Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 235 – Agosto 2018 – Anno Ventesimo

1. Trizio e trilobiti ... 3

2. Problemi ... 9

2.1 "Scalenità" ... 9

2.2 ...caldo ... 9

3. Bungee Jumpers ... 10

4. Soluzioni e Note ... 10

4.1 [233] ... 11

4.1.1 Generalizzare un calcolo ... 11

4.2 [234] ... 16

4.2.1 Spiedini di frutta fatti in casa ... 16

4.2.2 Opera d'arte cubista ... 20

5. Quick & Dirty ... 21

6. Pagina 46 ... 21

7. Paraphernalia Mathematica ... 23

7.1 Altre strade solide – [1] – Il (primo) metodo di Fusé ... 23

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM231 ha diffuso 2'357 copie e il 29/07/2018 per Google eravamo in 9'220 pagine.

Come al solito, ci siamo persi l'autore. Ma doveva essere un moralista bacchettone, in quanto ricordiamo perfettamente che i due ragazzi in alto a sinistra (...ma in questo contesto, si può dire una frase del genere?) erano abbracciati. No, onore al merito. Bellissimo.

1. Trizio e trilobiti

"La fisica non può vendere l'anima al diavolo"

Non sono molte le classifiche in grado di inorgoglire gli italiani, ma ce n'è una particolarmente significativa: l'Italia è la nazione con il maggior numero di siti considerati Patrimoni dell'Umanità dall'UNESCO[1]. Come tutte le classifiche che si rispettino è altamente mobile, ma l'Italia vi è sempre stata una protagonista di primo piano. All'inizio di luglio di questo 2018 ha superato la Cina, con la quale coabitava al primo posto con 53 siti, raggiungendo il cinquantaquattresimo titolo. In totale, i siti che si possono fregiare del prestigioso titolo di "Patrimonio dell'Umanità" sono 1092, il che significa la nostra amata patria ne possiede da sola quasi il cinque per cento. E a voler solleticare ulteriormente l'orgoglio nazionale si potrebbe sottolineare che i 53 siti cinesi sono decisamente più indaffarati dei nostri, visto che, commisurati su superficie e popolazione, se ne trova uno ogni 180.000 chilometri quadrati, e ognuno deve gratificare più di venticinque milioni di cinesi. In Italia, invece, si incontra un sito UNESCO più o meno ogni 5555 chilometri quadrati, e bastano poco più di un milione e centomila italiani per avocarselo pienamente.

1 *Ivrea, sito UNESCO*

Orgoglio nazionale a parte, non saranno stati pochi a sorprendersi della natura del cinquantaquattresimo sito italiano: "Città industriale del XX secolo" è la qualifica che ha fatto meritare ad Ivrea il prestigioso titolo[2]. L'Italia ha ottime chance di potersi avocare il titolo di paese con la maggior densità di produzione di opere d'arte, e certo non difetta di bellezze naturali: forse proprio per questo, un riconoscimento basato sull'organizzazione e l'architettura industriale era oggettivamente meno prevedibile. Ma non dovrebbe stupire più tanto, se solo ci si prendesse la briga di scavare un po' indietro nella storia recente: nel 1955, negli USA è risuonato forte e chiaro un invito programmatico che recitava: "*Voglio che anche noi troviamo un design che ci distingua da tutti, come è riuscita a fare l'Olivetti con i suoi prodotti, i suoi ambienti, le sue fabbriche*". Non si trattava dell'esortazione di un imprenditorucolo qualsiasi che si proponeva fare carriera, ma quella di Thomas Watson Jr., amministratore delegato dell'IBM.

L'antica Eporedia prende probabilmente il suo nome dalla sua consolidata tradizione legata all'allevamento dei cavalli: ancora oggi, durante la festa patronale di San Savino, i nobili quadrupedi la fanno da padroni; per non parlare poi del ruolo da protagonisti che ricoprono anche durante il Carnevale, quando si fanno carico di condurre, impavidi, i

[1] Va scritta tutta in maiuscolo perché è ovviamente un acronimo: "United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization", ovvero Organizzazione delle Nazioni Unite per l'Educazione, la Cultura e la Scienza.

[2] Come recita il comunicato ufficiale: "*Fondata nel 1908 da Camillo Olivetti, la città industriale di Ivrea è un progetto industriale e socio-culturale del XX secolo. La maggior parte dello sviluppo di Ivrea avvenne nel periodo degli anni '30 e '60 sotto la direzione di Adriano Olivetti, periodo in cui l'azienda Olivetti produceva macchine da scrivere, calcolatrici meccaniche e computer. La forma della città e gli edifici urbani di Ivrea sono stati progettati da alcuni dei più noti architetti e urbanisti italiani di quel periodo. La città è composta da edifici per produzione, amministrazione, servizi sociali e usi residenziali, che riflettono le idee del Movimento Comunità.*"

carri contro cui si scatena la furia degli aranceri durante la celeberrima Battaglia delle Arance. Posizionata strategicamente nel luogo dove la Dora Baltea, il fiume che raccoglie le acque di tutte le montagne della Val d'Aosta, si restringe in una gola nervosa (e paradisiaca per i canoisti) prima di liberarsi negli spazi del Canavese e quindi della Val Padana, Ivrea ha alle spalle una storia lunga e nobile. Le "rosse torri" del suo castello stanno ancora lì a ricordarla, mentre una delle sue vie più importanti e dedicata ad Arduino, che fu tra i primissimi a poter rivendicare il titolo di Re d'Italia, attorno all'anno Mille; e giusto mille anni dopo, quasi a voler rivendicare una sorta di eccellenza, il nome Arduino viene dato alla piattaforma prototipale di hardware libero a scheda unica che rappresenta una piccola rivoluzione hardware nel mondo dell'informatica libera[3].

Ma città romana, cavalli e nobiltà medievale non contano nell'elezione di Ivrea a patrimonio dell'umanità; quello che conta, che ha contato, è l'Ivrea novecentesca, quella che si è sviluppata dall'altra parte della Dora rispetto al centro storico. L'Ivrea voluta e costruita da Adriano Olivetti.


2 *Adriano Olivetti*

Figlio di Camillo, storico fondatore della prima fabbrica italiana di macchine per scrivere, Adriano nasce insieme al ventesimo secolo e decide di attraversarlo con una visione del tutto originale, al punto che è forse possibile definirlo più per sottrazione che per attribuzioni: figlio di padre ebreo e madre valdese, cresce senza aderire a nessuna religione, per poi convertirsi al cattolicesimo in età matura. È giovane e forte quando è giovane e forte il fascismo, ma lo rigetta senza esitazione per tutta la vita; guarda con interesse al movimento di Giustizia e Libertà e partecipa, nel 1926, al gruppo che riesce a far fuggire dall'Italia Filippo Turati.

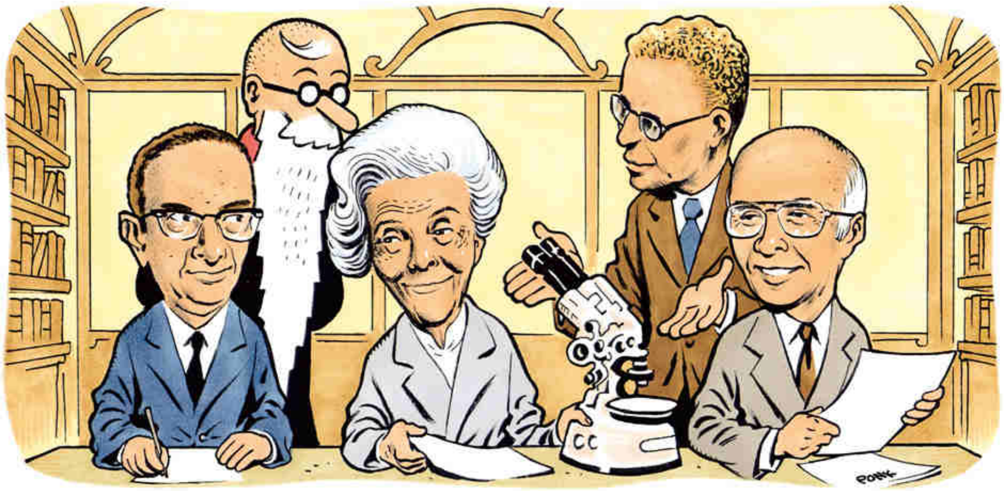
Nel secondo dopoguerra si dedica alla fabbrica, e inventa un concetto di impresa radicalmente nuovo per l'epoca (e, in molti sensi, nuovo e raro ancora oggi): in linea con una filosofia a cui dà il nome – e il progetto, anche politico – di Movimento Comunità, Adriano Olivetti crea una fabbrica che, oltre alla mera produzione dei manufatti, si preoccupa anche degli altri aspetti della vita dei dipendenti: asili, mense, case, attività culturali, sistemi di previdenza. Tutto in quella che oggi, a distanza di più di mezzo secolo, è stata riconosciuta come originale (e forse unica) "città industriale del XX secolo".

L'amore per la cultura – e cultura tout-court, non solo "cultura industriale" – di Olivetti è leggibile in quasi ogni aspetto dei suoi intenti progettuali: basterebbe scorrere l'elenco dei dirigenti che hanno fatto parte dell'Olivetti per scoprire, tra di essi, una pletora di personaggi d'alta statura intellettuale, che non ci si aspetta di trovare nei libri paga di una azienda vocata alla tecnologia. E del resto, in qualche modo la cultura più classica e tradizionale, quella letteraria, sembra riconoscere e ricambiare l'interesse e l'affetto.

È difficile tenere insieme tutti i possibili collegamenti che si intrecciano quando si prova a ricostruire un ambiente, specialmente un ambiente culturale, che per propria natura è vario, curioso, esteso su molti fronti. È difficile ancora solo trovare un punto di partenza. Ad esempio, all'inizio del secolo scorso, a Torino, c'era una casa che grondava conoscenza

[3] A voler essere filologicamente precisi, il nome "Arduino" dato alla scheda non deriva direttamente dal personaggio storico, ma dal "bar Arduino" dove i componenti del team progettuale, tutti appartenenti all'IDII (*Interaction Design Institute Ivrea*), erano soliti ritrovarsi.

e amore per la cultura: era la casa di Giuseppe Levi, un uomo che, per quanto famoso, certamente non è ancora celebrato come si dovrebbe. Giuseppe insegnava nella "Reale Accademia di Medicina", ed era considerato uno dei più importanti ricercatori dei suoi tempi: fu tra i primi a praticare le colture in vitro, tecnica rivoluzionaria per quei tempi, e si applicò tenacemente nello studio dell'istologia delle cellule nervose. Per quanto grande come scienziato, è possibile che sia stato ancora più grande come insegnante: nel suo istituto si seggono, da studenti, Salvador Edward Luria, Renato Dulbecco e Rita Levi-Montalcini. Tutti e tre suoi allievi, tutti e tre, indipendentemente, premi Nobel per la Medicina e la Fisiologia[4].



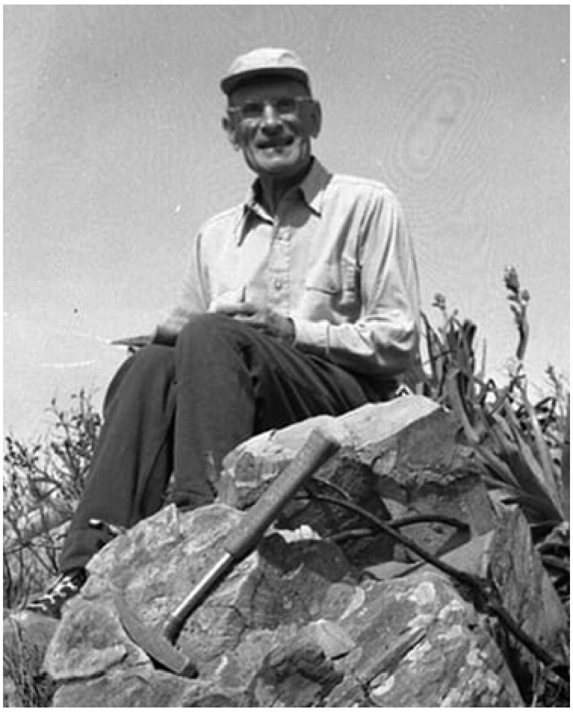
3 *Nessuna foto trovata in rete con "i tre Nobel di Giuseppe Levi" tutti insieme, ma abbiamo rubato questo bel disegno*[5]

Quella casa, Adriano Olivetti la conosceva benissimo, perché Giuseppe Levi era suo suocero: la sua prima moglie era Paola Levi, figlia di Giuseppe. Di quella casa, peraltro, e di Giuseppe, di Paola e anche di Adriano si parla in un capolavoro della letteratura italiana, "*Lessico famigliare*", di Natalia Ginzburg: perché anche se Natalia è più nota con il nome da sposata, legata com'era a Leone Ginzburg, nasce con il cognome Levi, è figlia di Giuseppe e sorella di Paola, e quindi cognata di Adriano Olivetti.

Ma a voler far passare il testimone della cultura di quei tempi, magari proprio con la complicità di Natalia Ginzburg, si rischia di non finire mai. Oltre a Paola e Natalia, in casa Levi ci sono altri figli di Giuseppe: Alberto, Mario e Gino. Proprio di quest'ultimo, nel romanzo che racconta la vita in quella casa, Natalia descrive anche l'amico fraterno, con cui condivideva tempo e passioni, soprattutto quelle delle escursioni in montagna. Racconta come i due partissero per poi tornare stanchi e con «*zolle di muschio nel fazzoletto, scarabei morti e cristalli dentro al sacco da montagna*». E anche quell'amico di Gino era destinato a lasciare un segno: non nella letteratura né nella medicina, e neppure nell'alpinismo; ma in un altro paio di discipline, non troppo apparentate fra loro.

[4] Luria nel 1969, Dulbecco nel 1975, Levi-Montalcini nel 1986.

[5] Noi l'abbiamo rubata da questa pagina di blog (http://mondobliquo.blogspot.com/2013/02/sotto-la-piramide-verde.html?m=0), ma ci pare di capire che la vignetta facesse parte di una storia pubblicata da "Linus" nel numero di Febbraio 2013.


4 *Franco Rasetti*

Franco Dino Rasetti nasce in Umbria, a Pozzuolo, quasi sulle rive del lago Trasimeno, il 10 agosto 1901. Non c'è troppo da stupirsi se la Ginzburg cita gli "scarabei morti" tra i trofei delle escursioni in montagna: fin da piccolo Franco mostra competenze e capacità eccezionali sia nell'entomologia che nell'alpinismo, a cui viene iniziato dallo zio Gino Galeotti, patologo di fama mondiale. Nonostante i molti agganci che potrebbe avere nel campo medico, Rasetti nel 1918 decide di iscriversi all'università di Pisa, alla facoltà di Ingegneria. Capita però che a Pisa incontra un coetaneo così bravo e capace che lo convince a cambiare facoltà, e Franco passa a Fisica.

Il compagno di studi è Enrico Fermi, che già da studente vede la fisica come l'unica possibile chiave per la comprensione del mondo. Franco Rasetti è di certo meno fondamentalista del compagno, da questo punto di vista; ma è indubbio che la fisica ci guadagna, nel conquistare una testa come la sua. Si laurea nel 1922, e tra il 1925 e il 1926 rinsalda il legame con Fermi, che a quei tempi lavorava anch'egli in Toscana, a Firenze. Poco dopo, Fermi vince il concorso per la cattedra romana di Fisica Teorica, e nel 1927 anche Rasetti si trasferisce nella capitale come assistente di Orso Mario Corbino, direttore dell'Istituto di Fisica romano, e naturalmente finisce a lavorare insieme allo stesso Fermi. Diventa poi professore di Spettroscopia nel 1930, ma è chiaro che, a quel punto, il nucleo iniziale del leggendario gruppo dei "ragazzi di via Panisperna" è già fondato.

La spettroscopia è una disciplina curiosa, nell'ambito della fisica: richiede una grande precisione nelle misure, una raffinatezza particolare nel curare i dettagli, un'attenzione forse più da entomologo che da fisico teorico. È forse per questo che Rasetti diventa rapidamente un luminare nel campo: la sua cultura è vastissima, la sua curiosità infinita. Con ogni probabilità è il più acculturato del gruppo dei fisici romani, e più di una volta confessa agli amici (che peraltro lo considerano virtualmente onnisciente[6]) di aver scelto di dedicarsi alla fisica soprattutto perché era il campo in cui si sentiva meno preparato. Rasetti passa un anno in California, nel laboratorio di Millikan, e qui fa luce sul cosiddetto "effetto Raman": determina il valore dello spin dell'azoto, dimostrando che il modello del nucleo atomico allora in vigore era sbagliato.

Quando torna a Roma continua a lavorare sull'effetto Raman, insieme ad Amaldi. Trascorre un ulteriore periodo di perfezionamento a Berlino, al Kaiser Wilhelm Institut dove la ricerca è guidata da Otto Hahn e Lise Meitner, e quando ritorna a Roma è soprattutto grazie alle sue ricerche che i ragazzi di via Panisperna cambiano l'oggetto della loro ricerca, passando dalla spettroscopia atomica alla vera e propria ricerca nucleare.

[6] Vale forse la pena di ricordare i soprannomi che i componenti del gruppo di via Panisperna si erano dati, in una sorta di gerarchia scherzosamente ecclesiastica: i più giovani, Edoardo Amaldi e Emilio Segrè, dovevano accontentarsi del titolo di "Abati"; Enrico Fermi era ovviamente "il Papa", mentre ad Ettore Majorana toccava il ruolo programmatico di "Grande Inquisitore". Franco Rasetti, in questa gerarchia, possedeva il titolo di "Venerato Maestro".


5 *I ragazzi di via Panisperna: Oscar D'Agostino, Emilio Segrè, Edoardo Amaldi, Franco Rasetti ed Enrico Fermi*

Sono i tempi in cui le scoperte in fisica si susseguono a ritmo intensissimo: Chadwick scopre il neutrone nel 1932, Irène e Frédéric Joliot-Curie due anni dopo scoprono che la radioattività può essere indotta artificialmente. I ragazzi di via Panisperna (che, anche se sembra difficile crederlo in questi tempi in cui gli esperimenti della fisica coinvolgono team di migliaia di persone e di decine di nazioni, è il primo e unico reale "gruppo di ricerca" del mondo) si dedicano con passione alla radioattività artificiale. Il compito principale di Rasetti era quello di generare il flusso di neutroni necessario per irraggiare e indurre la radioattività nei vari nuclidi: lo stesso compito che, al giorno d'oggi, svolgono con potenze smisuratamente maggiori gli acceleratori di particelle.

L'intuizione di Fermi che proponeva l'utilizzo di "neutroni lenti" e la sua successiva spiegazione teorica del fenomeno gli valgono l'attribuzione del Nobel della Fisica nel 1938. Purtroppo, il 1938 è anche l'anno in cui in Italia vengono promulgate le leggi razziali; Fermi, preoccupato perché Laura Capon, sua moglie, è ebrea, scappa negli Stati Uniti direttamente da Stoccolma, dove si è presentato a ritirare l'ambito riconoscimento. E il gruppo di via Panisperna si scioglie.

Del resto, quella che incombe è la più grande tragedia del secolo, la Seconda Guerra Mondiale. I "fisici nucleari" si ritrovano ad essere non più soltanto dei ricercatori, degli scienziati: sono delle vere e proprie armi. Fermi, in America, partecipa al Progetto Manhattan e si trasferisce a Los Alamos, dove contribuirà a far brillare la prima bomba atomica. Rasetti invece, invitato[7] a contribuire alle ricerche nucleari a fini militari, rifiuta con la frase che è diventata la sua più nota citazione: "la fisica non può vendere l'anima al diavolo".

Ma alla fine la spunta il diavolo, e Hiroshima e Nagasaki si vaporizzano nell'estate del 1945. Franco Dino Rasetti, fisico nucleare di fama mondiale, trae le necessarie conclusioni che gli detta la sua legge morale, e decide di abbandonare definitivamente la ricerca in Fisica. Ha quarantaquattro anni, e il destino gli riserverà una vita lunga: ma mantiene fede al suo impegno, e in quel mezzo secolo abbondante che ancora gli concederanno le Parche, non indagherà oltre sulle leggi che governano protoni e neutroni.

[7] L'invito arrivava dal progetto anglo-canadese del Nuclear Laboratory di Montreal.


6 *Enrico Fermi, Franco Rasetti e Nello Carrara*[8] *sulle Apuane*

Ma è sempre uno scienziato, e scienziato curioso, dalla curiosità vorace. Già da 1939 è direttore del dipartimento di Fisica di Laval, nel Québec, e il Canada è un territorio assai interessante dal punto di vista geologico. La geologia, secondo Rasetti, è una delle scienze "pacifiche e ancora libere dagli interessi politici", e merita il suo studio e la sua attenzione. Dalla geologia alla paleontologia il passo è relativamente breve, specialmente per un cervello onnisciente come quello di Franco Rasetti. Si arma di mazzetta da paleontologo e gira per i dintorni, ricchi di rocce del periodo cambriano. Troverà e classificherà diverse nuove specie di trilobiti, diventando un membro autorevole e riconosciuto della comunità internazionale dei paleontologi. Nel 1952 vince addirittura la Medaglia Walcott per le ricerche paleontologiche.

Torna in Italia nel 1967, si trasferisce poi in Belgio, a Waremme, paese natale della moglie, dieci anni dopo. Ha quasi ottant'anni, ma è sempre curioso del mondo: la sua collezione di reperti fossili raggiunge i cinquantamila esemplari, e non sono da meno le raccolte di coleotteri e specie botaniche, un patrimonio scientifico che finirà in un gran numero di musei, tra cui il famoso Smithsonian Institute di Washington. Il suo interesse per i fiori delle montagne, già ricordata dalla Ginzburg, si trasforma in un manuale nel 1980, intitolato "*I fiori delle Alpi*": a detta degli esperti, è il testo migliore sulla botanica alpina.

Ha fatto in tempo a spegnere cento candeline sulla sua torta di compleanno, prima di andarsene il 5 dicembre 2001. Sembra davvero un ottimo esempio di grande scienziato, di superbo intellettuale, di uomo di cultura per le future generazioni. Soprattutto, sembra uno splendido e raro esempio di essere umano dotato di alto senso della giustizia e di quella che Kant chiamava "legge morale", esercitata con forza tranquilla per tutto il secolo che ha vissuto, quel Novecento che gli storici dicono essere stato il secolo più violento e crudele della storia dell'umanità.

[8] Compagno di studi alla Normale di Pisa di Fermi e Rasetti, a differenza degli altri due si dedica più alle onde che ai nuclei atomici. È un pioniere della tecnologia che portò alla scoperta del radar, e talmente esperto nel campo da aver coniato, per primo, il termine "microonde", sia in italiano che in inglese. Suggeriamo agli eroici redattori dell'italica Wikipedia di dedicargli una voce (cosa che, peraltro, la Wikipedia inglese già fa…)

2. Problemi

2.1 "Scalenità"

Ok, ci stiamo scatenando. E un'altra pletora di giochi di parole di pessimo gusto.

Sapete tutti che Rudy è un pessimo disegnatore, e la cosa, purtroppo, si estende anche al disegno geometrico. Per una serie di ragioni, in questo periodo ha bisogno di *un mucchio* di triangoli equilateri, e si sta ritrovando con una notevole percentuale dei suddetti affetti da irrimediabile "scalenite". Optato per un sano normografo e risolto il problema più urgente, ha deciso di inventarsi una misura per "quanto è scaleno" un triangolo; appunto, la "scalenità". Da bravo operativo, si è inventato una procedura.

Tracciato il nostro triangolo, prendiamo un vertice, ad esempio A; tracciamo la bisettrice dell'angolo A che avrà piede sul lato a (quello opposto ad A). Diciamo Z il punto di piede.

Calcoliamo adesso la distanza dal punto medio di a a Z, e dividiamola per la lunghezza di a. Il numero che otterremo sarà compreso tra 0 (isoscele! Festeggiamo!) e 1/2 (ehm... Meglio buttarlo via, eh? Che se passa Escher, si spaventa).

Ripetiamo la procedura anche per gli angoli B e C, ottenendo in tutto tre numeri: di questi, teniamo il "meno peggio", ossia il minore tra i tre numeri.

La domanda è: a questo punto, qual è il valore massimo raggiungibile dalla "scalenità"? Noi nella nostra inettitudine abbiamo provato a fare un triangolo con i tre valori pari a 1/2, ma non ci siamo riusciti: la cosa, probabilmente è impossibile ed esiste un valore massimo, ma quale?

Estensione d'obbligo: come è fatto, il triangolo "più scaleno di tutti"? Esclusi quelli disegnati da Rudy, ovviamente (che, a ben guardare, hanno anche l'aria piuttosto acciaccata, come triangoli...).

2.2 ...caldo...

Due premesse.

Tanto per cominciare, qui fa un caldo che anche le nutrie si fanno impiantare una zip per togliersi la pelliccia; fortunatamente la settimana prossima sono previsti una serie di temporali *[problema a latere: indovinate quando Rudy va in ferie (RdA)].*

Secondariamente, anche se il problema ha l'aria di dover essere risolto per tentativi, esiste (almeno[9]) un modo per avvicinarsi alla soluzione *more logico* (no, non è inglese: è latino).

Comunque, veniamo al problema.

In una graziosa città famosa per aver dato i natali a una PRdMR e per il fatto di avere (quasi) tutte le vie perpendicolari e parallele tra di loro, è scoppiato il caldo, e una banda di neanche-tanto-giovani teppisti si sta rinfrescando guardando vecchie foto di Wegee[10] con giovani niuiorchesi che si divertono sotto gli idranti. Certo che avere in giro un po' di quei begli idranti rossi, con l'opportuna chiave per aprirli e rinfrescarsi in attesa dell'arrivo della polizia a richiuderli...

Supponiamo che, colta da improvvisa follia, la sindaca (termine che non ci piace, ma a lei sì) decida, in una ben precisa area formata da dieci strade in direzione est-ovest e sei in direzione nord-sud[11], si decida di applicare un "piano idranti", anche per impedire il

[9] ...ma se ne trovate altri, non ci offendiamo mica, eh...

[10] Se non sapete chi è, googlate (o, come preferisce Rudy, "duckduckgo-ate") "wegee photographer", e date un'occhiata alle immagini e alla sua faccia. Ad una sommaria ricerca ci risulta, purtroppo, irreperibile quella con lui "al lavoro": nel bagagliaio della sua macchina teneva flash, pellicole, un piccolo laboratorio di sviluppo, una macchina da scrivere, una sedia pieghevole e svariate scatole di sigari.

[11] Più tre gradi, in entrambi i casi. È venuta un po' storta...

parcheggio selvaggio di SUVini (adesso sono di moda quelli piccoli, ma rompono le scatole uguale).

Questa zona della città, caratterizzata dal non avere piazze, è anche contraddistinta dal fatto di avere gli isolati perfettamente quadrati; l'idea della sindaca è quella di piazzare gli idranti agli incroci (considerati punti geometrici, esattamente come le vie sono considerate rette senza spessore) in modo tale da far sì che ogni incrocio abbia un idrante disponibile alla distanza di al più due lati-di-isolato.

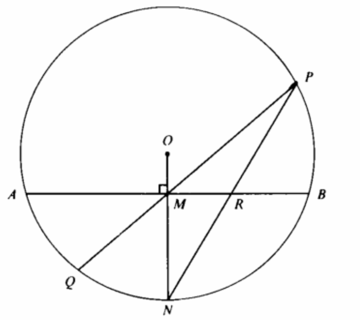
Tanto per cambiare, per dirla con Dumas, "sappiamo di che colore è il fondo delle casse comunali", nel senso che ci sono pochi soldi; quindi, dovremo minimizzare il numero degli idranti.

Qualche idea?

3. Bungee Jumpers

In un cerchio di centro O, ON è il raggio perpendicolare alla corda AB e il loro punto di incontro è M.

Sia P qualsiasi punto sull'arco maggiore AB non diametralmente opposto ad N; PM e PN determinano, rispettivamente, i punti Q e R sulla circonferenza e su AB.



Provate che *[contrariamente a quanto si possa stimare dalla figura]* il segmento RN è sempre maggiore del segmento MQ.

Esistono almeno due modi per dimostrare questo teorema, una utilizza la trigonometria mentre l'altra, che presentiamo a Pagina 46 *, "viene dal Libro": è stata fornita da Erdős nel 1975.*

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Agosto!

Interessante come i mesi canonici dell'estate siano i mesi delle vacanze, ma non in tutti i paesi nello stesso modo. Gli italiani tendono a distribuire le possibili ferie in un intorno di ferragosto, mentre più a nord le classiche ferie sono spesso nella seconda metà di luglio. La redazione di RM fa come sopra (nel senso che siamo distribuiti), e se riusciamo a beccare l'intervallo giusto, magari questo numero di agosto vedrà la luce con inconsueto ritardo negativo.

Ma tornando alle vacanze, queste sono fatte per rilassarsi e leggere: se non avete nulla di meglio, vi suggeriamo i nostri libri, che stanno uscendo in edicola uno dopo l'altro grazie ad Hachette. Sapete già di Rudi Ludi: https://www.hachette-fascicoli.it/sfide-e-giochi-matematici-uscita-42.

Il numero 42 della collana, e sapete bene che per noi la cosa non può che avere un significato simbolico, è il primo libro che abbiamo creato veramente per la pubblicazione dieci anni fa. Il titolo originale era *Rudi Ludi*, e con un colpo di coda siamo riusciti a mantenerlo almeno nel sottotitolo di *In teoria, è un gioco!*. Purtroppo la versione originale del libro è ormai introvabile, ma la prefazione di Silvia Treves e l'introduzione di Michele Emmer ci sono ancora, in questa versione, corredata di un'ulteriore introduzione di Mauro Gaffo.

L'uscita numero 48 è il libro di cui probabilmente ci avete sentito parlare fino alla nausea: *Storie che contano*, che a questo punto è alla terza versione di copertina, contando la versione che ancora trovate in libreria, quella uscita con LeScienze in edicola e quest'ultima. Il link è: https://www.hachette-fascicoli.it/sfide-e-giochi-matematici-uscita-

48, anche se non avete di sicuro problemi a trovarne un'edizione in libreria, visto che Codice aspetterà ancora qualche anno prima di considerare l'incenerimento della prima edizione. In ogni caso comunque l'intera collana contiene veri gioielli, alcuni dei quali abbiamo già recensito o di cui ci pregiamo di conoscere personalmente gli autori, e vale la pena possederla tutta. Per saperne di più fate un giro esplorativo su https://www.hachette-fascicoli.it/sfide-e-giochi-matematici.

Quello che ancora non troverete è il nostro primo libro, in originale *Rudi Simmetrie*, per l'occasione ribattezzato *Di duelli, battiscopa, tappezzerie e portaerei*, che arriverà a fine agosto in edicola… con un po' di fortuna dovrebbe avere un link del genere: https://www.hachette-fascicoli.it/sfide-e-giochi-matematici-uscita-53. La versione originale (agosto 2007) aveva vinto un premio Peano, ed era nata più come un regalo da un redattore della Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa agli altri due che come un vero libro: una collezione di articoli usciti anni fa sulla rivista per intraprendere un percorso tra arte, teoria dei gruppi e i matematici che ne hanno permesso lo studio. Siamo tutti molto affezionati a questo prodotto, forse non proprio ben confezionato, ma il nostro primo, ed è una vera fortuna che Hachette abbia voluto ripubblicarlo, visto che la versione originale non esiste più. Con un colpo di coda (ce ne sono sempre quando si parla di noi), non solo il titolo originale si è infilato nel sottotitolo, ma anche un nome in più nella lista degli autori.

Ma agosto si avvicina e non c'è più tempo per chiacchiere: passiamo alle vostre soluzioni.

4.1 [233]

4.1.1 Generalizzare un calcolo

Visto che ***trentatre*** ci ha mandato una bella soluzione a questo problema, cominciamo da due mesi fa, con questo calcolo sui solidi regolari e non:

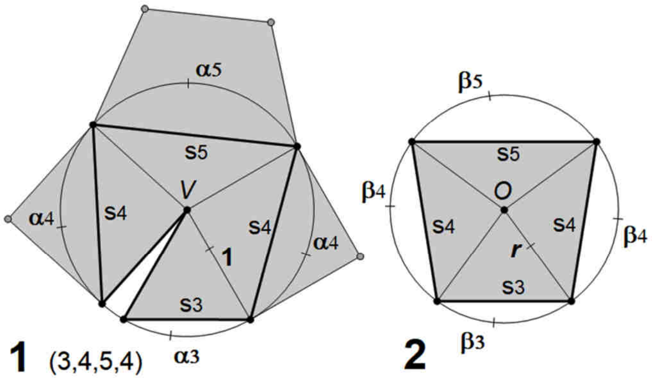
> *Qual è l'angolo tra due facce contigue di un icosaedro? Esiste un metodo generalizzabile agli altri solidi regolari, Archimedei, Kepleriani e genericamente semi-regolari?*

La soluzione pubblicata il mese scorso era di ***Valter***, nel seguito lasciamo la parola a ***trentatre***

> Mi limito ai solidi *platonici* e *archimedei*, che indico con *SP* e *SA* – nella tabella i 5 *SP* e i 13 *SA*, con
>
> K : n° facce per vertice
>
> $F = (n_1, n_2, \dots n_K)$: incidenza delle facce in ogni vertice – ogni n indica il tipo (n° di vertici) della faccia
>
> Le tabella riportano tutti gli *SP* e *SA*.

SP		*F*	*K*
1	*tetraedro*	(3.3.3)	3
2	*cubo*	(4.4.4)	3
3	*dodecaedro*	(5.5.5)	3
4	*ottaedro*	(3.3.3.3)	4
5	*icosaedro*	(3.3.3.3.3)	5

SA		*F*	*K*
1	*cubottaedro*	(3.4.3.4)	4
2	*icosidodecaedro tronco*	(4.6.10)	3
3	*cubottaedro tronco*	(4.6.8)	3
4	*icosidodecaedro*	(3.5.3.5)	4
5	*rombicosidodecaedro*	(3.4.5.4)	4
6	*rombicubottaedro*	(3.4.4.4)	4
7	*cubo camuso*	(3.3.3.3.4)	5
8	*dodecaedro camuso*	(3.3.3.3.5)	5
9	*cubo tronco*	(3.8.8)	3
10	*dodecaedro tronco*	(3.10.10)	3
11	*icosaedro tronco*	(5.6.6)	3
12	*ottaedro tronco*	(4.6.6)	3
13	*tetraedro tronco*	(3.6.6)	3



In fig. 1 lo sviluppo piano di un vertice V del poliedro (caso SA.5) dove

- gli angoli sono in gradi e gli spigoli dei solidi di lunghezza unitaria
- α_n : angoli delle K facce che concorrono in V, n : tipo di faccia
- s_n : i lati (diagonali della faccia) associati agli angoli α_n

Nello spazio ogni poliedro è inscritto in una sfera, i K vertici adiacenti a V sono su un cerchio e quindi complanari.

In fig. 2 la proiezione di V sul piano del cerchio – il cerchio unitario di fig. 1 si riduce di raggio (r < 1) e gli angoli al centro cambiano in $\beta_n > \alpha_n$, i lati s_n del poligono P in grigio sono gli stessi di fig.1.

Nel seguito l' angolo diedro fra due facce contigue di tipo a, b è indicato con θ_{ab}.

caso *K*=3 con $F = (a,b,c)$

- l'angolo $\theta_{a,b}$ fra le facce a e b è dato da

$$[1] \quad \boxed{\cos\theta_{ab} = \frac{\cos\alpha_c - \cos\alpha_a \cos\alpha_b}{\sin\alpha_a \sin\alpha_b}}$$

- dove $\alpha_n = 180 - 360/n$
- per gli altri θ basta permutare circolarmente gli indici (a, b, c)

Questo risolve il problema per i 10 casi SP(1,2,3) e SA(2,3,9,10,11,12,13).

caso *K*=4 con $F = (a,b,c,b)$

- si applica la [1] nella forma

$$[2] \quad \boxed{\cos\theta_{ab} = \frac{\cos\eta_{ab} - \cos\alpha_a \cos\alpha_b}{\sin\alpha_a \sin\alpha_b}}$$

- dove $\cos\eta_{ab} = 1 - (s_a s_c + s_b^2)/2$

Questo risolve i casi SP(4) e SA(1,4,5,6).

caso *K*=5 – tre poliedri con $F = (3,3,3,3,n)$ – gli angoli θ sono (v. dimostrazioni)

SP.5	*icosaedro*	$n=3$	$\theta_{3,3} = 138°.1897$
SA.7	*cubo camuso*	$n=4$	$\theta_{3,3} = 153°.2346$
			$\theta_{3,4} = 142°.983430$
SA.8	*dodecaedro camuso*	$n=5$	$\theta_{3,3} = 164°.1754$
			$\theta_{3,5} = 152°.9299$

dimostrazioni

Per gli angoli θ si usa la funzione <u>coseno</u> – infatti $x = \cos\theta$ varia in $[-1 \ldots +1]$ e $\arccos x$ fornisce θ in $[0 \ldots 180]$ come richiesto.

Per i triangoli isosceli di lati (a,b,b), e angoli (α,β,β) si usano le formule $\alpha + 2\beta = 180°$, $a^2 = 2b^2(1-\cos\alpha)$, $\cos\alpha = 1 - a^2/(2b^2)$.

Le facce dei poliedri sono poligoni regolari di $(3,4,5,6,8,10)$ vertici - i dati utili sono, in forma di radicali

n	α_n	$\cos\alpha_n$	s_n
3	60	$1/2$	1
4	90	0	$\sqrt{2}$
5	108	$-(\sqrt{5}-1)/4$	$(1+\sqrt{5})/2$
6	120	$-1/2$	$\sqrt{3}$
8	135	$-1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2+\sqrt{2}}$
10	144	$-(\sqrt{5}+1)/4$	$\sqrt{(5+\sqrt{5})/2}$

[3]

- calcolati con $\alpha_n = 180 - 360/n$, $s_n^2 = 2(1-\cos\alpha_n)$ opp. $s_n = 2\cos(180/n)$.

Per la natura del problema $\cos\theta_{ab}$ si può scrivere come radicale (salvo per *SA*.7 e *SA*.8).

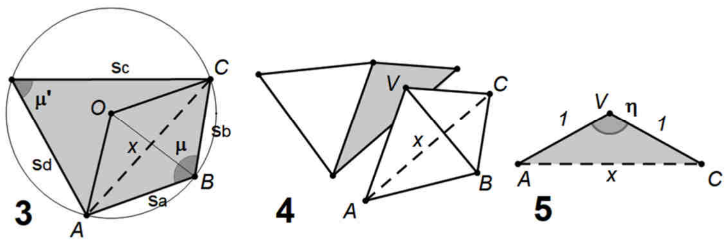
***K* =3** – basta la *trigonometria sferica*

- dato il *triangolo sferic*o di lati (a,b,c) e angoli (α,β,γ) vale il <u>*teorema del coseno*</u>

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$$

- cambiando notazioni $(a,b,c,\alpha) \to (\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \theta_{ab})$ si ha la [1] nella forma

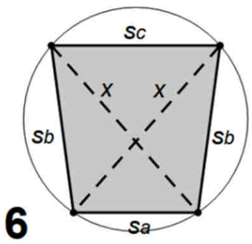
$$\cos\alpha_c = \cos\alpha_a \cos\alpha_b + \sin\alpha_a \sin\alpha_b \cos\theta_{a,b}\,.$$



Per K >3, il poligono P con i lati s_n è inscritto in un cerchio (fig. 3) e l'angolo $\theta_{a,b}$ si ricava dal triedro (fig. 4) *VABC* estratto dal solido – l'angolo η prodotto dal taglio si ottiene dalla diagonale x (fig. 5) e vale

[4] $\cos\eta = 1 - x^2/2$.

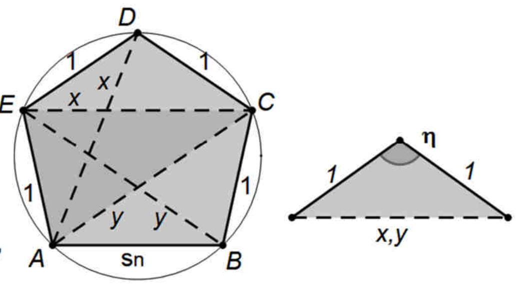
Il problema si riduce quindi a cercare le diagonali di *P*, e θ_{ab} si ottiene da [4] e [2] .



***K* =4** con $F = (a,b,c,b)$

- in tutti i casi il 2° e il 4° lato sono uguali (fig. 6) - *P* è simmetrico e le due diagonali *x* sono uguali - per il teorema di Tolomeo sui quadrilateri inscritti nel cerchio è $x^2 = s_a s_c + s_b{}^2$

- da *x* si ottiene $\cos\eta = 1 - x^2/2$ e poi θ dalla [2] (nb. $\eta_{ab} = \eta_{bc}$)



7

***K* =5** si hanno i tre casi $F = (3,3,3,3,n)$, con n = 3, 4, 5 – per [3] gli angoli e i lati sono

	α_3	s_3	n	α_n	s_n
SP.5	60°	1	3	60°	1
SA.7	60°	1	4	90°	$\sqrt{2}$
SA.8	60°	1	5	108°	$(1+\sqrt{5})/2 = \varphi$

- dove φ è la sezione aurea.

In fig. 7

- tutti i lati s_3 valgono 1

- le coppie di diagonali *x* e y (uguali per simmetria) corrispondono agli angoli θ_{33} e $\theta_{3.n}$

- dai quadrilateri *ABCE* e *ACDE* per il teorema di Tolomeo si ha

[5] $y^2 = 1 + x \cdot s_n$, $x^2 = 1 + y$

- da cui si ottengono per *x* e *y* due equazioni cubiche

[6] $y^3 - y^2 - y = s_n{}^2 - 1$, $x^3 - 2x = s_n$.

Le formule precedenti vanno specificate per i tre casi *K* =5.

***SP*.5** (*icosaedro*) - $n = 3,\ s_3 = 1$

$$y^3 - y^2 - y = 0 \rightarrow y^2 = y + 1 \rightarrow y = \varphi$$

$$\cos\eta = 1 - y^2/2 = (1-\varphi)/2 \rightarrow \eta = 108°$$

(il calcolo è in fondo superfluo - il poligono è un pentagono regolare e $\eta = \alpha_5 = 108°$)

- dalla [2] $\boxed{\cos\theta_{33} = -\sqrt{5}/3 \rightarrow\ \theta_{33} = 138°.1897}$.

***SA*.7** (*cubo camuso*) – $n = 4,\ s_4 = \sqrt{2}$

$$y^3 - y^2 - y - 1 = 0$$

- l' unica radice reale è la cosiddetta *costante di Tribonacci* che vale

$$y = \frac{1}{3}\left(1 - (19 - 3\sqrt{33})^{1/3}\right) + \left(1 + (19 - 3\sqrt{33})^{1/3}\right) = 1.839287$$

$\cos\eta_{34} = 1 - y^2/2$ e da [2]

$$\boxed{\cos\theta_{34} = (2 - y^2)/\sqrt{3} = -0.7984 \rightarrow \theta_{34} = 142°.9834}$$

per $x^2 = 1 + y \rightarrow \cos\eta_{33} = 1 - x^2/2 = (1 - y)/2$

$$\boxed{\cos\theta_{33} = (1 - 2y)/3 = -0.8928 \rightarrow \theta_{33} = 153°.2346}\ .$$

***SA*.8** (*dodecaedro camuso*) – $n = 5,\ s_5 = \varphi$

$x^3 - 2x = \varphi$

- l' unica radice reale è

$$x = \left(\varphi/2 + \sqrt{\varphi^2/4 - (2/3)^3}\right)^{1/3} + \left(\varphi/2 - \sqrt{\varphi^2/4 - (2/3)^3}\right)^{1/3} = 1.7156 \text{ da cui}$$

$\cos\eta_{33} = 1 - x^2/2$ e da [2]

$$\boxed{\cos\theta_{33} = (3 - 2x^2)/3 = -0.9621 \rightarrow \theta_{33} = 164°.1754}$$

per $y = 1 + \varphi/x \rightarrow \qquad \cos\eta_{3,5} = 1 - y^2/2$

$$\boxed{\cos\theta_{35} = -0.8905 \rightarrow \theta_{35} = 152°.9299}\ .$$

Per i *PA* vedi *Wolfram MathWorld > Polyhedra > Archimedean Solids*, che fornisce molti dati ma gli angoli diedri solo per alcuni casi – in particolare per *SA*.7 è citata la *costante di Tribonacci* – definita a sua volta in *OEIS - A058265*.

Nella stessa mail c'era anche "*una tabella degli angoli diedri di tutti i solidi archimedei, calcolati con le formule trovate*":

Nella tabella i solidi archimedei, indicati con *SA*(1-13)

SA	*F*	θ	$\cos\theta$	θ *in gradi*
1	(3.4.3.4)	θ_{34}	$-1/\sqrt{3}$	125°.2644
2	(4.6.10)	θ_{46}	$-(1+\sqrt{5})/\sqrt{12}$	159°.0948
		$\theta_{6,10}$	$-(1+\sqrt{5})/\sqrt{30-6\sqrt{5}}$	142°.6226
		$\theta_{10,4}$	$-\sqrt{(5+\sqrt{5})/10}$	148°.2825
3	(4.6.8)	θ_{46}	$-\sqrt{2/3}$	144°.7356
		θ_{68}	$-1/\sqrt{3}$	125°.2644
		θ_{84}	$-1/\sqrt{2}$	135°.0000
4	(3.5.3.5)	θ_{35}	$-(3+\sqrt{5})/\sqrt{30+6\sqrt{5}}$	142°.6226
5	(3.4.5.4)	θ_{34}	$-(1+\sqrt{5})/\sqrt{12}$	159°.0948
		θ_{45}	$-(1+\sqrt{5})/\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	148°.2825
6	(3.4.4.4)	θ_{34}	$-\sqrt{2/3}$	144°.7356
		θ_{44}	$-1/\sqrt{2}$	135°.0000
7	(3.3.3.3.4)	θ_{33}	$(1-2A)/3$	153°.2346
		θ_{34}	$(2-A^2)/\sqrt{3}$	142°.9834
8	(3.3.3.3.5)	θ_{33}	$(1-2B)/3$	164°.1754
		θ_{35}	$(7+\sqrt{5}-4B^2)/\sqrt{30+6\sqrt{5}}$	152°.9299
9	(3.8.8)	θ_{38}	$-1/\sqrt{3}$	125°.2644
		θ_{88}	0	90°.0000
10	(3.10.10)	$\theta_{3,10}$	$-(1+\sqrt{5})/\sqrt{30-6\sqrt{5}}$	142°.6226
		$\theta_{10,10}$	$-1/\sqrt{5}$	116°.5651
11	(5.6.6)	θ_{56}	$-(1+\sqrt{5})/\sqrt{30-6\sqrt{5}}$	142°.6226
		θ_{66}	$-\sqrt{5}/3$	138°.1897
12	(4.6.6)	θ_{46}	$-1/\sqrt{3}$	125°.2644
		θ_{66}	$-\sqrt{5}/3$	138°.1897
13	(3.6.6)	θ_{36}	$-1/3$	109°.4712
		θ_{66}	$1/3$	70°.5288

- in *SA*.7 $A = 1.839287$: radice reale di $y^3 - y^2 - y = 1$

- in *SA*.8 $B = 1.943151$: radice reale di $y^3 - y^2 - y = (1+\sqrt{5})/2$.

Complimenti a ***trentatre*** anche per la tabella, andiamo avanti.

4.2 [234]

4.2.1 Spiedini di frutta fatti in casa

Si festeggia anche fuori stagione in Redazione, e adesso che è estate proviamo a mangiare più fresco e sano. Gli spiedini di frutta hanno però delle complicazioni:

> *Gli spiedini di una data lunghezza n sono tutti e soli quelli costruibili senza essere composti dalla sola ripetizione di substringhe identiche al loro interno. Supponendo una scorta infinita di vassoi ciascuno con un diverso n, possiamo dividere sempre per 6 ogni vassoio?*

La prima soluzione arrivata è quella di ***Alberto R.***:

> Indichiamo con F(*N*) il numero delle stringhe aperiodiche lunghe *N*, formate da due lettere. ("aperiodiche" nel senso di "non formate dalla ripetizione della stessa sottostringa").
>
> F(1) = 2
>
> F(2) = 2
>
> F(3) = 6
>
> F(4) = 12
>
> F(5) = 30
>
> F(6) = 54
>
> F(7) = 126
>
> I valori innanzi elencati per *N*>2 sono tutti divisibili per 6. Non è un caso. Dimostreremo che è sempre così.
>
> Se d1, d2, d3, … sono i divisori di *N* (1 compreso, *N* escluso) si riconosce facilmente che
>
> (*#*) $\qquad$ $F(N) = 2^N - F(d1) - F(d2) - F(d3) - \ldots$
>
> F(*N*) è sempre pari perché somma/differenza di numeri pari. Non ci resta che dimostrare che, per *N*>2, F(*N*) è divisibile per 3.
>
> **Se N è pari** al secondo membro della (*#*) compare 2^N che vale 1 mod3, poi compaiono F(1) ed F(2) che valgono entrambi 2, mentre i restanti termini sono tutti multipli di 3. In totale il secondo membro mod3 diventa:
>
> $$1 -2 -2 -0 -0 -0\ldots = -3 = 0 \bmod 3$$
>
> **Se N è dispari** al secondo membro della (*#*) compare 2^N che vale 2 mod3, poi compare F(1) = 2, mentre i restanti termini sono tutti multipli di 3. In totale il secondo membro mod3 diventa:
>
> $$2 -2 -0 -0 -0\ldots = 0 \bmod 3$$
>
> CVD
>
> **Un'osservazione:** Non sono in grado di dimostrarlo, ma sono pronto a scommettere che la formula ricorsiva (*#*) non può essere messa in forma chiusa perché F(*N*) è funzione dei divisori di *N* quindi soffre della stessa inguaribile "sindrome da caos congenito" che affligge la successione dei numeri primi.

Bella l'espressione "sindrome da caos congenito", la adottiamo volentieri. Vediamo ora la versione di ***Valter***:

> Penso si possa dividere sempre per 6 ogni vassoio.
>
> Considero lo spiedino S un numero binario lungo *n*. Un frutto sarà il numero 1 l'altro il numero 0. In totale ci sarebbero 2^n tipi di S. Devo togliere quelli composti da ripetizioni R.
>
> Provo a dimostrare la mia ipotesi per induzione.

2^n è ≡2 MOD6 per n dispari e ≡4 per n pari. Assumo che l'operazione è possibile sino a n. Per valori bassi di n lo si verifica facilmente.

Per n=1 gli S ammessi sono: 0, 1.

Per n=2 gli S ammessi sono: 01, 10.

Per n=3 gli S sono 6: 110, 101, 100, 011, 010, 001.

Calcolo ora gli S ammessi di lunghezza n+1. Trovo i divisori d di n+1 (escludo n+1 stesso). Le R negli S lunghi n+1 si ricavano da tali d. Si ottengono ripetendo gli S ammessi lunghi d. Siccome tali S sono:

- 2 per d=1, 2
- ≡0 MOD6 se d>2 e <n+1

anche per n+1 gli S sono divisibili per 6 (poiché solo se n+1 è pari uno dei d è 2).

Per capirci:

- 2^n ≡2 MOD6 per n dispari e ≡4 per n pari
- le R hanno lo stesso MOD6 di 2^n (2 o 4)
- quindi sottraendo: S ammessi ≡0 MOD6.

Verifico per n=6. I d di 6 sono 1, 2, 3. In totale gli S sono 2^6=64 (con i non ammessi). Gli S ammessi per d=1, 2, 3 sono rispettivamente:

- 0, 1
- 01, 10
- 001, 010, 011, 100, 101, 110.

Le ripetizioni si ottengono da questi 10 S.

Gli S ammessi sono quindi: 64 – 10 = 54 … ≡0 MOD6.

Provo a cercare di chiarire la mia affermazione "le ripetizioni sono gli S ammessi lunghi d" (sempre se non sto farneticando come al solito):

- non posso ottenere altre ripetizioni lunghe d (salvo quelle già incluse nei divisori di d)
- … che poi sono gli S non ammessi lunghi d.

Che ne dite? Se vi siete scaldati abbastanza leggendo le precedenti soluzioni, siete pronti per quella del ***Panurgo***:

Gli spiedini di frutta candita sono senz'altro gustosi ma, quando il numero di pezzi di frutta cresce, diventano difficili da maneggiare senza cavare un occhio a qualcuno: la prudenza ci consiglia di sostituirli con le parole di n lettere, prese dall'alfabeto di due lettere $\{\mathtt{U}, \mathtt{F}\}$.

Di tali parole ve ne sono esattamente 2^n: per sapere quante ne troveremo nel piatto dobbiamo contare quante di esse sono composte dalla ripetizione di parole più corte.

Definiamo "parole ripetitive" (matematici e matefili adorano le definizioni) le parole formate dalla ripetizione di parole più corte di cui sopra.

Le ripetizioni devono essere un numero intero per cui la lunghezza delle parole ripetitive deve essere un multiplo di quella delle parole ripetute. O meglio, la lunghezza delle parole ripetute deve essere un divisore proprio di quella delle parole ripetitive: deve essere davvero perverso il modo in cui le lettere M C V si ripetono dalla prima all'ultima riga di un certo libro della Biblioteca di Babele[12].

Una parola ripetitiva è definita una volta scelta la parola da ripetere quindi, per contare le parole non ripetitive dovremo togliere dal totale il numero di quelle la cui lunghezza è un divisore proprio di n, stando bene attenti a toglierle una ed una sola volta.

[12] Ogni libro della Biblioteca di Babele ha 410 pagine di 40 righe di 80 caratteri: una parola di 1 312 000 lettere, prese da un alfabeto di 25.

Se $n = p_1$, con p_1 primo, le uniche parole ripetitive saranno quelle formate dalla ripetizione di parole lunghe 1, ovvero le lettere dell'alfabeto, U⋯U e F⋯F, per cui avremo

$$n = p_1, P(n) = 2^{p_1} - 2^1$$

Se $n = p_1 \cdot p_2$, p_1 e p_2 primi, le parole nel piatto saranno

$$n = p_1 \cdot p_2, P(n) = 2^{p_1 p_2} - (2^{p_1} + 2^{p_2}) + 2^1$$

ciò perché, togliendo i due gruppi di parole ripetitive formate con parole lunghe p_1 e p_2, togliamo due volte quelle formate con parole lunghe 1.

Se $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$, le parole non ripetitive saranno

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3, P(n) = 2^{p_1 p_2 p_3} - (2^{p_1 p_2} + 2^{p_1 p_3} + 2^{p_2 p_3}) + (2^{p_1} + 2^{p_2} + 2^{p_3}) - 2^1$$

un esempio del Principio di Inclusione-Esclusione al lavoro.

Riscriviamo le espressioni di cui sopra in modo da evidenziare che ciascun divisore proprio si ottiene da n dividendo per uno, due, tre ecc. fattori primi.

$$n = p_1 \qquad P(n) = 2^{\frac{n}{1}} - 2^{\frac{n}{p_1}}$$

$$n = p_1 \cdot p_2 \qquad P(n) = 2^{\frac{n}{1}} - \left(2^{\frac{n}{p_1}} + 2^{\frac{n}{p_2}}\right) + 2^{\frac{n}{p_1 p_2}}$$

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \quad P(n) = 2^{\frac{n}{1}} - \left(2^{\frac{n}{p_1}} + 2^{\frac{n}{p_2}} + 2^{\frac{n}{p_3}}\right) + \left(2^{\frac{n}{p_1 p_2}} + 2^{\frac{n}{p_1 p_3}} + 2^{\frac{n}{p_2 p_3}}\right) - 2^{\frac{n}{p_1 p_2 p_3}}$$

Ciò si generalizza facilmente a

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i \,, P(n) = 2^{\frac{n}{1}} - \sum\nolimits_1 2^{\frac{n}{p_i}} + \sum\nolimits_2 2^{\frac{n}{p_i p_j}} - \sum\nolimits_3 2^{\frac{n}{p_i p_j p_k}} + \cdots$$

dove l'indice delle sommatorie si riferisce al numero di fattori primi al denominatore degli esponenti.

Cosa succede quando scomponendo n in fattori primi l'esponente di un fattore è maggiore di uno?

Se $n = p_1^{\alpha_1}$, i divisori propri di n sono

$$\left\{p_1^{\alpha_1 - 1}, p_1^{\alpha_1 - 2}, \dots, p_1, 1\right\}$$

o, meglio,

$$\left\{\frac{n}{p_1}, \frac{n}{p_1^2}, \dots, \frac{n}{p_1^{\alpha_1 - 1}}, \frac{n}{p_1^{\alpha_1}}\right\}$$

Tutti i divisori dal secondo in poi sono anche divisori di $p_1^{\alpha_1 - 1}$: questo significa che le parole lunghe $p_1^{\alpha_1 - 1}$ contengono anche le parole ripetitive formate dalla ripetizione delle parole lunghe quanto gli altri divisori.

Quindi, nel piatto avremo

$$P(n) = 2^{p_1^{\alpha_1}} - 2^{p_1^{\alpha_1 - 1}} = 2^{\frac{n}{1}} - 2^{\frac{n}{p_1}}$$

parole, esattamente come nel caso visto sopra con $\alpha_1 = 1$.

La stessa cosa vale evidentemente per due o più fattori primi

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \qquad P(n) = 2^{\frac{n}{1}} - \left(2^{\frac{n}{p_1}} + 2^{\frac{n}{p_2}}\right) + 2^{\frac{n}{p_1 p_2}}$$

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \quad P(n) = 2^{\frac{n}{1}} - \left(2^{\frac{n}{p_1}} + 2^{\frac{n}{p_2}} + 2^{\frac{n}{p_3}}\right) + \left(2^{\frac{n}{p_1 p_2}} + 2^{\frac{n}{p_1 p_3}} + 2^{\frac{n}{p_2 p_3}}\right) - 2^{\frac{n}{p_1 p_2 p_3}}$$

e, in generale,

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \,, P(n) = 2^{\frac{n}{1}} - \sum\nolimits_1 2^{\frac{n}{p_i}} + \sum\nolimits_2 2^{\frac{n}{p_i p_j}} - \sum\nolimits_3 2^{\frac{n}{p_i p_j p_k}} + \cdots$$

Che dire della divisibilità per 6? $P(n)$ è somma di potenze di due e quindi è senz'altro pari: non ci resta che verificare la divisibilità per 3.

O Babbo Gauss, grazie per le Congruenze che ci rendono la vita facile! Ogni potenza di due è congruente a $\pm 1 \pmod 3$

$$2^a \equiv \begin{cases} +1 & a = 2x \\ -1 & a = 2x+1 \end{cases} \pmod 3$$

infatti, $2^{2x} \equiv 4^x \equiv 1 \pmod 3$ mentre $2^{2x+1} \equiv 2 \cdot 4^x \equiv 2 \equiv -1 \pmod 3$.

Si distinguono tre casi: per n dispari tutti gli esponenti sono dispari e

$$P(n) \equiv (-1) - \sum\nolimits_1 (-1) + \sum\nolimits_2 (-1) - \sum\nolimits_3 (-1) + \cdots \equiv -\left[\binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \cdots\right]$$
$$\equiv -\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \pmod 3$$

Infatti, vi sono $\binom{k}{0}$ modi di dividere n per 1, $\binom{k}{1}$ modi per dividerlo per uno dei suoi fattori primi, $\binom{k}{2}$ modi per dividerlo per due dei suoi fattori primi eccetera.

Usiamo il Teorema Binomiale per calcolare

$$P(n) \equiv -\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \equiv -\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (+1)^{k-i} \equiv -(-1+1)^2 \equiv 0 \pmod 3$$

Per $n = 4x$, ovvero $p_1 = 2, \alpha_1 > 1$, tutti gli esponenti sono pari e

$$P(n) \equiv +\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \equiv 0 \pmod 3$$

Per $n = 2x$, ovvero $p_1 = 2, \alpha_1 = 1$, gli esponenti dispari sono quelli che hanno il fattore 2 al denominatore: 0 per $\frac{n}{1}$, 1 per $\frac{n}{p_i}$, $k-1$ per $\frac{n}{p_i p_j}$ e, in generale, $\binom{k-1}{i-1}$; gli esponenti pari sono dunque $\binom{k}{i} - \binom{k-1}{i-1}$ e le parole nel piatto sono

$$P(n) \equiv \binom{k}{0} + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \left[\binom{k}{i} - 2\binom{k-1}{i-1}\right] \equiv \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} - 2\sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{k-1}{i-1}$$
$$\equiv 0 \pmod 3$$

Buon appetito!

Chissà a quale punto della lettura ci sono venuti in mente i vari metodi per caramellare gli spiedini con una buona spruzzata alcolica… ma il ***Panurgo*** è tornato alla carica con un'aggiunta, essenziale ovviamente, accanto all'immagine degli spiedini in fiamme:

Post scriptum: visto quanto sopra sostituiamo m a 2, $m(m+1)$ a 6 e, per $n \geq m$

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, P(n,m) = m^{\frac{n}{1}} - \sum\nolimits_1 m^{\frac{n}{p_i}} + \sum\nolimits_2 m^{\frac{n}{p_i p_j}} - \sum\nolimits_3 m^{\frac{n}{p_i p_j p_k}} + \cdots$$

da cui, essendo in tutta generalità

$$m \equiv -1 \pmod{m+1}$$

e quindi

$$m^a \equiv \begin{cases} +1 & a = 2x \\ -1 & a = 2x+1 \end{cases} \pmod{m+1}$$

segue

$$P(n,m) \equiv 0 \pmod{m+1}$$

con la notevole eccezione di $m = 1$ e $m = 2$, per i quali

$$P(1,1) = 1 \not\equiv 0 \pmod{m+1}, P(2,2) = 2^2 - 2^1 \equiv (+1) - (-1) \not\equiv 0 \pmod{m+1}$$

(2 è l'unico primo pari).

> Naturalmente, $P(\mathrm{n},1) = 0$ per $n > 1$ essendo particolarmente ripetitive le parole composte da n lettere tutte uguali; ma, niente paura: $0 \equiv 0 \pmod{m+1}\ \forall m \in \mathbb{N}$.

Bene, non è ancora tempo di fermarsi, il secondo problema incombe.

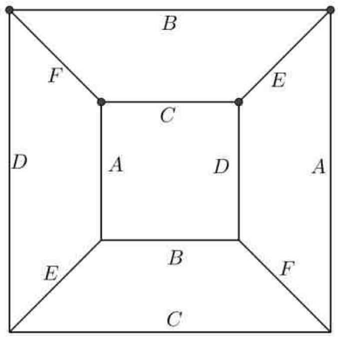
4.2.2 Opera d'arte cubista

Il Capo non si stanca più di creare figure tridimensionali, e ora che il suo progetto origami è in piena esplosione, ha deciso di passare ai giochi e alle possibili colorazioni:

> *Avete uno scheletro di cubo e barattoli di vernici in tre colori diversi, due giocatori che a turno verniciano gli spigoli del cubo; uno spigolo già verniciato non può essere riverniciato, e due spigoli che si incontrino in un vertice non possono essere dello stesso colore: vince l'ultimo che riesce a colorare uno spigolo. Esiste una strategia vincente per un qualche giocatore? Quante sono (a meno di rotazioni) le posizioni finali del gioco?*
>
> *E se si usa un dodecaedro, o un ottaedro o un icosaedro, quanti colori dovremmo usare? E per dimensioni superiori?*

A stretto giro di posta dopo la pubblicazione di RM234 è arrivata la mail di ***.mau.***, intitolata "avrei dovuto lavorare":

> e invece ho perso tempo a disegnare la risposta alla prima parte del secondo problema (disegno in Geogebra, claro)



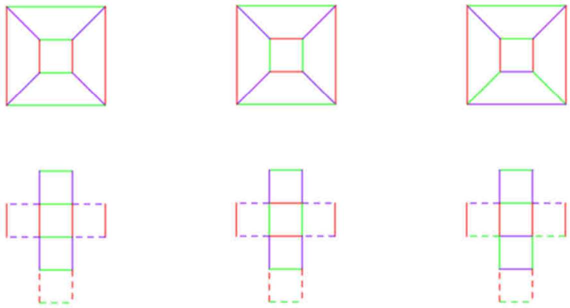
> Schiacciamo il cubo sul piano, ed etichettiamo gli spigoli come in figura. Il secondo giocatore si limita a scegliere lo spigolo con la lettera corrispondente e quindi vincerà per forza alla dodicesima e ultima mossa. (Gli spigoli A e D avranno lo stesso colore, così come B e C ed E e F).
>
> Mi è meno chiaro capire quali sarebbero le posizioni finali del gioco: se entrambi giocano in maniera ottimale ce n'è una sola.

Vediamo che cosa ci ha scritto a proposito ***Valter***:

> Mi accontento di analizzare il cubo. Già così rischio di dire asinate. Chiamo i 3 colori C: 1, 2, 3. Dato che:
>
> - i vertici V sono 8
> - le facce F 6
> - gli spigoli S 12
> - ogni S è il lato di 2 F
> - in ogni V si incontrano 3 S.
>
> Si deduce che:
>
> - 4 = numero massimo di S con stesso C
> - quindi ognuno del 3 C colora 4 S.
>
> Giustifico:
>
> - colorando un S assegno a 2 V quel C
> - dopo 4 S ho impegnato tutti gli 8 V.

Le posizioni finali P mi pare siano 2.

Ne fornisco una immagine per spiegarmi.



Sono 3 coppie verticali del cubo. Lo mostrano da 2 prospettive diverse. La prima coppia rappresenta una P. Le altre due modi di vedere la restante. Differiscono dai C negli S nelle F. I C per le 2 P sono rispettivamente:

- 2 F con 1212, 2 con 2323, 2 con 3131
- 2 F con 1212, 4 con 3132.

Il primo delle coppie è il cubo d'alto. Nella prima P i 3 C ruotano sui 3 assi:

- viola orizzontale
- verde verticale dall'alto al basso
- rosso verticale da destra a sinistra.

Nella seconda P (prima immagine):

- un C ruota (viola asse orizzontale)
- le 2 F 1212 sono opposte in verticale (rosso/verde/… ruotati in 90°)
- le 4 F 3132 nelle 4 F laterali (con i C rosso/verde alternati).

Dal disegno si deduce la strategia. Dovrebbe vincere il secondo giocatore. Controlla le 2 F con S colorato dal primo. Almeno una ha lo S opposto da colorare. Colora tale S con lo stesso colore. Così arriva a colorare l'ultimo S. Quindi è l'ultimo che colora uno S.

Direi che fino a qui sono tutti d'accordo che il secondo giocatore vince nel caso del cubo. E anche per quanto riguarda la colorazione finale, anche ***Alberto R.*** non ha dubbi:

Mi limito al caso del cubo.

Se gioco per secondo non posso perdere: Qualunque mossa tu fai, io rispondo pitturando con lo stesso colore lo spigolo opposto rispetto al centro del cubo. Ciò è sempre possibile perché se la tua mossa era lecita lo è anche la mia per evidenti ragioni di simmetria.

In caso di pareggio (tutti i 12 spigoli correttamente colorati) la configurazione finale, a meno di riflessioni e rotazioni, è una sola: quella in cui spigoli paralleli hanno lo stesso colore.

Aspettiamo notizie delle estensioni, ovviamente. Buone vacanze a tutti e alla prossima!

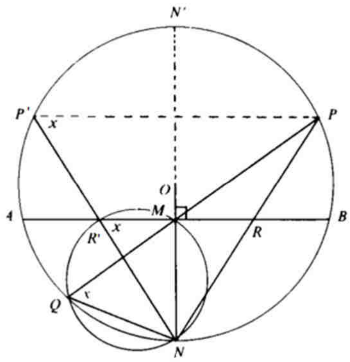
5. Quick & Dirty

Se a, b, c formano un triangolo, trovate per quali valori di n formano un triangolo anche $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{c}$.

6. Pagina 46

Sia *P'N* la riflessione di *PN* sul diametro *NON'* (si faccia riferimento alla figura).

Essendo *AB* perpendicolare a O*N*, questa riflessione porta *R* nell'intersezione *R'* di *P'N* e *AB*, e quindi *RN*=*R'N*.



PP' e *AB* sono entrambi perpendicolari al diametro *NON'*, e quindi sono paralleli tra loro. Ma questo significa che gli angoli *NR'M* e *NP'P* sono uguali tra loro. Sullo stesso segmento abbiamo però anche l'uguaglianza tra gli angoli *NP'P* e *NQP* (angoli alla circonferenza sottendenti lo stesso arco); questo significa che *NR'M*=*NQM*, e quindi che *QNMR'* è *ciclico*.

Ma se *R'N* sottende un angolo retto alla circonferenza, deve essere un diametro della medesima circonferenza; ma l'angolo *MNQ* sotteso alla circonferenza dalla corda *QM* non può essere un angolo retto (in quanto essendo *NN'* un diametro del cerchio, l'angolo *NQN'* è un angolo retto: questo implica che nel triangolo *QNN' QNM* non lo sia).

Di conseguenza, la corda *QM* ha lunghezza minore del diametro *R'N*=*RN*.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Altre strade solide – [1] – Il (primo) metodo di Fusé

Non fatevi trarre in inganno: il nome è *Tomoko*, quindi pienamente autorizzato a discettare in merito.

In realtà, data la (relativamente) scarsa diffusione dei testi sull'origami, potremmo essere giustificati ad attribuire il tutto a ***Andrew Glassner***, che ha diffuso il metodo con un articolo (piuttosto sommario, in verità) sulla rivista *IEEE Computer Graphics and Applications* del luglio 1996. Il pezzo inizia con un'*excusatio non petita* sul fatto che Andrew non aveva mai ottenuto dei risultati oltre il valore SMNSI[13] nell'origami sino all'incontro con due testi: il ***Lang***[14] (...e grazie... sarebbe come pretendere che il Papa non citi la Bibbia) e, appunto, il ***Fusé***[15].

Il fatto che l'intersezione tra ingegneri lettori dell'IEEE-CG&A e origamisti sia un insieme con pochi elementi ci spinge a pensare che buona parte dei lettori si sia limitata ad uno sguardo veloce all'articolo e via andare; il che è un peccato, perché le costruzioni Fusé sono molto belle ma, come quasi sempre, sono assemblate per difficoltà di costruzione; Glassner, invece, tenta un'analisi dei metodi costruttivi utilizzati e, anche se non si spinge molto lontano, ha una serie di idee interessanti.

Lasciando da parte le usuali battute sugli ingegneri, le costruzioni appoggiano su una base formale: infatti, lasciando da parte carta e piegature, il Nostro parte da alcune definizioni.

L'idea soggiacente a tutte queste costruzioni è quella di costruire una serie (*istanze*) di *unità* che vengano poi assemblate per costruire quanto desiderato. Come d'uso in matematica, quanto non detto non è necessariamente vero: i "tipi" di unità impiegati in una costruzione non necessariamente devono essere uguali tra loro. Per fare un esempio semplice, pensate al fatto che le *unità di Verrill* (con le quali abbiamo lavorato – almeno, *noi* lo abbiamo fatto – nei PM di RM045/6) hanno una chiralità, e ve ne servono di entrambi i tipi. Se preferite un esempio complesso, lo "Scheletro di Allosauro" che decora la copertina di RM125, creato da Robert Lang (...maledetto... abbiamo le istruzioni, ma non ce la faremo mai) richiede ben sette unità.

Il passo successivo è quello di riuscire a far stare assieme il tutto, e Glassner, dopo il termine "unità", non resiste alla tentazione di inventarne degli altri: infatti per stare assieme il la vostra unità deve avere parti di tre tipi.

Tanto per cominciare, deve avere delle *tasche* (*pockets*), ossia dei "buchi" nei quali infilare le ali di un'unità. Da cui si deduce che ogni unità deve avere delle *ali* (*flaps*) che devono essere inserite nelle tasche di un'unità. L'ultimo elemento, purtroppo in molti casi assente, è la *linguetta* (*locktab*), che non è altro che un'ala che si incastra in modo sostanzialmente irreversibile all'interno di una tasca.

Qualche nota strettamente personale.

Tanto per cominciare, Glassner non scrive "un'unità", ma "un'*altra* unità"; a noi la cosa sembra limitante (e forse anche un po' sbagliata: diteci la vostra sulla costruzione dell'*Unità Triangolare di Fusé* che vedremo in seguito, dove secondo noi un'ala entra nella tasca della stessa unità).

Indi, *locktab* è termine molto bello, mentre *linguetta* probabilmente non è neppure corretto. Ma volevamo rendere omaggio alle costruzioni di carta della nostra gioventù, con il loro "piegare lungo la linea tratteggiata e unire con un punto di colla sulla linguetta". Noi non ci siamo mai riusciti.

---

[13] "Studia, Ma Non Si Impegna". Ce lo siamo appena inventati, e ne andiamo fieri.

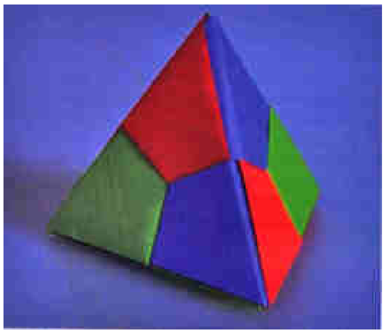
[14] Robert J. Lang, "*The Complete Book of Origami*", Dover Publications.

[15] Tomoko Fusé, "*Unit Origami*", Japan Publications. Vol.1, *Multidimensional Transformations* e Vol. 2, *Unit Origami Polyhedra.*

Come ultimo punto, notiamo che dalle linguette dipende, di solito, la solidità della costruzione: l'unità triangolare di Verrill ne è poverissima (chiunque abbia provato a far stare assieme l'icosaedro ne sa qualcosa), mentre l'unità pentagonale ne è particolarmente ricca, con il dodecaedro abbiamo colpito svariati colleghi distratti con danni irrilevanti (al dodecaedro).

Il passo successivo consiste nel definire con maggior dettaglio le unità, e Glassner ne individua di *tre* tipi:

1. Un'*unità di faccia* è un'unità che rappresenterà, nella versione finale, una faccia: ad esempio, se state costruendo un cubo, avendo questo sei facce, vi serviranno sei unità di faccia.
2. Un'*unità di spigolo* è un'unità che rappresenterà, nella versione finale, uno spigolo e *almeno una parte* di ciascuna delle due facce connesse dallo spigolo; sempre per il cubo, avendo dodici spigoli, vi serviranno dodici unità di spigolo per costruirlo.
3. Un'*unità di vertice* è un'unità che rappresenterà, nella versione finale, un vertice e *almeno una parte* di ciascuno degli spigoli e delle facce che si incontrano nel vertice; per il cubo, otto spigoli e quindi otto unità di vertice.

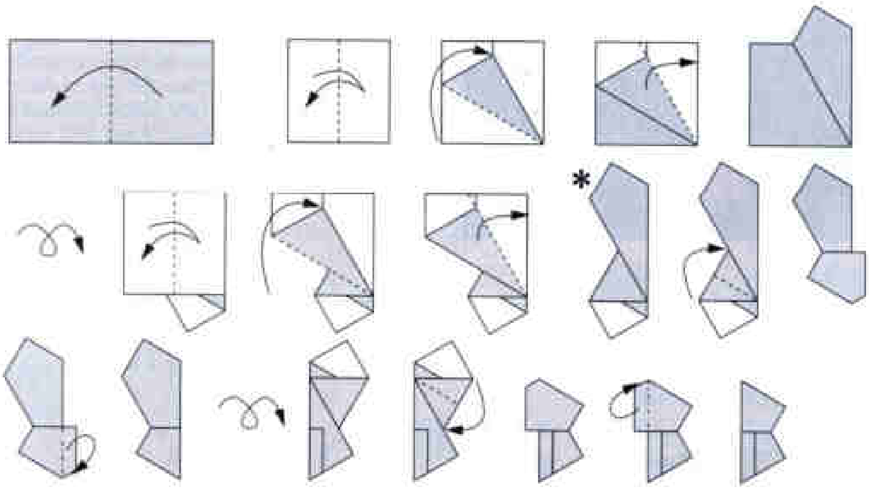


1 *Un tetraedro "strano".*

Tutto molto chiaro e lineare, ma sovente capire di cosa si sta parlando non è semplice. E la cosa risulta evidente dall'esempio di Glassner per la costruzione con unità di spigolo del tetraedro regolare: trovate il risultato finale nella figura a fianco. La prima impressione è che in realtà questo oggetto sia costruito con unità "metà di due spigoli", e che quindi non quadri con le definizioni di Glassner; un'analisi più attenta, però, potrebbe portarvi alla considerazione che voi state vedendo *quattro* unità: due "intere" (la rossa e la blu) e due "mezze" (le due unità verdi); "dietro" (e "sotto") ci sono altre due unità, una verde e una blu, e qui lo spigolo è formato (ad esempio) dall'unità blu che forma anche due terzi delle due facce visibili (se volete fare i pignoli, trovate l'errore nella frase precedente senza leggere la nota)[16].

Adesso, verrebbe da dire che per capire tutto lo sproloquio qui sopra sarebbe meglio costruirlo, 'sto tetraedro. Il Nostro, qui, si rivela purtroppo piuttosto parco di istruzioni (...e fortuna che questo è "quello facile"...). Ci è di (parziale) consolazione il fatto che sia molto ben spiegata la costruzione dell'unità, anche se il "punto difficile" viene lasciato come esercizio al lettore: la figura 10 e la figura 15 (che sono la stessa piegatura, ma fatta sull'altra ala) non sono semplicissime: come aiuto, vi diremo che è la classica piega passante per un punto che porta un punto su un altro punto: se considerate il triangolino equilatero, la piega è un'altezza passante per un vertice che porta un altro vertice sul terzo.

[16] In realtà anche i "pezzi rossi" appartengono a due unità diverse, che si incontrano nel centro dello spigolo che guarda verso di voi. O forse sono i pezzi blu, e allora è uno solo quello rosso. Per questo, abbiamo scritto "ad esempio". Glassner, una volta tanto, è riuscito a fare un ottimo lavoro e non si capisce quale sia l'unità "unica" della figura.



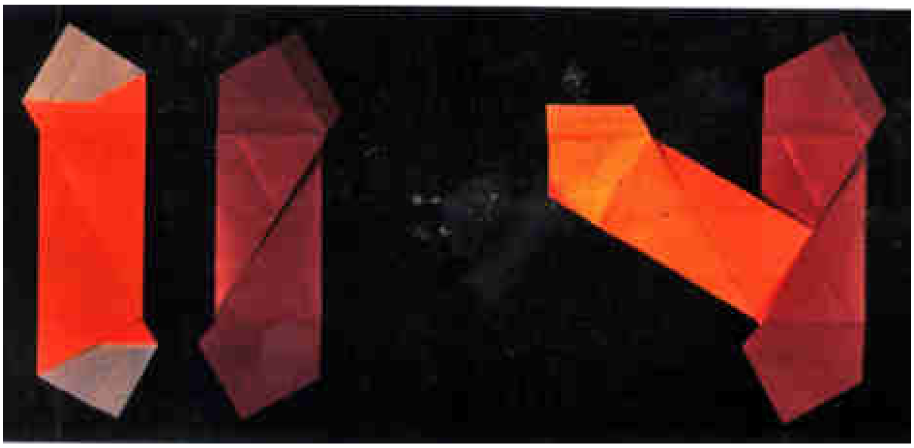
L'asterisco sulla figura 9 indica il fatto che, quando avete finito, dovete riaprire tutto per tornare a questo punto: la cosa può, in prima istanza, lasciare perplessi, ma ha l'indubbia utilità di costruire il necessario numero di ali e linguette (non sperateci molto, sulle linguette: se riuscite a chiudere l'ultima, siete *dentro* il tetraedro).

I più attenti (o sperimentali) di voi avranno notato che la prima figura ha "l'aria strana": infatti, per costruire tutto questo vi serve un rettangolo 2×1. Se trovate un modo per ottenerlo da un foglio A4 senza fare troppe piegature inutili, fatecelo sapere: a noi pare impossibile, senza tracciare (almeno) una diagonale di uno dei quadrati.

I teorici avranno infine il loro momento di gloria quando si accorgeranno che le figure 3-4 e 7-8 non sono altro che il classico metodo per ottenere un angolo di trenta gradi, che avevamo visto un paio di puntate fa.

Bene, di queste unità ve ne servono *sei*, visto che sono unità di spigolo.

Dicevamo che l'assemblaggio non è immediato, e Glassner si limita a un'immagine e a una spiritosata. L'immagine è qui di seguito:

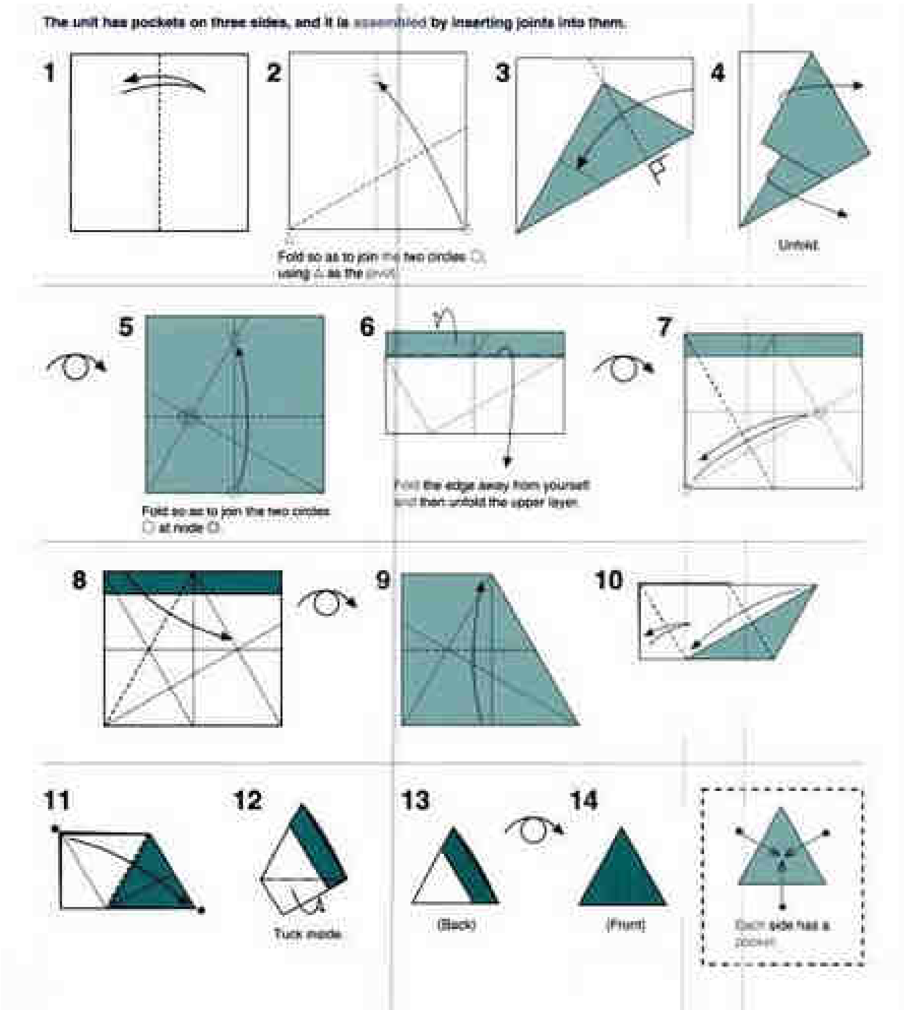


Notiamo (Glasser non lo dice) che delle due unità sulla sinistra una è "girata dall'altra": non sono speculari, come si vede dall'immagine sulla destra, dove le due unità mostrano entrambe la faccia con la tasca e le linguette (le sporgenze in cima, proprio a forma di "linguetta" vanno tutte nella stessa direzione.

...quindi, il nostro si esibisce in un "*the folding to get the pieces to lock together seems implausible until after you've done it*". Insomma, "Lo Zen e l'arte della manutenzione del tetraedro".

Va detto che è un lavoro relativamente breve (se non considerate i momenti in cui vi fermate a pensare come si fa un certo incastro) e il risultato piuttosto solido.

Se vi sentite scoraggiati dalla complicazione del montaggio, potete provare con una delle costruzioni più facili di Fusé: per questa, vi servono *due* unità diverse. La prima ha qualche complessità (non solo, ma la nostra copia è pessima e il testo quasi illeggibile), vi diamo qualche dritta dopo l'immagine.



In testa: "Questa unità ha tre tasche, una per lato"

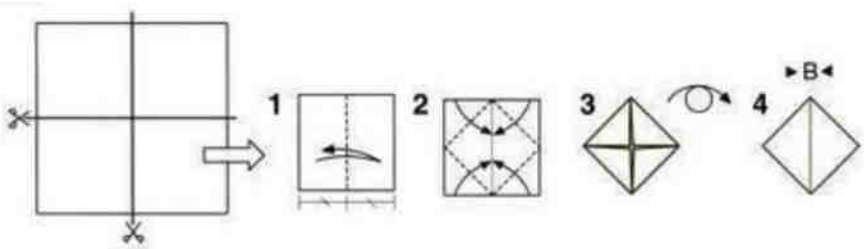
La figura 2 è la "solita" divisione in angoli di trenta gradi.

La figura 5 porta i due cerchi piccoli uno sull'altro (passando per il cerchio grande.

La figura 12 è quella che ci ha ispirato le perplessità sulle definizioni di Glassner: l'ala entra nella tasca *della stessa unità*.

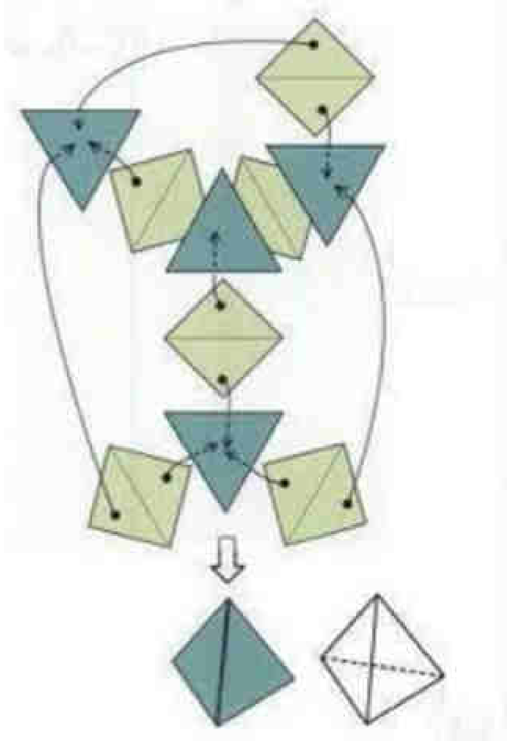
Essendo unità di faccia, ve ne servono *quattro*.

Poi, vi serve il legame (*joint*) tra le diverse facce: siccome verranno a costituire gli spigoli, ve ne servono *sei*. E (orrore!) dovete tagliare un foglio quadrato, che ve ne fornisce quattro.



Ragionevolmente chiaro, si direbbe. Ognuna di queste unità forma due ali (senza tasche: quelle sono nelle unità di faccia), dato che non contribuiscono neanche in parte alla formazione di una faccia, *non* vengono chiamate unità di spigolo. Sono dei semplici sistemi per tenere assieme il tutto.

Dove Fusè raggiunge l'apice della comprensibilità (sia detto senza alcun intento ironico) e nella spiegazione dell'assemblaggio: ve lo diamo senza alcuna istruzione, visto che ci pare autoesplicante.



Beh, per questo mese ci pare abbiate abbastanza cose da (s)piegare. Ci teniamo qualche altra elucubrazione su Glassner per la prossima volta.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms