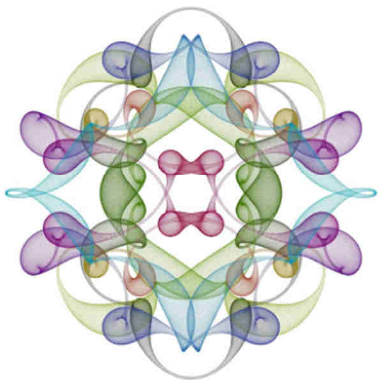
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 234 – Luglio 2018 – Anno Ventesimo

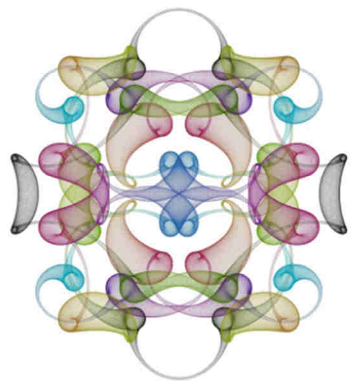


This image shows 10,000 circles. For $k = 1, 2, 3, \ldots, 10000$, the center of the k-th circle is $(X(k), Y(k))$ and the radius of the k-th circle is $R(k)$, where

$$X(k) = \frac{2}{3}\sin\left(\frac{14\pi k}{10000}\right) + \frac{1}{3}\left(\sin\left(\frac{14\pi k}{10000}\right)\right)^3 \cos\left(\frac{24\pi k}{10000}\right) + \frac{1}{10}\sin\left(\frac{102\pi k}{10000}\right),$$

$$Y(k) = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{10\pi k}{10000}\right) + \frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{10\pi k}{10000}\right)\right)^3 \cos\left(\frac{28\pi k}{10000}\right) + \frac{1}{10}\cos\left(\frac{102\pi k}{10000}\right),$$

$$R(k) = \frac{1}{150} + \frac{1}{18}\left(\sin\left(\frac{52\pi k}{10000}\right)\right)^4 \left(1 + \left(\sin\left(\frac{8\pi k}{10000}\right)\right)^2\right).$$

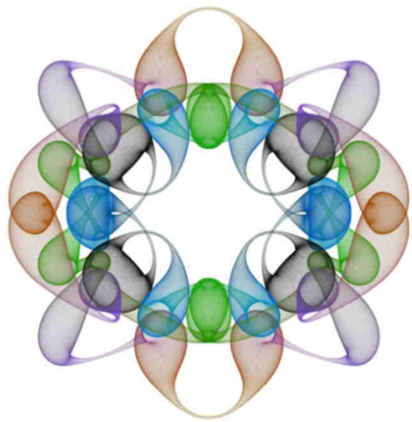


This image shows 10,000 circles. For $k = 1, 2, 3, \ldots, 10000$, the center of the k-th circle is $(X(k), Y(k))$ and the radius of the k-th circle is $R(k)$, where

$$X(k) = \frac{2}{3}\sin\left(\frac{14\pi k}{10000}\right) + \frac{1}{3}\left(\sin\left(\frac{6\pi k}{10000}\right)\right)^3 \cos\left(\frac{24\pi k}{10000}\right) + \frac{1}{10}\sin\left(\frac{106\pi k}{10000}\right),$$

$$Y(k) = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{10\pi k}{10000}\right) + \frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{6\pi k}{10000}\right)\right)^3 \cos\left(\frac{24\pi k}{10000}\right) + \frac{1}{10}\cos\left(\frac{106\pi k}{10000}\right),$$

$$R(k) = \frac{1}{150} + \frac{1}{18}\left(\sin\left(\frac{38\pi k}{10000}\right)\right)^4 \left(1 + \left(\sin\left(\frac{8\pi k}{10000}\right)\right)^2\right).$$

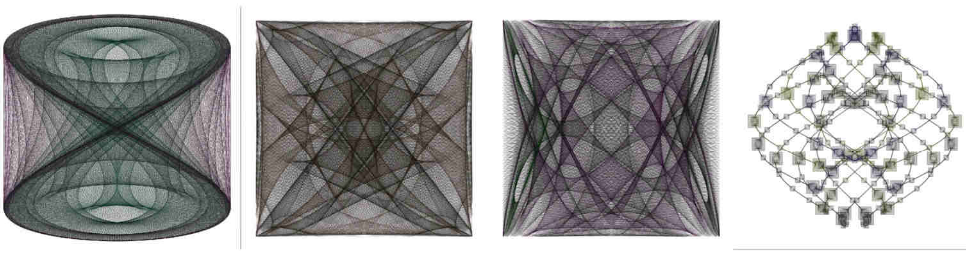


This image shows 10,000 circles. For $k = 1, 2, 3, \ldots, 10000$, the center of the k-th circle is $(X(k), Y(k))$ and the radius of the k-th circle is $R(k)$, where

$$X(k) = \frac{2}{3}\sin\left(\frac{6\pi k}{10000}\right) + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{36\pi k}{10000}\right)\cos\left(\frac{30\pi k}{10000}\right) + \frac{1}{4}\left(\sin\left(\frac{14\pi k}{10000}\right)\right)^3,$$

$$Y(k) = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{6\pi k}{10000}\right) + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{28\pi k}{10000}\right)\cos\left(\frac{30\pi k}{10000}\right) + \frac{1}{5}\left(\cos\left(\frac{14\pi k}{10000}\right)\right)^3,$$

$$R(k) = \frac{1}{150} + \frac{1}{9}\left(\sin\left(\frac{36\pi k}{10000}\right)\right)^4 + \frac{1}{20}\left(\sin\left(\frac{28\pi k}{10000}\right)\right)^6.$$



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM231 ha diffuso 3'257 copie e il 08/07/2018 per Google eravamo in 8'370 pagine.

Hamid Naderi Yeganeh (https://mathematics.culturalspot.org) ha capovolto il concetto di "bellezza di una formula": i disegni sono bellissimi, ma le formule (pubblicate purtroppo solo per la serie *Circles*) fanno spavento. Interessante come, con variazioni minime nelle formule, il disegno cambi radicalmente.

1. Arresto per calcolo

"Una neutralità maravigliosa hanno codeste cose di matematica, e puranco posseggono una strana compartecipazione sia colle cose sovrannaturali, immortali, intellettuali, semplici e indivisibili come pure colle cose naturali, mortali, tangibili, composte e divisibili."[1]
(Dalla sua Prefazione agli "*Elementi*" di Euclide)

"Io Filemazio, protomedico, matematico, astronomo, forse saggio, ridotto come un cieco a brancicare attorno, non ho la conoscenza od il coraggio per fare quest'oroscopo, per divinar responso"
(Francesco Guccini, *"Bisanzio"*)

"*La pietra scartata dai costruttori è divenuta la mia pietra angolare*", recita il versetto numero 22 del Salmo 117 (118)[2]. Le scritture religiose fanno un grande uso di metafore, e non potrebbe essere altrimenti: gran parte della loro potenza e del loro fascino sta proprio nel linguaggio che deve essere al tempo stesso intellegibile e misterioso, evocativo e comunque di valenza universale. Le metafore e le similitudini sono gli strumenti perfetti allo scopo, perché possono essere intesi in senso traslato e, nella traslazione, assumere i significati che più si adattano ai diversi ascoltatori. Nel caso specifico della citazione, comunque, la lettura metaforica sembra essere abbastanza diretta: quello che per altri era oggetto misero e inutile è stato orgogliosamente usato da chi dà voce al salmo come elemento prezioso, fondante. Si possono certo leggere anche altri messaggi nel testo, ma certo occorre qualche sforzo di fantasia ulteriore, rispetto all'immagine immediata.

Il rischio maggiore, per un testo metaforico, non è comunque quello di una interpretazione troppo ardita o semplicemente sbagliata; è piuttosto quello di una interpretazione strettamente letterale, o addirittura dissezionata nei suoi singoli componenti. In questo salmo 117 (118), ad esempio, c'è chi ha visto nella "pietra" citata qualcosa di estremamente tangibile, reale, e – soprattutto, in quanto citata direttamente dal testo sacro e divino – dotata di poteri straordinari. Poteri magici, a dirla tutta: poteri di cambiamento e trasmutazione; del resto, si tratta di una pietra che cambia ruolo nel testo del salmo, e lo cambia in maniera positiva, nobilitando la sua primitiva natura di ignobile rifiuto ad elemento (letteralmente) fondamentale d'un nuovo e nobilissimo edificio. Una pietra magica col potere del cambiamento: insomma, la Pietra Filosofale.

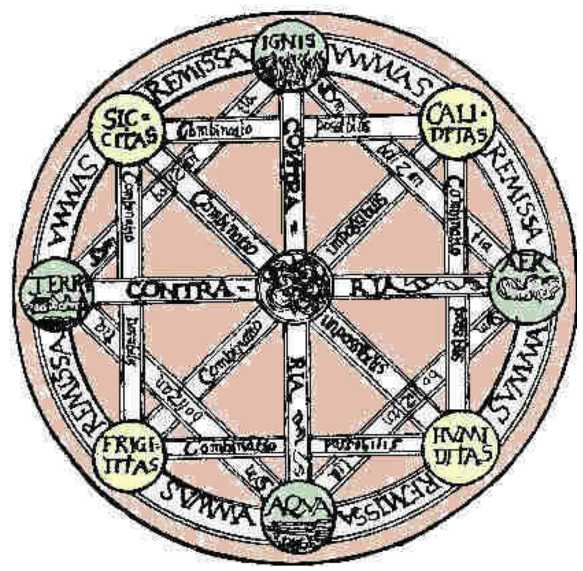
Non è certo solo la presenza della parola "pietra" in un testo sacro a determinare la nascita di uno degli concetti più leggendari della storia, anzi: come esplicita il nome stesso, la ragione principale discende da dotte interpretazioni filosofiche, dalla filosofia di Aristotele e Platone, per la precisione.

Com'è noto, molto prima che la Tavola del Sistema Periodico di Dmitrij Ivanovič Mendeleev fosse riconosciuta come carta costituzionale e riepilogativa dei componenti del mondo, a lungo gli uomini hanno ritenuto che bastassero quattro ingredienti di base per cucinare tutta la varietà dell'universo: Aria, Acqua, Terra e Fuoco. La tesi appare oggi evidentemente semplicistica, ma è perdurata davvero a lungo, e verosimilmente ci sarà

[1] Il testo originale è in inglese arcaico, che si è tentato di trasferire con un italiano artatamente e cialtronescamente antico. Anche sulla fedeltà della traduzione ci sarebbe da ridire, perché se non è troppo temerario tradurre "*mathematicall*" con "matematiche", e così analogamente "*supernaturall*", "*immortall*", "*intellectuall*", optare per "neutralità" come traduzione di "*newtrality*" è già un po' più rischioso.

[2] La numerazione dei Salmi non è perfettamente condivisa. Nella versione CEI della Bibbia, il salmo in oggetto è numerato come 117; nella tradizione anglicana è contato come Salmo 118.

ancora chi ci si attiene, almeno a giudicare dal successo che gli oroscopi degli astrologi moderni hanno nei media d'intrattenimento; e quasi certamente anche chi legge queste righe conosce l'Elemento caratteristico del proprio segno zodiacale[3]. Comunque, anche se prive della guida del metodo scientifico, le indagini e le speculazioni venivano fatte anche nei tempi antichi: così come gli scienziati moderni non si sono accontentati della sistemazione nella Tavola degli Elementi di un centinaio di tipi diversi di atomi ma hanno cercato di indagare sulla natura degli atomi stessi, gli antichi filosofi si sono chiesti quale potesse essere la natura ultima e costituente dei quattro elementi tradizionali. La speculazione, per quanto antica, ha lasciato tracce ancora oggi evidenti: il termine "quintessenza" deriva chiaramente da "quinta essenza", ovvero il costituente numero cinque oltre i quattro consolidati, che era visto come reale fondamento del mondo, per non parlare del meno etimologicamente evidente "sostanza", che per Aristotele era "ciò che sta sotto", "sub-stantia", ovvero ciò che, una volta tolti gli "accidenti", gli attributi caratteristici ma in fondo non realmente essenziali, costituisce la base fondativa e comune di ogni cosa.



1 *I Quattro Elementi, e le loro interazioni di base*

La magia ha un grandissimo vantaggio rispetto a tutte le altre invenzioni intellettuali degli esseri umani: non ha particolari vincoli di coerenza interna. La scienza, almeno così come la intendiamo oggi, fa della sua coerenza interna e della possibilità di essere falsificata dai fatti il suo comandamento principale, cosa che la rende particolarmente efficace e riproducibile, ma ovviamente – e per fortuna – le impedisce di trastullarsi con voli pindarici non giustificati. Altre discipline, anche non scientifiche, hanno una sorta di pudore che le costringe a non violare (o quantomeno a non farlo troppo spesso) il principio logico di non-contraddizione o quello del Terzo Escluso; e magari procedono sulla base di principi e canoni che devono comunque essere rispettati. La magia può serenamente fare a meno di certi legacci, e selezionare di volta in volta le idee che più la interessano e attraggono.

Il caso della Pietra Filosofale è illuminante: il pensiero magico può prendere l'idea della "pietra" dalla religione; può mescolare il concetto di "elemento" dall'antica filosofia naturale; può dosare i concetti di base, variarne le proporzioni, agitare il tutto come un provetto barman e trarne tutte le conclusioni più misteriose e affascinanti, ovviamente assicurando che sono vere, facendosi forte dell'autorità riconosciuta dei componenti. Aumentando la dose di lettura mistica e spirituale può decidere che la Pietra Filosofale è il Cristo stesso, chiamato dalle Scritture a trasformare il mondo. Dosando gli ingredienti in modo da aumentare gli aspetti materiali può decidere che l'essenza, la sostanza alla base degli elementi dev'essere pura e nobile, e siccome il minerale che è con tutta evidenza il più puro, nobile e incorruttibile è l'oro, allora la Pietra Filosofale può trasformare gli elementi in oro. Introducendo un pizzico di componente biologica, leggendo con naturalezza la vita come "perfezione" e la morte come "corruzione", diventa immediato giustificare la Pietra filosofale come l'ingrediente essenziale dell'Elisir di Lunga Vita, la magica medicina che garantisce l'immortalità. E, come spesso accade, le parole restano testimoni inconsapevoli delle fantasie umane: la parola stessa "elisir"

[3] Nella redazione di RM è presente una bella varietà, da questo punto di vista: possiamo annoverare un segno di Acqua, uno di Fuoco e uno di Terra. Ci manca solo l'Aria, probabilmente è per questo finiamo con l'arrivare sempre in ritardo nelle uscite: scarsa ventilazione.

arriva (ma sarebbe più corretto dire "ritorna") in Europa per mezzo degli arabi, che con il termine "*al-ʾiksīr*" indicavano un liquido miracoloso che poteva trasformare il piombo in oro, o guarire come panacea tutti i mali, o – dulcis in fundo – garantire l'immortalità. Anche se quel liquido arabo è in realtà un solido greco, in ultima analisi, perché è dall'antica parola ξηρίον (*xēríon*), che arriva l'orientale elisir, e *xēríon* è la polvere medicinale.

La magia può mettere tutto insieme. L'antica pietra biblica del Salmo, che in qualche maniera è fatta della stessa sostanza di cui è fatto il Figlio di Dio adorato dalla cristianità, può insomma essere grattugiata come parmigiano, mescolata nell'acqua per farne l'Elisir di Lunga Vita, ma è ottima anche per trasformare la vile materia in tutto l'oro che si vuole. Basta trovare quella pietra, insomma, per diventare in un colpo solo ricchi, immortali e divini; non ci si può stupire troppo, se è stata cercata così a lungo, e così disperatamente.

2 *Elisir di lunga vita*

Sembra inevitabile, oggi, sorridere di quella che non può non apparire come una gigantesca ingenuità; ma uno sguardo dato con appena un po' meno sufficienza potrebbe lasciare anche un retrogusto amaro. Gli esseri umani sono sempre attratti dalle cose stupefacenti, ma il loro senso di curiosità verso la meraviglia spesso è appagato facilmente da spiegazioni semplici, non necessariamente razionali, e per le quali non sembra essere richiesta alcuna verifica; e questo atteggiamento è ancora largamente diffuso, forse addirittura ancora dominante. Alla fin fine, una centrale nucleare opera davvero la tanto ricercata trasmutazione degli elementi[4], ma spiegare il funzionamento è oggettivamente più complesso, e soprattutto meno affascinante[5] che raccontare del ritrovamento di una magica pietra, sacra e grattugiabile. La triste conseguenza è molte persone sono ancora oggi più propense ad affidarsi a chi riesce a dare spiegazioni semplici e false, piuttosto a chi ne fornisce di vere e complesse.

Semplicità apparente, dalla quale è difficile difendersi; in fondo ancora oggi quasi tutti i testi destinati a schiudere i principi della fisica ai neofiti parlano della Legge di Gravitazione Universale di Newton così come Newton stesso l'ha presentata: due corpi si attraggano in ragione diretta delle loro masse e in ragione inversa al quadrato della

[4] Anche se in genere non vengono utilizzate per trasmutare il piombo in oro; quelli che le costruiscono sono interessati non tanto a vedere come cambia la natura degli elementi che vi entrano rispetto a quelli che ne escono, ma a quell'effetto collaterale (del tutto trascurato dagli antichi alchimisti) della liberazione d'energia che si ottiene durante il processo.

[5] Falso: in realtà capire il meccanismo di base di grandi conquiste scientifiche è di gran lunga più affascinante che sentir raccontare invenzioni semplicistiche. Il guaio è che per capire le spiegazioni scientifiche è richiesta quanto meno una base di conoscenze comuni, elementari, tramite le quali poter affrontare spiegazioni più complesse. E queste, spesso, mancano. Altre volte manca solo la voglia di fare anche il minimo sforzo intellettuale, di pagare con curiosità e impegno quel costo irrisorio di concentrazione che poi viene straordinariamente ripagato grazie al dischiudersi di una nuova – scientifica – visione del mondo, che cambia la vita.

distanza che li separa. E sia chiaro: è sacrosanto che sia presentata in questi termini. Un po' per ragioni eminentemente storiche, un po' per – forse ancora più motivate – ragioni di ordine didattico. Quello che però dovrebbe essere parallelamente fatto è puntualizzare come quella "forza" newtoniana, per quanto accuratamente descritta e splendidamente funzionante nei calcoli applicativi, ha una natura oggettivamente poco chiara, misteriosa; anzi, diciamolo pure, essenzialmente magica.

Si tratta di una forza che quasi sembra presupporre nei corpi inanimati dotati di massa una capacità davvero portentosa; quella di conoscere la posizione istantanea di tutti gli altri corpi presenti nell'Universo nonché della loro esattissima massa (per quanto infinitamente distanti possano essere) e di agire su di loro in maniera congrua al dettato della legge. È certo vero che il primo compito dello scienziato è quello di descrivere il mondo, prima ancora che di interpretarlo, ed è evidente che arrivare a comporre in una singola formula la descrizione teorica di tutti i moti dovuti alla gravitazione è un successo talmente generale ed esaltante che si possono giustamente trascurare, almeno in prima battuta, questioni sulla natura ultima dei concetti chiamati in causa. Ma la perplessità, alla lunga, dovrebbe comunque venir fuori; e in effetti il problema della misteriosa natura della "azione a distanza" ha a lungo tormentato i fisici, almeno fino alla creazione del concetto di "campo" in fisica e poi finalmente all'apporto di Einstein, che ha risolto la questione trasformando l'onnisciente azione a distanza infinita in una perturbazione locale della geometria quadrimensionale dello spaziotempo. Così, la questione che resta da risolvere è meramente storica e accademica[6]: come poteva un genio straordinario come Newton accettare serenamente l'idea di una forza onnisciente che attraversava lo spazio identificando con esattezza la misura di intervento che doveva esercitare tra massa e massa?

La risposta è banale, e forse un po' deludente: Newton[7], il più grande scienziato del suo tempo (e certamente in lizza per il titolo di maggior scienziato di tutti i tempi), non trovava nulla di strano nell'idea che forze misteriose del cielo influenzassero non solo le masse terrestri, ma anche la vita e il destino degli uomini. Se questa mistica influenza astrale ricorda da vicino i principi dell'astrologia, è semplicemente perché proprio di astrologia si tratta, e Newton non la disdegnava affatto.

Né disdegnava l'alchimia, l'occultismo, l'interpretazione delle Sacre Scritture come fonte di profezie. Nel 1936 la celebre casa d'aste londinese Sotheby's è stata incaricata dal conte di Portsmouth, Gerard Wallop, di mettere all'incanto quelle che oggi sono note come le "carte di Portsmouth", una collezione di 329 manoscritti di Newton. Buona parte di questi sono documenti che mostrano un interesse acuto e profondo verso le pratiche dell'alchimia: il padre della Gravitazione Universale ha dedicato molto del suo tempo prezioso alla ricerca della Pietra Filosofale e dell'Elisir di Lunga Vita, e probabilmente ancora di più nell'esegesi della Bibbia, perché era convinto di essere uno dei pochi uomini che Dio aveva incaricato di interpretare le Scritture. È probabilmente ancora un po' presto perché si scateni una nuova psicosi da "Fine del Mondo", ma è abbastanza facile predire che certo questa ci sarà da qui a quarantadue[8] anni: tra le molte ricostruzioni e interpretazioni, lord Isaac ha anche appurato che, secondo la Bibbia, il mondo dovrebbe finire entro e non oltre il 2060.

---

[6] Ehm… è abbastanza falsa anche questa affermazione. Il concetto di azione a distanza sembra essersi preso una rivincita di recente, proprio nei confronti di Albert Einstein, che bollò con il termine "*spooky action at a distance*" ("spaventosa azione a distanza") quella prevista dall'entanglement quantistico, che in tempi recenti ha invece avuto segnali positivi dai laboratori di fisica. Purtroppo – forse è destino delle evocazioni dal sapore magico – l'entanglement ha scatenato anche un clamoroso entusiasmo popolare basato su divulgazioni un po' troppo poetiche, come quelle sulla "Equazione dell'Amore".

[7] Di lui abbiamo parlato in RM071, "Il Tempo e il Denaro", dove l'accento era posto tra l'altro su alcune caratteristiche del calendario e della nostra moneta europea.

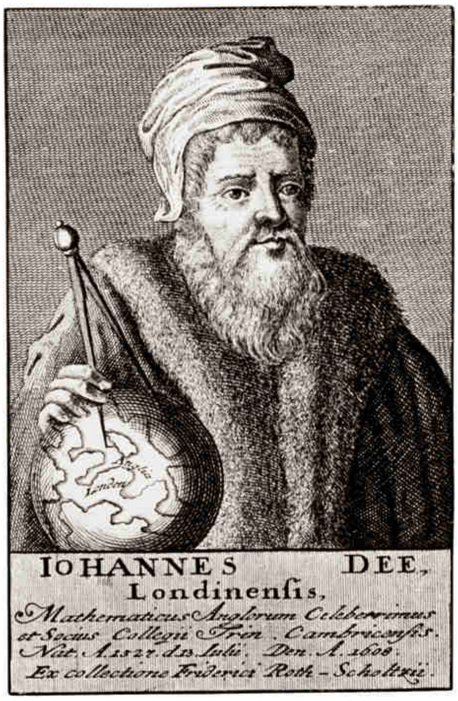
[8] Certo, certo… sappiamo benissimo a cosa state pensando.

3 *"O Diamond, Diamond, thou little knowest the mischief thou hast done"*

La leggenda vuole che buona parte delle sue ricerche esoteriche, circa un ventennio di lavoro, siano finite in cenere in un incendio del suo laboratorio causato da Diamond[9], il suo cagnolino,: "*Diamond, Diamond, non hai idea del disastro che hai causato!*" si racconta che abbia gridato disperato lo studioso. A questo punto, non è molto chiaro se il cucciolo abbia davvero causato una grande perdita per l'umanità o se invece abbia contribuito inconsapevolmente a lasciare di Newton un'immagine più autorevole per i gusti della scienza moderna. Resta comunque una lezione importante da metabolizzare e imparare a fondo: la scienza (e il suo racconto) non nasce e progredisce in fulgore di grandi scoperte e di ingegni dall'assoluta lucidità e genialità, ma – come ogni attività umana – è fatta anche di carne e sangue, di illusioni ed errori, di retaggi antichi quanto di avveniristiche e luminose previsioni.

Perché Newton, per quanto geniale e tutto sommato riservato, era pur sempre un figlio del suo tempo, e nel diciassettesimo secolo la scienza attraversava ancora le sue crisi adolescenziali. Ci si interroga sul moto degli astri e sulla composizione della materia alla stessa seria maniera con cui ci si chiede davvero quale possa essere il sesso degli angeli, la maniera migliore per interpretare le profezie, quale sia il metodo migliore per conoscere in anticipo il futuro. Se oggi essere uno scienziato significa innanzitutto essere una persona razionale, a quei tempi essere un "filosofo naturale" significava innanzitutto interrogarsi sul funzionamento del mondo, utilizzando ogni mezzo che la mente umana era in grado di concepire. Newton l'occultista, l'alchimista, l'affiliato ai Rosacroce, l'esegeta della Bibbia era la stessa persona del genio fondatore della fisica e della matematica. Soprattutto, era scienziato allineato all'idea di scienza dei suoi contemporanei; stante ciò, non dovrebbe stupire troppo scoprire quale fosse l'atteggiamento generale dell'indagine della natura (e le opinioni condivise e diffuse tra la gente del popolo su chi indagava) più di un secolo prima, nel bel mezzo del Cinquecento.

[9] È curioso, o forse semplicemente indice di come la curiosità umana si accenda anche in futilità quando sono relative a grandi personaggi, che di Newton si conoscano addirittura i nomi dei suoi animali domestici. Ci sono alte probabilità che si tratti più di leggenda che di realtà, ma in un modo o nell'altro possiamo annoverare sia il citato cagnolino Diamond, sia la micetta Spithead, resa celebre dall'aneddoto dell'invenzione della gattaiola.



4 *John Dee*

John Dee nasce a Londra il 13 luglio 1527, e se Newton passa alla storia come un grande scienziato con spiccati interessi esoterici, Dee può forse essere classificato come un grande mago con spiccati interessi scientifici. Figlio di un agiato sarto gallese che operò anche alla corte di Enrico VIII, John entra al collegio St. John di Cambridge nel 1542. Fin da giovanissimo mostra un'eccezionale voracità di conoscenza e di lettura compulsiva: si narra che delle 24 ore del giorno due fossero dedicate ai pasti, quattro al sonno e tutte le diciotto residue allo studio.

A Cambridge studia di tutto, come era di norma a quell'epoca; ma è attratto in modo particolare dalla matematica, e prima ancora di laurearsi comincia ad eseguire osservazioni astronomiche di eccezionale acutezza e precisione: tanto per ribadire il tipo di approccio che era proprio dell'epoca, è significativo che Dee chiama queste azioni "osservazioni delle influenze celesti", ove per "influenze" intende proprio le modalità con cui gli astri regolano la vita degli esseri umani.

Il famoso Trinity College di Cambridge viene istituito da re Enrico VIII nel 1546, e Dee è subito tra il corpo accademico fondatore. Com'era – e tutto sommato com'è tuttora – uso, l'accademico John Dee comincia i suoi viaggi di studio in Europa: Lovanio, Bruxelles, poi anche Parigi, dove conquista sia il pubblico, che affolla le sue lezioni sugli Elementi di Euclide, sia il senato accademico, che gli offre una cattedra di matematica. Dee rifiuta, e continua il suo viaggio, visitando anche l'Italia.

Magia e scienza sono già ben intrecciate, nella vita di John Dee: a Lovanio è diventato un buon amico di grandi cartografi come Mercator e Ortelius, che certo sono più scienziati che maghi, ma lo stesso Dee è stato considerato un mezzo stregone già a Cambridge quando, non ancora ventenne, produce degli effetti speciali per una rappresentazione teatrale di Aristofane. Tornato a Londra, si intrattiene con Gerolamo Cardano[10], con il quale discute sulla possibile realizzazione del moto perpetuo.

Morto Enrico VIII, l'Inghilterra attraversa una grande crisi religiosa, con cattolici e protestanti che se le danno di santa ragione. Dee è già riconosciuto come un grande sapiente, matematico e astrologo, e quindi ovviamente dotato di poteri oscuri. Calcola un oroscopo per la nuova regina Mary e per la principessa Elisabetta, e questo viene considerato un delitto; e il reato ascrittogli è più strettamente connesso alla parola "calcolo" che alla parola "oroscopo". L'accusa cresce fino a raggiungere il drammatico valore di "tradimento", ma dopo alcuni mesi di prigione John Dee riesce a convincere il tribunale di non meritare altre pene. Subito dopo è il Vescovo di Londra, Edmund Bonner, che vuole esaminarne l'ortodossia religiosa: e la cosa non è una passeggiata, visto che l'ultracattolico vescovo è soprannominato "*Bloody Bonner*", Bonner il sanguinario.

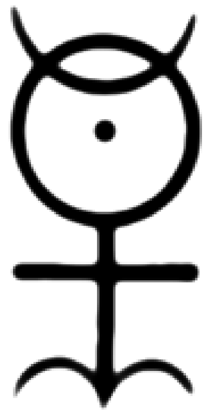
Il saggio John Dee riesce a cavarsela anche questa volta: arriva persino a diventare buon amico di Bonner e ad essere accettato nella corte della Regina Mary. In questa occasione, sempre affamato di conoscenza e di libri, propone alla regina un sistema di sua invenzione per la conservazione della Reale Biblioteca, condito da innumerevoli consigli su come arricchirla. La regina non dà particolare attenzione a queste esortazioni

[10] Che, per quanto riguarda la vita avventurosa e gli atteggiamenti misteriosi ed esoterici, non aveva da invidiare niente a nessuno. Alcuni episodi sono narrati da Dario Bressanini in RM064.

libresche, così Dee li mette in atto, per quel che può, per suo proprio conto. Alla sua morte, lasciò una delle più grandi biblioteche private della sua epoca.

I rapporti con la principessa Elisabetta sono ancora migliori: Dee le presenta il suo libro *"Propaedeumata Aphoristica*", dove scienza e magia sono di nuovo, inevitabilmente, assai ben mescolate, entusiasmando la giovane erede al trono. Si ritrova così a darle lezioni, e per tutta la vita rimase in alta considerazione nell'opinione di quella che nel 1558 sarebbe diventata una delle sovrane più significative della storia d'Inghilterra; Elisabetta lo vuole come consigliere e astrologo ufficiale di corte. È John Dee, del resto, che ha interrogato gli astri e suggerito alla futura regina quale sia il giorno ideale per la sua incoronazione. E per tutto il resto della sua vita continua gli studi, matti e disperatissimi, e indubbiamente di natura varia e poco coerente, agli occhi moderni.

Nella sua maturità, dal punto di vista scientifico ebbe il merito di scrivere un'esaltante prefazione agli Elementi di Euclide finalmente tradotti in inglese da Henry Billingsley; di osservare e commentare la comparsa della supernova del 1572, ben descritta da Tycho Brahe e le sue osservazioni e misurazioni intendevano conoscere la distanza della nuova stella con metodi trigonometrici; produsse una gran quantità di strumenti scientifici per la navigazione, contribuendo in maniera sostanziale a far crescere la Marina britannica proprio nell'epoca delle grandi esplorazioni; propose alla regina una riforma del calendario nel 1583, anno successivo a quella già messa in atto nei paesi di osservanza cattolica, ma basata su principi astronomici più validi: la regina rifiutò, e l'Inghilterra rimase disallineata al resto d'Europa per quasi due secoli.


5 *La Monade Geroglifica*

Dal punto di vista esoterico, non fu certo da meno: creò un simbolo magico originale, la "monade geroglifica" che ha ancor oggi un grande successo tra gli amanti della simbologia esoterica, scrivendo un lungo e dettagliato trattato sulle sue caratteristiche, sui suoi significati reconditi e relative proprietà[11]; si legò strettamente a Edward Kelley, un arruffone che proclamava di potere entrare in contatto con gli angeli e con gli spiriti dei defunti guardando dentro una sfera di cristallo, e John Dee passò più di cinque anni con lui forgiando sfere chiaroveggenti; viaggiarono insieme nell'Europa dell'est, dove Kelley ebbe successo e diventò persino un nobile polacco, mentre Dee invece cominciava a versare in difficoltà economiche. Tornò in Inghilterra per scoprire che la sua maestosa biblioteca era stata quasi interamente rubata.

Nel 1605 finì a Manchester, probabilmente perché a corte preferivano che restasse lontano dalla capitale, e ci arrivò proprio quando Manchester era colpita dalla peste, che gli uccise la moglie e molti figli. Tornò così nuovamente a Londra, povero e solo, dove morì nel 1609.

Una vita complicata, un mélange davvero difficile da interpretare, se si è abituati a distinguere con occhi moderni il grano dal loglio, la scienza da ciò che scienza non è. Ma nel sedicesimo secolo il metodo scientifico doveva ancora nascere, ed era lontanissimo anche dalle menti più naturalmente predisposte all'indagine del mondo.

Del resto, anche in questo ventunesimo secolo non si può ancora dire che siano la logica e la razionalità a guidare le azioni degli uomini, quindi è forse opportuno evitare di guardare con sufficienza al groviglio di emozioni, scoperte e frustrazioni dei ricercatori di mezzo millennio fa. È possibile – forse addirittura auspicabile – che quello stesso sguardo di sufficienza sarà riservato a noi da parte dei futuri esseri umani, divertiti dalla nostra incredibile ingenuità, approssimazione, fallacia e stupidità.

[11] Per chi ne fosse curioso: http://www.esotericarchives.com/dee/monad.htm.

2. Problemi

2.1 Spiedini di frutta fatti in casa

In occasione di un recente motivo di festeggiamento che per motivi di GDPR non siamo autorizzati a raccontarvi, ci siamo per coerenza trovati costretti a festeggiare e, data l'eccezionalità dell'evento, anche i festeggiamenti erano eccezionali.

Avete mai subito, da giovani, quegli spiedini di frutta ampiamente canditi tipici della riviera romagnola? Quelli che la nonna vi rifilava, in quanto "più sani", mentre i vostri amici si ingozzavano di una quantità tale di bomboloni che il bagno avrebbero potuto farlo solo raggiunta l'età pensionabile? Ecco, quelli.

Essendo fatti in casa, non brillavano per particolare originalità compositiva (fragole e chicchi d'uva giganti, e via andare), ma era stato inserito un tocco di originalità matematica: gli spiedini di una data lunghezza n erano *tutti e soli* quelli costruibili senza che fossero composti dalla sola ripetizione di substringhe identiche al loro interno: per capirci, nel vassoio delegato agli n=4, UUUU e FUFU non c'erano, mentre comparivano UUUF, UUFU, UUFF, UFUU, UFFU, UFFF, FUUU, FUUF, FUFF, FFUU, FFUF, FFFU. Totale 12, se non abbiamo sbagliato i conti. E in questo caso tutto bene, visto che eravamo in 6 (Alice, Doc, Rudy, Dejan, Paola e Paola) e ciascuno voleva mangiare esattamente la stessa quantità di spiedini di tutti gli altri.

Ora, supponendo una scorta infinita di vassoi ciascuno con un diverso n (e una fame nei partecipanti della stessa taglia), questa operazione è sempre possibile? Possiamo dividere sempre per 6 ogni vassoio?

2.2 Opera d'arte cubista

No, Picasso non c'entra. E neanche graziose ragazze in abito discinto che si dimenano in discoteca. Dobbiamo verniciare un cubo, o meglio i suoi spigoli, o meglio lo devono fare i VAdLdRM. Memore di quando erano due batuffoli implumi (adesso, ricordano più irsuti sferoidi), Rudy ha cercato di trasformare la cosa in un gioco.

"Allora, giovini, avete qui un simpatico scheletro di cubo e barattoli di vernici in tre colori diversi. Quanto vi si chiede è che verniciate gli spigoli del cubo, uno per volta (nel senso che uno di voi dipinge uno spigolo, poi l'altro di voi dipinge l'altro spigolo, e via da capo); uno spigolo già verniciato non può essere riverniciato, e due spigoli che si incontrino in un vertice non possono essere dello stesso colore: vince l'ultimo che riesce a colorare uno spigolo".

Adesso, a noi stanno arrivando un paio di domande (oltre alle maledizioni del VAdLdRM): esiste una strategia vincente per un qualche giocatore?

Se i nostri la tirano lunga, il gioco si conclude in dodici mosse: ma quante sono (a meno di rotazioni) le posizioni finali del gioco?

Infine, come espansione (di cui non abbiamo soluzione, come al solito), vorremmo attrarre la vostra attenzione sul fatto che anche il dodecaedro ha tre spigoli che si incontrano in ogni vertice: qui, come va a finire? E secondo voi, per far lo stesso gioco su altra roba (tipo l'ottaedro o l'icosaedro), quanti colori dovremmo usare?

Qualcuno ha detto "...dimensioni superiori"?

3. Bungee Jumpers

Per alcuni (ma non per tutti) numeri naturali n è possibile costruire delle sequenze in cui ogni numero 1, 2, 3, …, n compare due volte e le due ricorrenze del numero r sono a distanza r una dall'altra: ad esempio, per n=4, si ha la sequenza:

$$4, 2, 3, 2, 4, 3, 1, 1.$$

Determinare le condizioni necessarie su n per cui è possibile costruire una sequenza di questo tipo.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Luglio!

Questo mese solo soluzioni e niente note, qui, procediamo subito.

4.1 [232]

Qualche soluzione ce la siamo persa per strada, qualche altra è arrivata già a luglio, ma l'interesse per i problemi di maggio non è ancora scemato. E allora li riprendiamo.

4.1.1 "Ovvio!" Ma anche no

Cominciamo subito con la descrizione del passatempo del Capo:

> *Comincio in prima riga scrivendo 1, 2 e 3. Poi, nelle righe successive, scrivo nell'ordine i numeri a, b, a+b (con a<b), dove a e b sono i più piccoli numeri non ancora comparsi nell'elenco (in nessuna delle tre colonne).*
>
> *In che colonna compare il numero di m cifre tutte uguali tra loro ddd...d?*

Il mese scorso abbiamo pubblicato la soluzione di ***Valter***, ed ora abbiamo la – da lui definita – "complicata nota su un problema di maggio" di ***trentatre***:

Le prime terne $T_n = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ sono

	a	b	c
T_1	1	2	3
T_2	4	5	9
T_3	6	7	13
T_4	8	10	18
T_5	11	12	23
T_6	14	15	29
T_7	16	17	33

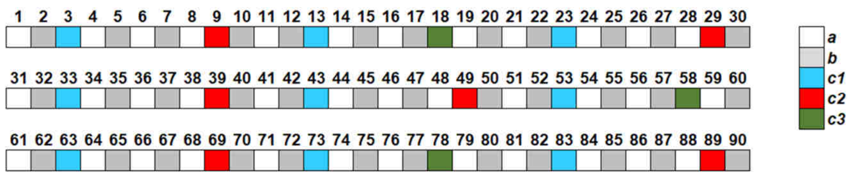
[1] .

Le terne, scritte in fila e con i numeri ordinati per valore crescente, danno la sequenza degli interi, secondo lo schema

[2] $1,2,(3=1+2),4,5,6,7,8,(9=4+5),10,11,12,(13=6+7),14,15,16,17,(18=8+10),\ldots$.

- dove i termini in parentesi sono i $\boldsymbol{c}$, gli altri sono alternativamente gli $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

1



In fig. 1 i primi termini della sequenza, con i $\boldsymbol{c}$ divisi in tre tipi

c1 : (blu) dispari disposti come ***b.c1.a***

c2 : (rosso) dispari disposti come ***a.c2.b***

c3 : (verde) pari.

Ogni N si può attribuire a uno dei 5 tipi. Se M è l'ultima cifra di N - cioè $M = N \; mod \; 10$, il tipo è

$M = 1,4,6$	$\boldsymbol{a}$
$M = 0,2,5,7$	$\boldsymbol{b}$
$M = 3$	$\boldsymbol{c1}$
$M = 8$	$\boldsymbol{a}$ *opp.* $\boldsymbol{c3}$
$M = 9$	$\boldsymbol{a}$ *opp.* $\boldsymbol{c2}$

[3]

- per decidere gli ultimi due casi occorre conoscere le sequenze ($\boldsymbol{c3}$) e ($\boldsymbol{c2}$), date da

[4] $(\boldsymbol{c3}) = (5 \cdot 4^m \cdot (2k-1) - 2, m \geq 1, k \geq 1)$

[5] $(\boldsymbol{c2}) = (10 \cdot 4^m (2k-1) - 1, m \geq 0, k \geq 1)$

- da cui si ricava

con $M=8$, $K=(N+2)/20$, <u>N è ***c3*** solo se</u>

K : <u>intero</u> e, con m : max per cui $K/4^m$: intero, $K/4^m$ è <u>dispari</u>

con $M=9$, $K=(N+1)/10$, <u>N è ***c2*** solo se</u>

con m : max per cui $K/4^m$: intero, $K/4^m$ è <u>dispari</u>

in tutti gli altri casi N è ***a***.

- p.es. $N=2000 \to M=0 \to N:\boldsymbol{b}$

$$N=2238 \to M=8, K=(2238+2)/20=112 \to m=2 \to K/4^2=7 \to N:\boldsymbol{c3}$$

$$N=3199 \to M=9, K=(3199+1)/10=320 \to m=3 \to K/4^3=5 \to 3199=\boldsymbol{c2}.$$

Si chiede a quale colonna della tabella [1] appartiene il numero N composte di cifre tutte uguali.

I numeri ***c1*** e ***c2*** composti di cifre ripetute sono solo

- ***c2*** : 9,999,99999, … (n° dispari di 9)
- ***c3*** : nessuno.

<u>dimostrazioni</u>

Indico con

$\boldsymbol{S}=(s_1, s_2, s_3, ...)$: una sequenza crescente di interi

$\boldsymbol{S}+m=(s_1+m, s_2+m, s_3+m, ...)$

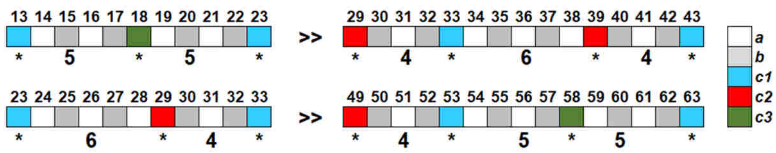
$\boldsymbol{S}\cdot m=(s_1\cdot m, s_2\cdot m, s_3\cdot m, ...)$

$(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})$: l'insieme dei termini di $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{T}$

- uso di seguito le sequenze

$\boldsymbol{N}=(1,2,3,...)$: gli interi

$\boldsymbol{D}=(2n-1, n\geq 1)=(1,3,5,...)$: i dispari



2

Una terna $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ genera $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; a loro volta gli $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ fra due $\boldsymbol{c}$ consecutivi determinano una sequenza di $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$.

In fig. 2 due esempi del processo con in basso la differenza Δ fra due ***c*** consecutivi

- Δ può avere solo i valori 4,5,6 e si presenta sempre in coppie (5,5), (6,4) - le uniche sequenze parziali possibili sono

c2(4)***c1***(6)***c2***(4)***c1***
c2(4)***c1***(5)***c3***(5)***c1***

- fra due ***c1*** c'è sempre un solo ***c2*** opp. un ***c3*** - ne segue che la sequenza dei ***c1*** (blu) è

[6] $(\boldsymbol{c1})=10\cdot\boldsymbol{N}+3=5\cdot\boldsymbol{D}-2=3,13,23,...$

La [3] deriva dal fatto che ogni ***c1*** (blu) è incluso nella sequenza ***bab.c1.abab*** e vale la [6].

Ogni ***c*** ne genera altri secondo le

[7] $\boldsymbol{c2} = 2 \cdot \boldsymbol{c1} + 3$ $p.es.\ 29 = 2 \cdot 13 + 3,\ 49 = 2 \cdot 23 + 3$

$\boldsymbol{c2} = 2 \cdot \boldsymbol{c3} + 3$ $p.es.\ 39 = 2 \cdot 18 + 3$

$\boldsymbol{c3} = 2 \cdot \boldsymbol{c2}$ $p.es.\ 18 = 2 \cdot 9,\ 58 = 2 \cdot 29$

- ne segue per la [6] e per i soli $\boldsymbol{c3}$

[8] $\boldsymbol{c3} = 2 \cdot \boldsymbol{c2} = 4 \cdot \boldsymbol{c1} + 6$ $p.es.\ 18 = 2 \cdot 9 = 4 \cdot 3 + 6$

$\boldsymbol{c3} = 2 \cdot \boldsymbol{c2} = 4 \cdot \boldsymbol{c3} + 6$ $p.es.\ 78 = 2 \cdot 29 = 4 \cdot 18 + 6$

- la sequenza $(\boldsymbol{c3})$ è quindi data, con $L_0 = (\boldsymbol{c1})$ data da [6], dall'insieme delle sequenze

[9] $L_1 = 4 \cdot L_0 + 6 = 5 \cdot 4 \cdot \boldsymbol{D} - 2 = 18, 58, 98, 138, \ldots$

$L_2 = 4 \cdot L_1 + 6 = 5 \cdot 4^2 \cdot \boldsymbol{D} - 2 = 78, 238, 398, \ldots$

$L_3 = 4 \cdot L_2 + 6 = 5 \cdot 4^3 \cdot \boldsymbol{D} - 2 = 318, 958, 1598, \ldots ecc.$

- che unite insieme e per l'ultima [7] danno

$(\boldsymbol{c3}) = (5 \cdot 4^m \cdot (2k-1) - 2, m \geq 1, k \geq 1)$

$(\boldsymbol{c2}) = (10 \cdot 4^m (2k-1) - 1, m \geq 0, k \geq 1)$

- cioè le [4] e [5].

Le precedenti si possono scrivere $(\boldsymbol{c3}) = 20 \cdot \boldsymbol{G} - 2$, $(\boldsymbol{c2}) = 10 \cdot \boldsymbol{G} - 1$, con

[10] $\boldsymbol{G} = (4^m \cdot \boldsymbol{D}, m \geq 0) = 1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, \ldots$

- poiché gli interi $\boldsymbol{N}$ sono dati dai dispari $\boldsymbol{D}$, da $2\boldsymbol{D}$, da $4\boldsymbol{D}$, ecc. vale la

[11] $(\boldsymbol{G} + 2 \cdot \boldsymbol{G}) = ((2^{2m} \cdot \boldsymbol{D}) + (2^{2m+1} \cdot \boldsymbol{D})) = (2^m \cdot \boldsymbol{D}, m \geq 0) = \boldsymbol{N}$

- quindi $\boldsymbol{G}$ si ricava dalla serie degli interi con la semplice condizione "se n è presente, non è presente $2n$"

- infatti $1, (2\ manca), 3, (6\ manca), 4, (8\ manca), \ldots \rightarrow 1, 3, 4, 5, 7, 9, \ldots$

Le precedenti sequenze, con una serie di proprietà, sono presenti in *OEIS* - in particolare

- i numeri $(\boldsymbol{c}) = 3, 9, 13, 18, 23, \ldots$ sono i cosiddetti numeri *Anti-Fibonacci* - A075326

- la sequenza $\boldsymbol{G}$ è la A003159.

Sembra complicata a voi? Andiamo avanti.

4.1.2 Zen, but not too much

Anche il giardino Zen ha ricevuto altre soluzioni. Cominciamo dal testo del problema:

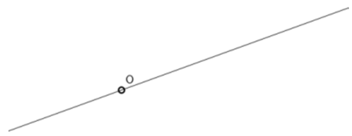
Stiamo piantando quattro bonsai in un giardino Zen. Definiamo centro qualsiasi punto avente la caratteristica che qualsiasi linea passante per questo punto divide l'insieme degli alberi in due sottoinsiemi della stessa cardinalità. Qual è la condizione necessaria e sufficiente per avere un centro?

Esistono per un qualche numero di punti configurazioni policentriche?

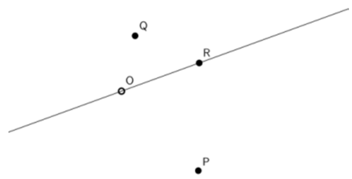
Se aumentiamo il numero dei bonsai? Esistono regole? Esistono centri?

Il mese scorso la soluzione pubblicata era di ***Valter***, qui sotto la versione del ***Panurgo***:

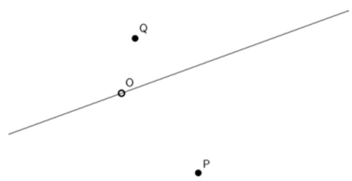
Sia O un "centro".



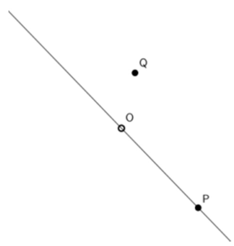
O è il centro di un fascio proprio di rette, ciascun delle quali divide il piano in due semipiani; O stesso divide ciascuna retta in due semirette. Per ogni retta, o un punto cade in un semipiano (P), o cade nell'altro semipiano (Q) o cade sulla retta stessa (R).



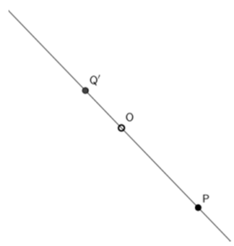
Consideriamo i punti P e Q in relazione con questa particolare retta: i due semipiani contengono lo stesso numero di punti



Scegliamo ora un'altra retta del fascio: per esempio, la retta OP

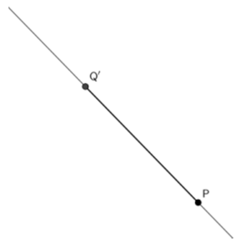


Evidentemente O non è un "centro" per la coppia P, Q perché uno dei due semipiani contiene un punto in più dell'altro: per far sì che O sia un "centro" è necessario che Q giaccia sulla stessa retta nella semiretta opposta di P



Quindi, si avrà un "centro" disponendo $2n$ punti su k rette di un fascio proprio in modo che, per ognuna di esse, ciascuna delle due semirette generate dal centro O del fascio contenga lo stesso numero n_i di punti.

Si ha più di un centro nel caso particolare in cui i $2n$ punti siano allineati



Tutti i punti del segmento che unisce i due punti mediani sono “centri”.

La soluzione era arrivata proprio prima della pubblicazione di RM233, ma non ce l’abbiamo fatta ad inserirla, e siamo proprio contenti di aver potuto rimediare. Ora passiamo ai problemi di giugno.

4.2 [233]

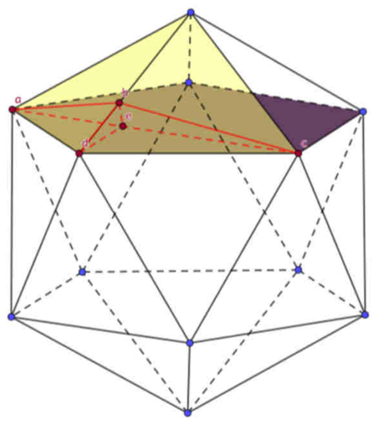
4.2.1 Generalizzare un calcolo

Il Capo sta preparando una serie di giochi con l’origami e si sta divertendo a ricavarne problemi, questo per esempio è sui solidi regolari e non:

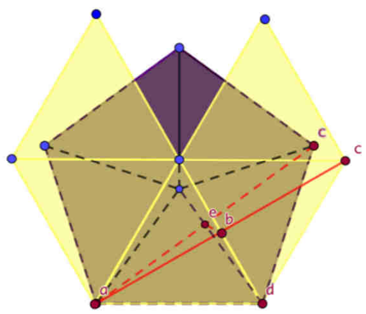
> *Qual è l’angolo tra due facce contigue di un icosaedro? Esiste un metodo generalizzabile agli altri solidi regolari, Archimedei, Kepleriani e genericamente semi-regolari?*

Cominciamo, come spesso accade, con la soluzione di ***Valter***:

> Mi sono concentrato sull’icosaedro regolare. Mi pare aver individuato un metodo generalizzabile (con gli opportuni adattamenti). Inizio con una immagine che ho creato con GeoGebra (per aiutarmi nell’esposizione):



> e è il punto intermedio del segmento $\overline{ac}$.
>
> Il piano del triangolo *abc* è perpendicolare a $\overline{bd}$.
>
> Gli angoli $\widehat{aeb}$, $\widehat{aed}$ e $\widehat{dbe}$ sono quindi di 90°.
>
> Gli angoli $\widehat{adc}$ e $\widehat{dae}$ sono di 108° e 36°.
>
> Gli angoli $\widehat{adb}$ e $\widehat{bad}$ sono di 60° e 30°.
>
> Fornisco una immagine che può aiutare (sempre che non mi sia sbagliato ...). È la piramide “schiacciata” sopra al pentagono. La ottengo eseguendo le seguenti operazioni:
>
> - taglio i lati del pentagono tranne $\overline{ad}$
> - taglio il lato opposto ad $\overline{ad}$
> - appiattisco facendo perno su $\overline{ad}$.



L'obiettivo è quindi calcolare l'angolo $\widehat{abc}$.

Procedo c.s.:

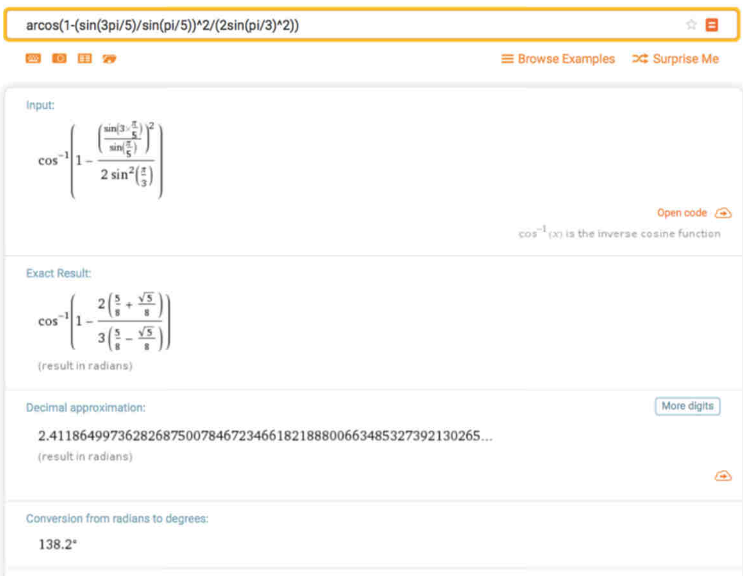
assumo $\overline{ad}$ di lunghezza 1

$\overline{aec}$ = sin(3pi/5)/sin(pi/5)
(legge del seno)

$\widehat{dbe}$ = arcos(1-(sin(3pi/5)/sin(pi/5))^2/(2sin(pi/3)^2))
(legge del coseno semplificando la formula).

Mi sono fatto aiutare da www.wolframalpha.com per risolvere. Ho cercato in rete una conferma dei miei calcoli:
https://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_polyhedron_dihedral_angles .

Mi pare che le due formule diano lo stesso risultato (wolfram fornisce una "alternate form" della mia che le fa coincidere):



Alternate forms:

$$\sec^{-1}\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{5(\sqrt{5}-1)}{3(\sqrt{5}-5)}\right)$$

E per il momento ci fermiamo qui e passiamo al prossimo problema.

4.2.2 Cappelli, che belli, porelli i nanelli... (o, in alternativa: "Un diavolo per cap(p)ello")

Ve lo sareste aspettato, che il Capo fosse un pacifista? Con noialtri è piuttosto crudele, ma al pensiero dei nanetti virtuali mangiati dall'orco ancora più virtuale inorridisce, e cerca versioni meno sanguinarie come la successiva:

> *Avete un gruppo di k persone che vengono fatte entrare in una stanza buia, dove senza vedere niente prendono un cappello. Sui cappelli (che sono n, con k<n) ci sono tutti i numeri da 1 a n: una volta che tutte le persone coinvolte hanno un cappello, cominciano a guardarsi l'un l'altro, vedendo ciascuno i numeri di tutti gli altri, ma evidentemente non il proprio. Dopodiché ognuno enuncia due cose:*
>
> 1. *Il massimo numero che ha visto,*
> 2. *Il minimo numero che ha visto.*
>
> *Qual è la probabilità che tutti indovinino il numero che hanno in testa?*

La redattrice di queste note è notoriamente amica dei problemi di logica, ma la parola probabilità nella domanda alla fine sciupa il tutto. Non è il caso per Alberto R., che ci scrive:

> Da un set di N cappelli numerati da 1 a N se ne mettono a caso K in testa a K persone, ognuna delle quali vede i numeri degli altri ma non il proprio.
>
> Ognuno dichiara ad alta voce il più grande e il più piccolo numero che vede. Non sono ammesse altre forme di comunicazione.
>
> Se tutti indovinano il proprio numero l'intera squadra vince un prosciutto.
>
> Siano A, B (con $A<B$) i due numeri più piccoli finiti in testa ad Antonio e Biagio. V, Z (con $V<Z$) i due più grandi in testa a Vittorio e Zaccaria.
>
> Antonio non ha alcuna difficoltà a scoprire il numero del proprio cappello: sente tutti gli altri che dichiarano l'esistenza di un A minimo, ma lui non lo vede ed astutamente deduce che A gli è nascosto perché si trova proprio sulla sua testa. Anche Biagio ha vita facile: ha sentito Antonio che diceva "il numero più piccolo che vedo è B" ma il numero B non è tra quelli visibili a Biagio, dunque….
>
> Con ragionamento analogo anche Vittorio e Zaccaria indovinano i loro numeri.
>
> Invece i rimanenti K–4 giocatori non possono che affidarsi alla fortuna scegliendo a caso un numero maggior di B e minore di V (evitando, ovviamente, di ripetere un numero già detto e indovinato da un altro).
>
> Nel caso particolare di N=6 e K=5 le cinquine possibili sono 6:
>
> 2, 3, 4, 5, 6 — B=3, V=5 e in mezzo c'è posto solo per il 4
>
> 1, 3, 4, 5, 6 — B=3, V=5 e in mezzo c'è posto solo per il 4
>
> 1, 2, 4, 5, 6 — B=2, V=5 in mezzo c'è il 4, ma poteva starci anche il 3

1, 2, 3, 5, 6 — *B*=2, *V*=5 in mezzo c'è il 3, ma poteva starci anche il 4

1, 2, 3, 4, 6 — *B*=2, *V*=4 in mezzo c'è posto solo per il 3

1, 2, 3, 4, 5 — *B*=2, *V*=4 in mezzo c'è posto solo per il 3

In 4 casi il prosciutto è assicurato e in 2 casi lo si vince al 50%. Prob totale 5/6.

Per *N* e *K* generici si dovrebbero esaminare un numero di casi pari a *comb*(N,K). Ci sono quindi due possibilità o si ricorre al computer o si attende che qualcuno – bravo in matematica – trovi una formula generale. Io non ci provo neanche.

Bene, il prosciutto è un tocco piacevole, speriamo che tocchi a me. Nel frattempo diamo un'occhiata a come ci è arrivato il ***Panurgo***:

Sia $\top$ la congiunzione logica delle proposizioni che definiscono il processo, sia

$$V \equiv \text{“Ciascuna vittima indovina il proprio numero”}$$

e sia $\Pr(V|\top)$ la probabilità che ci interessa.

Posto che deve essere $n \geq k$, vediamo che succede per vari valori di k.

Per $k = 1$ il processo non può completarsi: la vittima entra nella stanza buia, prende il suo cappello ma, non essendovi nessun altro, non può osservare nessun numero ne può enunciare nessun minimo o massimo: l'insieme dei numeri enunciati è $E = \emptyset$.

Non ricavando alcuna informazione né dai cappelli delle altre vittime né da *E*, la vittima ricorre a $\top$ che comprende $n \equiv \text{“ci sono } n \text{ numeri diversi”}$: anche noi non possiamo fare di meglio e assegniamo la probabilità

$$\Pr(V|\top) = \frac{1}{n}$$

in base al Principio di Indifferenza.

Per $k = 2$ ciascuna delle due vittime osserva il numero dell'altra e lo enuncia: essendovi un solo numero esso è contemporaneamente minimo e massimo.

Combinando l'informazione del numero osservato con $E = \{a, b\}$ ciascuna delle due vittime deduce che il proprio numero è quello dei due che non ha osservato: possiamo dire che ciascuna vittima “indovina” il proprio numero con probabilità $\Pr(V_i|\top) = 1$ e calcolare

$$\Pr(V|\top) = \Pr(V_1|\top) \times \Pr(V_2|\top) = 1$$

Per $k = 3$ ciascuna vittima osserva due numeri e li enuncia cosicché l'insieme dei numeri enunciati, $E = \{a, b, c\}$, contiene tutti e tre i numeri: le vittime possono dedurre il proprio numero combinando l'informazione dei numeri osservati con *E* e prendendo da *E* il numero che non hanno osservato. Di nuovo, $\Pr(V|\top) = 1$.

Per $k = 4$ le cose si complicano un po': ciascuna vittima osserva tre numeri e ne enuncia due. Tre vittime enunciano il massimo M mentre la vittima che indossa il cappello numerato con M enuncia il numero $M' < M$; *mutatis mutandis*, tre vittime enunciano il minimo m mentre la vittima che indossa il cappello numerato con m enuncia il numero $m' > m$.

L'insieme dei numeri enunciati è $E = \{m, m', M', M\}$, e ciascuna vittima deduce il proprio numero confrontando *E* con i numeri da lei osservati: $\Pr(V|\top) = 1$.

Per $k > 4$ le vittime osservano $k - 1$ numeri ciascuna: tutto va come per $k = 4$, l'insieme dei numeri enunciati è $E = \{m, m', M', M\}$ e le vittime con i cappelli numerati con *m*, *m*', *M*' e *M* (la Banda dei Quattro) deducono il proprio numero. Le vittime che non appartengono alla Banda dei Quattro non ricavano alcuna informazione da *E* perché $E \subset O_i$ dove O_i è l'insieme dei numeri osservati dalla vittima i-esima.

I numeri possibili sono quelli compresi tra m e M e la loro numerosità è $r = M - m + 1$: ovviamente deve essere $k \leq r \leq n$. Di tali numeri, ciascuna vittima ne conosce $k - 1$: quindi ne ignora $r - k + 1$.

Assegniamo la probabilità

$$\Pr(V_i|r \wedge m \wedge \top) = \begin{cases} 1 & B \equiv \text{“la vittima deduce il proprio numero”} \\ \dfrac{1}{r-k+1} & \overline{B} \equiv \text{“la vittima non deduce il proprio numero”} \end{cases}$$

Osserviamo che in ogni caso tale probabilità dipende solo dall'ampiezza dell'intervallo osservato e non dal valore del minimo m: formalmente, $\Pr(V_i|r \wedge m \wedge \top) = \Pr(V_i|r \wedge \top)$.

Se assumiamo che ciascuna vittima tenti di indovinare il proprio numero indipendentemente dalle altre possiamo calcolare la probabilità

$$\Pr(V|r \wedge \top) = \prod\nolimits_i \Pr(V_i|r \wedge \top) = \frac{1}{(r-k+1)^{k-4}}$$

Se noi conoscessimo, come le vittime, il valore di r avremmo finito. Dato che così non è dobbiamo prendere in considerazione tutte le possibilità ed eliminare l'influenza di r attraverso il Teorema di marginalizzazione:

$$\Pr(V|\top) = \sum\nolimits_r \Pr(r \wedge V|\top) = \sum\nolimits_r \Pr(r|\top)\Pr(V|r \wedge \top)$$

Abbiamo già $\Pr(V|r \wedge \top)$: non ci resta che assegnare $\Pr(r|\top)$.

Per far ciò dobbiamo contare quanti sono gli insiemi di k numeri che coprono un intervallo pari a r: gli estremi dell'intervallo (m e M) sono fissati per cui i numeri possibili sono $r-2$, ma tali estremi sono fissati anche nei k numeri effettivamente scelti per cui le combinazioni sono $C(r-2, k-2)$; inoltre, l'intervallo di r numeri può cominciare in $n-r+1$ modi diversi, a seconda del valore di m.

Assegniamo la probabilità

$$\Pr(r|\top) = \frac{(n-r+1)\binom{r-2}{k-2}}{\binom{n}{k}}$$

con $k \le r \le n$.

Prima di procedere oltre verifichiamo che $\Pr(r|\top)$ sia effettivamente una probabilità, ovvero che

$$\sum\nolimits_r \Pr(r|\top) = 1 \Leftrightarrow \sum_{r=k}^{n}(n-r+1)\binom{r-2}{k-2} = \binom{n}{k}$$

Spezziamo la sommatoria in due

$$\sum_{r=k}^{n}(n-r+1)\binom{r-2}{k-2} = n\sum_{r=k}^{n}\binom{r-2}{k-2} - \sum_{r=k}^{n}(r-1)\binom{r-2}{k-2}$$

e procediamo facendo uso del lemma

$$\sum_{a=k}^{n}\binom{k+a}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

ottenendo

$$n\sum_{r=k}^{n}\binom{r-2}{k-2} = n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$$

Per la seconda sommatoria procediamo ri-arrangiando il coefficiente binomiale

$$\sum_{r=k}^{n}(r-1)\binom{r-2}{k-2} = \sum_{r=k}^{n}\frac{(r-1)(r-2)!}{(k-2)!\,(r-k)!} = \sum_{r=k}^{n}(k-1)\frac{(r-1)!}{(k-1)!\,(r-k)!}$$
$$= (k-1)\sum_{r=k}^{n}\binom{r-1}{k-1}$$

utilizzando il lemma di cui sopra

$$\sum_{r=k}^{n}(r-1)\binom{r-2}{k-2}=(k-1)\binom{n}{k}$$

e otteniamo, unendo il tutto

$$\sum_{r=k}^{n}(n-r+1)\binom{r-2}{k-2}=k\binom{n}{k}-(k-1)\binom{n}{k}=\binom{n}{k}$$

Q.E.D.

A questo punto non ci resta che mettere insieme tutti gli ingredienti per ottenere

$$\Pr(V|\top)=\frac{1}{\binom{n}{k}}\sum_{r=k}^{n}\frac{(n-r+1)\binom{r-2}{k-2}}{(r-k+1)^{k-4}}$$

per estendere questa formula ai casi speciali possiamo modificarla introducendo all'esponente del denominatore la cardinalità di E, $s=\#(E)$ che è

$$s=\begin{cases}k & k\in\{2,3\}\\ 4 & k\geq 4\end{cases}$$

La formula diventa dunque

$$\boxed{\Pr(V|\top)=\frac{1}{\binom{n}{k}}\sum_{r=k}^{n}\frac{(n-r+1)\binom{r-2}{k-2}}{(r-k+1)^{k-s}}}$$

Per $k\in\{2,3,4\}$ il denominatore si riduce a 1 e la sommatoria diventa un caso particolare di quanto abbiamo già dimostrato sopra; per $k=n$ la sommatoria si riduce ad un unico termine

$$\Pr(V|\top)=\frac{1}{\binom{n}{n}}\times\frac{\binom{n-2}{n-2}}{1^{n-4}}=1$$

e il risultato è giusto perché ogni vittima osserva $n-1$ numeri e deduce che il suo cappello è numerato con l'unico numero che manca.

Il caso $k=1$ non può essere rappresentato da questa formula che prevede il completamento del processo.

Come? La forma chiusa? Mi sa che dovrete accontentarvi...

Siamo contentissimi. Anche perché non finisce qui. Siamo certi di aver visto qualche altra soluzione, che adesso non troviamo più. Ve la proporremo di certo quando ricompare. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Recentemente, ci siamo ritrovati a visitare un ospedale (tranquilli, tutto risolto. E non riguardava noi). Gentilmente, un membro dello staff ci ha fornito la seguente descrizione dell'ospedale: "...tra infermieristico e medico, ci sono 16 dipendenti, includendo me; le affermazioni che farò si applicano a questo insieme e sono vere sia che mi includiate sia nel caso contrario."

"Lo staff è formato da:

1. Più personale infermieristico che medico.
2. I medici di genere maschile sono in numero maggiore degli infermieri di genere femminile.
3. Gli infermieri di genere femminile sono in numero maggiore dei medici di genere femminile.
4. Almeno un medico è di genere femminile".

Quello che non ci ricordiamo, è il genere e il ruolo della persona con la quale abbiamo parlato….

Da [1] e [4], uniti al fatto che tra medici e infermieri sono 16*, si ricava che sono presenti* 9 *o più infermieri e* 6 *o meno medici maschi.*

Quindi, da [2], si ricava che la divisione per genere degli infermieri deve essere tale da avere un numero di maschi minore di 6.

Da [3], il numero di infermieri femmina deve essere minore del numero di infermieri maschi, quindi devono esserci più di 4 *infermieri maschi.*

Siccome devono esserci meno di 6 *e più di* 4 *infermieri maschi, devono esserci esattamente* 5 *infermieri maschi.*

Quindi devono esserci non più di 9 *infermieri (*5 *maschi e* 4 *femmine), e devono esserci non meno di* 6 *dottori maschi.*

Deve quindi esserci un solo dottore femmina per soddisfare il totale di 16.

Se un dottore maschio non è incluso nel conteggio, [2] è falsa.

Se un infermiere maschi non è incluso nel conteggio, [3] è falsa.

Se un dottore femmina non è incluso nel conteggio, [4] è falsa.

Se un infermiere femmina non è incluso nel conteggio, nessuna affermazione è contraddetta.

Quindi, il nostro interlocutore è un infermiere femmina.

6. Pagina 46

Numeriamo le posizioni nella sequenza come 1, 2, 3, …, $2n$.

Supponiamo la prima ricorrenza del valore 1 sia nella posizione p_1, la prima ricorrenza del valore 2 sia in p_2 e avanti in questo modo: la seconda occorrenza del valore 1 sarà allora in p_1+1, la seconda del valore 2 sarà in p_2+2, e avanti così.

La somma dei numeri indicanti le posizioni è allora esprimibile in due modi:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 2n = (p_1 + p_1 + 1) + (p_2 + p_2 + 2) + \ldots + (p_n + p_n + n)$$

Ossia:

$$\frac{2n(2n+1)}{2} = 2(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)\frac{n(n+1)}{2}$$

Posto ora $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = P$, abbiamo:

$$\frac{2n(2n+1)}{2} = 2P\frac{n(n+1)}{2}$$

Il che ci dà:

$$P = \frac{2n(2n+1) - n(n+1)}{4} = \frac{3n^2+n}{4} = \frac{n(3n+1)}{4}$$

Dovendo P essere un intero, $n(3n+1)$ deve essere divisibile per 4: ma per $n \equiv 2 \pmod 4$ o $n \equiv 3 \pmod 4$, abbiamo $n(3n+1) \equiv 2 \pmod 4$, il che è una contraddizione. Quindi condizioni necessarie[12] alla costruzione delle sequenze sono $n \equiv 1 \pmod 4$ o $n \equiv 0 \pmod 4$.

[12] ***D. C. B. Marsh*** ha provato anche la sufficienza di questa regola, ma non abbiamo ulteriori riferimenti.

7. Paraphernalia Mathematica

Grandi notizie! Il "laboratorio che avremmo dovuto presentare", a quanto pare, si farà! In uno speriamo solatio ottobre, con un intervento "lampo", ma pare proprio si farà. Quindi, tutti attenti.

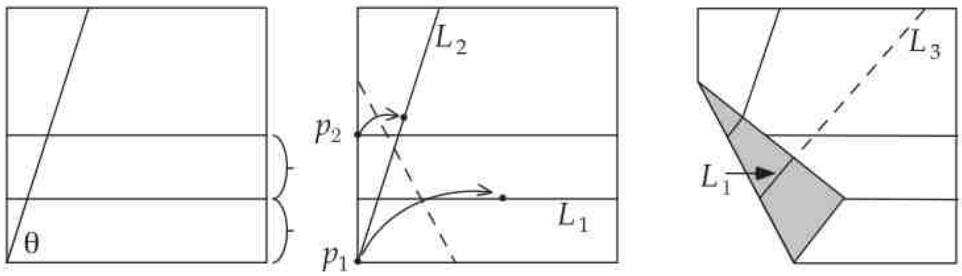
7.1 Tre (o quattro) pezzi (quasi) facili – [3 e 4] – Operazioni impossibili

L'altra notizia (vedete voi se buona o cattiva) è che a Rudy sta venendo in mente qualcosa per la terza puntata. Cambiando ovviamente il titolo.

La trisezione dell'angolo

Impossibile (se non barate) con riga e compasso, come dovreste sapere almeno dal Quick & Dirty del numero 221 di una P. R. di M. R., ma il "trucco" utilizzato in quel caso nell'ambito dell'origami ha piena cittadinanza: mettere un segmento "in modo che ci stia" nel nostro disegno.

Cominciamo, come sempre, dal metodo, per poi verificare che funziona: di seguito, le operazioni da compiere.



Per prima cosa, tracciamo il nostro angolo θ nell'angolo in basso a sinistra del foglio: nel caso di angoli da trisecare maggiori di 90°, è sufficiente sottrarre angoli retti dall'angolo originale sin quando non si ottiene un angolo nel primo quadrante, ricordandosi poi di aggiungere all'angolo risultante lo stesso numero di angoli di 30°, che possiamo facilmente ottenere dal punto di vista dell'origami per bisezione dell'angolo di 60° ottenuto alla precedente puntata.

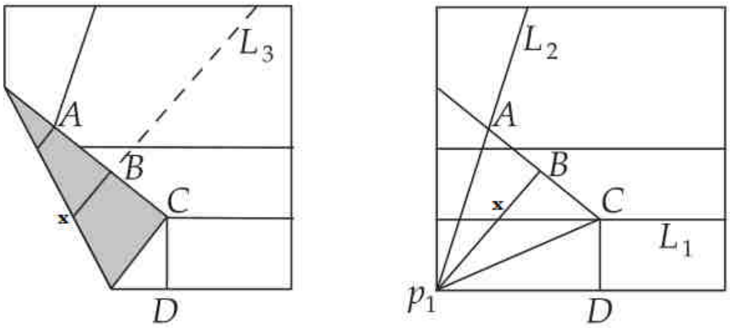
Quindi, dividiamo il foglio in quarti orizzontali: visto che ci serviranno solo i due quarti inferiori, non serve l'ulteriore piegatura di divisione. Sin qui, la prima figura.

Portiamo adesso il punto p_1 (vertice dell'angolo in basso a sinistra del quadrato) sulla linea L_1 che definisce il quarto inferiore del quadrato ma, ***contemporaneamente***, portiamo il punto p_2 che biseca il lato verticale sinistro del quadrato sulla linea L_2 che definisce il nostro angolo da trisecare: in pratica, troviamo il segmento secondo cui la riflessione di p_1 si trova su L_1 e la riflessione di p_2 si trova su L_2: è esattamente questa l'operazione che ci è impedita dalla geometria euclidea. E questo è tutto indicato nella seconda figura.

A seguito della piegatura sul segmento appena trovato, la parte di L_1 più sulla sinistra si ritroverà inclinata (è indicata nella terza figura): proseguiamo questa piegatura sul resto del quadrato, attraverso la piegatura L_3. E siamo alla terza figura.

Se adesso riapriamo il tutto e prolunghiamo L_3 dalla destra in alto sino alla sinistra in basso, vediamo che arriva all'angolo in basso a sinistra del nostro quadrato originale: la cosa non è particolarmente complessa da dimostrare.

Ritorniamo, temporaneamente, alla piegatura che ha generato il nostro segmento L_3, *non ancora* prolungato sino al vertice in basso a sinistra: indichiamo con x il punto in cui L_3 interseca L_1, riapriamo il foglio e consideriamo le pieghe indicate nella seconda figura qui di seguito.



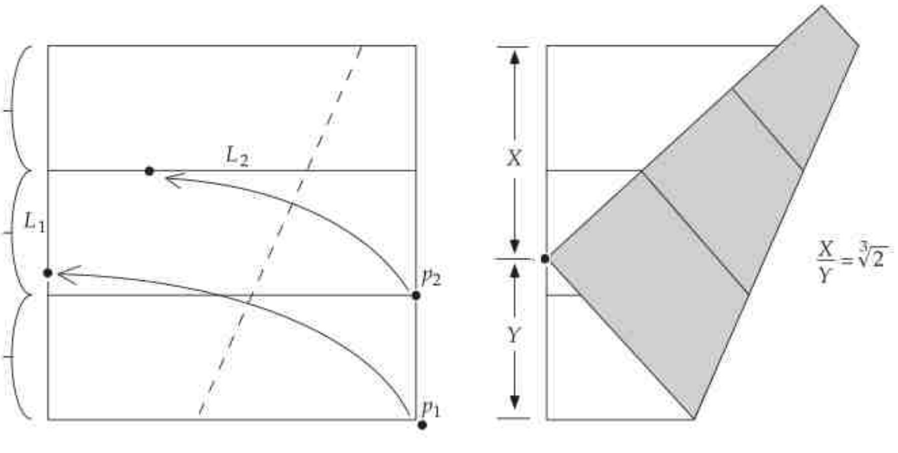
Per confronto tra le due figure, vediamo che il segmento p_1x è uguale al segmento xC, visto che nella prima figura sono sovrapposti: quindi l'angolo tra xC e L_3 nel foglio piegato è uguale all'angolo tra p_1x e L_1 nel foglio aperto, visto che nella piegatura sono sovrapposti: ma allora xp_1 è la prosecuzione di L_3, e quindi L_3 incontra p_1.

La dimostrazione più semplice del fatto che L_3 triseca l'angolo θ si può ricondurre sempre alle due figure qui sopra: se A, B, C sono le tre immagini dei punti indicati nella prima figura, dopo l'apertura del foglio e se D è la perpendicolare per C sulla base del quadrato, per la definizione stessa di questi punti (ottenuti dalla quadrisezione dei lati verticali del quadrato) abbiamo che $AB=BC=CD$: inoltre, sempre per costruzione, p_1B è perpendicolare ad AC, quindi i triangoli Ap_1B, Bp_1C e Cp_1D sono triangoli rettangoli congruenti, e quindi *trisecano l'angolo θ*.

La duplicazione del cubo

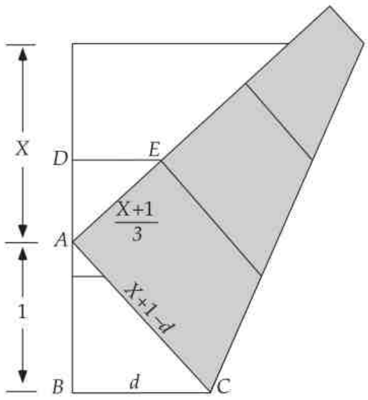
La potenza della piegatura "due punti su due punti" mostra le sue capacità anche in un altro problema la cui risoluzione è impossibile con riga e compasso: la duplicazione del cubo.

La richiesta del problema, in questo caso, è quella di costruire un segmento in rapporto $\sqrt[3]{2}$ con un segmento dato, che rappresenta lo spigolo del cubo. La figura di seguito indica la sua realizzazione.



Per prima cosa, è necessario suddividere il foglio in terzi[13]; quindi, l'angolo in basso a destra va portato sul lato verticale sinistro e, ***contemporaneamente***, il punto destro del primo terzo va portato sulla riga del secondo terzo, come indicato nella figura qui sopra.

[13] Un metodo veloce ed efficace per farlo (con riga e compasso, ma facilmente riportabile all'origami) è stato presentato nella seconda istanza di questa rubrica, su RM015.



Il segmento verticale sulla sinistra viene allora diviso in due parti che stanno tra di loro in rapporto $\sqrt[3]{2}$. La dimostrazione viaggia su binari abbastanza stretti (pena lo scontrarsi con equazioni complesse), ma non è particolarmente complicata. Un buon punto di inizio è porre pari a 1 il segmento inferiore e ad X il segmento superiore: questo implica che il lato del quadrato di origine sia $1+X$, e che lo scopo della dimostrazione sia di verificare che $X = \sqrt[3]{2}$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ***ABC*** si ottiene:

$$d=\frac{x^2+2x}{2x+2}$$

inoltre, si ricava facilmente che

$$AD=\frac{X-(X-1)}{3}=\frac{2X-1}{3}$$

I triangoli ***ADE*** e ***ABC*** sono simili (sono rettangoli e l'angolo ***CAE*** è retto), e quindi si ha:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{X+1-d}=\frac{2X-1}{X+1}\\
&\Rightarrow\frac{X^2+2X}{X^2+2X+2}=\frac{2X-1}{X+1}\\
&\Rightarrow X^3+3X^2+2X=2X^3+3X^2+2X-2\\
&\Rightarrow X=\sqrt[3]{2}
\end{aligned}$$

Il che, dimostra la tesi.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms