Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 231 – Aprile 2018 – Anno Ventesimo

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM230 ha diffuso 3'253 copie e il 15/04/2018 per Google eravamo in 41'300 pagine.

Le uniche cose che sappiamo del signore in copertina sono che si chiama ***George***, che è nato nel 1958 e che nel 2009 con quel "coso" ha vinto il Campionato Mondiale di Tiro con la Cerbottana. E, francamente, non ci interessa sapere altro.

1. Centomila, nessuno e uno

"Nel frattempo Serse contava il suo esercito…
Quale fosse il numero delle varie parti di cui si componeva questo esercito non posso dirlo con esattezza, perché nessuno ce l'ha detto; ma contando l'intera armata si trovò che constava di un milione e settecentomila unità.
Il calcolo fu eseguito così: una miriade di uomini venne riunita in un luogo e quando essi furono serrati al massimo tra loro si tracciò tutt'intorno al gruppo una linea e poi si mandarono via. Sulla linea tracciata si costruì quindi un muro di pietra fino all'altezza dell'ombelico di un uomo e nello spazio così limitato si fecero entrare successivamente altri uomini, finché, in tal modo, furono contati tutti."

(Erodoto, "Storie", Libro VII)

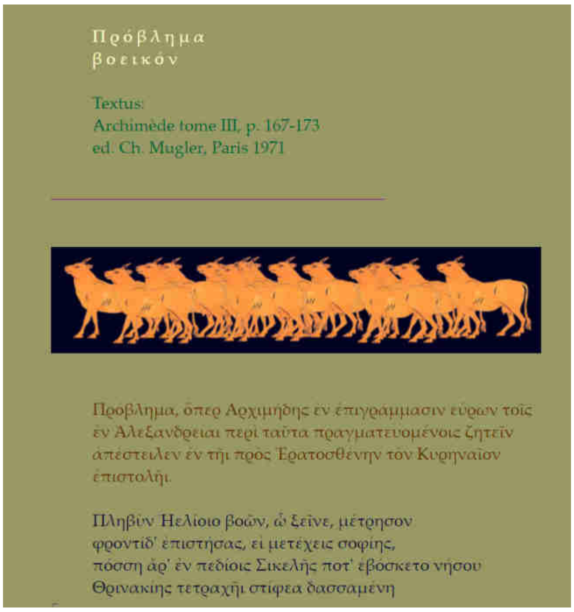
Uno, otto, mille, grande, gigantesco, mostruoso, sei, sette, otto.

È una serie un po' insolita, fantasiosa, e quindi apparentemente non troppo razionale: e la cosa può suonare curiosa, specialmente se si tiene conto che è usata dalla scienza più giovane e più ammantata dal senso di precisione. Eppure è così: nella scienza dell'informazione l'unità di misura è il "bit" (nomignolo che si basa su un gioco di parole: ufficialmente è la contrazione di "*binary digit*", cifra binaria, ma è ovvio che tale crasi ha preso piede perché "*bit*" significa anche "pezzettino"); e il bit è il nostro "uno" della serie.

Per scrivere anche solo un carattere, una cifra, un segno tipografico, di bit ce ne vogliono però un po', almeno un mezzo centinaio; anzi, ancora di più, se andiamo a spulciare i caratteri speciali delle varie lingue, le punteggiature, i segni aritmetici fondamentali, eccetera. E così si passa dal bit al *byte (*che gioca ovviamente con la parola "*bite*", boccone, morso*)*, che di bit ne racchiude appunto otto (secondo elemento della serie), e 2^8 fa 256, numero che consente di avere abbastanza simboli per cominciare a scrivere qualcosa di intellegibile anche agli esseri umani, non solo ai circuiti elettronici.

E va bene; ma che cosa vogliamo combinare con un solo carattere? Anche solo un bigliettino d'auguri fatto bene ne richiede un centinaio, una lettera commerciale almeno un migliaio, e così via. E allora l'informatica si adegua rapidamente al preesistente sistema di prefissi per indicare i multipli delle unità di misura, con un paio di particolarità caratteristiche: la prima, ovviamente, è che la computer science ha ereditato dalla sua genitrice, la matematica, solo quell'attenzione che la scienza d'Euclide ha riservato al discreto, ignorando bellamente tutti i problemi del "continuo" che ambasciano la matematica da almeno mezzo millennio. Questa limitazione d'attenzione consente all'informatica di ignorare tutta la famiglia dei sottomultipli, con la certezza che nessuno si preoccuperà mai di sapere cosa sia un picobit.

La seconda particolarità è che mentre tutte le discipline si adeguano al sistema strettamente decimale di francorivoluzionaria memoria (fedeli all'idea che non ci sia niente di meglio delle dieci dita delle mani, per contare), gli architetti dell'informazione ribadiscono la loro fedeltà alla base due, e precisano che, per quel che li riguarda, il coefficiente moltiplicativo "Kilo" non significa "10^3 unità", ma "2^{10} unità". Poco interessa loro che il prefisso prenda il nome dal greco, e che Platone e compagni, se dicevano "χίλιοι", intendevano esattamente "mille" (terzo elemento della sequenza): per i nostri smanettatori un Kilobyte sono 1024 byte (e quindi 8192 bit), e se un chilometro resta pari a mille metri e un chilogrammo a mille grammi, sono affari di coloro che restano ancorati al reale e trascurano il virtuale. Con questi ultimi, tra l'altro, sarebbe da indagare sulla misteriosa ragione per cui il "chilo" sia entrato nell'uso comune proprio come unità di peso, e non di lunghezza o d'altro… probabilmente solo perché un chilogrammo di pane è tutto sommato assai più maneggevole di un chilometro, e perché il "chilosecondo" non ha mai avuto speranza d'affermarsi, schiacciato dalla tradizione sessagesimale mesopotamica che resiste ancora indomita per quanto riguarda le misure di tempo.



1 *Il problema archimedeo dei buoi del dio Sole, dove le miriadi abbondano, anzi, non bastano*[1]

Visto che il greco antico la fa da padrone sui prefissi per multipli e sottomultipli, può suonare strano che proprio quel "Kilo-" fosse un po' snobbato tra gli antichi ellenici. Ad Archimede e compagni piaceva molto di più la miriade, e va riconosciuto che, almeno dal punto di vista estetico, la parola archimedea stravince il confronto. Il grande siracusano – forse il primo, se non l'unico, ad affrontare il problema di trattare numeri davvero grandi – usa le miriadi e le "miriadi di miriadi", e non ci stupiremmo se il passo successivo fosse subito verso le "(miriadi di miriadi) di (miriadi di miriadi)", perché la sensazione è proprio che ai Greci piacesse andare in ragione accelerata, rispetto a noi. In quest'Occidente contemporaneo, noi siamo ormai relativamente abituati a salti triplici di potenze: 10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}, e così via, con un ritmo regolare della serie degli esponenti. Ci sembra verosimile che gli antichi preferissero un'ascesa diversa: dalle dieci dita delle mani a cento (dieci volte dieci), e quindi subito alla miriade (cento volte cento), ovvero diecimila; e da qui alla "miriade di miriadi". Non per niente ancora oggi il prefisso (poco usato, come quasi tutti quelli che hanno un esponente che non sia multiplo di 3) per 10^4 è "Miria-". E se Erodoto racconta il vero, dalla citazione posta in testa a quest'articolo sembrerebbe che non solo i Greci, ma anche i loro vicini Persiani avessero un debole per le miriadi.

Sia come sia, le miriadi non bastano più, in questo mondo moderno sommerso dai Big Data. E se è vero che non si è dovuto attendere il proliferare dei byte per passare al prefisso successivo, è anche vero che "Mega-qualcosa" era misura riservata davvero a pochi. Qualche ingegnere alle prese con la potenza delle centrali elettriche avrà avuto bisogno dei Megawatt già nei primi decenni del XX secolo, forse; e certo ci sarà risvegliati stupiti, all'alba dell'era nucleare, nel leggere sui giornali la strana parola "megatoni". Non si trattava di milioni di suoni, ahimè, ma traduzioni con italica desinenza di "*megatons*", ovvero "milioni di tonnellate" di tritolo equivalente[2].

Così, i "mega" (che in greco significa ovviamente solo "grande", che è la quarta parola della nostra serie iniziale) sono diventati presto quasi un monopolio dei misuratori di informazione[3]: naturalmente, vale sempre la solita regola, per gli informatici: per diventare i fortunati possessori di un Megaeuro sono sufficienti un milione di monetine

[1] Lo si può ovviamente vedere per intero (in greco e tedesco) laddove abbiamo rubato l'immagine: http://www.hs-augsburg.de/~harsch/graeca/Chronologia/S_ante03/Archimedes/arc_bous.html

[2] A dire il vero, sono arrivati prima i "chilotoni", perché la "*Little Boy*" di Hiroshima ne aveva giusto una quindicina, e la "*Fat Man*" di Nagasaki superava di poco i 20. Ma già sette anni dopo i Megaton servono per raccontare della prima esplosione termonucleare Ivy Mike (10,4), Bikini (13,5). La russa "*Tsar*", la più grande bomba a fusione mai costruita, arriva a 50.

[3] Da vecchi studenti di Fisica, non possiamo però lasciare senza traccia il MeV, di cui ne basta una metà per "pesare l'elettrone"… e a dirla tutta, è una bella partita tra fisici delle alte energie e teorici dell'informatica per decidere chi abbia, con ragione, preso per primo in seria considerazione il prefisso "mostruoso": se gli uni con i TeV dei grandi acceleratori di particelle o i secondi con i Terabyte.

con l'uomo vitruviano di Leonardo, ma se vi serve un Megabyte dovete fare spazio a 1'024×1'024=1'048'576 caratteri.

E dopo i mega, il regno dei byte è quasi senza rivali e concorrenti: c'è ancora qualche misura non informatica che abbisogna dei "Gigaqualcosa", ma si va certo in questioni specialistiche e di nicchia, mentre il vocabolario degli adolescenti se ne è ormai appropriato definitivamente assimilandoli al carburante dei telefoni mobili. "Maledizione, ho finito i giga!" è frase dal senso chiaro e compiuto, al punto che, nel contesto giovanile, la parola più difficile da interpretare nella frase è forse l'esclamazione inziale, che ipotizziamo fortemente in disuso e rimpiazzata da termini più eclatanti.

Così il "gigante" che trionfa nei telefonini deve presto lasciare il passo al "mostro" dei professionisti dell'informatica, agli amministratori di sistema che piazzano Terabyte come fossero noccioline, e magari lucrano arditamente sul quello 0,2% di differenza che fin dall'inizio segnò la differenza tra mille e 1024. Ma il mostro, il τέρας di liceale memoria si dichiara anch'esso sconfitto, insieme alla creatività dei prefissi moltiplicativi. Sono già pronti il Peta e l'Exa, naturalmente, che del greco ricordano vagamente solo i numeri 5 e 6, e perfino Zetta e Yotta, ma prima o poi ogni scalata verso l'infinito deve arrendersi e rinunciare all'idea di giungere alla meta, e questo è un punto buono come un altro. Certo, la via da percorrere è ancora lunga, volendo; la distanza tra lo *yocto* che esprime la potenza 10^{-24} e *Yotta* che segna la 10^{24} è poca cosa anche se confrontata solo con l'universo fisico, altro che l'infinito matematico: per quel che ne sappiamo, a voler esprimere lo spazio più grande attualmente concepibile, ovvero l'Universo generato dal Big-Bang[4], in termini dello spazio più piccolo immaginato, ovvero la lunghezza di Planck[5], ci servirebbe un prefisso in grado di esporre almeno la potenza 10^{60}, che ha quantomeno l'esponente canonicamente multiplo di 3.

Prefissi del Sistema Internazionale

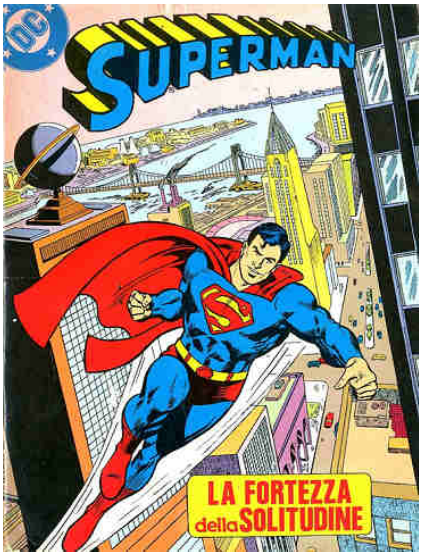
10^n	Prefisso	Simbolo	Nome	Equivalente decimale
10^{24}	yotta	Y	Quadrilione	1 000 000 000 000 000 000 000 000
10^{21}	zetta	Z	Triliardo	1 000 000 000 000 000 000 000
10^{18}	exa	E	Trilione	1 000 000 000 000 000 000
10^{15}	peta	P	Biliardo	1 000 000 000 000 000
10^{12}	tera	T	Bilione	1 000 000 000 000
10^{9}	giga	G	Miliardo	1 000 000 000
10^{6}	mega	M	Milione	1 000 000
10^{3}	chilo	k	Mille	1 000
10^{2}	hecto	h	Cento	100
10^{1}	deca	da	Dieci	10
10^{0}			Uno	1
10^{-1}	deci	d	Decimo	0,1
10^{-2}	centi	c	Centesimo	0,01
10^{-3}	milli	m	Millesimo	0,001
10^{-6}	micro	µ	Milionesimo	0,000 001
10^{-9}	nano	n	Miliardesimo	0,000 000 001
10^{-12}	pico	p	Bilionesimo	0,000 000 000 001
10^{-15}	femto	f	Biliardesimo	0,000 000 000 000 001
10^{-18}	atto	a	Trilionesimo	0,000 000 000 000 000 001
10^{-21}	zepto	z	Triliardesimo	0,000 000 000 000 000 000 001
10^{-24}	yocto	y	Quadrilionesimo	0,000 000 000 000 000 000 000 001

2 *Tutti i prefissi del mondo*

Di fronte a certi numeri, forse anche le 7,5 Gigapersone che popolano il pianeta rischiano di sentirsi quasi sole. Senza contare che gli esseri umani sono animali sociali, si riuniscono in città, assemblee, nuclei familiari; ed è curioso pensare che se l'infinita teoria dei numeri naturali può forse essere considerata anche una sorta di "misuratore di compagnia" allorché la si applichi al conteggio degli abitanti della Terra, non c'è per contro nessuna buona metrica per misurare l'opposto, la solitudine. Il "solitario" è una figura che ricorre spesso, nell'immaginario: nella mitologia, in letteratura, nel cinema. Ed è inevitabilmente una figura tragica, forse per la banale constatazione che non può esserci motivo di commedia, di divertimento, di risata, se non si è almeno in due. Un uomo solo è ancora concepibile, un uomo che ride da solo è inderogabilmente catalogato come folle.

[4] 4,40×10^{26} metri, dice l'anglica Wiki.

[5] 1,62×10^{-35} metri, secondo la stessa fonte della nota precedente.



3 *La fortezza della solitudine*

La tragicità dell'uomo isolato – lo sia per scelta o per costrizione – non è messa in discussione neppure dalla finzione. Nella realtà si trovano persone che fuggono volontariamente dal mondo, come gli stiliti; altre che vi sono costrette: la "cella d'isolamento" delle prigioni è una punizione nella punizione. In ogni caso, l'idea che traluce dall'isolamento è sempre così seria, così poco disposta alla leggerezza, che quasi non si trovano esempi di "allegra solitudine" neppure nella narrativa più popolare. Il supereroe per eccellenza, Superman, forse conscio della sua diversità di unico extraterrestre in mezzo a terrestri, costruisce la sua "Fortezza della Solitudine", e vi si rifugia solo quando è super-disperato. Il "Cavaliere Solitario" – sia esso quello della narrativa popolare, del Far-West o addirittura lo stesso Batman – è solitario solo per modo di dire, e viene raccontato solo quando è tutt'altro che solitario, e interagisce (quasi sempre violentemente) con gli altri. Se è solitario, lo è in realtà soltanto prima e dopo gli eventi narrati; e perfino Defoe ha dovuto presentare abbastanza in fretta Venerdì a Robinson Crusoe, per salvaguardare la sanità mentale del suo protagonista.

Gli esseri umani non sono probabilmente da meno: i navigatori solitari che fanno il giro del mondo su un guscio di noce lo fanno più per mettersi alla prova che per trovare lo stato ideale di vita, probabilmente; gli eroici volontari che si rinchiudono per mesi in grotte senza comunicazione con l'esterno perdono rapidissimamente il senso del tempo e, chissà, forse anche quello dello spazio; quasi come se rinunciassero, almeno in parte, a qualche forma di umanità. Resta il fatto che il senso di solitudine è appunto una sensazione, e come tale virtualmente impossibile da misurare: un bimbetto può sentirsi solo al mondo anche solo se la sua mamma è fuori dal suo raggio visivo, e perdersi da soli in un bosco in campagna può angosciare facilmente anche adulti cresciuti e vaccinati che non sanno che il paese più vicino dista a malapena trecento metri in linea d'aria. In mancanza di meglio, però, forse è proprio la distanza spaziale da altri esseri umani l'unica misura che è possibile provare a calcolare come metrica della solitudine.

4 *Un buon posto per testare tutti gli esercizi sul moto rettilineo uniforme*

Esistono luoghi della terra particolarmente isolati e remoti, come i grandi deserti; ma non è facile capire realmente quante persone vi siano distribuite, e con quale distanza relativa. Perfino alcune strade – che in quanto oggetti artificiali e di servizio non dovrebbero amplificare il senso di abbandono – sono notevoli luoghi di solitudine: la strada che in Australia attraversa il Nullarbor Plain (un nome che è tutto un programma) ha cartelli che mettono in guardia chi vi si avventura sulla difficoltà di trovare qualche forma di umana solidarietà nei quasi 1500 chilometri che lo aspettano, nei quali trova posto anche il più lungo rettilineo del pianeta: quasi 147 chilometri di strada drittissima, senza neppure la speranza di una curva a variare l'orizzonte.

Ma gli esseri umani sono pur sempre animali terrestri, ed è verosimile che, almeno fino a circa mezzo secolo fa, fosse qualcuno tra i già citati "navigatori solitari" ad esperire la non troppo invidiabile sensazione di “persona più sola del mondo”. Poi… beh, poi sono arrivati gli astronauti.

A ben guardare, però, ci si accorge che le “misure di solitudine” non sono poi così immediate come può sembrare a prima vista: i viaggiatori dello spazio, compresi quelli che oggi abitano con continuità la ISS, la Stazione Spaziale Internazionale, di solito non viaggiano da soli, e quindi cade la condizione essenziale della misura della solitudine. Bisogna tornare abbastanza indietro, fino ai primi anni dell'astronautica, per trovare astronauti e cosmonauti “solitari” come Gagarin, Glenn, Titov, Tereskova e altri[6]; ma il punto veramente cruciale è un altro: un volo è definito “spaziale” se supera la quota convenzionale dei 100 chilometri, e comunque in generale le navicelle spaziali orbitano a quote dell'ordine di qualche centinaio di chilometri – la ISS dista mediamente 400 km dalla superficie terrestre – e non è quindi abbastanza per dire con certezza assoluta che, ad esempio, nel 1961 Yurij Gagarin sia stato davvero “l'uomo più distante da ogni altro suo simile”, mentre orbitava. Non è affatto impossibile che qualche sperduto pellegrino del Sahara o un audace misantropo velista del Pacifico si trovassero ancora più distanti di lui dal resto dell'umanità.

Ciononostante, ci sono sei uomini ai quali si può attribuire, con un salomonico ex-aequo, il titolo di “Uomo più solo del mondo”, e il primo a conquistare questo particolarissimo record è romano di nascita, anche se indubbiamente statunitense per tutto il resto.

Mentre viaggiavano uno vicino all'altro durante la gita fuori porta più lunga della storia, avevano certo tutti e tre troppe cose da fare per indugiare troppo in pensieri intimi e personali. È comunque lecito pensare che, per quanto indaffarato, Neil Armstrong abbia continuato di tanto in tanto ad accarezzare la consapevolezza di stare per entrare definitivamente nei libri di storia: sarà stato anche vero che per compiere il “gigantesco salto per l'umanità” sarebbe bastato un “piccolo passo”, ma persino il più ritroso degli uomini non può non sentirsi orgoglioso se quel piccolo passo sarà lui a farlo. Vicino a lui, “Buzz” Aldrin era certo tormentato dal demone che lo avrebbe poi accompagnato per tutta la vita: certo, il LEM che l'Apollo 11 teneva incastrato sul naso avrebbe condotto anche lui sulla superficie lunare, anche lui avrebbe camminato sulla Luna; ma lo avrebbe fatto per secondo, e ad una mente anche appena appena competitiva, quella medaglia d'argento non poteva andare bene. Non si rassegnò neanche dopo, durante il trionfo del ritorno, né negli anni successivi; probabilmente, non si rassegnò mai.

5 *Mike Collins*

Eppure, forse avrebbe potuto sorridere di più al suo destino se solo si fosse soffermato ad immaginare quello del terzo componente dell'equipaggio: come lui, come Armstrong stava lì, guardando quel satellite che ogni terrestre conosceva ma solo in nove avevano visto così vicino: prima di loro tre, solo l'Apollo 8 di Borman, Lovell e Anders e l'Apollo 10 di Stafford, Young e Cernan avevano portato uomini così vicini alla Luna. Ma in quelle due missioni, quanto meno, i due equipaggi avevano condiviso tutti insieme la frustrazione di vedere la Luna così vicina senza avere la speranza di toccarla. Adesso, invece, dentro la capsula con Armstrong e Aldrin c'era chi non solo non avrebbe toccato il suolo lunare, ma non avrebbe avuto nessuno con cui condividere la frustrazione.

Mike Collins doveva restare a bordo. Mentre i suoi due compagni salivano nel LEM “Eagle” portandosi appresso tutti gli occhi del mondo per

[6] In tempi più recenti voli solitari ce ne sono certo stati, ma il meno che si possa dire è che la sensazione di solitudine, per coloro che salivano da soli per interventi di riparazione sulla stazione spaziale Mir, o che aprivano la via delle stelle a nuove grandi nazioni come la Cina, come ha fatto Yáng Lìwěi nel 2003 è quantomeno attenuata.

discendere sulla Luna, mentre in quel giorno di Luglio del 1969 non c'era quasi essere umano che non sapesse che un paio di uomini stava compiendo l'impossibile, lui restò a bordo della "Columbia", il modulo di comando, a girare intorno alla Luna. Solo.

Davvero molto, molto solo. Delle trenta orbite[7] che il Columbia compì attorno al nostro satellite, una gran parte furono completate dal solo Michael Collins, astronauta nato a Roma 31 ottobre 1930, a cui quasi nessuno sulla Terra pensava davvero, in quelle ore così significative. Nelle interviste del dopo-missione, Collins ha sempre negato di essersi mai sentito davvero solo, in quel giorno (appena meno) che i suoi due compagni passarono sulla Luna. Ma sono i numeri a parlare per lui; si trovava a circa quattrocentomila chilometri di distanza da tutta l'umanità, salvo i due compagni di viaggio che, nei momenti di maggior lontananza distavano da lui un po' più di un diametro lunare, ovvero circa 3500 chilometri. Come se non bastasse, durante ognuna delle orbite entrava in una zona d'ombra che per 48 minuti gli impediva anche qualsiasi comunicazione radio. Non c'era davvero Cavaliere Solitario che potesse competere con lui, in quelle ore.

Dopo di lui, solo i piloti delle altre cinque missioni Apollo che sono allunate possono dire di aver provato qualcosa di simile; e avendolo fatto dopo, è probabile che i loro nomi risultino dimenticati da quasi tutti: si tratta di Richard Gordon, Stuart Roosa, Alfred Worden, Ken Mattingly e Ron Evans. Tutti veri campioni della solitudine.

Almeno secondo la metrica usata, quella della "distanza fisica da componenti della stessa specie"; e già nelle premesse si era precisato che si trattava di metrica elementare, approssimativa, senza alcuna reale pretesa di misurare cose oggettivamente incommensurabili come le sensazioni. Una metrica che il solo vantaggio di essere tale, cioè in grado di dare una misura, di riassumere in un singolo numero una quantità che si cerca di stabilire. Ma non c'è dubbio che si può sentirsi soli anche restando nel luogo di nascita, anche senza allontanarsi troppo dalla famiglia, anche restando in mezzo a tutte le persone a cui si vuole bene, e che restituiscono l'affetto.


6 *Teiji Takagi*

Teiji Takagi nasce il 21 Aprile 1875 in un piccolo paese chiamato Kazuya, in Giappone, nella grande isola di Honshu. È la fine del XIX secolo, l'economia del borgo è essenzialmente agricola, e la famiglia di Takagi appare del tutto ordinaria, con il padre contabile in una fattoria e la madre che si occupa della famiglia. È proprio la madre che, notando come il piccolo Teiji impari facilmente le preghiere del tempio, comincia a sospettare che il figlio sia particolarmente dotato. Doti che il ragazzo continua a mostrare durante tutto il suo percorso scolastico: dalla scuola primaria di Kazuya passa alle medie a Gifu, al liceo di Kyoto (uno degli otto esistenti in tutto il Giappone), e infine viene ammesso all'unica università nipponica, quella di Tokyo.

Al giovane Takagi piace la matematica: ma la matematica, nel Giappone a cavallo tra Ottocento e Novecento, non è materia particolarmente curata dagli insegnanti[8]. Fin dalle medie i ragazzi sono obbligati, se vogliono studiarla, ad imparare lingue straniere, perché non esistono libri di testo in giapponese. Così, fin da adolescente Teiji ha studiato geometria e algebra sui testi di

[7] Per un tempo complessivo di 59 ore e mezza.

[8] Si parla dello stato della matematica in Giappone (con, attraverso la restaurazione Meiji, il disconoscimento della matematica tradizionale e l'accettazione supina di quella occidentale) in RM121 nel compleanno di Aida Yoshikawa e nel PM dello stesso numero sui sangaku.

Wilson e di Todhunter, e una volta iniziato non ha certo smesso: si procura testi di algebra e geometria superiore come quelli di Joseph Serret[9] e di George Salmon. Heinrich Weber pubblica il suo fondamentale "*Lehrbuch der Algebra*" nel 1875, e trova in Takagi un lettore dall'altra parte del mondo, perché se ne procura una copia non appena arriva in Giappone.

Il risultato delle letture autonome e individuali rende Takagi uno studente che non trova praticamente nulla da imparare dalle lezioni universitarie. Nel 1897, a ventidue anni, si laurea, e l'anno successivo pubblica già la sua prima memoria: è algebrica, moderna, e si sente molto l'influsso di Weber; nello stesso anno viene selezionato tra i dodici studenti a cui era permesso andare a studiare all'estero, e Teiji sceglie di andare in Germania: qui, all'Università di Berlino, si accorge con stupore di conoscere già i contenuti dei corsi tenuti da matematici di tutto rispetto come Fuchs, Schwartz e Frobenius, e prende il coraggio di scrivere a David Hilbert. A Göttingen, dove Hilbert trovò modo di sistemarlo, riesce finalmente a fare un po' di ricerca accademica, anche se la sua speranza di studiare la Teoria Algebrica dei Numeri alla corte del grande matematico tedesco è un po' frustrata: Hilbert è già alla ricerca dei Fondamenti della Geometria, ma fra i due c'è comunque un interessante scambio di idee, al punto che pare verosimile che il dodicesimo dei famosi Ventitré Problemi che Hilbert presenterà a Parigi nel 1900 sia in qualche modo ispirato alle ricerche di Takagi.

Quando torna a Tokyo nel 1901, Teiji è un matematico maturo: viene assunto all'università come professore assistente di algebra; ottiene il dottorato nel 1903, diventa ordinario nel 1904 e resterà in quella cattedra per i successivi 32 anni. Già nell'anno del dottorato ottiene un risultato di prima grandezza dimostrando la Congettura di Kronecker sulle estensioni abeliane dei campi dei numeri immaginari. È certo quanto basta a dimostrare il suo valore di ricercatore, ma è solo l'inizio. Si applica allo studio della Class Field Theory[10], e ne diventa uno dei massimi esperti: i suoi lavori del 1920 sono innovativi e fondamentali anche per i matematici europei.

Già, europei: Teiji è senza dubbio il più grande matematico giapponese del suo tempo, anche perché è terribilmente solo. Ha studiato fin da piccolo su testi stranieri, ha mostrato al mondo che anche nel paese del Sol Levante si può fare matematica, eppure non ha studenti: è solo verso il 1925 che comincia ad averne. Le sue lezioni erano tenute quasi a braccio, senza appunti, infarcite di aneddoti e battute di spirito: e da cavaliere solitario che forse non aveva tanta voglia di restare tale, comincia a scrivere libri di testo. Continua a scriverli anche dopo che si ritira dall'insegnamento: anzi, la sua produzione probabilmente sale ancora di più.

Preparava la strada per chi avrebbe percorso il suo stesso sentiero: perché è un po' il destino dei solitari, quello di essere, quasi sempre, anche dei pionieri.

[9] Il che fa presuppore che, per amor della matematica, il nostro abbia imparato a leggere anche il francese, oltre all'inglese. Ma forse era un testo già tradotto dal francese all'inglese.

[10] Che tradotta in italiano è la "Teoria dei Corpi di Classe", grazie Treccani.

2. Problemi

2.1 Siamo in ritardo

Ma non troppo.

Come sapete, il periodo da dicembre a maggio qui in Redazione è dedicato alle gozzoviglie correlate alle ricorrenze: quindi, siamo ragionevolmente interessati (oltre alle ricerche di qualcosa da festeggiare tra giugno e novembre, estremi inclusi) a metodi simpaticamente matematici per festeggiare[11]: l'ultimo, ad esempio, richiedeva di ricordarsi, dopo abbondanti libagioni, quali erano le condizioni iniziali (o meglio, *quasi* iniziali). Ma procediamo con ordine.

Abbiamo disposto otto tavoli in cerchio, che indicheremo arbitrariamente come N, NE, E, SE, S, SO, O, NO (...sono i punti cardinali, caso mai non ve ne foste accorti). Su ognuno dei tavoli N, E, S, O ci sono un certo numero di torte rettangolari (non necessariamente lo stesso numero su ognuno dei tavoli) considerate tutte parimenti commestibili dai partecipanti, mentre gli altri tavoli sono vuoti: la logica della festa procede nel modo seguente:

1. Viene spostato, sul tavolo NE, un numero di torte pari alla *media aritmetica* delle torte presenti sui tavoli N e E; operazione equivalente viene effettuata su ognuno dei tavoli vuoti (calcolo effettuato a "bocce ferme", quindi contate il *vecchio* numero di torte sul tavolo E quando fate il conto per il tavolo SE). Procedete quindi a distribuire ai commensali le torte "avanzate", in modo da sgombrare i tavoli N, E, S, O.
2. Viene spostato, sul tavolo N, un numero di torte pari alla *media aritmetica* delle torte presenti sui tavoli NE e NO; operazione equivalente, secondo le condizioni statuite al punto (1), viene effettuata anche sui restanti tavoli.

Insomma, avete un saltellare di torte da un tavolo all'altro e, se alla fine del giro vi avanza qualcosa, distribuite la torta avanzata (se siete "in debito", ne fate arrivare il necessario dalla cucina, quindi non rischiate il linciaggio). La cosa va avanti allegramente per *venti* passi, quando (anche i commensali più voraci cominciano, a questo punto, a lasciarvi un po' di tregua) via accorgete che sui quattro tavoli coinvolti a quel giro restano 1, 2, 3 e 4 torte, non necessariamente in quest'ordine. Fate notare la curiosità della cosa agli amici, che cominciano a porsi delle domande, del tipo:

Quante erano, per ogni tavolo, le torte dopo il primo giro?

Si riesce a calcolare quante erano le torte all'inizio?

Oh, sia chiaro: non vi chiediamo quante torte c'erano sul tavolo E, ma solo i numeri.

Espansione? Espansione (solito *caveat* sul fatto che non abbiamo la più pallia idea di come – e se – funzioni): si è notato che abbiamo posto una certa enfasi sul fatto che la media fosse *aritmetica*? Ecco, ci chiedevamo se il giochino potesse funzionare anche con altre medie... O anche con più punti cardinali, se proprio avete tempo da perdere.

2.2 Tagliare la torta

...questa volta rotonda. E molto uniforme, e senza bordo.

Come dicevamo nel problema precedente, qui si gozzoviglia da mane a sera e viceversa: quindi, dopo un po', le solite fette a settore circolare delle torte stufano.

Rudy, con la solita *nonchalance*, sta cercando di ridurre l'indice glicemico dei partecipanti (senza minimamente preoccuparsi del *proprio* indice alcoolico); il guaio è che, procedendo in modo sperimentale, l'associazione tra taglio (con un coltello) e alcool ingurgitato rischia di avere conseguenze nefaste (ad esempio, far cadere la bottiglia mentre si taglia la torta,

[11] Pare il pensare tranquillizzi in misura notevole i vicini: dovendo smatematicare, i presenti ai festeggiamenti non fanno molto rumore.

o cose di questo genere), quindi per il problema in oggetto suggeriamo un approccio prudentemente teorico.

Il "taglio alla Rudy" questa volta prevede di applicare ad una torta circolare un algoritmo di questo tipo:

1. Tracciare, sul bordo circolare, un n-agono regolare (che risulta, quindi, inscritto).
2. Tracciare, all'interno dell'n-agono, un cerchio (l'n-agono di cui sopra risulta quindi circoscritto).
3. Ricominciare da (1) con il cerchio ottenuto al punto (2).

Adesso, per riprenderci dalla fatica, definiamo *Regioni del Primo Tipo* (RdPT) quelle che hanno il bordo "esterno" formato da un arco di cerchio e il bordo "interno" formato da un lato di n-agono, e *Regioni del Secondo Tipo* (RdST) quelle che hanno come bordo "esterno" due lati di n-agono e come bordo "interno" un arco di cerchio. Se non vi piacciono "interno" e "esterno", la RdPT ha la zona curva convessa, mentre la RdST ha la zona curva concava.

Come se il procedimento non fosse già abbastanza lungo di per sé, Rudy ha preso un n particolarmente grande (qualche googol) e adesso, forte del principio newtoniano "uno taglia, l'altro sceglie", vi chiede se volete tutte le RdPT o tutte le RdST. Quale sceglierete?

Spiacevole che nelle dimensioni superiori esista un limite ai politopi regolari: la divisione dell'iperbombolone avrebbe potuto portare a interessanti discussioni...

3. Bungee Jumpers

Esistono due interi positivi con lo stesso numero di cifre tali che, in base dieci, il quadrato di uno inizia con le cifre dell'altro e viceversa?

Trovate un modo che riduca il numero dei tentativi necessari per identificarli.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Aprile!

Si festeggia, si festeggia e si festeggia ancora. Succedono un sacco di cose belle – che se ci seguite anche solo un po' su facebook o sul blog di LeScienze – sapete già. I compari danno conferenze a tutto spiano e sono stati un po' ovunque, senza di me, purtroppo… ma non mi posso lamentare se non posso lasciare il lavoro e loro sono molto rappresentativi. Se non amate gli altri media, date uno sguardo al "Memento" sul nostro sito, non vi perdete i prossimi eventi!

Si festeggia e si corre, e come al solito siamo di corsa ed in ritardo, per cui passiamo subito alle vostre soluzioni.

4.1 [230]

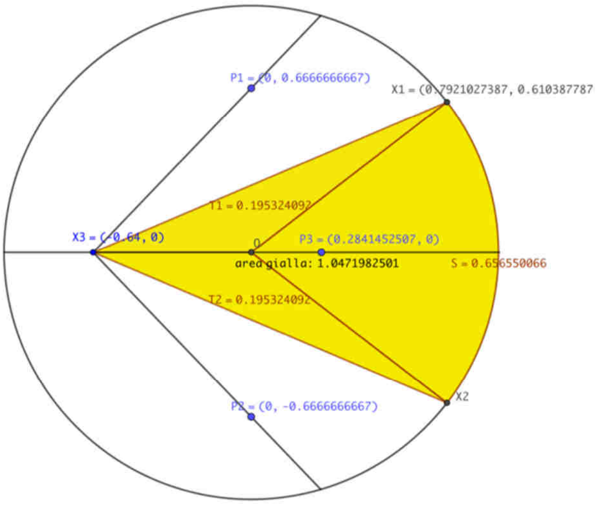
4.1.1 Welcome back to Mathland!

Questo mondo meraviglioso in cui i problemi geometrici sono ambientati senza dover fare concessioni troppo realistiche è uno dei nostri preferiti. Il Capo preferisce sempre usare Torino quando parla di strade perpendicolari e parallele, ma con laghi perfettamente circolari non siamo pronti ad avere degli esempi decenti, per cui ecco il problema:

> *Siamo a Mathland, dove i laghi sono perfettamente circolari, e i pesci uniformemente distribuiti; il lago è ghiacciato e una serie di pescatori devono praticare buchi nel ghiaccio per pescare.*
>
> *I primi due arrivati decidono di darsi pari opportunità di pesca praticando due fori su un diametro del lago, ad una distanza dal centro pari a due terzi del raggio nelle opposte direzioni. Quando arriva il terzo deve trovare un punto sul lago dove praticare il proprio buco nel ghiaccio, in modo da avere un terzo di superficie a testa. Dove va fatto il terzo buco?*

> *E se più tardi arriva il quarto? E se andiamo avanti? Esistono disposizioni iniziali (con distanze diverse da due terzi del raggio, ad esempio) che pur restando sempre "oneste" permettano di aggiungere più persone, non necessariamente una per volta?*

La soluzione arrivata per prima in redazione è quella di ***Valter***, che vi passiamo subito:

> Non sono riuscito a fare di meglio (ci sarà qualcosa di più semplice). Parto con il disegno:
>
> 
>
>
> Il lago C ha raggio unitario.
>
> O è il centro del lago.
>
> Con ..-.. indico la distanza fra due punti (p.e. X3-P3 è la distanza fra X3 e P3).
>
> Con .._.. indico la retta fra due punti (p.e. X3_P1 è la retta per X2 e P1).
>
> P indica un pescatore.
>
> P1 e P2 sono le posizioni dei 2 P.
>
> P3 è dove si deve posizionare il terzo (oppure il suo simmetrico all'asse y).
>
> P1 e P2 sono sull'asse y.
>
> P3 e X3 sono sull'asse x.
>
> X3_X1 è la bisettrice di X3_P1 e asse x.
>
> P3 è simmetrico a P1 rispetto a X3_X1.
>
> X3-P3, X3-P1 e X3-P2 coincidono.
>
> S è l'area del settore circolare O/X1/X2.
>
> T1 è l'area del triangolo O/X3/X1.
>
> T2 è l'area del triangolo O/X3/X2.
>
> Area gialla = S + T1 + T2 (si nota che equivale a $\pi/3$).
>
> Giustifico:
>
> I pesci abboccano al P più vicino.
>
> Le zone sono delimitate da rette.
>
> I P sono simmetrici alle rette:
>
> - asse x per P1 e P2
>
> - X3_X1 per P3 e P1
>
> - X3_X2 per P3 e P2.
>
> Risolvo 3 equazioni in 3 incognite.
>
> Incognite x, y, z:
>
> - (x, y) coordinate X1

- z ascissa X3.

Le 3 equazioni:

- cerchio:

$x^2 + y^2 = 1$.

- bisettrice X3_X1:

$y = (1 - \cos(\arctan(2/(3*z)))) / \sin(\arctan(2/(3*z))) * (x + z)$

- ½ area gialla = T1 + ½*S:

$\pi/6 = (\arcsin(y)*\pi/360) + (z * y/2)$.

Da X3-P1 = X3-P3 ottengo poi P3 (con Pitagora coordinate X3 e P1). L'ascissa X3 è il numero "tondo" 0.64.

Mi puzza ci si una soluzione più facile:

- ascissa X3 = 0.64 = 0.8^2
- $0.8^2 + 0.6^2 = 1$
- 2/3 ha qualche relazione con ciò?

Non sono riuscito a ricavarci nulla. Confido in solutori più scaltri.

Espansioni.

Per numero P = N pari:

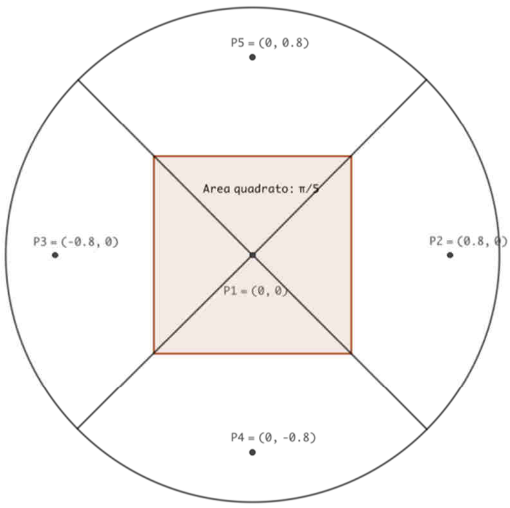
- divido C in N "spicchi" uguali
- ne traccio le bisettrici
- vi piazzo i P a distanza 2/3 da O.

Per numero P = N dispari:

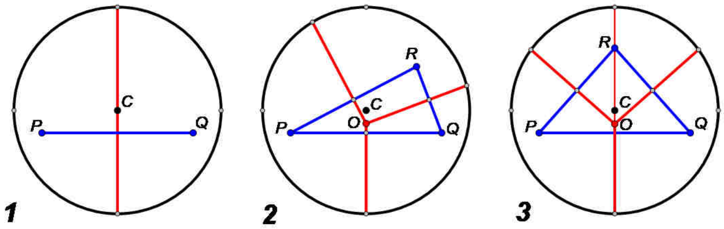
- divido C in N – 1 "spicchi" uguali
- R = poligono regolare di N – 1 lati
- O = baricentro R
- vertici R sugli "spicchi"
- area R = π/N
- P sulle bisettrici e simmetrici a O.

Non ho trovato un R con P a 2/3 da O.

Due immagini per N = 5,4:

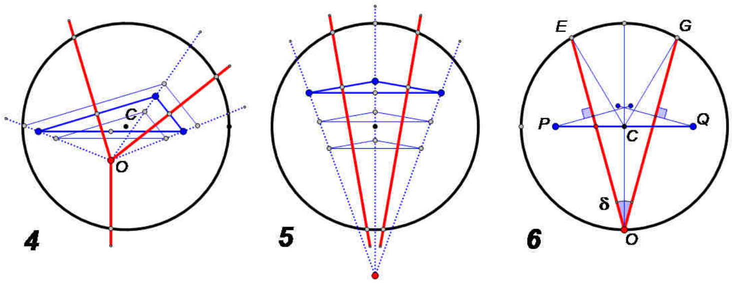


Bella vero? Vediamo la versione di ***trentatre***:



In fig. 1 i punti (i buchi) *P*, *Q* sono posti entro un cerchio (il lago). Le zone di influenza sono divise dai punti equidistanti da *P* e *Q*, cioè dall'asse di *PQ* (in rosso). Le due aree sono uguali se l'asse coincide con un diametro; la soluzione è quindi simmetrica (*P* e *Q* equidistanti da un diametro). Indico di seguito con (*P*) la zona di *P* ecc.

In fig. 2 è aggiunto un terzo punto *R* in posizione arbitraria; *PQR* formano un triangolo, e le linee equidistanti fra le coppie di vertici sono gli assi dei lati, che si incontrano nel centro *O* del cerchio circoscritto; (*P*), (*Q*), (*R*) sono quindi divise da tre segmenti con estremi in *O*. Le aree (*P*) e (*Q*) sono uguali solo se *R* è sull'asse di *PQ* in posizione tale, come in fig. 3, da rendere uguali le tre aree; lo schema è simmetrico e il triangolo è isoscele.



Se i punti sono scelti non uno alla volta, ma tutti insieme, esiste una soluzione anche con un triangolo qualsiasi. Valgono infatti le proprietà (che non dimostro)

- date tre semirette che partono da un punto *O* con orientazione qualsiasi, un cerchio può essere posizionato in una e una sola posizione in modo da essere diviso in tre parti uguali (fig. 4)

- sono soluzioni tutti i triangoli che hanno le semirette come assi dei lati, proiettati fra loro dal circocentro *O*

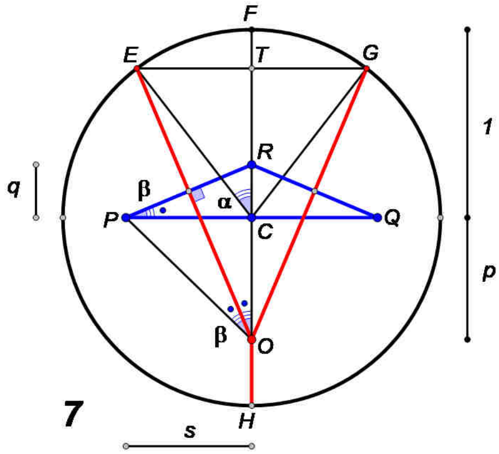
- una dilatazione di centro *O*, applicata ai tre punti oppure al cerchio, è ancora una soluzione

- l' angolo φ fra due semirette deve essere $\delta \le \varphi < \pi$, se $\varphi < \delta$ la soluzione degenera (fig. 5) con *O* esterno al cerchio e le aree laterali <u>di area fissa</u> (1/3 del cerchio).

In fig. 6 il caso limite. Con il <u>cerchio di raggio unitario e gli angoli in radianti</u> l'area della zona centrale (segmento *CEG* + triangoli *OCE*, *OCG*) deve essere pari a 1/3 del cerchio, da cui $\delta + \sin\delta = \pi/3$, che ammette l'unica radice

[1] $\delta = 0.5363^{rad} = 30.7273°$.

Nel problema dato *P* e *Q* sono nella posizione di fig. 6, e la soluzione è simmetrica. I punti simmetrici di *P*, *Q* rispetto alle linee rosse non coincidono – cioè non esiste il terzo punto *R*. Ne segue che *O* deve essere interno al cerchio, e la soluzione è di tipo 4. In fig. 7 lo schema di calcolo, in cui si sfrutta il fatto che i triangoli *OEG* e *OPR* sono simili.



7

Con $s = PC$ (nel problema $s = 2/3$), $p = OC$, $q = CR$ si ha

- area (*R*) : settore circolare *CGE* più i triangoli *OCE*, *OCG*, pari a 1/3 del cerchio, cioè

[2] $\alpha + p \cdot \sin\alpha = \pi/3$

[3] $p \cdot \tan(2\beta) = s$: dal triangolo *OCP*

[4] $(p + \cos\alpha) \cdot \tan\beta = \sin\alpha$: dal triangolo *OTE* .

Le tre equazioni, con *s* noto, consentono di calcolare le tre variabili p, α, β

- eliminando β da [3] e [4] con $\tan(2\beta) = \tan\beta / (1 - \tan^2\beta)$ si ha

[5] $\tan\beta = (\sqrt{s^2 + p^2} - p)/s = \sin\alpha / (p + \cos\alpha)$

- e quindi α è il valore che annulla la funzione

[6] $f(\alpha) = (\sqrt{s^2 + p^2} - p) \cdot (p + \cos\alpha) - s \cdot \sin\alpha$

- dove, per la [2], va inserito $p = (\pi/3 - \alpha)/\sin\alpha$

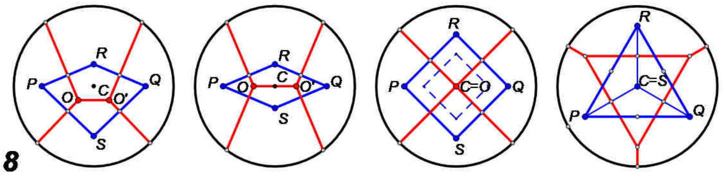
- tracciando il grafico della funzione (con $s = 2/3$) si ha un unico zero in $\alpha = 0.6566^{rad} = 37.6176°$

- e dalle formule precedenti $\beta = 0.4029^{rad} = 23.0846°$, $p = 0.6399$, $q = 0.4262$.

Variando *s* si possono verificare altri casi. Con $s = 1$, cioè *P* e *Q* sul cerchio, la posizione di *R* è data da $q = 0.7019$. Con $p = 1$, cioè *O* sul cerchio (caso limite), si ha $s = 0.5944$, $q = 0.1633$. Quindi qualsiasi posizione di *P* e *Q* ammette una soluzione.

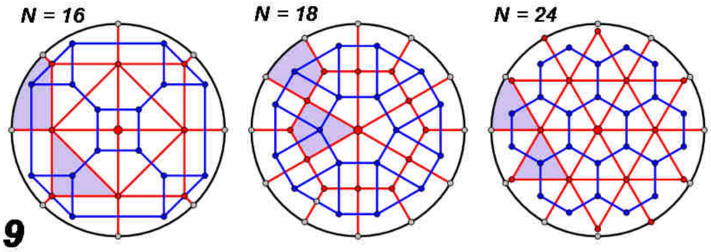
Fissati *P*, *Q*, *R* non è possibile inserire un quarto punto *S*. Per simmetria *S* e *R* devono stare sullo stesso diametro come in fig. 8. Ma l'area di (*R*) è maggiore di (*S*) salvo nella posizione simmetrica nella figura seguente. Qui però $(P) = 0.698$ minore di $\pi/4 = 0.785$. L'unica soluzione resta la terza figura con i punti su un quadrato. In questo caso il quadrato può essere dilatato come in fig. 4.

L'ultima figura riporta un'altra soluzione a 4 punti con *S* al centro; l'area del triangolo rosso (come di quello blu) deve essere $(S) = \pi/4$.



8

Le ultime due soluzioni valgono anche per un numero di punti N maggiore di 4. Ma si possono avere anche suddivisioni del cerchio in parti uguali complesse come in fig. 9 (le aree indicate valgono π / N).



9

E basta così per il momento. Passiamo all'altro problema.

4.1.2 Un altro classico!

Un problema senza ambientazione, ma interessante:

> *Sia a_n la somma dei primi n interi dispari, e b_n la somma dei primi n interi pari: vi si chiede di valutare:*
>
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$
>
> *Quanto vale questo limite (posto che esista) se le due somme sono scritte in base B e anche il rapporto viene interpretato nella medesima base? Esistono valori di B per cui il limite sia uguale?*

A breve distanza dalla pubblicazione del problema ci ha scritto ***Alberto R.*** commentando

> Questa volta attendo con insolita impazienza di scoprire come gli altri solutori reagiranno a questo problema.

Il perché si spiega facilmente leggendo la sua soluzione:

> La somma dei primi N dispari è N^2 e la somma dei primi N pari è $N(N+1)$ se cominciamo da 2, oppure $N(N-1)$ se cominciamo da 0.
>
> In ogni caso, per N che tende a infinito, il rapporto tende a 1, che, ovviamente, resta 1 in qualunque base.
>
> Ma la successiva precisazione "ingannevolmente semplice" mi ha mandato in crisi perché con tutta la buona volontà, la fervida immaginazione e la contorta fantasia che sono riuscito a mettere in campo, non ho trovato altra interpretazione del testo del problema diversa da quella che conduce alla suddetta banale soluzione.

Una prima risposta alla domanda di ***Alberto*** si trova nella soluzione di ***Valter***:

> Non sarà così perché sarebbe banale (questa settimana non va …). Avrò almeno coniugato bene i verbi? …
>
> Assumo che gli interi pari iniziano da 0.
>
> Detto N il numero degli interi pari/dispari:
>
> - somma dei primi N dispari = N^2
>
> - somma dei primi N pari = $N^2 - N$.
>
> Da cui:

$N^2 / (N^2 - N) = (N^2 / N^2) / (1 - 1/N)$.

Per $N\to\infty$ $-1/N\to 0$ quindi:

$(N^2 / N^2) / (1 - 1/N) = 1 / 1 = 1$.

Tutto qui, senza commento. Direi che gli altri hanno reagito nello stesso modo, caro ***Alberto***...

Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Definiamo "pentagono parallelo" un pentagono per cui ogni diagonale è parallela al lato con cui non ha vertici in comune.

È facile vedere che ogni pentagono regolare è un pentagono parallelo.

Ogni pentagono parallelo è un pentagono regolare?

6. Pagina 46

Supponiamo due interi di questo tipo esistano, e siano essi a e b, con $a<b$. Se a e b hanno n+1 cifre, allora deve essere:

$$10^n \leqslant a < b < 10^{n+1},$$

e quindi:

$$10^{2n} \leqslant a^2 < b^2 < 10^{2n+2}.$$

Quindi i quadrati dei due numeri hanno $2n$+1 o $2n$+2 cifre. Essendo $a^2 < b \cdot 10^{n+1}$ e dovendo a^2 iniziare con b, si deduce che a^2 ha solo $2n$+1 cifre. Utilizzando ancora il fatto che a^2 inizia con b, possiamo scrivere:

$$(a+1)\cdot 10^n \leqslant b\cdot 10^n \leqslant a^2 < b^2.$$

Ma b^2 inizia con a, quindi b^2 ha $2n$+2 cifre. Segue quindi che:

$$b\cdot 10^n \leqslant a^2 < (b+1)\cdot 10^n$$

e che:

$$a\cdot 10^{n+1} \leqslant b^2 < (a+1)\cdot 10^{n+1}.$$

Un modo di vedere queste diseguaglianze è attraverso le approssimazioni:

$$a^2 \approx b\cdot 10^n$$
$$b^2 \approx a\cdot 10^{n+1}$$

combinandole, abbiamo:

$$a^4 = (a^2)^2 \approx b\cdot (10^n)^2 = b^2 \cdot 10^{2n} \approx a\cdot 10^{n+1}\cdot 10^{2n},$$

ossia $a^3 \approx 10^{3n+1}$ e quindi $a \approx 10^n\sqrt[3]{10}$.

Questo significa che i candidati per a sono le approssimazioni intere di $10^n\sqrt[3]{10}$ (i cui valori sono compresi tra 10^n e 10^{n+1}, come richiesto).

Si vede che l'approssimazione 2154435 di $10^6\sqrt[3]{10}$ soddisfa le condizioni del problema; infatti $2154435^2 = 4641590169225$ e $4641590^2 = 21544357728100$.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Braccia sottratte alla muratura

Eh? No, tranquilli. Parliamo di *impaccamento*.

Se c'è una categoria di problemi che Rudy ama poco è quella relativa al far stare un certo numero di oggetti in una scatola data: forte di una gioventù in cui le vacanze estive erano il regno incontrastato del *Teorema del Campeggio* ("Dove ci sta un oggetto, può benissimo starcene un altro") e di anni e anni di convivenza con Virgilio il gatto, il cui principale scopo nella vita pare essere quello di vedere quanto piccola è la scatola in cui riesce ad entrare (senza necessariamente mantenere l'integrità della scatola), capite che cose di questo genere non vengono particolarmente apprezzate.

Grande è stato il suo stupore quindi nello scoprire che non solo esistono ricerche tendenti a superare il misero metodo "per tentativi", ma anche che della cosa si è occupato un matematico sul quale sono anni che si ripromette di fare qualche ulteriore ricerca[12], anche perché uno dei primi problemi presentati qui nasceva da un tipo particolare di grafi inventati giustappunto da costui.

Da semplice metodo per tirare su un muro di mattoni, i metodi di impaccamento oggi hanno assunto un'importanza notevole: dallo stivaggio dei bagagli all'interno di un aereo, passando per i "pacchi" che vi tira Jeff Bezos (*pun intended*), oggi far stare tutto e di più in sempre di meno (spazio) è diventato un *sine qua non* dell'ottimizzazione.

Come al solito, i matematici la prendono alla leggera: si definisce *impaccamento* il modo ottimo di far stare in una scatola (solitamente cubica, ma solo per amor di semplicità) un certo numero di *mattoni* (da cui il titolo) "parallelepipedali" tutti delle medesime dimensioni. Le virgolette son dettate unicamente dal fatto che volendo generalizzare, i matematici preferiscono farlo sulle dimensioni (no, non in quel senso. Nell'altro).

Se proprio vogliamo mettere un punto d'inizio, il tutto nasce quando ***Nicolaas G. DeBruijn*** (già, lui) si accorge con stupore che il suo figlio settenne non è in grado di impaccare, in una scatola 6×6×6, ventisette mattoncini 1×2×4: per quanto il compito sembri elementare, si va sempre a finire con un buco che l'ultimo mattone rimasto non riesce a riempire.

Stimolato (presumiamo noi) dai piagnistei del figlio che non riusciva a finire il gioco, il Nostro si impegna nello studio, e il tutto viene bellamente formalizzato.

Tanto per cominciare, DeBruijn definisce ***armonico*** un mattone avente *tutti i lati interi* e per cui, ordinando i lati in ordine crescente, *ogni lato sia un multiplo* (maggiore di 1) *del precedente*, ossia i lati del nostro mattone siano esprimibili come A×AB×ABC. I mattoni del DeBruijn giovane, essendo 1×2×4, rispondono a questa caratteristica. E, giusto per aggiungere un po' di spirito, definisce questo come il ***mattone canonico***, visto che non sono definibili mattoni armonici più piccoli[13].

Il grande risultato di DeBruijn è consistito nel dimostrare che i mattoni A×AB×ABC si possono inscatolare perfettamente *se e solo se* le dimensioni della scatola sono AX×ABY×ABCZ, dove qui "perfettamente" significa che i nostri mattoni non lasciano buchi e non ci sono sporgenze dalla scatola. Questo, in fin dei conti, significa che si può riempire una scatola solo se è possibile il riempimento "triviale", ossia se è possibile riempire la scatola con i mattoni tutti paralleli tra di loro: questo non toglie, evidentemente, che siano possibili anche riempimenti non triviali.

La parte interessante è però che se i mattoni non sono armonici, esistono delle scatole che sono riempibili solo in modo non triviale, ossia non potete riempirle con i mattoni paralleli; l'esempio classico, in questo caso, è il mattone 1×2×3 nella scatola 1×5×6.

[12] Sulla sua matematica, non sulla sua vita: quella la lasciamo al Dipartimento all'inizio di una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa. Comunque, da uno che ha il numero di Erdős minimo (senza chiamarsi Erdős), qualcosa di interessante ce lo aspettiamo.

[13] Non solo, ma sono suppergiù le proporzioni di un mattone "normale".

È immediata, a questo punto, la generalizzazione a due dimensioni: un po' meno lo è (ma DeBruijn ce la fa) quella alle dimensioni superiori.

Ma torniamo al giovane DeBruijn e alla sua scatola 6×6×6 con i mattoni 1×2×4: non essendo 6 un multiplo di 4, sappiamo che non è possibile riempire perfettamente la scatola, visto che ce lo dice DeBruijn (il vecchio): ma esiste una dimostrazione molto semplice di questo, basata su un problema molto simile che avete sicuramente risolto. Quello della scacchiera con due quadretti mancanti (in alto a sinistra e in basso a destra) da ricoprire con dei dòmino di due quadretti[14].

Infatti, consideriamo la nostra scatola come divisa in 3×3×3 cubetti di lato 2, e questi cubi siano colorati "a scacchiera" (ad esempio, con i cubi di cui si vedono tre facce in nero): comunque mettiate il mattone canonico, prenderà sempre un insieme di quattro cubetti unitari 1×2×2 "bianchi" e un insieme 1×2×2 di cubetti "neri". I cubetti unitari in totale sono 6×6×6 = 216, e di questi 14×8 = 96 sono neri, mentre 13×8 = 84 sono bianchi; ma siccome ogni mattone prende sempre 4 cubetti unitari bianchi e 4 neri, non ce la farete mai, visto che quegli 8 cubetti neri in più sono, giustappunto, tutti neri: quindi, dopo aver messo a posto 26 mattoni, vi avanzano due "buchi neri" in due posti non contigui, che non riuscirete mai a riempire.

Il bello è che la stessa linea dimostrativa (utilizzando, eventualmente, tre o più colori) si applica per tutti i casi di impossibilità: e vi bastano due colori per tutti i lati della scatola (cubica) pari e non multipli di 4.

La potenza del metodo di colorazione (anche se non a scacchiera) è mostrata da un grazioso problema bidimensionale che aggiunge un "twist" ulteriore. Dato un quadrato 25×25, avete a disposizione un qualsiasi numero di quadrati 3×3 e 2×2; riuscite a ricoprirlo perfettamente?

La risposta è "no", ma qui dovete colorare sia il quadratone sia i quadratini a strisce (diciamo orizzontali, per darci un "senso") di due colori. Essendo il lato dispari, ha un eccesso di 25 (una riga) quadratini di un colore rispetto all'altro: i quadrati 2×2 coprono lo stesso numero di quadrati dei due colori, quindi il conto va saldato con i quadrati 3×3: ma un quadrato 3×3 copre 6 celle di un colore e 3 dell'altro: la differenza è, comunque, 3. Ma 3 non è multiplo di 25, quindi non ce la farete mai.

Si dimostra (ma ve lo risparmiamo) che se un rettangolo deve essere ricoperto da quadrati i tipo A×A e B×B, allora deve essere divisibile in due rettangoli (uno, eventualmente, di lato zero) di cui uno tassellabile solo con le prime piastrelle e l'altro solo con le seconde: il che è un aiuto notevole nelle dimostrazioni di impossibilità.

Tutto questo lo ha dimostrato ***Klarner***, che ha anche introdotto il concetto di *sfaldatura*: se un rettangolo può essere tassellato con rettangoli di un dato tipo, allora è sempre possibile dividerlo in due altri rettangoli entrambi tassellabili (con lo stesso mattone, per capirci).

Non sappiamo per voi, ma il primo pensiero che ci è venuto dopo aver letto quanto sopra è stato "Grande! Funziona anche in 3D?" Purtroppo, no: ***Singmaster*** ha dimostrato che la cosa può non essere vera: e, ci si lasci dire, lo ha fatto nel peggiore dei modi. Non per dimostrazione, ma trovando un controesempio: la scatola 5×5×12 può essere riempita con dei mattoni 1×3×4, ma nessuno dei modi la divide in due parallelepipedi.

Fortunatamente per la fantasia, sempre Klarner è riuscito a dimostrare (ma noi non ci pensiamo neanche) che (in uno spazio euclideo) un insieme infinito di scatole riempibili con un mattone dato ha un sottoinsieme *finito* di scatole riempibili che possono essere utilizzate per riempire le altre scatole dell'insieme. Il che significa che, per un dato mattone, l'insieme delle scatole *non-sfaldabili* è finito.

[14] Ve la ricordiamo alla svelta: i quadretti che mancano sono dello stesso colore, ma un dòmino copre sempre due quadretti di colore diverso, quindi non ce la farete mai. E il mio glorioso *Zinga* delle medie dice che ci vuole l'accento anche al singolare.

Vedete voi se essere contenti o preoccuparvi, ma siamo a metà strada. Infatti, non abbiamo ancora esaminato a fondo il caso 3D con mattoni *diversi*. E qui, si spalanca un nuovo universo.

Uno dei problemi più semplici, nel ramo, è quello di riempire una scatola 3×3×3 avendo a disposizione 6 mattoni 1×2×2 e 3 mattoni 1×1×1. Se volete provarci, fate pure, ma non leggete il prossimo paragrafo.

Si dimostra che l'unica soluzione possibile è quella che mette i mattoni unitari su una diagonale spaziale: infatti, basta procedere con il solito metodo dei colori, considerando una qualsiasi sezione 3×3 del nostro cubo e colorarla a scacchiera. I mattoni 1×2×2, comunque siano disposti, occuperanno 0, 2 o 4 celle della nostra sezione, con i colori equamente suddivisi: e siccome in ogni sezione avete 5 celle di un colore e 4 dell'altro, da qualche parte deve entrarci *uno e uno solo* cubo unitario. Inoltre, il mattone unitario deve essere o al centro o a uno degli angoli, e l'unico modo per soddisfare questa condizione è di piazzarli su una diagonale spaziale *[Lo dico? Lo dico. "Il posizionamento dei restanti mattoni è lasciato come triviale esercizio al lettore". No, davvero, è immediato].*

Si dice (o meglio, lo dice lui) che il puzzle più difficile in questo campo lo abbia inventato ***John Horton Conway***. Per farvelo apprezzare al massimo, ci inventiamo una notazione apposta: [5, 5, 5] = 13[1, 2, 4] + 3[1, 1, 3] + [2, 2, 2] + [1, 2, 2]. Carina, vero? Si prega di notare la finezza del sottintendere i moltiplicatori unitari.

In pratica, avete 13 mattoni 1×2×4, 3 mattoni 1×1×3, un mattone 2×2×2 e infine uno 1×2×2: con questi dovete riempire un cubo 5×5×5. A quanto si narra, o avete un'idea o non ce la farete mai (nel senso che "per tentativi" non si risolve: dovete trovare un modo).

JHC, come al solito, la butta sulla psicologia: secondo lui, chi va per tentativi più o meno inconsciamente piazza per primi i pezzi grossi: qui, il trucco sta proprio nel fatto che *i blocchi* [1, 1, 3] *possono essere in un'unica configurazione*, quindi bisogna iniziare da loro.

In un approccio simpaticamente combinatorio, se prendiamo una sezione del cubo e la coloriamo a scacchi nel solito modo, vediamo che ha 13 celle di un colore e 12 dell'altro; l'unico mattone che occupa un numero non uguale di celle di un colore e dell'altro è [1, 1, 3], quindi o una o tre celle di ogni sezione devono essere occupate da uno di questi mattoni.

Con un ragionamento un po' complesso ma affrontabile, si vede che per ogni mattone di questo tipo, se consideriamo la sezione cui appartiene interamente, due delle sue celle devono essere dello stesso colore della cella centrale della sezione (ehm... no, neanch'io ero convinto. Poi, ho provato. Dovrebbe essere dimostrabile, ma non ci penso neanche, anche perché... no, questa è l'ultima frase).

Quindi, ogni pezzo di questo tipo occupa cinque sezioni (in due "c'è tutto", in tre ha un cubetto ciascuna): quindi i tre pezzi devono contribuire a tutte le quindici sezioni, e non ne esistono due che contribuiscano alla stessa sezione: quindi, l'unico modo per disporli è una "catena" con i legami ai vertici in cui un mattone va sull'asse X, uno sull'asse Y e l'altro sull'asse Z, grossolanamente su una diagonale spaziale: il resto, chiaramente, "viene da sé"[15].

Non vorremmo pensaste, dopo la relativa semplicità di queste dimostrazioni, che questo sia un campo dove "ormai, hanno fatto tutto": anche tornando a mattoni armonici e uguali tra loro, esistono ancora un mucchio di zone inesplorate. Ad esempio, supponiamo di avere un cubo non riempibile: qual è il massimo numero di mattoni che possiamo comunque inserire? Il problema, al momento, dovrebbe essere insoluto (già, anche solo per i mattoni armonici), anche se ***Brualdi*** e ***Foregger*** hanno avuto un'idea, quella di lavorare non sulla "scatola intera", ma su un sottoinsieme ***R*** detto *insieme rappresentativo*. In pratica si tratta di un insieme di celle della scatola tale che, ovunque

[15] Infatti, i sadici sostengono che la cosa sarebbe stata più difficile sostituendo un mattone [1, 2, 4] con uno [2, 2, 2], che fornisce moltissime "strade sbagliate". Siccome non ci interessa barare, questo non lo trattiamo: secondo JHC (e noi ci fidiamo), la soluzione è effettivamente immediata.

voi mettiate nella scatola un mattone, questo ha almeno un cubetto in una cella di $\boldsymbol{R}$: se riuscite a trovare un minimo per $\boldsymbol{R}$, allora si dice che ha la *cardinalità minima*. Posto che serva a qualcosa, i Nostri sono riusciti a dimostrare che il massimo numero di mattoni identici (non necessariamente armonici) che possono entrare nella scatola è minore o uguale alla cardinalità minima.

Cerchiamo di fare un po' di ordine in questi concetti partendo da qualche caso semplice.

Nel caso bidimensionale (insomma, i dòmino e le scacchiere), il massimo numero di mattoni armonici è sempre uguale alla cardinalità minima (stavamo per dire "ovvio", poi ci siamo ricordati che... Ma basta pensare ai colori della scacchiera e al fatto che il mattone canonico copre sempre due caselle di colore diverso per arrivare alla dimostrazione: colorazione diversa per dòmino diversi), ma in tre dimensioni la cosa non è così semplice. I problemi cominciano a nascere con il cubo di ordine 5: non essendo un multiplo di 8, non sarà completamente riempibile di mattoni canonici; avendo 125 celle, nella migliore delle ipotesi potremmo farne stare 15 (volume totale 120), che è anche la minima cardinalità del cubo dato.

Supponiamo ci stiano. La superficie totale della scatola è 25×6 = 150: avendo ogni faccia un numero *dispari* di celle "in vista", su ogni faccia dovrà essere presente un "buco" unitario, visto che tutte le facce del mattone canonico hanno area pari. Non solo, ma non possiamo avere, per ognuna delle sezioni del cubo, più di un cubo unitario vuoto, visto che 125 – 120 = 5 rappresenta il numero esatto dei cubetti che dobbiamo far stare. Questo significa che la superficie da ricoprire con i mattoni è 150 – 6 = 144. Ora, ogni mattone deve avere una e una sola delle facce 1×2 su una superficie: avendo 15 mattoni, ci resta una superficie 144 – (15×2) = 114 da riempire con le facce 1×4 e 2×4; ma 114 non è multiplo di 4, e quindi la cosa è impossibile. Quindi l'assunto è falso.

Se vi ricordate, qualche numero fa Rudy si chiedeva (nei problemi) cosa fare con un grosso numero di cubetti unitari di legno. Bene, se qualcuno gli passa la colla da falegname...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms