebbe la mia intenzione).

Disposizione dei quadrati (i punti neri al centro di ognuno sono gli idranti):

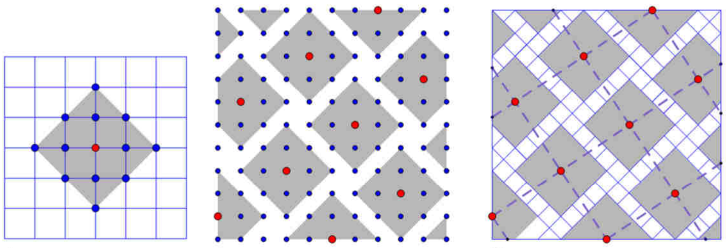


Idranti e incroci coperti (ho usato colori diversi scegliendone uno in caso di sovrapposizione):



La seconda versione è quella di ***trentatre***:

Indico con ***P*** un incrocio stradale, con ***I*** un incrocio con idrante.



1 2 3

In fig. 1 l'idrante ***I*** (rosso) copre con percorso di due lati (anche a L) i 13 incroci ***P*** (blu) posti nel quadrato ***Q*** (grigio). Con i ***Q*** si può coprire l'intero piano con la tassellatura[31] ***T*** di fig. 2 dove

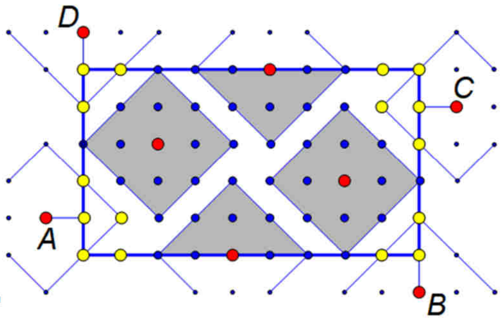
- <u>ogni ***P*** è associato a uno e un solo ***I***</u>
- ***T*** copre tutti i punti (gli incroci) con il minimo di ***I*** ed è quindi ottimale
- ***T*** è l'unica disposizione possibile di questo tipo, invariante salvo per riflessione

[31] ***T*** è una tassellatura formata da due tipi di quadrati (fig. 3) – collegando gli ***I*** con rette si ottiene invece una scacchiera di lato $\sqrt{2^2+3^3} = \sqrt{13}$ e area del quadrato pari a 13 quadrati unitari.

- i punti del piano sono divisi in gruppi di 13, ognuno con al centro un ***I*** .

Si può ottenere una soluzione al problema per qualsiasi area rettangolare, posizionando il rettangolo su ***T*** e verificando la situazione sui bordi. ***T*** è periodico e le posizioni da verificare sono in numero finito.

Per l'area delimitata da 6 e 10 strade – cioè un rettangolo di 5x9 quadrati – non ho trovato soluzioni con meno di 8 idranti. Un esempio in fig. 4 – i quattro ***I*** interni o sul bordo dell'area servono tutti i ***P*** dell'area salvo quelli gialli, per cui occorrono almeno altri quattro idranti, ottenuti p.es. spostando sul bordo gli esterni *A*, *B*, *C*, *D*.



4

Il problema si può estendere cambiando la distanza *n* coperta da un idrante – cambiano solo, in fig. 1 e 2, il quadrato ***Q*** e lo schema ***T***. Al variare di *n* l'area di ***Q*** è $2n^2 = 2, 8, 18, 32, \ldots$ e l'area del quadrato fra quattro ***I*** è $n^2 + (n+1)^2 = 5, 13, 25, 41, \ldots$

Bene, per concludere vediamo la versione di ***Fabrizio***:

Premessa.

Lo so: voi Rudi Mathematici avete il debole per l'approccio analitico; io invece di solito procedo per "tentativi", direi "tentativi ben architettati" o, per farla breve, per algoritmi. Tuttavia, non ho dubbi che apprezziate anche l'eleganza degli algoritmi, soprattutto quando, teorema dopo teorema, portano a una soluzione su "due piedi".

Veniamo a noi: la mappa che descrivete è rappresentabile con un grafo a griglia dove i nodi sono gli incroci e gli archi i lati degli isolati. Mi pare di poter dire che determinare il minimo numero di idranti in modo da rispettare il vincolo dell'idrante "disponibile a non più di due lati-di-isolato" corrisponda a risolvere il problema combinatorio della minima copertura con nodi, cioè selezionare il minimo numero di nodi in modo tale che ogni arco del grafo sia "toccato" da almeno un nodo selezionato. Alternativamente, si può pensare al seguente problema equivalente (teorema di Gallai): supponiamo di avere un idrante per ogni incrocio e di volerne rimuovere il massimo numero in modo da rispettare il sopra citato vincolo. Siccome non posso mai rimuovere due idranti adiacenti (altrimenti ne avrei almeno una coppia ad una distanza > 2), l'insieme degli idranti rimossi è evidentemente un massimo insieme indipendente.

Siccome il grafo è bipartito, i suddetti problemi si possono risolvere in modo efficiente (teorema di Konig). Inoltre, siccome il grafo è una griglia, la soluzione è banalmente la metà del numero di incroci (cioè 30) e gli idranti possono essere disposti seguendo la regola "se indice riga + indice colonna = dispari allora metti idrante, altrimenti no". Segue che le possibili soluzioni ottime sono solo 2.

Lo stesso rude approccio (calcolo di un massimo insieme indipendente), che risolve il caso di NY e della graziosa cittadina anonima, può essere utilizzato su qualsiasi mappa. Peccato però che in generale i calcoli da fare non sono pochi…

Mi limito al caso del cubo.

Approcci più o meno rudi, ma tutti benvenuti! Chiudiamo qui e vi rimandiamo al prossimo mese.

7. Quick & Dirty

Se a, b, c formano un triangolo, trovate per quali valori di n formano un triangolo anche $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{c}$.

Dalla disuguaglianza triangolare, si ha:

$$a + b > c$$

e similari. Da cui:

$$(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})^n > a + b > c = (\sqrt[n]{c})^n$$

Il che dà:

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} > \sqrt[n]{c}$$

Quindi la relazione è verificata per qualsiasi valore di n.

8. Zugzwang!

8.1 Cerchio-Quadrato-Triangolo (CQT)

Gioco facile da spiegare, questa volta, quindi la prendiamo alla larga. Ben sapendo che siete dei veri esperti nel ***non*** giocare nessuno dei giochi che presentiamo. E diciamo questo senza alcun intento polemico.

Perché qualche gioco non ha successo? “È brutto”: no, almeno in questo caso. “È complicato”: stessa risposta di cui sopra. “Costa caro”: anche se secondo noi sarebbe meglio giocarlo su una scacchiera con pezzi colorati, potete cavarvela con un foglio di carta a quadretti e una matita (non vi servono neanche due colori diversi). “Non riesco a capire la notazione di partita”: è talmente semplice che non ci degneremo neanche di spiegarla. “Le partite finiscono sempre pari”: qui non esiste la patta, e la partita dura comunque un numero finito di mosse. “Le istruzioni sono scritte nella lingua di un paese che ha nominato Presidente uno con dei capelli ridicoli”: questo lo ha inventato Costanzo ZINGRILLO, nel 2004 (PresConsMin: Silvio Berlusconi… Ops…).

E come gioco è un illustre sconosciuto, il che a noi sembra profondamente ingiusto. E ci piacerebbe capire almeno il perché.

I ***giocatori*** sono due (Nord e Sud), e gioca per primo Sud.

Il ***tavoliere*** sono due file di nove quadretti orizzontali: Sud gioca su quella in basso, Nord su quella in alto: per motivi di notazione, sono numerate da 1 a 9 (da sinistra secondo Sud): essendo evidente di quale riga si sta parlando, non viene indicato altro.

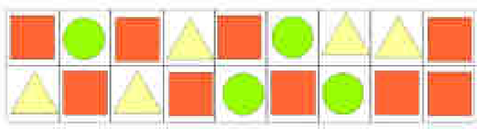
I ***pezzi*** sono il Cerchio, il Quadrato e il Triangolo (se volete fare i sanguinari guerrafondai, vi proponiamo di nostra iniziativa “la Bomba, la Berta – nel senso del cannone della prima guerra mondiale – e il Cecchino[32]”). Volendo coprire anche i casi patologici ve ne servono 18 per ogni tipo, anche se ne userete sempre e solo 18 per partita.

La ***partita*** si gioca in due fasi:

Nella ***prima fase***, alternandosi, i giocatori mettono il pezzo che vogliono dove vogliono nel loro lato di scacchiera (OK, “disegnano il pezzo...”. Ma, come dicevamo, l’idea di avere pezzi e scacchiera “fisici” ci pare una buona cosa). La fase si ***chiude*** quando tutte le caselle sono occupate.

Esempio di prima fase di una partita (Sud muove per primo):

1. C7, Q1
2. T1, Q3
3. Q2, C2
4. T3, Q5



15 *Situazione a fine prima fase.*

[32] Se trovate un termine coerente che cominci per “B”, fatecelo sapere, poi però la notazione sono tutti cavoli vostri. No, “Becchino” non vale.

5. C5, T7
6. Q4, T4
7. Q6, T6
8. Q8, T8
9. Q9, Q9

Notate che ogni prima fase dura comunque nove mosse.

Nella ***seconda fase***, si eliminano i pezzi: nel senso che si toglie un proprio pezzo, ma la cosa ha un effetto *obbligato* sui pezzi avversari:

Il *Cerchio* elimina un Cerchio o un Triangolo avversario (a scelta) e *tutti* i simboli uguali a quello eliminato e a lui adiacenti.

Il *Triangolo* elimina il simbolo che si trova di fronte a lui

Il *Quadrato* elimina un Cerchio o un Quadrato avversario (a scelta).

Abbiamo stressato il fatto che l'effetto sia *obbligato*: se non potete fare la presa, non potete eliminare i vostri pezzi: ad esempio se volete eliminare un vostro Cerchio ma l'avversario ha solo Quadrati (che non possono essere presi con i Cerchi), non potete farlo.

Una cosa che ci piace è che "ciascuno gioca dalla sua parte": non solo, ma i FPF (Fine Prima Fase) non ci sembrano tantissimi, considerato che (ad esempio) "Q2" potete decidere di giocarlo ad una mossa qualsiasi, l'FPF non cambia. Potreste calcolare quanti sono...

Adesso, sarete tutti talmente appassionati che vorrete sapere come è andata a finire la partita precedente: ve lo diciamo commentando le mosse (no, i commenti non sono nostri: abbiamo giocato tante partite quanto voi):

10. C5xT7xT8 [*Sud elimina i due Triangoli adiacenti T7 e T8*], C2xQ8xQ9 [*Nord utilizza la stessa strategia e cattura i due quadrati Q8 e Q9*].
11. T1xQ1, Q3xQ2 [*in modo da neutralizzare T3, togliendogli il bersaglio*]
12. Q4xC6, Nord abbandona [*Sud toglie a Nord due azioni in un colpo solo: il T4 è senza bersaglio. Se Nord gioca Q5xQ6, Sud gioca C7xT4, e Nord non può giocare Q9. Se Nord gioca Q5xQ7, Sud gioca Q6xQ9 e vince*]

A noi piace molto, e la seconda fase, anche se breve, richiede delle ponzate mica da ridere: non solo ma, data una FPF definita, con un programmino non ci pare impossibile implementare un "brute force" che sviluppi l'intero albero del gioco.

Fateci sapere (seeh, come no...).

9. Pagina 46

Procediamo per assurdo, supponendo la funzione sia periodica.

Allora deve essere, per un qualche numero positivo p:

$$f(x+p)=f(x), \quad \forall\, x\in\mathbb{R}\ .$$

Per x=0, questo significa:

$$f(p)=f(0)=\sum_{k=1}^{n}\cos(0)=\sum_{k=1}^{n}1=n$$

Ossia,

$$f(p)=\sum_{k=1}^{n}\cos(p\sqrt{k})=n$$

Ma non assumendo mai il coseno valori maggiori di 1, deve essere $\cos(p\sqrt{k}) = 1$; in particolare, dovrà essere:

$$\cos(p\sqrt{1}) = 1 \text{ e } \cos(p\sqrt{2}) = 1.$$

Ma il coseno assume il valore 1 solo per multipli interi di 2π: quindi, per qualche s e t interi, deve essere:

$$p\sqrt{1} = 2\pi s \text{ e } p\sqrt{2} = 2\pi t\ .$$

Dividendo la seconda uguaglianza per la prima ed effettuando le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$\sqrt{2}=\frac{t}{s}$$

che, essendo *r* e *t* interi, è un'espressione razionale di un numero irrazionale. Il che è assurdo, quindi la funzione non è periodica.

10. Paraphernalia Mathematica

In questa estate solatia e condizionata (nel senso che l'abbiamo passata per buona parte nell'aria condizionata), abbiamo ritrovati alcuni appunti riguardanti un argomento che, anche se ormai trattato *ad nauseam*, continua a fornirci nuove ed interessanti sorprese.

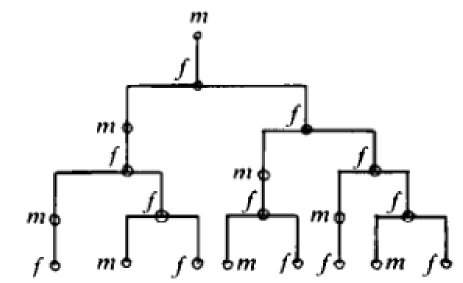
10.1 Le api sono meglio dei conigli (ed altre affermazioni balzane)

Non sappiamo quanto vi sia simpatico l'esempio dei conigli relativamente alla successione di Fibonacci, ma non ci ha mai pienamente convinto.

Un esempio migliore, almeno secondo noi, è dato dalla *genealogia dei fuchi*: nel caso i vostri ricordi di biologia fossero (se possibile) ancora più arrugginiti dei nostri, vi ricordiamo che questi simpatici imenotteri hanno, per ogni nido, una femmina fertile (la regina), una notevole numero di femmine sterili (le operaie) e un certo numero di maschi (i fuchi); se le uova vengono fecondate[33] nascono femmine (regine o operaie), se non vengono fecondate nascono maschi.

Consideriamo quindi il nostro maschio: alla generazione precedente, dobbiamo aver avuto una singola femmina, la mamma deve aver avuto come genitori un maschio e una femmina (i nonni materni del Nostro). Ora, per generare il nonno materno è bastata una femmina, ma per la nonna materna sono stati necessari una femmina e un maschio...

Proviamo a riassumere il tutto in un diagramma ad albero che trovate nella figura qui a fianco: "m" sta per "maschio" (e quello in cima è il Nostro), mentre "f" sta per "femmina" (e infatti nella seconda riga c'è la mamma del Nostro).



16 *Festa di compleanno.*

Se contiamo gli elementi in una generazione (e contiamo le righe del nostro grafico come "indice di generazione"), vediamo che la prima riga ha un elemento (il Nostro), la seconda riga ha un elemento (la sua mamma), la terza ha due elementi, la quarta ne ha tre, la quinta ne ha cinque, la sesta ne ha otto... ora, dato "1, 1, 2, 3, 5, 8", ci aspettiamo siate in grado di derivarne i termini successivi.

Esiste comunque una dimostrazione molto elegante di questo fatto. Ogni ape ha, come visto sopra, una mamma: quindi, il numero delle femmine alla generazione precedente (la "riga dopo") deve essere pari al numero delle api nella generazione attuale. Ma ogni maschio ha una mamma, quindi il numero di maschi in una generazione (consideriamo quella che abbiamo chiamato "la riga dopo") è pari al numero delle femmine della generazione precedente (nella nostra notazione, "due righe dopo"). Il che significa $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, che è la formula che cercavamo. Q.E.D. Carina, vero?

Tempo fa, avevamo soprannominato un parente stretto della successione di Fibonacci (la sezione aurea), il "prezzemolo della matematica", per la sua caratteristica di spuntare fuori nei punti più impensati; il seguente teorema ci fa venire voglia di soprannominare la successione come "*Prezzemolo ma non troppo*", vista l'affermazione comprendente un limite superiore:

Se n e k sono due interi positivi qualsiasi, allora tra n^k e n^{k+1} non compaiono più di n numeri di Fibonacci.

Per dimostrarlo, utilizzeremo la relazione (si noti che "manca" il termine f_{n+1}):

$$s_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1,$$

che si dimostra facilmente per induzione.

[33] Una nota per i pignoli: la regina è in grado di conservare il seme anche per lunghi periodi.

Per assurdo, supponiamo tra n^k e n^{k+1} ci siano *almeno* n+1 numeri di Fibonacci, ossia $n^k < f_{r+1} < f_{r+2} < \ldots < f_{r+n+1} < \ldots < n^{k+1}$.

La somma dei primi n – 1 di questi numeri sarà allora:

$$\begin{aligned} f_{r+1}+f_{r+2}+\ldots+f_{r+n-1} &= s_{r+n+1}-s_r \\ &= (f_{r+n+1}-1)-(f_{r+2}-1) \\ &= f_{r+n+1}+f_{r+2} \end{aligned}$$

dove nella seconda riga abbiamo applicato la regola vista sopra.

Risolvendo per f_{r+n+1} , si ha:

$$f_{r+n+1}=(f_{r+1}+f_{r+2}+\ldots+f_{r+n-1})+f_{r+2}$$

con il secondo membro composto da n numeri di Fibonacci, ciascuno dei quali maggiore di n^k ; quindi la loro somma sarà sicuramente maggiore di $n(n^k) = n^{k+1}$, e quindi anche f_{r+n+1} sarà maggiore di questo valore, il che contraddice la nostra tesi.

A noi sono sempre piaciute le dimostrazioni senza parole, ma siamo rimasti stupiti quando ne abbiamo trovata una ***dimostrazione senza parole e senza disegno*** (va bene, abbiamo barato un po'... è che il disegno lo conoscono tutti):

$$f_1^2+f_2^2+\ldots+f_n^2=f_n f_{n+1} .$$

Per dimostrarla, prendete la costruzione del rettangolo aureo (quello che serve a costruire la spirale logaritmica) e pensate a quanto sono lunghi i lati e quali siano i lati dei vari quadrati...

Ernesto Cesàro (Napoli, 12/03/1859 – Torre Annunziata, 12/09/1906) era un tipo strano (insegnante universitario senza laurea, per dirne una), quindi non stupisce che, a parte serissimi teoremi, pubblicasse anche delle "osservazioni" che raccogliamo (senza dimostrazione) sotto il generico termine di ***Divèrtissement à la Cèsàro***:

Sviluppando la potenza del binomio:

$$(1+2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_rx^r+\ldots+a_nx^n ,$$

Sostituiamo a ogni r-esima potenza di x l'r-esimo numero di Fibonacci:

$$S=a_0+a_1f_1+a_2f_2+\ldots+a_rf_r+\ldots+a_nf_n .$$

Si ha $S = f_{3n}$.

Più in generale (ma le linee di dimostrazione sono le stesse, basate sull'ottenimento della relativa formula di Binet):

$$S=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f_k=f_{2n} .$$

Carine, vero?

Della prossima cosa ne abbiamo (molto vagamente) già parlato, ma abbiamo scoperto che ha caratteristiche più generali interessanti; non resistiamo alla tentazione di darle il nome di un'interiezione che non abbiamo mai sopportato, ossia "***Cosa mi rappresenta?***", anche perché come vedremo la risposta è "tutto, anzi di più".

Parliamo di *rappresentazioni*. Cominciamo con un problemino.

Se F è la successione di Fibonacci (tutta quanta), trovate un sottoinsieme che dia come somma 100.

Non ci vuole molto ad accorgersi che (ad esempio), 89+8+3=100: e, se provate con altri numeri al posto di 100, dovreste comunque farcela a trovare delle *rappresentazioni* di queste all'interno della serie.

Generalizzando, supponiamo di avere una successione in cui i numeri sono in ordine *non decrescente*[34]: diciamo che la nostra successione è *completa* se qualsiasi numero intero positivo *n* può essere *rappresentato* come somma di una qualche sotto-sequenza della sequenza data: con l'esempio, dovrebbe essere tutto più chiaro.

Come si fa a verificare se una successione è completa? Cominciamo con un minimo di senso comune.

Il valore 1 deve essere nella successione, visto che se voglio rappresentare il valore 1 devo prendere il termine 1.

Il caso risolubile più semplicemente è il caso in cui venga richiesto di rappresentare il numero v_n che appartiene alla successione: in questo caso, prendete v_n e il vostro lavoro è finito.

Quale può essere il caso "più difficile"? Intuitivamente, "il caso facile meno uno", ossia, se v_n appartiene alla successione, vi si chiede di rappresentare $v_n - 1$. In questo caso, siamo liberi di usare i termini v_1, v_2, …, v_{n-1}, visto che i successivi sono troppo grandi.

Esistono dei casi in cui siamo *sicuri* di non farcela? Ragionando per questa via pessimista, potremmo trovare le condizioni *necessarie* per avere una successione completa. Trovare il caso in cui "sicuramente non funziona" è abbastanza facile: basta che la somma di *tutti* i termini che possiamo usare sia minore del numero cercato.

Quindi, le due condizioni necessarie affinché una successione sia completa sono:

1. $v_1 = 1$
2. $\forall\ k>1, s_{k-1} = v_1 + v_2 + \ldots v_{k-1} \geqslant v_k - 1$

Adesso, la buona notizia: ***John L. Brown*** nel 1961 ha dimostrato che le due condizioni sono *anche sufficienti*.

Come potete facilmente accorgervi, la successione di Fibonacci è completa; non solo, ma potete togliere un qualsiasi termine che la successione resta completa: se però ne togliete due, la completezza si perde.

Contrariamente a quanto si possa pensare, la mossa più "cattiva" se volete togliere un termine è togliere il primo: la successione resta completa in quanto abbiamo ancora un 1 all'inizio e il resto della successione mantiene le sue proprietà; ma se, come secondo termine da togliere, tolgo il secondo 1, la prima condizione di Brown si perde e non ho più una successione completa *[esiste una dimostrazione piuttosto noiosa di tutto questo, ma l'aver trovato un controesempio ci pare sufficiente].*

Si vede che, rispetto alla completezza, la successione di Fibonacci ha "qualcosa in più, ma non troppo"; il limite sembra averlo trovato ***Zeckendorf***, nel 1964:

La successione di Fibonacci priva del primo "1" è completa anche se si impone che una rappresentazione non possa contenere termini consecutivi.

...e questo è proprio il limite.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[34] OK, potevamo dire *crescente*, ma nelle rappresentazioni si preferisce questa formulazione per poter lavorare anche con insiemi che hanno diverse copie di uno stesso numero.