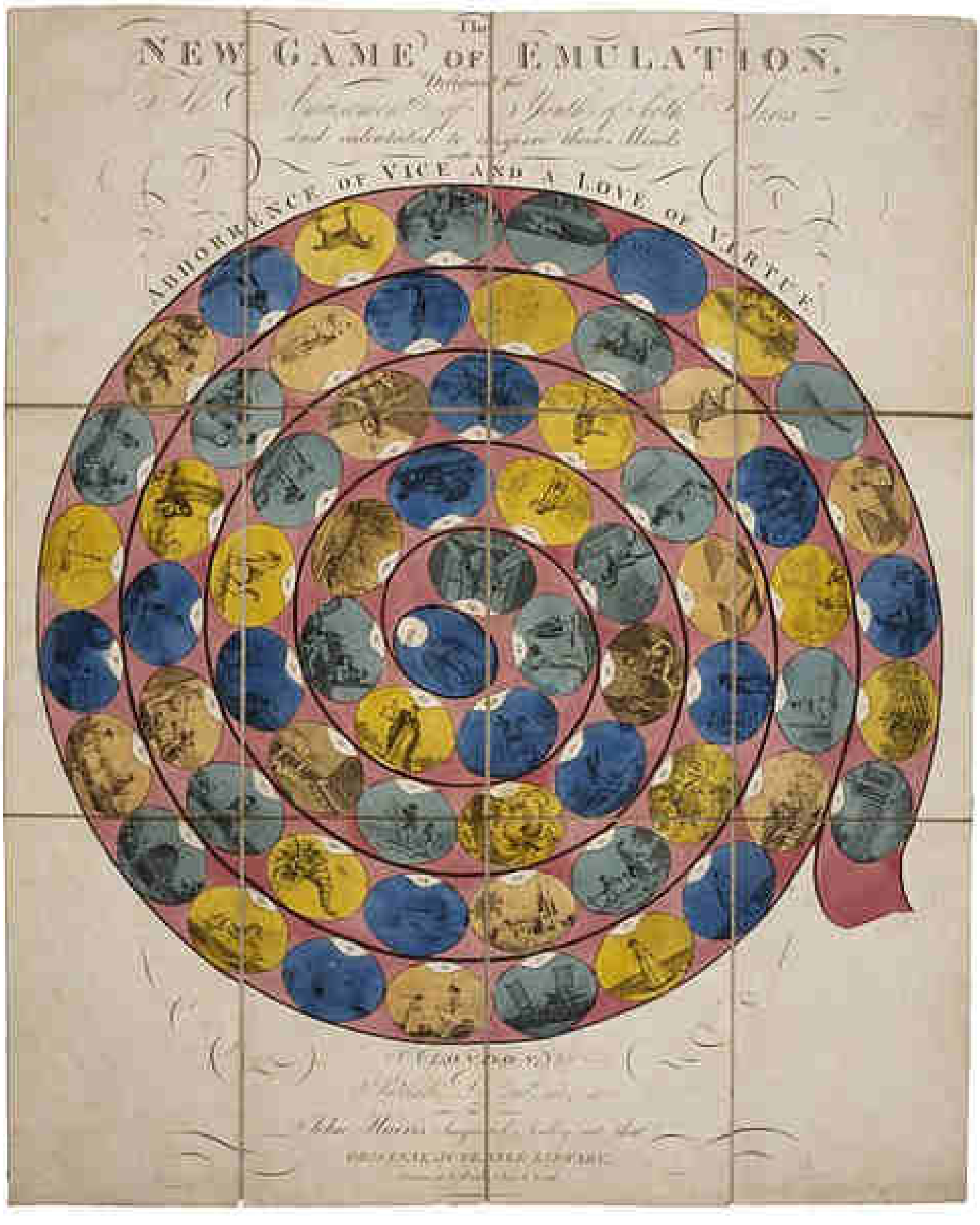
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 233 – Giugno 2018 – Anno Ventesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell’altro millennio da

Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM231 ha diffuso 3’257 copie e il 09/06/2018 per Google eravamo in 42’800 pagine.

Il gioco raffigurato in copertina risale, a quanto sappiamo, al 1804, ma ci permettiamo di sollevare un paio di dubbi. La descrizione recita, infatti, “*The New Game of Emulation Designed for The Amusement of Youth of both Sexes and calculated to inspire their Minds with an abhorrence of vice and a love of virtue.*”: ora, “Sexes”, nel 1804, non lo vediamo proprio, in un insieme così moralista. Inoltre, visto che porta a “*to admire and adopt the virtues of Obedience, Truth, Honesty, Gentleness, Industry, Frugality, Forgiveness, Carefulness, Mercy, and Humility; and to view in their real colours the opposite vices of Obstinacy, Falsehood, Robbery, Passion, Sloth, Intemperance, Malice, Neglect, Cruelty and Pride.*” Data la sua somiglianza con il gioco dell’oca, utilizzante quello strumento del demonio che sono i dadi, non ci stupisce la mancata citazione del gioco d’azzardo.

1. Zone di confine

"Non ho mai avuto discussioni matematiche con nessuno, perché non c'era nessun altro nel mio campo."

Molti romanzi hanno una struttura generale simile, pur variando grandemente trama, ambientazione e argomento: presentano inizialmente al lettore una serie di avvenimenti misteriosi o addirittura inspiegabili, apparentemente senza alcun rapporto fra loro. Poi, grazie a un certosino lavoro di indagine da parte dell'eroico protagonista, cominciano a venire alla luce le insospettate relazioni che invece legano strettamente gli eventi, e ogni relazione riduce lo scompiglio iniziale, aumenta la comprensione, fino al trionfo finale in cui ogni tessera del puzzle trova il suo posto e l'immagine inizialmente frammentata appare in tutta la sua razionale bellezza. È un meccanismo frequentissimo, anzi quasi obbligatorio nei romanzi gialli; ma è molto presente anche nelle storie di fantascienza, e non è un caso che i due generi siano spesso apprezzati dagli scienziati e dagli appassionati di discipline scientifiche.

La ragione è ovvia: chi esercita per professione la razionalità (o quanto meno in essa ripone le sue convinzioni e aspettative) ha anche la speranza, il sogno (forse un po' irrazionale) che ogni evento sia riconducibile a meccanismi logici, ed è perciò ampiamente gratificato da una storia che conferma e ribadisce il trionfo della ragione anche in panorami inizialmente del tutto disordinati. D'altro canto, è possibile che il discorso sia del tutto reversibile: esistono interi filoni di narrativa che si pongono in stretta antitesi con i processi razionali, anzi, non celano una certa supponenza nei confronti dell'esercizio della mera ragione nel tentativo di interpretare il mondo; tra i razionalisti presenti, alzi la mano chi non si è sentito un po' depresso nel riconoscersi catalogato alla stregua di "babbano" nei romanzi ambientati nel magico mondo di Harry Potter. Sarà allora lecito supporre che la narrativa fantastica, piena zeppa di mostri, fate, cavalieri e vampiri sia preferita da coloro che aborrono un approccio razionalistico alla Vita, all'Universo e a Tutto Quanto? Non è affatto detto, in realtà: è notoria la predilezione delle giovani e vecchie generazioni di nerd per i mondi paralleli, da Star Trek a Star Wars, passando per il Signore degli Anelli e tutta la tassonomia dei supereroi Marvel e DC Comics. E non si dica che buona parte degli esempi citati rientra nella definizione di "fantascienza", perché non è così: non c'è nessuna reale distinzione sostanziale tra una spada laser e una bacchetta magica.

Ma anche nella letteratura mainstream, in fondo, il meccanismo che procede da una situazione inizialmente sconnessa e intricata per risolversi alla fine in una quiete logica, comprensibile e priva di contraddizioni è abbastanza frequente. Tuttavia il mainstream tende di solito a riprodurre narrativamente le situazioni della vita reale, e di conseguenza si ritrova spesso a svolgere il compito opposto, ovvero a descrivere l'evolversi di eventi che, nati piccoli, per una serie di contingenze più o meno casuali cominciano a crescere, a rivestirsi di simboli, fino a diventare oggetto di discussione di intere comunità, paesi, nazioni; insomma a travalicare del tutto inaspettatamente le premesse inziali. E tanto più improbabile appare la successione degli eventi, tanto più la sua narrazione risulterà fascinosa, persino necessaria, quasi inevitabile. Alla fin fine, il lettore dei romanzi gialli comincia a leggerli con la ragionevole certezza che ci sarà un delitto, un colpevole che lo ha commesso e un investigatore che sarà in grado di assicurarlo alla giustizia[1], mentre in una storia non catalogabile nelle letterature di genere la sorpresa, se arriva, sarà tale e davvero imprevedibile, libera da schemi.

[1] Anche se ormai abbondano romanzi gialli che violano uno o tutti i vincoli paradigmatici del romanzo d'investigazione, ovviamente.

Gli autori che decidono di raccontare storie di questo tipo sono in genere abbastanza esperti da aver fatto propria la profonda verità proclamata dal detto "la realtà supera la fantasia", e modestamente tendono a prendere spunto da storie realmente accadute, piuttosto che mettere alla prova la loro pur fervida immaginazione. Storie vere che possono iniziare, tanto per dire, con una lettera; una lettera come quella che, nel lontano 1972, è stata inviata, presumibilmente per posta ordinaria, a un amministratore locale. Il destinatario era il Presidente della Provincia di Trieste, carica che a quei tempi era ricoperta da Michele Zanetti.

1 *Trieste, castello Miramare*

La provincia di Trieste ha un record geografico, che però è figlio naturale e legittimo della sua storia: è la provincia meno estesa d'Italia, poco più di 200 chilometri quadrati, ovvero una parte su millecinquecento del territorio nazionale. I confini orientali d'Italia sono quelli che maggiormente hanno oscillato nel ventesimo secolo, e la città di Trieste (che, peraltro, ha anche il record di essere l'ultima città capoluogo a diventare parte della Repubblica Italiana) è sempre stata centro e baricentro delle oscillazioni; l'ultima di queste, ratificata internazionalmente nel 1975, ha lasciato alla città una provincia – ormai del resto ufficialmente decaduta, come tutte le province italiane – di soli sei comuni, insomma poco più estesa della città stessa. Ma si tratta di una città dalla natura forte, abituata ad essere centro aggregante di culture diverse: una città disposta a cambiare natura, passando dal ruolo di più grande, se non proprio unico, porto di un grande impero terrestre come quello austroungarico, a simbolo stesso dell'Italia irredenta. Da una città come questa non ci si può aspettare altro che un respiro cosmopolita, una sorta di naturale apertura culturale e mentale.

Nel 1972, il presidente della più piccola provincia d'Italia ha trentadue anni, e forse è il più giovane presidente di provincia italiano. Trieste, per contro, è già a quei tempi la città con il maggior tasso di ricercatori scientifici[2], ed è forse per tutte queste ragioni che la strana lettera viene ricevuta, letta, e presa in considerazione.

E che venga presa in considerazione non è cosa da poco, visto che è una lettera scritta da un cavallo. Il cavallo chiedeva una sorta di grazia: aveva prestato servizio per più di tredici anni con dignità equina, tirando la carretta non soltanto metaforicamente, trasportando fuori e dentro dal locale manicomio ogni genere di carico, dagli indumenti della lavanderia ai rifiuti; e adesso che era diventato troppo vecchio per continuare il lavoro era destinato spietatamente al macello. Non si poteva chiudere un occhio, esercitare una forma di pietà, verso un animale che aveva lavorato per tutta la vita senza mai ribellarsi, senza chiedere stipendio, e facendosi voler bene da tutti? Il cavallo chiudeva la richiesta con il suo nome, Marco, e si poteva immaginare con quale ansia e intensità attendesse la risposta che avrebbe deciso il suo destino.

[2] Non solo d'Italia, ma d'Europa. I dati del 2005, secondo Wikipedia, registrano più di 37 ricercatori per mille abitanti, e abbiamo la speranza che non siano scesi di molto nel decennio successivo. È uno dei risultati del cosiddetto "Sistema Trieste", partito addirittura prima dell'inizio del XX secolo, che voleva fare della città un polo scientifico, e che ha continuato a dar frutti nonostante la città abbia cambiato nazionalità, sia passata attraverso due dilanianti guerre mondiali, e abbia subito la sufficienza con cui spesso i governi guardano alle istituzioni scientifiche.

Dev'essere strano, per un amministratore, ricevere una supplica del genere; e certo non soltanto per l'imprevista e improbabile alfabetizzazione del supposto autore. Marco il cavallo aveva evidentemente degli amici, perché nella lettera veniva anche precisato che questi avrebbero provveduto a risarcire la Provincia dal mancato incasso derivato dalla macellazione dell'animale, e che si sarebbero fatti carico dei costi indotti dal suo mantenimento in vita. Non saremmo qui a raccontare l'episodio se non fosse finito bene: qualche tempo dopo – neanche troppo, considerando le difficoltà burocratiche che una richiesta di grazia equina deve aver incontrato – il presidente Zanetti risponde e rassicura Marco e i suoi amici. La provincia aveva destinato dei fondi all'acquisto di un motocarro che, anonimo e senza vita, avrebbe comunque lasciato Marco libero di godersi la pensione, curato e coccolato dai suoi protettori che tanto si erano prodigati per lui.

Gli amici di Marco erano ovviamente i pazienti del manicomio, e qui arriva la prima escalation della storia. Se era evidentemente impossibile che un vecchio cavallo da tiro scrivesse una domanda di grazia, non era poi tanto più verosimile che quella domanda fosse stata avanzata dai matti: i matti, diamine, sono matti, figuriamoci se scrivono lettere. Eppure, almeno in un certo senso, era proprio così: forse a scrivere fisicamente la lettera sono stati altri, ma il desiderio che la lettera doveva trasmettere era autenticamente quello dei pazienti ricoverati nell'ospedale psichiatrico di Trieste.

Non sappiamo chi abbia avuto l'idea di far parlare il cavallo in prima persona, ma chi ama i territori di confine, chi è anzi propenso a negarli, siano essi territoriali o di concetto, non può non rimanere incantato da una identità così molteplice e frammentata – il cavallo, i matti, i savi amici dei matti – che tutti insieme coagulano nella multiculturale Trieste una richiesta di grazia, e la ottengono.

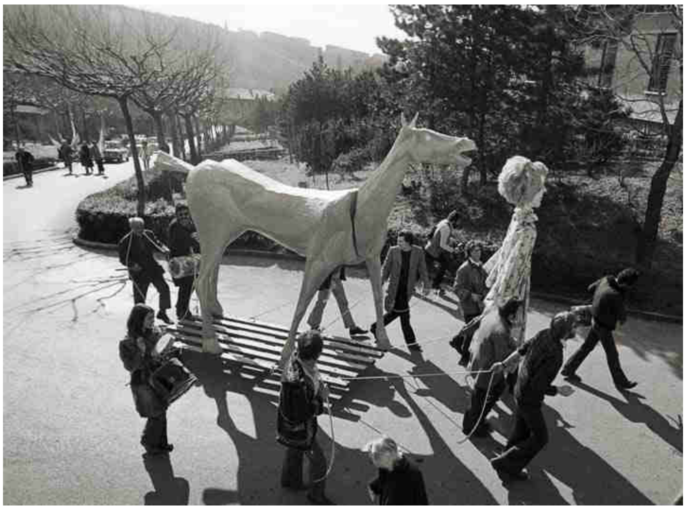
2 *Vittorio Basaglia dà forma a Marco Cavallo (foto di Claudio Erné, come la successiva: rubata al sito "Censimento Fotografico Italiano". Speriamo non si arrabbino…)*

E c'è di più, naturalmente. Perché se chiedersi quale sia l'identità ultima dell'autore della lettera può sembrare uno sterile esercizio d'accademia per logici e giuristi, c'è comunque una identità più urgente e significativa che è marchiata a lettere di fuoco dalla storia: quella dei pazienti dell'ospedale. Identità che è, per la legge del tempo, praticamente inesistente: un malato mentale non ha diritti civili, non è una "persona" nel senso pieno e compiuto del termine. Detto in maniera un po' brutale, un matto, nell'Italia del 1972, non esiste. E per una volta non si tratta di un ritardo giuridico della nostra nazione: il mancato riconoscimento dei diritti identitari dei malati mentali è uso comune in quasi tutti i paesi del mondo.

Solo che i matti di Trieste hanno ricevuto risposta: si sono uniti per implorare pietà per un cavallo, l'hanno ottenuta. Se il risultato è stato questione di vita o di morte per l'animale, non lo è tanto di meno per loro stessi: se si parla e si viene ascoltati, se si chiede e si viene esauditi, c'è un risultato implicito e dirompente che trascende persino il salvataggio della vita del cavallo Marco: significa che i matti esistono, significa che i matti fanno parte della società umana. Significa che i matti sono persone.

Ed è così che Marco Cavallo cessa d'essere solo un cavallo in carne ed ossa per diventare un simbolo. Un manicomio è terra di confine quasi per definizione: quel confine che dovrebbe separare i normali dai diversi, ma che quasi mai è un confine chiaro e definito. Di certo, i territori di confine sono anche territori di comunicazione, di scambio, di accoglienza. E può accadere che nel manicomio di Trieste, diretto dallo psichiatra Franco

Basaglia, possa cercare ispirazione anche un artista: il cugino del direttore, Vittorio Basaglia. E il fatto che i pazienti dell'ospedale abbiano trovato una chiave identitaria nelle sorti di un cavallo colpisce sia lo psichiatra, sia lo scultore. Lo spunto iniziale è probabilmente di Vittorio, ma l'idea è tale soprattutto perché è collettiva: se Marco Cavallo è un simbolo, che venga costruito e reso tangibile; sia pure di materiale caduco e fragile come la cartapesta, purché possa anche rimanere visibile a tutti, forte dell'incarico di mostrare se stesso – e di conseguenza anche gli abitanti del manicomio che lo hanno voluto e pensato – al resto del mondo. Nella realizzazione lo aiuteranno Giuliano Scabia, Dino Basaglia, Giuseppe dell'Acqua, ma sono i matti quelli che, pur senza toccare gli attrezzi né l'opera stessa, guidano la costruzione della grande grande "macchina teatrale": un cavallo azzurro, alto quattro metri, su ruote. Colore azzurro voluto dai matti, forse perché il cielo ricorda sempre la libertà, come fanno, in maniera più terrena, anche le ruote che devono dare mobilità al cavallo; e pancia deve essere grande, perché è nella pancia che si stipano i sogni dei pazienti, e i sogni hanno bisogno di spazio.

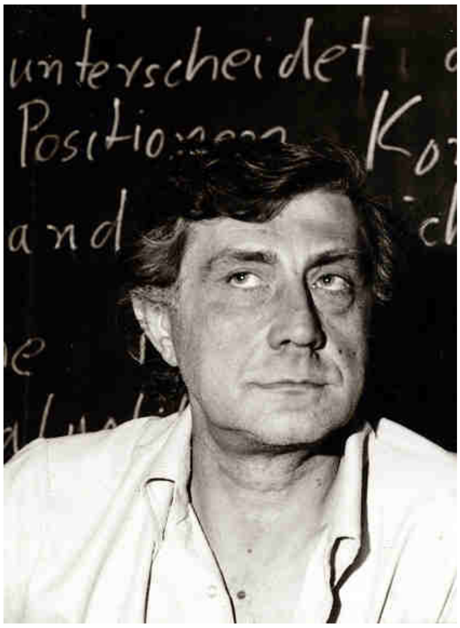

3 *Marco Cavallo è libero*

Così Marco Cavallo diventa l'alfiere azzurro della libertà di pazzia: nasce e cresce dentro il manicomio, con la missione di portarsi in pancia tutti i sogni di coloro che nel manicomio sono rinchiusi. E i sogni – almeno quelli, diamine! – devono uscire.

È sempre complicato, giocare con i simboli: i simboli non sono niente di reale, pratico, tangibile, ma hanno l'incarico spaventoso di rappresentare, decidere le emozioni e il destino di persone fatte di carne e sangue, che sono invece tangibilissime. Far uscire i sogni dei matti protetti dalla pancia azzurra di Marco Cavallo è missione importante, per i pazienti che in quell'animale di cartapesta ormai vedono la loro identità sociale finalmente riconosciuta, rappresentata, declamata. E quando si accorgono che il cavallo è troppo grande per poter uscire dal cortile del manicomio, è una sorta di tragedia non solo simbolica che si consuma: non solo non si può uscire all'ospedale psichiatrico, ma non si può farlo neppure accettando l'idea giocosa che siano solo le speranze a raggiungere il mondo esterno; neppure rassegnandosi a lasciare i corpi dei matti dentro quelle mura che li escludono, da anni, dal resto del mondo. Anche i sogni sembrano dover restare prigionieri, per sempre.

I simboli non sono niente di reale, ma spesso bisogna difenderli con lacrime, sudore e sangue: Marco Cavallo deve uscire dal manicomio, è la sua ragione d'essere. O esce, o resterà solo legno e cartapesta e vernice azzurra. E se per farlo uscire occorre demolire muri, che si demoliscano i muri: a ben vedere, il significato ultimo di quel simbolo in forma equina è esattamente questo, l'eliminazione delle barriere. Martelli e scalpelli entrano in azione, i muri si spaccano, le porte e i cancelli si svellono, e Marco Cavallo esce dal manicomio con un'azione di demolizione violenta, come sono spesso violente le richieste di libertà. È fuori, e con lui sono fuori i sogni dei matti, che finalmente possono girare per la città e per il paese.

Certo, i simboli contano, ma non sono sufficienti: perché la rivoluzione dell'approccio alle cure psichiatriche giunga a compimento occorre anche e soprattutto il lavoro non di Vittorio, ma di Franco Basaglia: occorre un lavoro paziente, difficile, certosino, alternato a prese di posizione rivoluzionarie dal punto di vista medico, sociale, filosofico. Ma alla fine, se la legge 180/1978 diventa realtà in Italia (e resterà nota proprio con il nome di "legge Basaglia") è anche merito di quella cartapesta che sfonda il cancello e i muri del manicomio, quasi violando anche le leggi della fisica, oltre che quelle, forse più dure, dei pregiudizi.



4 *Franco Basaglia*

Per quanto innovativa, la Legge Basaglia del 1978, in ultima analisi, non fa che ribadire una sollecitazione antica e frequente, quella della necessità della cautela nelle azioni di distinzione. Probabilmente, è sempre nella mente che si annida la causa del problema: nella mente di tutti gli esseri umani. Agli uomini non piace troppo valutare di volta in volta cause, ragioni, pulsioni, giustificazioni, azioni, tutto quanto, insomma, è necessario prendere in considerazione per emettere consapevolmente un giudizio: preferiscono di gran lunga seguire istruzioni semplici, chiare e univoche. Come una linea per terra: di qua il bene, di là il male; come le divise degli eserciti, di modo che i soldati sappiano bene a chi sparare e a chi no. È indubbiamente un sistema efficace, e tutto sommato poco diverso dalla scelta fideistica che si mette in atto quando si decide di tifare per una o un'altra squadra di calcio: quale che siano le motivazioni della scelta inziale (motivazioni che poi, a ben vedere, non sono neanche strettamente necessarie), basta scegliere qualcosa, e in cambio si ottiene una cartina al tornasole buona per tutte le occasioni. Noi e loro, divisi da un confine, con il giusto dalla nostra parte.

Conta poco, poi, scoprire che la persona che abbiamo classificato come diversa e piazzato dall'altra parte della linea a ben guardare non è poi così tanto diversa: il continuum è un problema grosso perfino per i matematici, figuriamoci se si può star lì a spaccare il capello nella vita di tutti i giorni; meglio affidarsi alla linea separatoria, che magari sta lì dalla notte dei tempi, e nessuno si chiede neppure più chi l'abbia tracciata per la prima volta. E succede continuamente, quasi in ogni aspetto umano: è indubbio che il colore della pelle dei senegalesi sia mediamente più scura di quella degli eschimesi, ma dividere le migliaia di sfumature cromatiche delle popolazioni in bianco-nero-giallo è azione così ingenua che dovrebbe far ridere anche un bambino; eppure sulla discriminazione di quelle linee di confine così grossolane si esercitano violenze, crimini, guerre. Conta poco se tra due religioni le somiglianze tra i concetti prescritti siano in numero molto maggiore delle differenze: sulle frontiere che separano quelle poche diversità si versa facilmente sangue e si attuano distruzioni.

E se questo accade con regolarità su oggetti relativamente semplici quali il colore dell'epidermide o la maniera giusta di pregare un'ipotetica divinità, come si può sperare di tracciare una chiara e netta separazione all'interno della mente, che è indubbiamente uno degli oggetti più complessi conosciuti?

In un certo senso, la mente stessa, tutta intera, è una zona di confine: è il luogo deputato a mettere in contatto ciò che siamo abituati a chiamare "io" con il resto dell'universo. È incaricata di guardare al tempo stesso "dentro" e "fuori", e di controllare ripetutamente le relazioni tra questi due territori; e non c'è dubbio che i modi possibili in cui queste relazioni vengono coniugate siano numerosi quanto gli esseri umani stessi.

Non può essere del tutto un caso se, anche nei modi di dire e nei luoghi comuni, i termini "genio" e "follia" sono spessi associati. Sono termini indicano cose assai diverse, spesso addirittura messi di contrapposizione fra loro, un po' come la coda destra e sinistra d'una gaussiana, ma che hanno certo alcune caratteristiche comuni: e la più significativa, probabilmente, è proprio la difficoltà di essere pienamente compresi da chi, per contro, è serenamente collocato, in quella gaussiana, nei dintorni del valor medio.

È davvero conoscibile e riconoscibile, il genio? È davvero facile ed evidente diagnosticare ogni forma di follia? E soprattutto, sono questi giudizi davvero alla portata di chiunque, o dovrebbero essere riservati solo ai tecnici specialisti della mente?

Sia i geni che i matti si comportano spesso stranamente, forse proprio perché concentrati su interessi specifici che li distraggono dal rispetto delle convenzioni sociali. Spesso i geni mostrano comportamenti sociali ingenui, stupidi, almeno se commisurati ad un generico concetto condiviso di normalità, e ci sono dei "folli" che, nella loro stranezza, palesano talvolta comportamenti creativi e logici del tutto eccezionali. Così come è facile distinguere un senegalese da un islandese basandosi sul colore della pelle, non si vuol certo negare che sia oggettivamente possibile distinguere con relativa facilità un pazzo pericoloso e violento da Albert Einstein; ma immaginare che esista una reale distinzione tra "matti" e "savi" è obiettivamente tutto un altro discorso. Esistono forme di autismo che sono davvero sconvolgenti, drammatiche da gestire per le persone che ne soffrono e per coloro che se ne prendono cura; ma esiste anche, d'altra parte, una probabile correlazione tra la presenza di forme leggere di autismo, come la sindrome di Asperger, ed elevati punteggi nel quoziente intellettivo.

5 *Eureka!*

I matematici dovrebbero saperlo bene: se il consolidato luogo comune esige che ogni scienziato sia cospicuamente distratto, gli aneddoti tramandati sulla sbadataggine e noncuranza delle convenzioni sociali riguardano prevalentemente proprio i matematici. Archimede che si dimentica di mangiare quando lavora a un teorema, e che la tradizione vuole che non si vergogni minimamente di precipitarsi nudo per strada, quando annuncia con il suo celeberrimo "Eureka!" la scoperta del principio idrostatico che prende il suo nome. Newton che realizza quella che a detta di molti è una delle sue invenzioni più geniali, la gattaiola[3], e quando la sua micia fa i gattini si preoccupa di realizzare subito altre gattaiole più piccole, una per micetto. Hilbert che si perde per strada diretto alla sua nuova casa e non riconosce la figlia che era venuta, previdente, a fargli incontro perché si aspettava la cosa; e cento altre storielle divertenti. Ma oltre agli aneddoti non mancano anche meno divertenti cronache di situazioni propriamente patologiche, da Cantor che finisce i suoi giorni in un manicomio a Gödel che si lascia morir di fame per tema d'essere avvelenato; passando per Grothendieck che si isola dal mondo quando è forse il più grande matematico dei suoi tempi a Nash, i cui problemi psichiatrici sono il tema centrale del celebre film "*A beautiful mind*"[4].

Si possono trarre delle conclusioni, da un campionario del genere? Di certo, se mai fosse possibile concludere qualcosa, sono solo gli specialisti che possono farlo, definendo

[3] *"Sir Isaac Newton, rinomato inventore della zigrinatura delle monete e della gattaiola!"*
"Di cosa?" disse Richard.
"La gattaiola! Oggetto di suprema ingegnosità, perspicacia e invenzione. È una porta dentro una porta, sai, e…"
"Sì," disse Richard, "poi ci sarebbe anche quella cosuccia della gravità."
"La gravità…" disse Dirk con una leggera scrollata di spalle, "sì, anche quella, suppongo. Ma vedi, quella è stata solo una scoperta. Stava lì in attesa che qualcuno la scoprisse. Insomma," disse gettando via il mozzicone della sigaretta, "qualcuno ci sarebbe arrivato. Prima o poi, ci sarebbe stato chi ci avrebbe fatto caso. Ma la gattaiola…ah, quella è tutto un altro paio di maniche. Invenzione, pura invenzione creativa. Una porta dento una porta, ti rendi conto?" – (Douglas Adams, "Dirk Gently's Holistic Detective Agency", trad.in.prop.).

[4] Di lui abbiamo scritto in "*Rudi Ludi*", recentemente tornato alle stampe grazie ad Hachette come "*In teoria, è un gioco!*". È facile proseguire l'elenco dei matematici destinati a ricoveri prolungati in ospedale, specialmente cercando tra gli studiosi di logica: Zermelo, lo stesso Peano, Post…

metriche, metodi di valutazione, raccogliendo prove e dati statistici. Qui non resta che osservare che la chiave di volta, se mai esiste, sarà da ricercare come sempre nel fatto che gli scienziati, i matematici sono solo esseri umani, e gli esseri umani sono incredibilmente diversi l'uno dall'altro, con abilità, interessi, talenti diversissimi, e classificarli è quasi inevitabilmente cosa tecnicamente difficilissima, e soprattutto eticamente ingiusta. Inquadrare e classificare le differenze è condizione necessaria, anche se certo non sufficiente, all'instaurazione di principi di discriminazione, principi di cui si può quasi sempre fare benissimo a meno. Equivale a dare un eccesso di potere alle parole, che invece dovrebbero fungere solo da elementi atomici di comunicazione: e poi, come gli amanti della matematica sanno bene, le parole vanno interpretate e soppesate, perché il loro contenuto semantico varia spesso nel tempo, o dal contesto, o anche, più drammaticamente, da chi le usa.

Si consideri ad esempio questa citazione che riguarda quella che più volte abbiamo chiamato "la parola più pericolosa in matematica", ovvero "ovvio".

John Barkley Rosser Senior[5], matematico, logico e filosofo, racconta[6] che quand'era studente a Princeton c'era una storiella che circolava: "*se Church dice che è ovvio, se ne sono accorti tutti da mezz'ora. Se Hermann Weyl dice che è ovvio, John Von Neumann può dimostrarlo. Se Solomon Lefschetz dice che è ovvio, allora è falso*"[7]. Non sappiamo che cosa ne pensiate voi ma, dovendo scegliere, da studenti delle ultime file siamo propensi ad apprezzare oltremodo il primo dei tre professori.

6 *Alonzo Church*

Alonzo Church nasce a Washington il 14 giugno 1903, dal giudice Samuel e sua moglie Mildred. Il nome Alonzo suona un po' insolito, con un sentore ispanico che può sorprendere in una casata così marcatamente anglofona come "Church", ma quantomeno non è unico in famiglia: si chiama così anche un suo zio, che rivestirà un ruolo importante per fargli continuare gli studi quando suo padre Samuel dovrà rinunciare al suo lavoro per ragioni di salute.

La vita personale di Alonzo Church è sorprendentemente povera di eventi memorabili, a giudicare dalle note biografiche che si riescono a trovare in rete: grazie allo zio Alonzo riesce a frequentare il liceo maschile di Ridgefield, dove si diploma, e quindi entra a Princeton. Corre l'anno 1920, cosa che ci fa immaginare un Church appena diciassettenne mentre varca la soglia di una delle più prestigiose università scientifiche del mondo. Qui mostra di essere uno studente dal talento eccezionale: si laurea nel 1924, pubblica subito una memoria sulle trasformate di Lorentz, e nel 1927 prende il Ph.D. studiando con Oswald Veblen. Prende in moglie Mary Julia Kuczinski

[5] Il "Senior" è importante per distinguerlo dal suo omonimo figlio, "Junior", anche lui matematico (ma di area economica, non logica come il suo papà), che ha buoni rapporti con l'università di Urbino.

[6] …e lo racconta anche l'italica Wikipedia, da cui abbiamo rubato l'aneddoto. Tra l'altro, onore al merito di wiki.it, che nell'occasione si mostra più densa di notizie della consorella maggiore in lingua inglese.

[7] A margine: siamo spiacenti di confessare che a Solomon Lefschetz non abbiamo ancora dedicato "compleanni", ma se vi state domandando chi fosse John Von Neumann potete ricercare nel nostro archivio "*Dottor Stranamore*", RM107, Dicembre 2007 e se invece vi incuriosisse di più Herman Weyl, allora potete fare un salto su "*Difficile come contare fino a dieci*", RM087, Novembre 2005. Se invece state cercando notizie su Alonzo Church, beh, allora, diamine…

all'età di ventitré anni, e con lei cresce tre figli: Alonzo, primogenito e omonimo, e poi le due sorelline Mary Ann e Mildred. Religioso, seguace osservante della chiesa presbiteriana, dopo il dottorato insegna brevemente a Chicago, poi riceve una borsa di studio che gli consente di completare la sua formazione tra Harvard, Göttingen e Amsterdam: poi, nel 1929 rientra a Princeton, e in buona sintesi vi resterà ad insegnare per quasi quarant'anni, fino al 1967. Ormai ultrasessantenne, si sposta verso il sole della California, nella cui università resterà fino al 1990. Lascia questa valle di lacrime l'undici agosto 1995, a novantadue anni d'età.

7 *David Hilbert, una volta tanto senza cappello*

Per contro, la sua vita matematica è tale da riservargli un posto di prima grandezza tra i matematici di quel ventesimo secolo che ha attraversato quasi per intero. Il suo risultato più eclatante – non certo l'unico, ma di importanza e conseguenze tali da essere ampiamente sufficienti a renderlo immortale nei libri di storia della scienza – è la soluzione al "Problema della Decisione" (*Entscheidungsproblem*) posto da Hilbert[8] nel 1928. Il grande vecchio, abituato com'era a porre problemi alla comunità matematica, chiedeva se fosse possibile trovare un algoritmo in grado di verificare la validità di un teorema della logica del primo ordine partendo da asserzioni espresse sempre nella logica del primo ordine. L'algoritmo, in quanto tale, doveva poter essere eseguito meccanicamente, e auspicabilmente essere finito: in altri termini, il problema posto era quello di ottenere uno strumento in grado di decidere se un enunciato logico è vero falso.

Alonzo Church risolve il problema nel 1936, precedendo di poco un altro giovane matematico che, con altri metodi e approcci, arriva alle sue stesse conclusioni: il ventiquattrenne Alan Turing[9]. Se Turing approccia il problema dissezionando gli aspetti realmente meccanici del calcolo, ipotizzando la sua celeberrima "Macchina di Turing" e raggiungendo definizioni chiare di procedura, algoritmo, processo, Alonzo Church analizza la questione con gli strumenti puri della logica matematica, e inventando per l'occasione il "λ-calcolo", il sistema ancora oggi usato per analizzare la consistenza logica delle funzioni. Se gli approcci sono diversi, il verdetto è però il medesimo: la risposta alla domanda di Hilbert è un secco "no": ci saranno sempre delle asserzioni "indecidibili"[10], per le quali nessuna macchina, nessun algoritmo, nessun calcolo potrà stabilirne la validità o meno.

La risposta è negativa, ma è tutt'altro che un insuccesso: piuttosto, è forse addirittura la nascita di un mondo nuovo. Alonzo e Alan hanno percorso vie diverse, giungendo ai medesimi risultati; dimostrano anche che gli approcci sono equipotenti, e fondono le loro scoperte nella pietra miliare dell'informatica, la "Tesi di Church-Turing". Anche se permangono asserzioni indecidibili, i progressi teorici nel concetto di "calcolabilità", nel concetto di funzioni ricorsive, nella teoria della computazione sono enormi, e le potenzialità che si aprono verso la meccanizzazione del calcolo inimmaginabili. La "tesi" di Church e Turing è in realtà ancora solo una congettura, un'ipotesi, ma già negli Anni Trenta del secolo scorso appare evidente uno scorcio di futuro: "qualsiasi algoritmo

[8] "*Wir müssen wissen. Wir werden wissen*", RM060, Gennaio 2003.

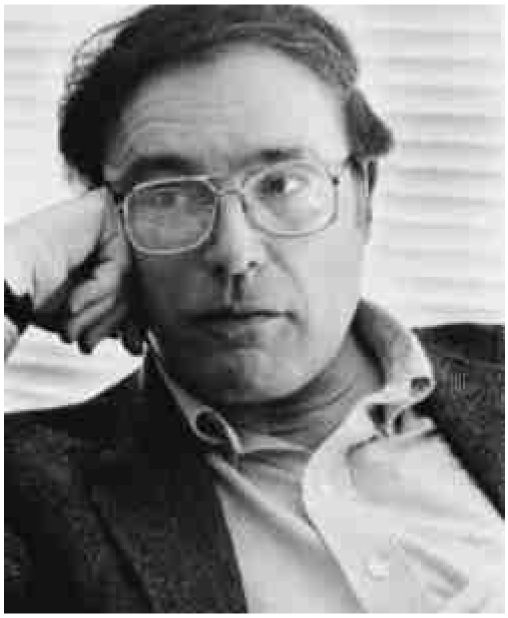
[9] "*Normale come Biancaneve*", RM089, Giugno 2006.

[10] Tra queste, vale forse la pena di ricordare, anche l'Aritmetica di Peano.

eseguibile da un essere umano è eseguibile anche da una macchina di Turing", dice la tesi, e spalanca definitivamente le porte alla nascente informatica.

Alonzo Church arriva a questi risultati percorrendo la stretta via della logica matematica e formale, di cui è indubbiamente un pioniere, un esploratore solitario. A Princeton non ha praticamente nessuno con cui condividere idee, impressioni, scoperte: e negli anni Trenta del Novecento occuparsi di logica matematica è quasi un suicidio professionale, tanto poco è tenuta in considerazione, quasi dileggiata.

I suoi risultati in matematica sono così eclatanti che, per tornare al tema d'apertura, non dovrebbero davvero esserci difficoltà nell'annoverare Church tra i geni, piuttosto che fra i folli: eppure è indubbio che gli aneddoti narrati su di lui sono illuminanti, nella costruzione delle leggende sulla "stranezza" dei matematici, e dei logici in particolare. Data la sua vita privata morigerata e tranquillissima, gli episodi celebri riguardano quasi esclusivamente l'unica sua attività accademica che implicava un certo grado di rapporti sociali: il suo modo di insegnare. Tra i suoi studenti – certo non particolarmente numerosi, rispetto a corsi più popolari a Princeton – figurano nomi di tutto rispetto, come ovviamente lo stesso Alan Turing, il già citato John Barkley Rosser Sr., il più grande logico ricreativo di tutti i tempi (se mai ne è esistito uno) Raymond Smullyan, Martin Davis, John Kemeny[11] e molti altri. Quello che ne ha lasciato il ritratto più personale è stato però Gian-Carlo Rota[12], che nel 1997 ha pubblicato il libretto "*Fine Hall*[13] *in its Golden Age. Remembrances of Princeton in the Early Fifties*", in cui descrive abbastanza spietatamente alcuni dei suoi più celebri insegnanti.


8 *Gian-Carlo Rota*

Rota inizia il suo breve ritratto di Church descrivendolo fisicamente come un incrocio tra un panda e un grosso gufo. Ben più sorprendente del suo aspetto è il modo di parlare: Rota racconta che parlava esattamente come un libro stampato, lentamente e chiaramente, proprio come "una macchina parlante": a ribadire il concetto, chiarisce anche che quando veniva interrotto Church aveva bisogno di un certo tempo prima di ricominciare, quasi come se stesse ricercando il punto esatto da dove riprendere il discorso. Da perfetto logico alla ricerca della consistenza delle proposizioni, evitava come la peste le frasi dette solo per convenzione o per fare quattro chiacchiere: dalla sua bocca non poteva uscire la frase "*Piove.*", perché così priva di contestualizzazione non aveva alcun senso, a suo avviso. Quello che invece poteva senz'altro sentir pronunciare da lui era qualcosa del tipo "*Posticiperò la mia partenza verso il parcheggio, perché ora sta piovendo, cosa che posso ben verificare guardando fuori dalla finestra*". Quando il λ-calcolo cominciò ad essere usato anche dagli studiosi di linguistica per verificare la consistenza del linguaggio, una delle critiche più frequenti che vennero avanzate al testo riguardava le frasi di esempio, che suonavano lontanissime dalla vera lingua ordinariamente parlata: secondo Rota, tutto dipendeva in realtà dal fatto che quello era esattamente il modo normale di parlare di Church.

[11] Ne parleremo un po' anche più avanti, ma se il nome vi suona familiare potrebbe essere perché, oltre che assistente di Albert Einstein, è stato anche l'inventore del BASIC.

[12] "Il lato oscuro della matematica", RM195, Aprile 2015

[13] "Fine Hall" è l'edificio che ospita il Dipartimento di Matematica a Princeton.

Alonzo Church non sembrava distinguere il giorno dalla notte, le feste dai giorni ordinari, quando era occupato in qualcosa: lo si poteva incontrare in biblioteca di notte o nel giorno di Natale, e ricevere da lui un saluto del tutto normale. Nei libri che possedeva personalmente si potevano trovare numerose correzioni nei sommari quando questi, incautamente, erravano nel mostrare la giusta pagina di riferimento: e quasi tutti i suoi libri erano marchiati con un cerchio o con una croce, e nessuno ha mai scoperto il significato di questi simboli.

Di certo, l'aneddoto più raccontato è quello che riguarda il rito di pulizia della lavagna: il professor Church passava i primi dieci minuti della lezione attuando una rigorosa, regolare, maniacale pulizia della lavagna, fino a renderla del tutto immacolata. Era palesemente un'operazione che trascendeva la mera questione della leggibilità di quanto stava per scriverci sopra: spesso occorreva intervenire con spugna, acqua e sapone (cosa che prolungava i tempi, perché poi bisognava anche attendere che si asciugasse) e soprattutto perché tutti i tentativi messi in atto dagli studenti per risparmiargli la fatica, pulendo rigorosamente e a fondo l'ardesia prima del suo arrivo, non sortivano alcuno effetto. La lezione non poteva cominciare se il professore Church non provvedeva a tracciare con precisi e rettilinei tratti di cancellino l'intera lavagna[14].

Poi, le lezioni vere e proprie: seguivano esattamente le dispense del suo corso, che ogni studente poteva consultare nella biblioteca della facoltà. E per "esattamente" si intende davvero "esattamente": capitolo per capitolo, paragrafo per paragrafo, parola per parola. Nei rarissimi casi in cui c'era qualche differenza tra quanto scritto nel testo e quanto diceva in aula, si preoccupava di precisarlo, ripeterlo, dare ragione delle differenze. Talvolta, quando la dimostrazione di un teorema era sostanzialmente identica a quella del teorema che aveva dimostrato appena pochi istanti prima, si volgeva verso l'uditorio dicendo: "*Ora potrei dire "alla stessa maniera…", ma è meglio che lo mostri per esteso anche in questo caso…*".

Rota annovera ovviamente la letterale ripetizione a lezione del testo scritto come una delle più "rilevanti stranezze" di Alonzo Church, ma onestamente riconosce che, nonostante quel che si potrebbe pensare ("A *che diavolo serve che io vada a lezione? Basta che mi legga le dispense…*") andare a lezione da Church era assai utile. Citando letteralmente: "*Quella persona che ci stava tenendo lezione era la logica incarnata. Le sue pause, le sue esitazioni, l'enfasi, i suoi accenni di emozione (per quanto rari) e una pletora di altri segnali non verbali ci hanno insegnato più logica di quanto qualsiasi libro di testo potesse fare".* E poi un professore non è solo un erogatore di lezioni: Rota racconta anche diffusamente di come il professor Church lo abbia guidato a risolvere i suoi dubbi con pazienza e argomentazioni, indirizzandolo affinché risolvesse da solo le sue questioni. Insomma tutt'altro che limitandosi, come pure avrebbe potuto lecitamente fare, a dargli le risposte sbrigative che lo studente chiedeva.

Eppure, Alonzo veniva spesso guardato con sufficienza dai colleghi. Aveva comportamenti strani, si occupava di una disciplina ostica e poco a la page. Bussavano alla porta prima che finisse le lezioni, sorridevano con aria di compatimento verso quei poveri studenti che seguivano le sue lezioni; insomma, facevano sentire tutta la distanza che loro immaginavano esserci tra loro, i veri professori di Princeton, e quella macchietta di Alonzo Church. Rota ricorda perfino il commento rabbioso di John Kemeny, studente di Church poi diventato professore di Filosofia della Scienza, che dal suo maestro aveva imparato a mostrarsi semplice, chiaro fino alla trivialità, esplicativo fin quasi alla noia, purché la lezione e i fatti che conteneva giungessero a segno: "*Non c'è nessuna ragione logica per cui un grande matematico non possa essere anche un gran farabutto*", disse una

[14] Supponiamo che gli affezionati estimatori di "*The Big Bang Theory*" non possano non notare una certa affinità tra questo atteggiamento di Alonzo Church con la più famosa mania di Sheldon Cooper: fedele alla triplice mista ripetizione di colpi sulla porta e invocazioni della vicina (*Toc-toc-toc, "Penny!" Toc-toc-toc, "Penny!" Toc-toc-toc, "Penny!"*), nelle rare volte che questa apre la porta prima del tempo si vede comunque costretto a completare (di nascosto e sottovoce, per pudore) la serie.

volta Kemeny a Rota, "*guarda i tuoi professoroni di Fine Hall, guarda come trattano uno dei più grandi matematici viventi, Alonzo Church*".

9 *John Kemeny*

C'è da sperare che ad Alonzo quei sorrisetti e quegli sguardi di sufficienza non facessero né caldo né freddo. L'intelligenza è cosa difficile da misurare, e le altre doti di cui dovrebbero essere forniti tutti gli esseri umani, scienziati inclusi, lo sono ancora di più. Si può essere grandi accademici e uomini piccoli, come Kemeny ricordava a Rota con ferrea logica. Ma gli abitanti delle zone di confine forse hanno difese speciali, una sorta di salvacondotto mentale, delle protezioni che i "normali" non capiscono, non prevedono.

Perché, geni o folli, bisogna per forza essere dotati di letterale eccezionalità, per gettarsi contro un muro per conquistare la libertà, come ha fatto Marco Cavallo; e anche per immergersi nei meandri oscuri della logica simbolica per ritornarne con una teoria che avrebbe regalato all'umanità un nuovo modo di vivere, come ha fatto Alonzo Church.

Forse, i matti e i geni ridono del mondo più spesso di quanto diano a vedere, perché lo fanno dentro sé stessi: e là dentro, probabilmente, c'è davvero un mondo vasto e grande, che resta misterioso.

2. Problemi

2.1 Generalizzare un calcolo

Cominciamo dai ricordi di gioventù[15].

Ho avuto, matematicamente parlando, un paio di sfortune nella vita: un paio di prof di mate che stavano "facendo altro" (uno mirava alla pensione, l'altro al concorso da preside) in momenti topici, come quando si spiegano la geometria solida e la trigonometria: da cui, questo problema mi risulta abbastanza ostico, mentre i miei colleghi lo valutano arbitrariamente facile.

Prima il problema, posto in modo "duro e puro" (con un epsilon di ambientazione, ma pocapoca, dopo).

Qual è l'angolo tra due facce contigue di un icosaedro?

Se tutto va come deve, io *[Rudy speaking]* e Doc ci ritroveremo a lavorare con un mucchio di icosaedri, divertendoci come dei vitelli al primo pascolo di primavera[16].

Il guaio è che dall'altra parte della cattedra (quella sbagliata, una volta tanto) dovremmo avere una "cofanata" di prof (di mate), adusi a fare domande balorde per mettere in crisi i relatori; siccome vorremmo (nei limiti del possibile: Doc parte spesso in questo modo) evitare le *excusatio non petita*, meglio se arriviamo preparati.

Giustappunto, come si calcola?

L'espansione ve la diamo subito, visto che con l'icosaedro viene un risultato molto carino (non ci vuole molto a capire che è cugino primo della sezione aurea): esiste un metodo *generalizzabile* agli altri solidi regolari (sì, dovremmo parlare anche di quelli)? E, esauriti i platonici, che cosa ci dite degli *Archimedei*? E dei *Kepleriani* (sarebbero quelli stellati: vero, non si chiamano così, ma a noi i regali di natalizi di Keplero sono sempre stati simpatici)*?* E degli altri, genericamente semiregolari?

Ecco, quello che ci piacerebbe è un metodo generalizzato, per fare questi conti: magari basato su un vertice standard, o cose di questo genere....

No, come al solito non ne abbiamo la più pallida idea.

Oh, poi se volete salire di dimensioni, liberi di farlo, eh... Comunque, sempre angoli tra i C_2 (che sarebbero le "facce": sugli angoli tra gli iperpiani, aspettiamo che facciano i fogli di ipercarta[17]).

2.2 Cappelli, che belli, porelli i nanelli... (o, in alternativa: "Un diavolo per cap(p)ello)

No, non abbiamo bevuto troppo[18]. È che di solito questi problemi sono politicamente scorretti nei confronti della gente diversamente alta.

Avevamo ricevuto (*molto* tempo fa) da un lettore un simpatico e sanguinario problema coinvolgente un orco, dei nanetti e dei cappelli di cui indovinare il colore (altrimenti ti mangio).

Ci siamo ritrovati in quel di Napoli[19] e agli avversari (sì, stavamo amichevolmente facendo un gioco dell'oca esteso all'intera chiesa sconsacrata) è stato proposto il problema per[20] $N_n=4$.

[15] I miei: quindi, marca male, almeno per i dinosauri (RdA).

[16] cit. mia nonna (RdA)

[17] ...e se non lo avete capito adesso... sì, parliamo di origami.

[18] Nei limiti impliciti di una definizione soggettiva e non generalizzabile.

[19] Con tutti i limiti dati dagli avverbi ad inizio frase: *sicuramente* Doc ve lo racconterà da qualche altra parte.

[20] Sarebbe il "Numero nanetti". Ma così è facile.

Va premesso che a noi non piacciono particolarmente le ambientazioni con nani, orchi e compagnia cantante, preferiamo quelle con prof scarsamente produttivi e cose di questo genere: quindi, la tendenza è di catalogarli tra i "classici" e via andare.

Vabbé, la stiamo tirando lunga. Abbiamo trovato un problema di questo tipo dove non muore nessuno e dove si tratta solo di vedere quanto sia onesto il gioco.

Avete un gruppo di *k persone normali* (oh, finalmente! Mai capito perché debbano essere nani) che vengono fatti entrare in una stanza buia, dove senza vedere niente prendono un cappello.

Sui cappelli (che sono n, con $k<n$) ci sono tutti i numeri da 1 a n: una volta che tutte le persone coinvolte hanno un cappello, cominciano a guardarsi l'un l'altro, vedendo ciascuno i numeri di tutti gli altri, ma evidentemente *non il proprio*.

Ogni "vittima", dopo aver guardato con attenzione tutti i cappelli, enuncia due cose:

1. Il *massimo* numero che ha visto,
2. Il *minimo* numero che ha visto.

Quando tutti hanno svolto questo edificante compito, ci chiediamo quale sia la probabilità che *tutti* i nostri pazienti passanti indovinino il numero che hanno in testa.

Per bassi valori di k, la cosa non è particolarmente problematica, ma già per n=6, k=5 comincia a diventare interessante[21].

Riuscite a generalizzare la formula? Anche per i casi strani, chiaramente, tipo k=1.

3. Bungee Jumpers

La sequenza

4, 1/3, 4/3, 4/9, 16/27, 64/81, ...

è costruita generando ogni termine successivo al secondo come il prodotto dei due termini precedenti.

Si vede che il primo e il terzo termine sono maggiori di 1, mentre il secondo e il quarto sono minori di 1; questa regola però fallisce rapidamente, visto che a partire dal quinto termine tutti sono maggiori di 1.

È possibile costruire una sequenza infinita di questo tipo per cui la regola sia sempre rispettata? Costruite la sequenza o dimostratene l'inesistenza.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Giugno!

Fa moderatamente caldo, le scuole finiscono ed è tempo di vacanze. Alcuni programmano, altri sono già in viaggio, e altri ancora contano i giorni fino al momento fatidico. RM non va mai in vacanza, anche se i redattori a volte sì, quindi eccoci qui.

Siete passati in edicola a comprare il nostro libercolo? Come no? Non sapete nemmeno di cosa parliamo? Accidenti. A farci pubblicità siamo un vero disastro. Date un'occhiata qui: https://www.hachette-fascicoli.it/sfide-e-giochi-matematici e cercate i nomi dei vostri eroi.

Passiamo alle vostre soluzioni.

4.1 [231]

4.1.1 Siamo in ritardo

Il mese scorso eravamo in ritardo, ma lo stesso ci siamo persi una soluzione, così ve la passiamo ora. Il problema era il seguente:

> *Abbiamo disposto otto tavoli in cerchio, che indicheremo arbitrariamente come N, NE, E, SE, S, SO, O, NO. Su ognuno dei tavoli N, E, S, O ci sono un certo numero*

[21] Nel senso cinese del termine.

di torte rettangolari (non necessariamente lo stesso numero su ognuno dei tavoli), mentre gli altri tavoli sono vuoti. La logica della festa procede nel modo seguente:

1. *Viene spostato, sul tavolo NE, un numero di torte pari alla media aritmetica delle torte presenti sui tavoli N e E; operazione equivalente viene effettuata su ognuno dei tavoli vuoti (calcolo effettuato a "bocce ferme", quindi contate il vecchio numero di torte sul tavolo E quando fate il conto per il tavolo SE). Procedete quindi a distribuire ai commensali le torte "avanzate", in modo da sgombrare i tavoli N, E, S, O.*
2. *Viene spostato, sul tavolo N, un numero di torte pari alla media aritmetica delle torte presenti sui tavoli NE e NO; operazione equivalente, secondo le condizioni statuite al punto (1), viene effettuata anche sui restanti tavoli.*

Se alla fine del giro vi avanza qualcosa, distribuite la torta avanzata, se siete "in debito", ne fate arrivare il necessario dalla cucina. La cosa va avanti per venti passi, quando vi accorgete che sui quattro tavoli coinvolti a quel giro restano 1, 2, 3 e 4 torte, non necessariamente in quest'ordine.

Quante erano, per ogni tavolo, le torte dopo il primo giro?

Si riesce a calcolare quante erano le torte all'inizio?

La soluzione che ci siamo persa era di ***trentatre***:

Indichiamo i tavoli $(N, NE, E, \dots NO)$ con $(1,2,3,\dots 8)$. Il processo consiste nello spostare alternativamente le torte fra i tavoli dispari $D=(1,3,5,7)$ e quelli pari $P=(2,4,6,8)$; i valori iniziali (n° di torte) sono

[1] $D_0=(x,y,z,w)$, $P_0=(0,0,0,0)$ con (x,y,z,w) : incognite

- ad ogni passo si pone a zero uno dei gruppi, e il passo successivo dipende solo da gruppo non nullo; i valori del passo n si possono quindi indicare con un solo gruppo di 4 valori

[2] $S_n=(x_n,y_n,z_n,w_n)$

- il passaggio $S_n \to S_{n+1}$ è dato da

[3]
$(x_{n+1},y_{n+1},z_{n+1},w_{n+1})=((x_n+y_n)/2,(y_n+z_n)/2,(z_n+w_n)/2,(w_n+x_n)/2)$

- questo implica una rotazione fra i tavoli (1/8 di giro ad ogni passo) e per $n=0,1,2,3,\dots$ il valore x_n è attribuito ciclicamente al tavolo $(n+1)$.

In forma matriciale la [3] diventa

[4] $\boldsymbol{x}_{n+1}=\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{x}_n$ con $\boldsymbol{x}_n=\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ w_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Il problema dopo p passi consiste nel ricavare $\boldsymbol{x}$ (vettore iniziale incognito) da

[5] $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{M}^p\cdot\boldsymbol{x}$

- dove $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ è il vettore finale noto.

Le quattro equazioni del sistema [4] non sono indipendenti, una delle incognite è indeterminata, $\boldsymbol{M}$ non ammette l'inversa. Questo vincola i termini noti; esistono soluzioni solo se

[6] $a-b+c-d=0$

- con i valori finali indicati nel problema la permutazione $(1,2,3,4)$ non è ammessa, mentre lo sono le permutazioni $(1,2,4,3),(2,4,3,1)$ ecc.

Applicando alla [5] un metodo standard di soluzione (che riassumo in seguito), con $p = 20$, w come variabile indeterminata, $(a,b,c,d)=(1,2,4,3)$ la soluzione è

[7] $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1029-w \\ 1024+w \\ -2043-w \\ w \end{bmatrix}$

- che vale per w qualsiasi; si verifica infatti che $\boldsymbol{M}^{20}\cdot\boldsymbol{x}=[1 \quad 2 \quad 4 \quad 3]^T$ per ogni w.

I valori (x,y,z,w) posti all'inizio nei tavoli (N,NE,E,SE) generano $(1,2,4,3)$ in (S,SO,O,NO), cioè dopo mezzo giro. Nessun valore di w consente di avere x,y,z,w tutti positivi, e su qualche tavolo ci sono all'inizio <u>torte negative</u> ("farle arrivare dalla cucina" non serve).

La soluzione [7] non è unica; cambiando la permutazione (a,b,c,d) e scegliendo una variabile libera diversa da w, i valori di $\boldsymbol{x}$ cambiano ma vale sempre

[8] $x+y+z+w=1+2+3+4=10$.

Nel problema si chiede il risultato dopo un solo giro, che si ricava applicando $\boldsymbol{M}$ ai valori [7] cioè

[9] $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{M}\cdot\begin{bmatrix} 1029-w \\ 1024+w \\ -2043-w \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2053/2 \\ -1019/2 \\ -2043/2 \\ 1029/2 \end{bmatrix}$

- w scompare ma compaiono le <u>mezze torte negative</u>.

La soluzione segue lo schema

[10] $\boldsymbol{M}^{20}=\dfrac{1}{2048}\cdot\begin{bmatrix} 511 & 512 & 513 & 512 \\ 512 & 511 & 512 & 513 \\ 513 & 512 & 511 & 512 \\ 512 & 513 & 512 & 511 \end{bmatrix}$

- che scritta esplicitamente e ampliata con i termini noti diventa la matrice 4x5

[11] $\boldsymbol{Q}=\left[\boldsymbol{M}^{20} \,\middle|\, \boldsymbol{a}\right]=\left[\begin{array}{cccc|c} 511/2048 & 1/4 & 513/2048 & 1/4 & a \\ 1/4 & 511/2048 & 1/4 & 513/2048 & b \\ 513/2048 & 1/4 & 511/2048 & 1/4 & c \\ 1/4 & 513/2048 & 1/4 & 511/2048 & d \end{array}\right]$

- il sistema [5] ha soluzioni solo se $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{Q}$ hanno lo stesso rango - il vettore $\boldsymbol{e}=[1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]$ annulla tutte le colonne di $\boldsymbol{M}$ cioè $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{M}=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

- questo deve valere anche per la 5.a colonna : $\boldsymbol{e}\cdot[a \quad b \quad c \quad d]^T=a-b+c-d=0$ cioè la [6]

- con $(a,b,c,d)=(1,2,4,3)$ e riducendo $\boldsymbol{Q}$ a forma triangolare con il metodo di Gauss

[12] $\boldsymbol{Q}\to\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1029 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1024 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2043 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

- che nella forma [5] è $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1029 \\ 1024 \\ -2043 \\ 0 \end{bmatrix}\to\begin{cases} x+w=1029 \\ y-w=1024 \\ z+w=-2043 \end{cases}$ da cui la [7]

- $\boldsymbol{g}=[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$ è un autovettore di $\boldsymbol{M}$ cioè $\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{M}=\boldsymbol{g}$; applicando a [5] si ottiene

$\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{a} = a+b+c+d = 1+2+3+4 = 10 = \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x} = x+y+z+w$ cioè la [8].

I calcoli si possono fare con un programma di calcolo simbolico, p.es. con *WolframAlpha* (>*Mathematics*>*Algebra*>*Matrices*; la riduzione di Gauss corrisponde alla funzione *RowReduce*[ ]).

Bella vero? Lo è anche quella del ***Panurgo***, arrivata a S&N già chiuse, ma riaperte velocemente per l'occasione:

Per prima cosa osserviamo che, se il tavolo NE riceve la media aritmetica delle torte presenti sui tavoli N e E mentre il tavolo NW riceve la media delle torte presenti sui tavoli N e W, allora le torte presenti sul tavolo N andranno metà sul tavolo NE e metà sul tavolo NW.

Avremo che

$$\begin{cases} ne = \dfrac{e}{2} + \dfrac{n}{2} \\ nw = \dfrac{n}{2} + \dfrac{w}{2} \\ sw = \dfrac{w}{2} + \dfrac{s}{2} \\ se = \dfrac{s}{2} + \dfrac{e}{2} \end{cases}$$

cioè le torte di ciascun tavolo vengono spartite metà su uno metà sull'altro dei due tavoli adiacenti: non rimangono dunque torte residue (meno male che gli ospiti possono rivolgersi alla cucina) e il numero totale di torte non cambia.

Il numero di torte su ciascun tavolo dopo il trasferimento dipende solo dal numero di torte presenti su ciascun tavolo prima di esso: possiamo descrivere il processo con una catena di Markov del primo ordine

$$\begin{cases} p_i' = Tp_{i-1} \\ p_{i+1} = Tp_i' \end{cases}, p = \begin{pmatrix} n \\ e \\ s \\ w \end{pmatrix}, p' = \begin{pmatrix} ne \\ se \\ sw \\ nw \end{pmatrix}, T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se disponiamo in quadrato i 144 000 Giusti... Ehm! Gli 8 Tavoli, otteniamo qualcosa del genere

nw	n	ne
w		e
sw	s	se

Dalla figura risulta evidente che i tavoli N, E, S e W sono tra loro equivalenti per simmetria, e lo stesso vale per gli altri quattro tavoli: il nostro processo trasferisce le torte da un sottogruppo di tavoli all'altro senza mischiarli: è quindi possibile riunire i due passi in una unica matrice di transizione

$$p_i = Tp_{i-1}, p = \begin{pmatrix} n \\ ne \\ e \\ se \\ s \\ sw \\ w \\ nw \end{pmatrix}, T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $p_0 = (n \quad 0 \quad e \quad 0 \quad s \quad 0 \quad w \quad 0)^t$.

Non abbiamo difficoltà a dimostrare che la catena di Markov ha uno stato stazionario (alternato). Infatti, la media di due numeri è sempre compresa tra essi

$$\min(a,b) \leq \frac{a+b}{2} \leq \max(a,b)$$

dato che $a+b=\min(a,b)+\max(a,b)$ e abbiamo

$$\frac{\min(a,b)+\min(a,b)}{2} \leq \frac{\min(a,b)+\max(a,b)}{2} \leq \frac{\max(a,b)+\max(a,b)}{2}$$

con uguaglianza solo per $a=b$.

Ciò significa che il numero massimo di torte presente su uno dei tavoli deve diminuire (o, al più, rimanere costante) ad ogni passo del processo e lo stato stazionario sarà

$$p_\infty = \begin{cases} (\alpha \quad 0 \quad \alpha \quad 0 \quad \alpha \quad 0 \quad \alpha \quad 0)^t & n=2k \\ (0 \quad \alpha \quad 0 \quad \alpha \quad 0 \quad \alpha \quad 0 \quad \alpha)^t & n=2k+1 \end{cases}$$

con $\alpha = \frac{n+e+s+w}{4}$.

Con pochi passaggi di facile Algebra delle Matrici si dimostra che T è singolare e che non vi è perciò una soluzione analitica per il processo inverso: non resta che ricorrere alla forza bruta, temperata (si spera) da un po' di acume.

Primo, il numero totale di torte non cambia quindi partiamo con dieci torte; secondo, quando il numero massimo di torte presente su uno dei tavoli è inferiore a quattro possiamo fermarci; terzo, possiamo servirci della simmetria; quarto, partiamo con un numero iniziale di torte intero su ogni tavolo.

La scelta del numero da mettere sul primo tavolo è arbitraria: metteremo il numero maggiore di torte, per esempio 7, sul tavolo N (vedi figura, a sinistra)

	7	
w		*e*
	s	

	7	
0		0
	3	

	7	
0		3
	0	

	7	
3		0
	0	

3,5		3,5
1,5		1,5

3,5		5
0		1,5

5		3,5
1,5		0

Se prendiamo per secondo il tavolo S abbiamo che i tavoli E e W sono equivalenti per simmetria: nell'esempio, nella riga inferiore, vi è il risultato di una transizione e, come si vede, lo scambio di e con w produce un risultato uguale e simmetrico mentre lo scambio di s con e o w, no.

Continuando con l'esempio $n=7$ dovremo testare i casi

	7	
0		0
	3	

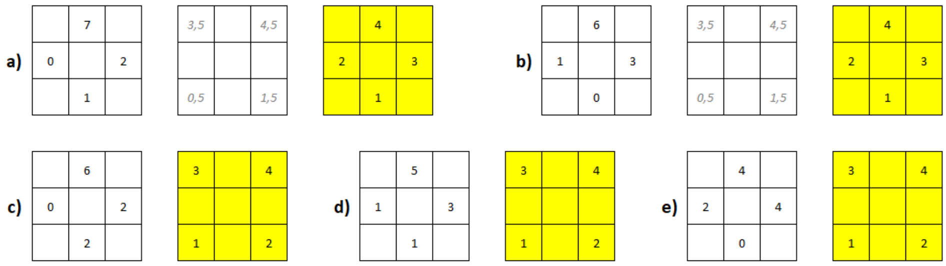
	7	
0		1
	2	

	7	
0		2
	1	

	7	
1		1
	1	

	7	
0		3
	0	

Procediamo partendo con $n=10$ fino a $n=4$ in modo sistematico e troviamo le seguenti soluzioni (intere)



A questo punto, se $p_0 = (n, 0, e, 0, s, 0, w, 0)^t$ è una soluzione allora lo è anche

$$p_0 = \begin{pmatrix} n-x \\ 0 \\ e+x \\ 0 \\ s-x \\ 0 \\ w+x \\ 0 \end{pmatrix}$$

perché nel fare la media le quantità x si cancellano.

Partendo dalla soluzione a) si ottiene la b) con $x = 1$; allo stesso modo, partendo dalla c) si ottengono la d) con $x = 1$, e la e) con $x = 2$. Naturalmente, x può assumere tutti i valori reali tali da rendere $n, e, s, w \geq 0$.

Nel caso delle soluzioni a) e b) resta vedere se è possibile avere una p_0 tale da portare ad una situazione del tipo

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{2} - x \\ 0 \\ \frac{3}{2} + x \\ 0 \\ \frac{1}{2} - x \\ 0 \\ \frac{7}{2} + x \end{pmatrix}$$

Per ottenere ciò è necessario che sia

$$\begin{cases} n + e = 9 - 2x \\ e + s = 3 + 2x \\ s + w = 1 - 2x \\ w + n = 7 + 2x \end{cases}$$

Combinando a due a due le prime due equazioni e le ultime due otteniamo

$$n - s = 6 - 4x = 6 + 4x \;\Rightarrow\; x = 0$$

col che dimostriamo che una tale situazione è impossibile: le soluzioni

$$p_0 = \begin{pmatrix} 7-x \\ 0 \\ 2+x \\ 0 \\ 1-x \\ 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \leq x \leq 1$$

e

$$p_0 = \begin{pmatrix} 6-x \\ 0 \\ 2+x \\ 0 \\ 2-x \\ 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \leq x \leq 2$$

sono le sole che ci siano.

Per fortuna a volte ritornano. Non perdiamo tempo, passiamo ai problemi del mese scorso.

4.2 [232]

4.2.1 "Ovvio!" Ma anche no

Rudy inventa un nuovo passatempo e chiede di scoprirne le caratteristiche:

> *Comincio in prima riga scrivendo 1, 2 e 3. Poi, nelle righe successive, scrivo nell'ordine i numeri a, b, a+b (con a<b), dove a e b sono i più piccoli numeri non ancora comparsi nell'elenco (in nessuna delle tre colonne).*
>
> *In che colonna compare il numero di m cifre tutte uguali tra loro ddd...d?*

Ci avete giocato? Valter a quanto pare sì:

> Mi viene lunga; abbrevio non dimostrando i passaggi (si può fare per induzione e sfruttando quanto precede). Chiamo:
>
> - N = numero: l' "ennesima" somma
> - C = "coppia": due numeri che si sommano
> - P = "primo": il primo di una C
> - S = "secondo": il secondo di una C
> - R = "risultato": la somma di una C.
>
> Distanza fra 2 R consecutivi:
>
> - 4 se le 2 C hanno i numeri in sequenza
> - 5 se la distanza fra i numeri di una delle 2 C è 2
> - 6 se S della prima C dista 2 dal P della seconda C
> - non vi sono altri casi possibili (lo si può dimostrare per induzione).
>
> Numeri disponibili prima del R di N = R – 3*N (utilizzati in sequenza nelle somme successive).
>
> Distanza fra i due numeri di una C:
>
> - 1 se sono consecutivi
> - 2 se fra i due c'è un R precedente
> - non è mai > 2 perché i R hanno distanza > 3 (lo si dimostra facilmente)
> - non vi sono 2 C consecutive con distanza 2 (per lo stesso motivo)

- le C con distanza 2 sono formate da numeri pari (quindi i risultati pari sono = 2 MOD4).

Distanza fra S precedente e P successivo:

- 1 se sono consecutivi
- 2 se fra i due c'è R di una somma precedente
- non è mai > 2 perché quanto già detto
- non vi sono due distanze = 2 consecutive.

Il numero che precede il primo di una somma può essere:

- S precedente
- uno degli R precedenti.

La distanza fra due P è 2 oppure 3.

Le distanze fra gli S sono: 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, … (coppie 3, 2 in sequenza a partire da N = 1).

Le distanza fra tre R sono 6, 4 oppure 5, 5 (a coppie sempre a partire da N = 1).

Le distanze fra gli R di N dispari è sempre 10 (tali R terminano quindi tutti per 3).

Gli R possono terminare solo per: 3, 8, 9. Se terminano per 8 non hanno le cifre uguali (se le avessero il numero sarebbe = 0 MOD4). Rimangono quindi gli R = 33…, 99….

Si verifica da quanto detto che essi sono:

- 16 + 17 = 33
- 166… + 16…7 = 333…
- 499… + 500… = 999… .

Allego un po' di somme di esempio (uso i colori per evidenziare quando detto):

1+2=3 6

4+5=9 4

6+7=13 5

8+10=18 5

11+12=23 6

14+15=29 4

16+17=33 6

19+20=39 4

21+22=43 6

24+25=49 4

26+27=53 5

28+30=58 5

31+32=63 6

34+35=69 4

36+37=73 5

38+40=78 5

41+42=83 6

44+45=89 4

46+47=93 5

48+50=98 5

……………………………

471+472=943 6

474+475=949 4

476+477=953 5
478+480=958 5
481+482=963 6
484+485=969 4
486+487=973 5
488+490=978 5
491+492=983 6
494+495=989 4
496+497=993 6
499+500=999 4
501+502=1003 6
504+505=1009 4
506+507=1013 5
508+510=1018 5

Bene. Tutto qui però. Passiamo al secondo problema.

4.2.2 Zen, but not too much

Questa volta tagliamo le torte in modo… rude:

> *Stiamo piantando quattro bonsai in un giardino Zen. Definiamo centro qualsiasi punto avente la caratteristica che qualsiasi linea passante per questo punto divide l'insieme degli alberi in due sottoinsiemi della stessa cardinalità. Qual è la condizione necessaria e sufficiente per avere un centro?*
>
> *Esistono per un qualche numero di punti configurazioni policentriche?*
>
> *Se aumentiamo il numero dei bonsai? Esistono regole? Esistono centri?*

Anche qui la parola passa subito a ***Valter***:

> Parto da due rette R qualsiasi non parallele. Chiamo O il punto in cui si incontrano. Prendo 2 punti P opposti ad O su di esse. Considero il quadrilatero Q con vertici i 4 P. Si verifica che O è il "centro" C di Q. Quindi tutti i Q convessi hanno un C.
>
> Considero ora i Q con 2 P non opposti. Sono tutti i Q con un angolo A concavo.
>
> L è uno dei 2 lati che formano l'A concavo. Considero tutte le R parallele a L. Tutte queste R non "dividono" Q. Qualsiasi P si trova su una di esse. Quindi esiste sempre una R che non "divide".
>
> Condizione necessaria/sufficiente: Q convesso.
>
> Per numero N di alberi pari > di 4.
>
> Prendo N/2 rette non parallele per un unico O. Ottengo tutti i poligoni PN di N lati (vedi costruzioni precedenti per i Q).
>
> I PN con i P a 2 a 2 opposti hanno O come C. Potranno avere sino a N/2 A concavi (alternati a quelli convessi).
>
> Con 2 A concavi adiacenti PN non si "divide" (per un ragionamento simile al precedente).

Non è finita qui, dopo pochissimo è arrivata un'aggiunta:

> Ho un attimo di tempo: volevo precisare meglio. Spero di dire cose sensate. Uso gli acronimi precedenti per semplificare il discorso. Riguardo ai PN con N pari > 4.
>
> La condizione necessaria e sufficiente è: le R che uniscono P opposti si incontrano in un unico C.
>
> Se almeno una non lo fa:
>
> - considero tutte le R che le sono parallele
> - nessuna di esse "divide" PN

> . unite coprono tutto il piano
>
> - quindi non c'è un P che possa fare da C.
>
> Riguardo a possibili configurazioni policentriche. Assumo che esistano 2 "centri": C1, C2. Considero tutte le coppie parallele R1/R2 per C1/C2.
>
> Nessuna dovrebbe avere P tra di esse.
>
> Se almeno una coppia avesse dei P interni:
>
> - sarebbero nella metà opposta dei semipiani per R1/R2
>
> - quindi almeno uno dei due non "dividerebbe".
>
> Ruotando per tutti i 360° R1/R2 ciò risulta impossibile.
>
> È escluso il caso degenere con N = 2.
>
> Chiamo P1/P2 i due vertici del PN degenere. Tutti i punti interni sulla R passante per P1/P2 sono C.

Cominciavamo a preoccuparci, niente soluzioni, e niente più notizie da ***Valter***, poi arriva l'ultima puntata:

> E se la superficie fosse sferica o iperbolica? Sarei curioso di sapere cosa ne pensano altri (p.e. solutori più abili come trentatré).
>
> Propongo un caso su cui ho riflettuto (sempre se non dico asinate).
>
> Superficie sferica tipo globo terrestre. Le rette sono i cerchi massimi. Un albero al polo Nord l'altro al polo Sud. 2 alberi opposti sul cerchio dell'equatore. Mi pare che qualsiasi punto sia un C.
>
> E se gli alberi sono in posizioni casuali?
>
> E se la superficie è iperbolica?

Beh, direi che è un buon inizio, più che una farneticazione, ed anche una chiamata alle armi per gli altri solutori. Noi chiudiamo qui per questo mese. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Recentemente, ci siamo ritrovati a visitare un ospedale (tranquilli, tutto risolto. E non riguardava noi). Gentilmente, un membro dello staff ci ha fornito la seguente descrizione dell'ospedale: "...tra infermieristico e medico, ci sono 16 dipendenti, includendo me; le affermazioni che farò si applicano a questo insieme e sono vere sia che mi includiate sia nel caso contrario."

"Lo staff è formato da:

1. Più personale infermieristico che medico.
2. I medici di genere maschile sono in numero maggiore degli infermieri di genere femminile.
3. Gli infermieri di genere femminile sono in numero maggiore dei medici di genere femminile.
4. Almeno un medico è di genere femminile".

Quello che non ci ricordiamo, è il genere e il ruolo della persona con la quale abbiamo parlato…

6. Pagina 46

Siano a e b i primi due termini della sequenza; i termini successivi saranno quindi:

$$a,\ b,\ ab,\ ab^2,\ a^2b^3,\ a^3b^5,\ a^5b^8,\ a^8b^{13},\ \ldots$$

Si dimostra facilmente per induzione che l'n-esimo termine è nella forma

$$a^{F_n}b^{F_{n+1}},$$

dove F_n è l'n-esimo termine della successione di Fibonacci.

Le condizioni del problema impongono che $a>1>b$ e che, successivamente, $a^{F_n}b^{F_{n+1}} > 1$ se n è pari e $a^{F_n}b^{F_{n+1}} < 1$ se n è dispari: è più facile gestire queste diseguaglianze se imponiamo:

$$c = \ln a$$
$$d = \ln b$$

In questo modo, le nostre condizioni diventano:

$$c > 0;$$
$$d < 0;$$
$$F_n c - F_{n+1} d > 0 \text{ per } n \text{ dispari;}$$
$$F_n c - F_{n+1} d < 0 \text{ per } n \text{ pari.}$$

Ossia, stiamo cercando dei numeri c e d tali che:

$$\frac{c}{d} > \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad \text{per } n \text{ dispari}$$
$$\frac{c}{d} < \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad \text{per } n \text{ pari}$$

Ricordando che il rapporto tra due termini successivi della successione di Fibonacci converge oscillando al valore[22]:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

si ha che il valore di c/d deve essere pari alla sezione aurea, e quindi i possibili valori di partenza della serie sono gli a e b per cui:

$$\frac{c}{d} = \frac{\ln a}{-\ln b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

il che implica (con a>1):

$$\ln a = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \ln b$$
$$\Rightarrow \quad a = b^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$
$$\Rightarrow \quad b = a^{\frac{2}{1+\sqrt{5}}} = a^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

Esistono quindi infinite serie che soddisfano la condizione data.

[22] La cosa si dimostra facilmente utilizzando la Formula di Binet per l'n-esimo termine della successione.

7. Paraphernalia Mathematica

Per la serie: "La matematica è come il maiale: non si butta via niente".

7.1 Tre (o quattro) pezzi (quasi) facili – [1 e 2] – Operazioni possibili

Nel mese scorso, avremmo dovuto presentare un laboratorio di matematica relativo all'origami; il tutto, essendo finalizzato alla manualità e alla realizzazione pratica, tagliava per i campi per quanto riguarda le dimostrazioni (o meglio, conteneva dimostrazioni "compatibili con l'origami", quindi di comprensione relativamente semplice). Siccome però ci saremmo dovuti confrontare, oltre che con degli studenti dalle parti del triennio anche con i loro professori, ci eravamo preparati qualche "pezza d'appoggio" un po' più seria[23].

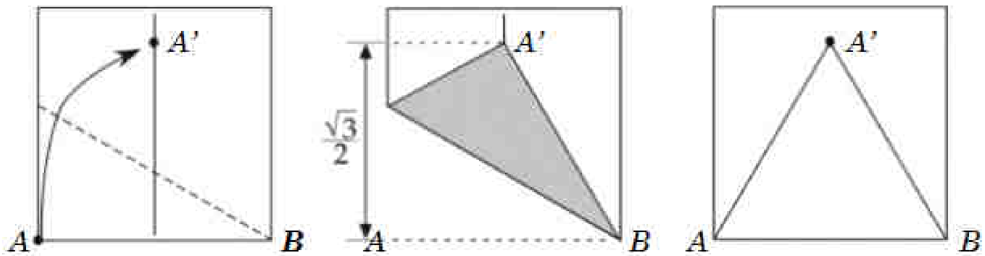
Eccole.

Il triangolo equilatero nel quadrato

Problema ragionevolmente semplice: qual è il massimo triangolo equilatero inscrivibile in un quadrato di lato 1?

Vorremmo affrontarlo, almeno inizialmente, con l'origami.

Non è difficile, con la sola carta, costruire un triangolo equilatero (non massimo) in un quadrato: le tre figure qui di seguito mostrano un modo.



Procedura:

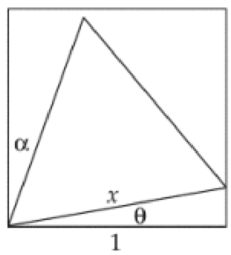
1. Bisecate verticalmente il foglio
2. Portate il punto A sulla bisecante, facendo passare la piegatura dal punto B (ottenendo il punto A')
3. Unite A' con A e B

Si può dimostrare che il triangolo *AA'B* è equilatero via *origami*: per costruzione, *A'B*=*AB* e, simmetricamente, *A'A*=*AB*, visto che è possibile effettuare la stessa costruzione dall'altro lato: non essendo possibile costruire una figura composta di tre lati uguali senza che i tre angoli siano uguali tra loro, il triangolo è equilatero.

Il nostro triangolo non è, però, il massimo inscrivibile in un quadrato: spostando il punto *B* del triangolo lungo il lato verticale del quadrato (e mantenendo il triangolo equilatero), possiamo aumentare l'area di quest'ultimo; con un'accurata scelta delle variabili come indicata nella figura a fianco, considerato che:

$$\cos\theta = \frac{1}{x},$$

possiamo esprimere l'altezza del triangolo in funzione del lato e ricavare l'area:



1 *A caccia del lato.*

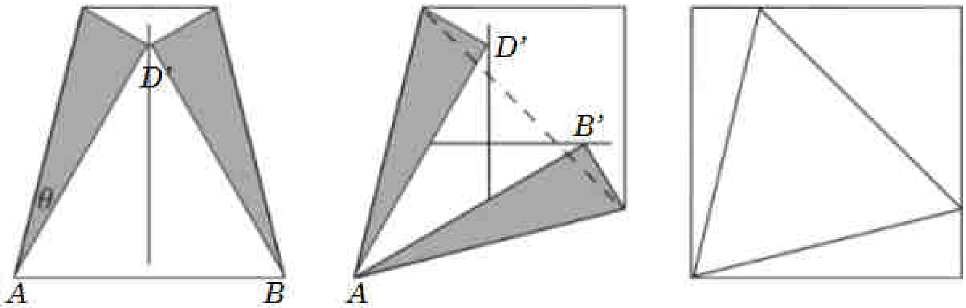
[23] Chiaramente Rudy non ha resistito alla definizione di uno standard tutto suo: il quadrato si chiama ABCD, in senso trigonometrico; quando un punto viene portato da qualche parte acquisisce un apice; eventuali punti generati dalle piegature che debbano essere denominati seguono l'alfabeto in ordine inverso.

$$A=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\sec^2\theta$$

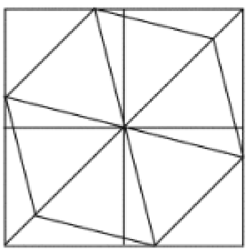
Si noti che, per ragioni di simmetria, possiamo limitarci a considerare i valori $0°\leq\theta\leq 15°$, in quanto per valori al di fuori di questo intervallo è sufficiente invertire gli angoli θ e α.

Senza stare a derivare la funzione appena ottenuta, possiamo limitarci a considerare che la funzione coseno è strettamente decrescente nell'intervallo considerato, e quindi la funzione secante sarà strettamente crescente; avremo quindi il valore massimo al limite dell'intervallo, ossia per il valore 15°.

Come possiamo però costruire un angolo a 15° attraverso l'origami? Le tre figure di seguito mostrano il metodo più semplice.



Nella prima figura, costruiamo il triangolo *ABD'* portando *C* e *D* sulla bisecante, costringendo le piegature a passare per i punti *A* (per la piegatura di *D*) e *B* (per quella di *C*). Il triangolo costruito è equilatero dato che *AD'=AB=D'B* (sono tutti lati del quadrato). Ma se l'angolo *BAD'=60°*, si ha che *D'AD=30°*. Quindi, l'angolo θ indicato in figura (che biseca l'angolo *D'AD*) deve essere di 15°.



2 *Due al prezzo di uno.*

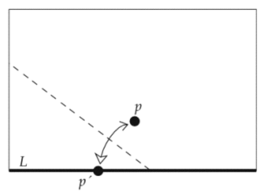
Riapriamo la falda *D'B*, che ci serviva solo per dimostrazione. Effettuando la stessa operazione in senso ortogonale (ossia bisecando orizzontalmente il quadrato e portando *B* sulla bisecante, come indicato nella seconda figura) sottraiamo un altro angolo di 15° dal vertice *A*. A questo punto, la costruzione del triangolo (il terzo lato è rappresentato nella seconda figura dalla linea tratteggiata) è immediata.

Risolvendo lo stesso problema per l'esagono (nella figura a fianco), si nota che nel quadrante in alto a sinistra e nel quadrante in basso a destra si ottengono due copie della costruzione appena vista; questo, in un colpo solo, permette di stabilire quale sia l'angolo tra una delle bisecanti il quadrato e il raggio dell'esagono e di definire un metodo costruttivo per la figura cercata.

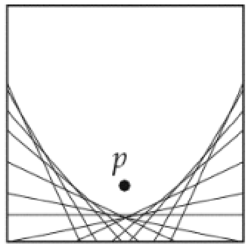
<u>Tracciamento di una parabola</u>

In questa costruzione, non è necessario utilizzare un foglio quadrato.

Definiamo un punto *p* sul nostro foglio (per comodità – ma la cosa non è necessaria – sulla bisecante verticale, nella metà inferiore del foglio), e portiamo, come indicato in figura, un punto *p'* appartenente alla base del foglio sul punto *p*, effettuando la piegatura.



3 *Un tracciamento casuale.*



4 … *ha l'aria famigliare...*

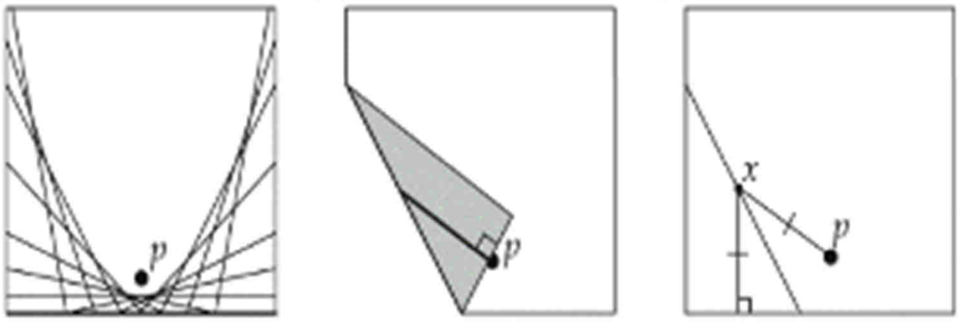
L'aleatorietà del punto *p'* e la mancanza di un'ulteriore condizione (quale era, nel caso precedente, il passaggio per il vertice del foglio) fa sì che sia possibile definire infinite linee di piegatura; tracciandone un buon numero, è possibile individuare uno schema nella figura risultante.

È possibile (ma piuttosto noioso) verificare *more geometrico* che la curva risultante è effettivamente una parabola, ma esiste un metodo estremamente più veloce mutuato dall'origami.

Ricordiamo che la parabola è definita come il luogo dei punti equidistanti da una retta e da un punto dati (rispettivamente, la direttrice e il fuoco).

Consideriamo una qualsiasi piegatura di quelle effettuate e (come nella seconda figura della serie qui sotto), tracciamo la perpendicolare all'ala di piegatura passante per *p*: o con una riga molto marcata, in modo tale che lasci traccia anche sull'ala sottostante o, più elegantemente, attraverso una piegatura.

Questo lascia sul nostro quadrato due tracce, indicate nella terza figura:



Essendo generate dalla stessa piegatura, le due tracce sono di lunghezza uguale: ma questo non sta a significare altro che la distanza del punto *x* da *p* è uguale alla distanza del punto *x* dalla base dl foglio; essendo la costruzione valida per ogni punto sula curva ottenuta in prima figura, questa curva deve essere una parabola.

Purtroppo, pur essendo basato sulle stesse operazioni, il tracciamento di ellissi o iperboli richiede strumenti più complessi: oltre al punto, è necessario definire un cerchio (che svolge le funzioni della retta direttrice); se il punto (che è un fuoco) si trova all'interno del cerchio si ottiene un'ellisse, se all'esterno un'iperbole.

Dovreste dedurre facilmente il titolo della prossima puntata...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms