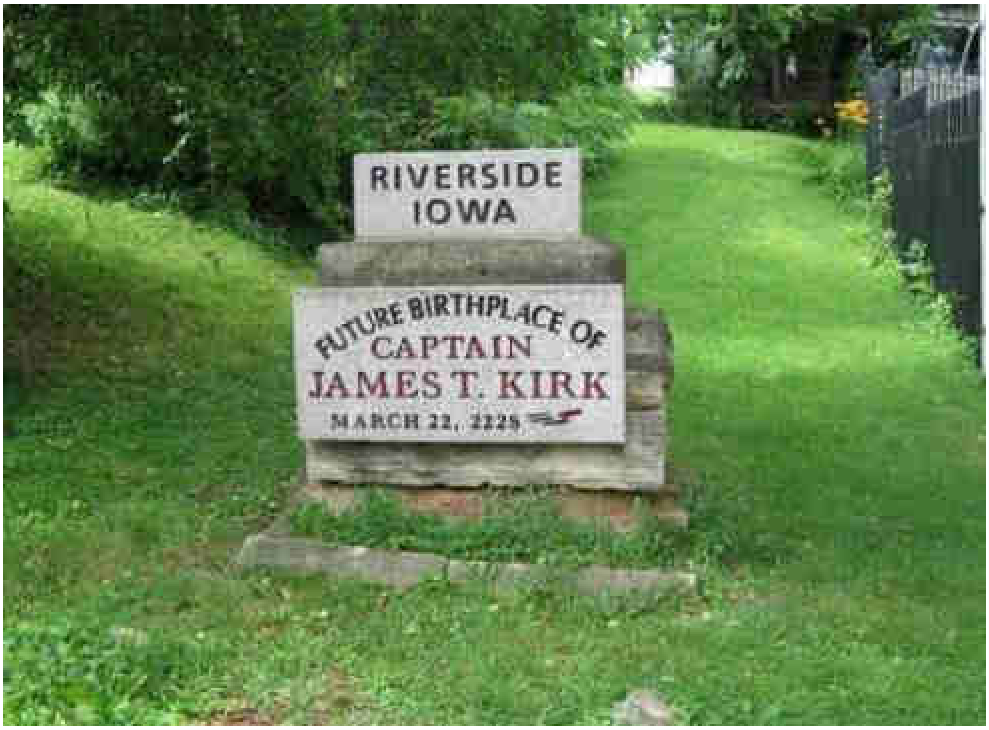
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 230 – Marzo 2018 – Anno Ventesimo



1. Breve storia del mondo (secondo Pitagora) **3**

2. Problemi **11**

2.1 Welcome back to Mathland! 11
2.2 Un altro classico! 11

3. Bungee Jumpers **12**

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa **12**

4.1 Scimmie digitali 12

5. Soluzioni e Note **14**

5.1 [229] 15
5.1.1 Legge e Ordine! 15
5.1.2 Pianificazione a (si spera) lungo termine 17

6. Quick & Dirty **23**

7. Pagina 46 ..... **24**

8. Paraphernalia Mathematica **25**

8.1 Crescete e moltiplicatevi [2] – L'economista iperbolico 25

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM228 ha diffuso 3'249 copie e il 04/03/2018 per Google eravamo in 40'200 pagine.

Nel nostro inguaribile ottimismo, sappiamo benissimo che il numero 2750 di questa rivista uscirà. Ma nel nostro inguaribile realismo, sappiamo benissimo che saremo in ritardo. Quindi, pubblichiamo ora. Riverside è particolarmente simpatica a Rudy, visto che ha un po' meno abitanti di quanti ne abbia il paese dove è nato suo padre (ah, la "T." sta per *Tiberius*. Se lo *incontraste, sapevatelo*).

1. Breve storia del mondo (secondo Pitagora)

*"Nessun argomento razionale
avrà un effetto razionale su
persone che non hanno
un'attitudine razionale"*
(Karl Popper)

Uno degli aspetti più interessanti della storia della matematica è che l'amata scienza non fa quasi in tempo a nascere che già entra in crisi. La cosa è tanto più sorprendente se si considera che ancora oggi, svariati millenni dopo, nell'accezione comune la matematica è considerata quanto di più solido e immune da contraddizioni l'umanità sia stata in grado di creare: asserzione questa che peraltro ci sentiamo di sottoscrivere, ma senza l'accessoria convinzione – condivisa probabilmente da molti – che la costruzione dell'edificio matematico sia progredita nel tempo come un costante e proficuo innalzamento di mattone teorico su mattone teorico, senza scosse né soluzioni di continuità, vergine di crepe nell'intonaco o di necessità di ristrutturazioni più sostanziali. Invece terremoti generatori di crepe e di fratture ce ne sono stati, eccome: e così grossi e violenti da richiedere persino delle rifondazioni, più che delle semplici ristrutturazioni. E il primo di questi, appunto, è stato quasi contemporaneo alla sua nascita.

Certo, servono delle precisazioni cruciali: già parlare di "nascita della matematica", quasi come se ci fosse un momento preciso e chiaro in cui questa viene alla luce, è libertà eccessiva, arrogante e ovviamente profondamente sbagliata, almeno se si vuole salvare una parvenza di obiettività storica. Perfino arrivare ad una definizione certa e condivisa che chiarisca cosa sia davvero, in ultima analisi, la matematica è obiettivo assai arduo da raggiungere; però è certo che gli esseri umani hanno generato i concetti di numero, forma e grandezza (e hanno cominciato ad usarli) fin dai tempi preistorici. E anche se ci si concedesse il lusso di prendere in considerazione solo l'era più propriamente "storica", quella in cui compaiono finalmente le prime tracce di scrittura e di fonti documentali, l'identificazione di un reale e preciso "momento di nascita" della matematica resta virtualmente impossibile.

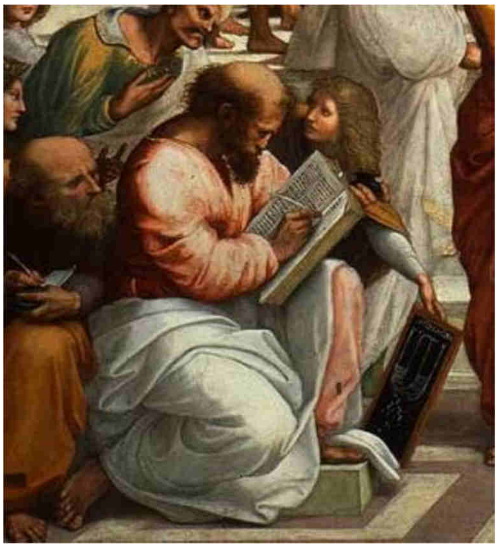
Dobbiamo pertanto concederci qualche ulteriore privilegio, e per farlo lo chiederemo in prestito non a quella severa maestra che è la Storia, ma alla sua leggera e leggiadra sorellastra, la Leggenda. Questa è più tollerante, non si sofferma troppo sulla verità fattuale, e anzi non si risparmia nell'abbellirla; e certo non si preoccupa delle regole del *politically correct*. Inoltre si adatta spudoratamente bene alle tradizioni locali, e tende altrettanto spudoratamente a sostituire il pedante metodo della sorellastra con la propria creatività e fantasia, che superano assai meglio la soglia del ricordo dei non specialisti. E siccome siamo europei, figli della cultura occidentale, non possiamo che appellarci alle nostre tradizioni, nella ricerca delle origini.

La Leggenda si concede anche un lusso ulteriore, rispetto alla Storia: quello di poter fare nomi molto prima e con maggior sicurezza di quanto possa permettersi la pedante congiunta. Capita quindi spesso che un nome rimanga spesso conteso, stiracchiato sul crinale di competenza: e per quanto riguarda la matematica occidentale, a camminare su questo filo di frontiera è il nome di Pitagora[1].

È Pitagora il "primo matematico", almeno secondo la tradizione occidentale; o perlomeno il primo studioso che abbia messo la matematica al centro dei suoi interessi – interessi invero totalizzanti – e non l'abbia invece usata solo come strumento, come conoscenza di supporto alla propria filosofia. Che la matematica esistesse già, peraltro, la Storia non si perita di negarlo o nasconderlo: in questo concorda con la Leggenda, quando è disposta a concedere che Pitagora abbia avuto come maestro per un certo periodo Talete di Mileto (e

[1] Che ovviamente non è il protagonista di questo compleanno, non solo perché sarebbe troppo presto per introdurlo, ma anche perché di lui abbiamo già parlato in RM102 "In principio era il numero".

cosa avrebbe mai potuto insegnargli costui, se fosse vero che la matematica non era ancora nata?) e pure concede che successivamente sia andato in Egitto per consolidare la sua formazione. E continuano a concordare, le sorellastre (almeno per quella parte di seguaci della Storia disposti a credere che il nostro sia davvero esistito) all'idea che abbia scelto l'Italia – che allora non si chiamava ancora così – per fondare quella scuola pitagorica che invece è certamente esistita, ed è durata, a più riprese, assai più a lungo del suo creatore[2].



1 *Pitagora secondo Raffaello*

La Leggenda si fa molti meno problemi. Innanzitutto, che i personaggi leggendari abbiano avuto esistenza reale o meno, è un dettaglio tutt'altro che interessante da dirimere. È invece affascinante l'incrocio, teso allo spasimo, tra misticismo e conoscenza di cui Pitagora si fa indomito cavaliere. Il divieto imposto ai discepoli di mangiare fave o fagioli discendeva da una causa strettamente patologica, come l'essere affetto da favismo, o puramente mistica, come erano del resto le innumerevoli proibizioni alimentari praticati dai sacerdoti egizi? Non è importante saperlo, perché non cambia l'essenza del mito. La scuola dei "matematici" e degli "acusmatici", la logica magica degli insegnamenti palesi e segreti, la stessa idea della "setta" – situata nel baricentro esatto sotteso da matematica, religione, filosofia e politica – che arriva persino ad ottenere un ruolo di governo nella città, è di potenza tale che non richiede neppure prove convincenti d'esistenza, per far parlare di sé.

È insomma da un crogiolo in cui si confondono scienza, superstizione, filosofia, religione, misticismo e logica che prende forma il primo Matematico d'Occidente; e non c'è dubbio che l'immagine "fredda e rigorosa" che la matematica stoicamente e immeritatamente si porta dietro nel sentire comune sembra stonare un bel po' con il ritratto del suo primo campione. Ma questo è niente, perché non è in queste veniali contraddizioni che storiche che trova spazio la Grande Crisi: se anche Pitagora fosse realmente esistito e fosse stato del tutto allineato all'immagine canonica dello scienziato ligio, assorto, disinteressato al mondo, il peccato originale della matematica non sarebbe stato per questo meno sorprendente e rivoluzionario.

Basta cercare di immedesimarsi, di entrare nello stato d'animo dei pitagorici: hanno fatto proprio il concetto di Numero, lo hanno riconosciuto come entità esistente, reale, immanente: lo hanno riconosciuto in ogni parte della natura, perché attraverso il numero si esprime la misura, e la misura è un talismano così potente e universale che è applicabile sempre e comunque. Tre millenni prima della celebre asserzione di Renato Caccioppoli "*se qualcosa ti spaventa, misuralo; e la paura passerà*" i pitagorici vedono nel numero la chiave della conoscenza dell'universo; e non solo perché il numero si riconosce in ogni cosa, ma soprattutto perché il numero è in grado di mettere in relazione ogni cosa con l'altra. La relazione primitiva è proprio la misura: due oggetti della stessa natura ma di grandezze diverse possono sempre essere messe in relazione da un numero, quello che esprime appunto la relazione, il rapporto, la "*ratio*" fra le due cose.

Compare così quella parola feconda che si svilupperà in forme diversissime e significati anche distanti, ma sempre accomunati da un principio fondamentale: razionalizzare significa a un tempo misurare e mettere in relazione, come se la prima conoscenza – e

[2] Anche perché, se pure non in senso stretto dal punto di vista alimentare e religioso, non sono rarissimi i matematici contemporanei che sarebbero disposti ancora oggi ad accettare l'etichetta di "pitagorici".

forse la più importante – non potesse essere altro che quantitativa. Da *ratio* arriva ovviamente razionale e il suo contrario, irrazionale; e dalla stessa radice arriva raziocinio, ragionare, e soprattutto Ragione, che è bene nobilitare con la maiuscola[3]. Le parole conservano l'ottimismo vittorioso dell'uomo sulla natura: che la Ragione ci consenta di conoscere è principio riconosciuto come valido ancora oggi, ed è indubbiamente consolatorio. Ma per i pitagorici era più che consolatorio, era la chiave di volta dell'universo stesso: i numeri permeano il cosmo, ogni cosa è riconoscibile, identificabile attraverso i numeri. E i numeri mettono in rapporto tutte le cose – letteralmente "razionalizzandole" – e quindi rendendole conoscibili. Se non fosse possibile razionalizzare, tutto il mondo pitagorico crollerebbe.

E crolla, infatti.

2 *La YBC 7289, tavoletta babilonese di argilla con un'ottima approssimazione della radice di due.*

Crolla perché i numeri sono semplici come gli dei: uno, due, tre e così via, semplici, interi e infiniti. Sono questi i compassi che misurano il mondo, sono solo questi quelli che ne stabiliscono i rapporti, le relazioni, e quindi la conoscenza tutta. Il teorema che da Pitagora prende il nome è il trionfo delle relazioni generali nei confronti delle conoscenze frammentarie e disperse: nessuno dubita che Babilonesi, Egizi, Assiri, forse perfino Filemone e Bauci, Lilith e Pandora conoscessero la magia ortogonale propria della terna 3, 4 e 5, o da molte altre terne che non per niente oggi si chiamano pitagoriche: ma un conto è sapere che tre bastoncini di lunghezza magicamente appropriata si congiungono con un angolo retto, un altro conto è stabilire l'universale validità geometrica di $a^2+b^2=c^2$. La generalità portata dal metodo dimostrativo è davvero qualcosa di nuovo, di diverso da un elenco di numeri magici: e in quest'ottica non è poi così assurdo fissare la data di nascita della matematica in coincidenza con la nascita dell'esigenza della dimostrazione.

Eppure, è già tutta lì la tragedia: nel caso più semplice e banale della formula generale, quello che vede i cateti uguali e unitari, la potenza razionalizzatrice cede le armi, e viene sconfitta dai suoi stessi fedeli. La diagonale del quadrato unitario rifiuta di asservirsi alla "ratio", elimina una a una tutte le coppie possibili di interi che provano a esprimerla compiutamente, e si manifesta ineluttabilmente incommensurabile. Incommensurabile, quindi irrazionale, quindi inconoscibile: quindi il Numero non è onnipotente e onnisciente, quindi le fondamenta dei pitagorici poggiano sul niente. Chissà se Ippaso di Metaponto, il pitagorico che Storia e Leggenda dicono essere stato lo scopritore della

[3] Anche se perfino nella sua forma più plebea, in quella "ragione" che si usa per segnalare il "contrario di torto" o meglio ancora come sinonimo di "causa", brillano chiare le connotazioni positive e potentissime. Tutto il contrario di Storia, che mettiamo al maiuscolo per combattere l'enantiosemia che si porta dietro: al maiuscolo ha una chiara dignità di verità, al minuscolo spesso significa l'esatto contrario ("tu racconti storie, sei un fanfarone"). Che esistessero parole che significano sia una cosa sia il suo contrario lo sapevamo da tempo (fin da piccoli ci siamo dannati con l'ambivalenza della parola "ospite", ad esempio); ma che questa caratteristica si chiamasse enantiosemia l'abbiamo scoperto da pochissimo, e volevamo subito rendervene partecipi. Fanno parte del club diversi verbi (tirare, cacciare, spolverare, affittare) e qualche aggettivo (feriale, pauroso, e forse anche uno dei nostri preferiti: curioso). Però è abbastanza triste, per gli amanti della matematica, notare come stia acquisendo connotati di enantiosemia anche la bellissima parola "teorema", che gli amanti della scienza certo conservano solo nel significato puro e originale di "elemento comprovato e dimostrato di teoria", ma mass-media e lettori di giornali sono ormai pronti a interpretare come "costrutto falso artificialmente proposto a scopi millantatori": l'esatto opposto, appunto.

bestemmia, abbia incontrato l'incommensurabile irrazionalità proprio cercando la diagonale del quadrato, come dicono alcuni: o se invece ci sia finito dentro nel tentativo di domare le sezioni auree che popolano le ricorsive diagonali del pentagono, come sosteneva Kurt von Fritz. Questa seconda ipotesi, sebbene minoritaria tra gli storici, aggiunge un fascino ulteriore, perché è facile immaginare Ippaso che traccia diagonali nel pentagono, riconosce il pentagono più piccolo che le stesse diagonali disegnano al centro di quello originale, e ripete il disegno delle diagonali più piccole: bastano due o tre passaggi per constatare l'evidente ripetersi infinito del ciclo, e per restare debitamente esterrefatti: l'infinito non è maneggevole, anzi: per definizione stessa, non è commensurabile.

3 *Ippaso di Metaponto (o perlomeno l'immagine che Wikimedia suggerisce per lui)*

L'infinito esiste, dentro le figure geometriche, e non è razionale. Curioso come la frase "l'Infinito non è razionale" abbia una valenza quasi universale: quale disciplina non si dice disposta a sottoscriverla, ora che persino la matematica ne riconosce la validità? La religione lo ha sempre sostenuto, la filosofia lotta strenuamente per eliminare o l'uno o l'altra dalla sua dialettica, tanto le è evidente l'incompatibilità tra Ragione e Infinito.

E che cosa ha fatto la matematica occidentale – ma forse ci si può permettere il lusso di togliere l'aggettivo geografico, ormai – che cosa ha fatto la Matematica? Quali scelte aveva, quando il Numero ha mostrato di non reggere alla prova, fallendo l'esame per essere promosso a chiave di volta dell'universo?

Non c'erano molte scelte, in fondo. Si poteva abbandonare per sempre l'idea di razionalizzare il mondo, accontentarsi di esplorare le infinite possibilità che i numeri interi continuavano ad avere, anche se non sono onnipotenti come si sperava. Buona parte del pensiero della parte orientale del globo sembra aver sempre preferito questa visione: la Ragione è cosa bella e giusta, utile e perfino divertente, ma non può bastare a spiegare il mondo. La verità può (deve) arrivare attraverso l'Illuminazione, attraverso percorsi non conoscibili e non garantiti passo passo: anche perché, lo si è visto, non tutto è veramente conoscibile, e quindi ogni approccio è lecito e forse consigliabile: il *satori* non abbisogna giustificazioni.

Ma i superstiti dei templi pitagorici? Ma i razionalisti irriducibili? Ma la matematica occidentale? È buffo, ma a guardare indietro nel tempo le caratteristiche peculiari delle due metà del mondo, sembrerebbe quasi che l'Oriente non si faccia intimorire troppo dalle contraddizioni, attrezzandosi per girarci attorno, mentre l'Occidente le affronta a muso duro, scornandoci e infine accettando di conviverci, con tutta la fatica e il dolore del caso. Se l'Infinito non è razionale, se i numeri interi non bastano, cosa si può fare? Almeno all'inizio, si tiene un po' il muso, distogliendo l'attenzione per quanto possibile dalla crudele Aritmetica e concentrandosi sulla più generosa Geometria: le forme continuano a relazionarsi, le diagonali di quadrati e pentagoni possono pur sempre essere disegnate, anche se non sono misurabili. È un boccone amaro da mandar giù, certo: e rimanda a questioni irrisolte: come può essere costruibile qualcosa che non è razionale? Ma di fatto si può, e allora ci si concentra più sulle relazioni tra forme che su quelle tra numeri. E se di contraddizione si tratta, ce ne faremo una ragione[4].

Poi, col tempo, si comincia a pensare che Numeri e Ragione non vanno d'accordo, la colpa potrebbe essere più in Come si considerano i numeri, piuttosto che nel Fato perverso e

[4] Sì, vorrebbe essere una battuta…

crudele. Potrebbe darsi che la Ragione potrebbe allargarsi, continuare a mostrare la sua utilità, nonostante la sua apparente incompletezza: il misurare, relazionare, rapportare, ragionare è forse estendibile, a patto di fare qualche concessione. La concessione è grandiosa, ma dà i suoi frutti: si elargisce il titolo di "numero" anche quelle blasfeme grandezze che non si possono esprimere come rapporto di interi. Il catalogo numerico si allarga in maniera spropositata: gli interi già viaggiano verso l'infinito, i razionali sono già così fitti che riempiono tutti gli interstizi tra intero e intero con un'altra infinità; ma se questo non basta, si facciano entrare nel novero anche loro, gli Irrazionali. Cambia così l'idea cruciale pitagorica, la purezza del Vero Numero rimane contaminata? Pazienza. La storia non finisce certo qua, poi, perché i numeri sono prolifici come leprotti: e generano intere famiglie, classi, infinità di infinità di altri numeri; e la matematica prende ad arrampicarsi su quello che Hilbert ha chiamato "*il paradiso che Cantor ha creato per noi*".

Ma è il resto del mondo che non si adegua. Le parole sono mobili e mutevoli, nascono vivono evolvono muoiono, ma ogni tanto si attaccano a qualcosa, e non lo mollano più. L'Irrazionale matematico non è più ormai un concetto negativo, fuori schema, da aborrire, anzi: arricchisce, perché permea e completa l'infinito punteggiare del Razionale, e trasforma l'incostanza discreta dei razionali in un continuo monodimensionale senza interruzioni. Ma nel linguaggio comune "razionale" ormai significa giusto, saggio, misurato, corretto, logico, e "irrazionale" significa tutto il suo contrario, senza alcuna speranza di remissione dei peccati originali.

C'è un momento, nella storia d'Occidente, molto successivo ai tempi di Pitagora, in cui alcuni uomini hanno cercato di cambiare l'antica struttura politica che vedeva ovunque pochi potenti possedere tutto, beni e persone, mentre tutti gli altri erano appunto niente più che oggetti altrui. Per sovvertire lo status quo vecchio di secoli si appellano ai "Lumi della Ragione", in contrapposizione ai "secoli bui" in cui gli esseri umani sembravano aver perso la fiducia nelle loro capacità di pensiero. L'Illuminismo accende orgogli e desideri, e crea sconvolgimenti.

4 *La chiesa ad Ivry-la-Bataille, "Tempio della Ragione e della Filosofia"*

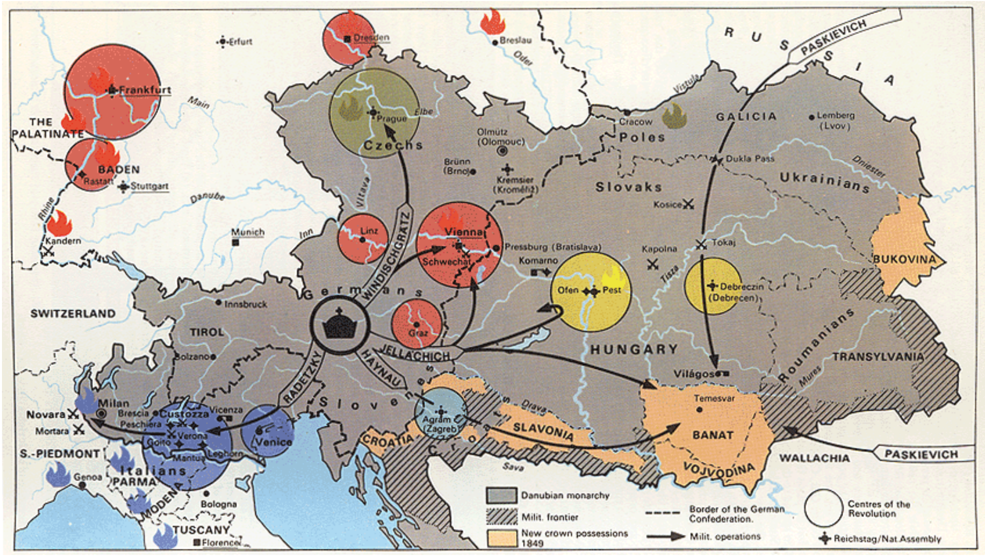
Certo, neppure i pitagorici (forse) sarebbero così ingenui da pensare che le moltitudini prendono zappe e forconi e vanno alla rivoluzioni mossi solo da un'ideale filosofico: sono la fame e la disperazione i motori veri ed essenziali. Ma l'idea comunque c'è, e li sorregge: e cadono re e bastiglie, corone e palazzi, e gli straccioni di mezzo mondo rivendicano una razionalizzazione del mondo. I potenti si rialzano, vengono sconfitti, si rialzano ancora: alcuni rivoluzionari diventano nobili, re, imperatori, e poi cadono anch'essi, tutto sembra tornare come prima. La Dea Ragione portata in trionfo perde anch'essa la testa sulla ghigliottina del Terrore, tornano gli antichi dei e gli antichi re.

Ma le idee che nascono a fatica muoiono anche a fatica. L'Europa che brulica di corti e sovrani torna a prendere fuoco tutta insieme: è il 1848, e non si parla più di Dea Ragione o di Essere Supremo, ma che i tempi siano ineluttabilmente cambiati lo racconta semplicemente il numero e i susseguirsi degli eventi. Eventi quasi tutti senza un reale esito politico immediato, di nuovo, ma sconvolgenti per quantità e contemporaneità.

A gennaio da Palermo parte la rivolta del Regno delle Due Sicilie, e certo nessuno poteva immaginare che si trattasse di qualcosa di diverso da un evento isolato. Invece l'Italia – che Italia ancora non è – prende fuoco per intero: due settimane dopo Palermo insorge Napoli. I monarchi sentono che è necessario fare qualcosa, i moti promettono d'essere troppo violenti: Leopoldo II di Toscana decide di concedere la costituzione a febbraio, Carlo Alberto firma a Torino lo Statuto che prende il suo nome a inizio marzo, e dieci giorni dopo addirittura il papa concede una sorta di costituzione. Ma marzo è mese pazzo, dice il proverbio, e quasi non ce la fa a tenere dentro di sé tutti gli eventi: ecco Venezia che si ribella all'Austria, ecco i milanesi che il giorno dopo cominciano le Cinque Giornate.

Il Regno di Sardegna dichiara all'Austria quella guerra che poi la tradizione chiamerà Prima Guerra d'Indipendenza, e i fermenti si propagano in tutta la penisola. Vienna riuscirà a domare Carlo Alberto e gli insorti italiani, e Radetzky avrà in premio la marcia che viene ancora suonata ad ogni capodanno, ma il barometro politico e militare non tornerà mai più a segnare "bel tempo" per l'aquila bicipite in val Padana.

E l'Italia non è che un pezzo d'Europa, e un pezzo frammentato, persino. Ma il fuoco del 1848 non risparmia quasi nessuno: la Francia che ha già fatto rivoluzioni nel 1789 e nel 1830 replica ancora, e fa abdicare re Luigi Filippo. L'impero austriaco, già molto indaffarato nel ribelle Lombardo-Veneto, scopre che non è questo il suo unico cruccio: Budapest segue Lajos Kossuth[5], e l'Ungheria si dichiara indipendente. La Germania – che non era ancora Germania, ma una frammentazione di territori al pari, se non peggio, dell'Italia – vede tutti gli stati in subbuglio chiedere a gran voce l'istituzione di una confederazione pangermanica. Non se ne farà granché, perché la Prussia sente già di poter fare da sola, e sostanzialmente per mano militare, quel che non ha intenzione di lasciar fare al popolo; ma in quell'anno fatidico ribolle anch'essa, come tutta l'Europa continentale.



5 *Quel che succede quando "succede un quarantotto".*

La chiameranno "primavera dei popoli", espressione che poi tornerà sempre ogni volta che, per contagio o coincidenza, saranno molte le nazioni che si ribellano contro chi li governa. Primavere che non sembrano poter essere mai serene, che spesso non portano frutti, ma che hanno in comune la richiesta diffusa di giustizia, di ridistribuzione dei beni, di equità. Di razionalità, insomma.

A Piacenza, il 1848 arriva e cambia la storia secolare della città. Insieme a Parma costituisce il duplice Ducato che ha una sua storia indipendente fin dal 1545, nato sotto i Farnese e poi sotto il ramo Parma dei Borbone, e solo la tempesta napoleonica scuote per alcuni anni il governo delle dinastie regnanti. Il Congresso di Vienna, nel restaurare quel che poteva restaurare, assegna il Ducato di Parma, Piacenza e Guastalla a Maria Luigia d'Austria; una restaurazione che deve aver comportato qualche strano compromesso poiché Maria Luigia è certo un'Asburgo purosangue, ma è anche stata la moglie di colui

[5] A Kossuth piace Torino, dove si rifugerà quando la neonata Ungheria sarà invasa dai Russi. E a Torino piace Kossuth, a cui dedica un bel viale nella zona più prestigiosa della città.

che ha sconvolto l'Europa e ha reso necessario il Congresso di Vienna, Napoleone Bonaparte. Fatto sta che la Duchessa avrà la sua corona e regnerà, e sarà anche gradita ai sudditi per la sua buona capacità di governo, fino al dicembre del 1847, quando muore poco dopo aver compiuto i cinquantasei anni d'età. Le succede Carlo Ludovico di Borbone-Parma, che in qualche modo deve completare il ciclo della Restaurazione; il Ducato era stato dato all'asburgica moglie del Bonaparte anche per contorsionismi diplomatici, ora è opportuno che torni alla dinastia originaria. Ma Carlo, che prende la corona col nome di Carlo II di Parma è assai meno gradito ai piacentini: già nei primissimi giorni di regno il Ducato cambia forma e territorio, con cessioni importanti; e poi i primissimi giorni di regno sono anche i primissimi giorni del 1848, anno fatale.

È il 20 marzo quando cominciano i primi moti di ribellione, e in capo a una settimana Piacenza già si dota di un governo provvisorio e rivoluzionario; l'atto più significativo è la proclamazione di un plebiscito per l'annessione a quello che, con una dozzina d'anni d'anticipo, già chiamano Regno d'Italia. Il 10 maggio 1848 il plebiscito si risolve con la comunità piacentina che vota unanime, o quasi, a favore dell'annessione. È la prima città a farlo, e il gesto le frutta il titolo, di cui ancora si fregia orgogliosa, di "Primogenita d'Italia".

In quel 20 marzo, per le strade di Piacenza, in rivolta contro le bianche divise dei soldati austriaci, c'erano cittadini di ogni estrazione, mestiere e professione. E c'era anche un matematico.


6 *Angelo Genocchi*

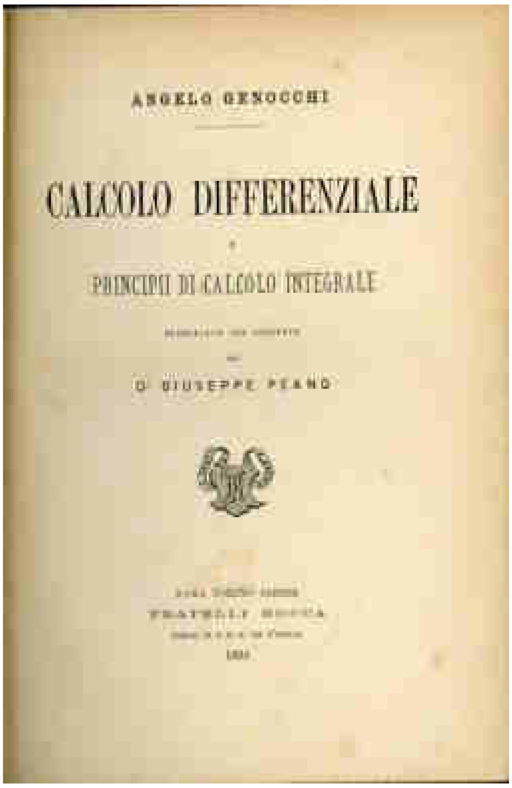
Angelo Genocchi ha da pochi giorni compiuto 31 anni, perché è nato il 5 marzo 1817 proprio a Piacenza. Ma è forse una libertà eccessiva chiamarlo "matematico", perché a quel tempo non si può realmente dire che lo fosse ancora. Per quanto sempre affascinato dalla matematica, Angelo Genocchi si forma studiando giurisprudenza, ed è proprio in legge che si laurea nell'università della sua città natale, e comincia anche ad esercitare la professione di avvocato. Probabilmente però non era la sua vera passione, se arriva persino a rifiutare una cattedra in diritto, o forse, più semplicemente, a quei tempi la sua vera passione era la politica: i suoi intenti di rimuovere il dominio austriaco dal Ducato sono ben precedenti alla sollevazione del 20 marzo, e Genocchi si ritrova anche a far parte del gruppo di intellettuali che organizzano la reggenza del governo provvisorio.

La sua storia segue pertanto da vicino, da vicinissimo gli sviluppi politici della sua città e del suo tempo, e fin dai tempi delle elementari gli scolari italiani sanno come finisce: dopo i primi successi e i primi entusiasmi, la Guerra d'Indipendenza si guadagna solo l'ordinale di "Prima", a sottolineare che non sarà sufficiente, ne serviranno altre. In estate Carlo Alberto non ha più la forza di continuare la guerra, riattraversa il Ticino in direzione Est-Ovest, e le bianche uniformi austriache ritornano in Lombardia e a Piacenza.

Angelo decide di non poter restare in patria, e lascia il Ducato. Si trasferisce a Torino, promettendo di non tornare finché Piacenza non tornerà libera. Una scelta di libertà politica, quindi: alla quale farà presto seguire anche una scelta di libertà intellettuale. A Torino dimentica di essere uomo di legge, e decide di diventare uomo di matematica:

segue le lezioni di Giovanni Plana[6], e in breve diventa così padrone della materia da poter concorrere all'assegnazione della cattedra di Algebra e Geometria Complementare. La ottiene nel 1859, e da allora continuerà ad insegnare a Torino senza soluzione di continuità: l'anno successivo passa ad insegnare Analisi Superiore, e due anni dopo in quella di Analisi Infinitesimale.

L'ex-avvocato si dimostra matematico rigoroso, preciso in modo quasi maniacale, del tutto diverso dalla spettacolarizzazione e dalle iperboli che ci si potrebbe aspettare da un ex-principe del foro. Ma le sue lezioni sono valide, e meritano di diventare un libro di testo, per la loro chiarezza e profondità. A sollecitarne la pubblicazione è il suo giovane assistente che lo affianca dal 1881: Giuseppe Peano[7].



7 *Il Genocchi-Peano*

La storia della pubblicazione del celebre "*Calcolo Differenziale e Principii di Calcolo Integrale*" non è priva di qualche screzio: Angelo Genocchi nel 1882 è impossibilitato ad insegnare, e il suo corso viene tenuto da Peano. Intenzionato a pubblicare il testo delle lezioni di Genocchi, Peano fa una decisa revisione del testo, aggiungendo anche molte note originali. Questo basta e avanza per far diventare noto il trattato come il "Genocchi-Peano", anche se il vecchio docente non sembra entusiasta del perduto monopolio, e inizialmente pensa anche di disconoscere la paternità del libro.

Ma l'abbiamo già detto: le parole hanno vita propria, e il trattato resterà famoso e chiamato con il doppio cognome. Del resto la grandezza del suo assistente servirà anche a perpetuare il nome stesso del vecchio libertario e *barricadero* Angelo Genocchi, che non è più un giovanotto. E, arrabbiature senili a parte, ci piace immaginarlo sereno, nell'ultima parte della sua vita: lascia questo mondo il 7 marzo 1889, appena due giorni dopo aver compiuto 72 anni. Nato nell'impero asburgico, muore nella città che è stata artefice e prima capitale del nuovo Regno che sognava di vedere realizzato; poco soddisfatto dei suoi studi, è riuscito in età matura a reinventarsi, e ad avere grande successo nella disciplina che più amava.

Una vita un po' irrazionale, a vederla da lontano: razionalissima invece, se commisurata al soddisfacimento delle sue passioni.

[6] Parliamo di lui in "Genius loci", RM154, Novembre 2011.

[7] Di lui invece in "Sineddochi", RM067, Agosto 2004.

2. Problemi

2.1 Welcome back to Mathland!

L'avevamo inventata che Piotr doveva ancora nascere (nel senso di Piotr, non di Piero: quello c'era già), e adesso, congiuntamente al fatto che è arrivata una cosa fredda che *non* è il Bur(i)an[8], ci torna finalmente utile.

Come i trilobiti (quelli arrivati prima dei dinosauri) tra voi sicuramente ricordano, le principali caratteristiche orografiche di questo territorio sono i fiumi perfettamente rettilinei (sponde incluse) e i laghi altrettanto perfettamente circolari: bene, questi ultimi sono gelati, e alcuni impavidi mathlandesi hanno deciso di verificare se ci sia effettivamente tutto questo divertimento nel pescare attraverso un buco nel ghiaccio.

Due di questi personaggi, trovatisi su un lago ghiacciato, decidono di darsi pari opportunità di pesca praticando due fori su un diametro del lago, ad una distanza dal centro pari a due terzi del raggio nelle opposte direzioni. In questo modo, essi sostengono, hanno pari possibilità di gabbare i pesci (supponendo questi distribuiti uniformemente nel lago).

Comodamente (compatibilmente con la temperatura) sistemati e praticati i rispettivi fori nel ghiaccio, si accingono a iniziare la loro attività quando arriva il solito ritardatario. I nostri due, pur essendo pienamente d'accordo sul fatto che tutti e tre debbano avere pari opportunità di pesca, non hanno la minima intenzione di scavare due nuovi buchi solo per far piacere all'ultimo arrivato, visto che la cosa è piuttosto complicata e non risultano disponibili i "buchi portatili" prodotti dalla ACME per Wile E. Coyote[9].

Il ritardatario, quindi, deve trovare un punto sul lago dove praticare il proprio buco nel ghiaccio, opportunamente sorvegliato dagli altri due che verificheranno se la divisione delle rispettive zone di influenza pescatoria sia comunque onesta, con un terzo di superficie a testa.

Volete dare una mano prima del disgelo al nostro eroe? Dove va fatto il terzo buco, in modo tale che ognuno abbia disponibilità di un terzo dei pesci uniformi?

Espansione? Espansione, ma come al solito senza soluzione. E se più tardi arriva il quarto? E se andiamo avanti? Il quinto ci pare discretamente impossibile (senza spostare buchi), ma forse se aspetta il sesto prima di scavare due buchi si possono mettere ("forse", qui è scritto molto grosso... Solo un'impressione). Esistono disposizioni iniziali (con distanze diverse da due terzi del raggio, ad esempio) che pur restando sempre "oneste" permettano di aggiungere più persone, non necessariamente una per volta? No, non ne abbiamo la più pallida idea.

2.2 Un altro classico!

Nel senso di "non ambientato", ma ci pare molto interessante: una sana via di mezzo tra un "Bungee Jumpers" e un "Quick&Dirty", quindi lo mettiamo tra i problemi.

Sia a_n la somma dei primi n interi dispari, e b_n la somma dei primi n interi pari: vi si chiede di valutare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Quello che ci chiediamo è quanto valga questo limite (posto che esista) se le due somme sono scritte in base B e anche il rapporto viene interpretato nella medesima base. Esistono valori di B per cui il limite sia uguale?

[8] ...ma tutti lo chiamano così. Mettiamo la "i" tra parentesi in quanto, dal nome del vento siberiano prendeva il nome la versione sovietica dello Space Shuttle, e quella l'abbiamo sempre vista scritta senza "i".

[9] Questo mese, uno dei motivi del ritardo nell'uscita è dovuto al fatto che Rudy sta compulsando (per motivi che forse un giorno vi saranno chiari) vecchi cartoni animati (in particolare le prime comparse dei personaggi), e rivedendo *Fast and Furry-ous* si è chiesto "...ma la 'E.' per cosa sta?". Ethelbert.

Ingannevolmente semplice, a nostro parere: meriterebbe una dimostrazione più bella di quella che abbiamo. E se vi avanza tempo, potete sempre provare a dematematizzarlo...

3. Bungee Jumpers

Siano A e B due insiemi con la caratteristica di avere 144 insiemi che sono sottoinsiemi di almeno uno tra A e B. Quanti elementi ha $A \cup B$?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Nemmeno un anno di attesa, stavolta: si potrebbe quasi dire che questa rubrica stia diventando praticamente mensile, se commisurata sui tempi (o per meglio dire dei ritardi) caratteristici del suo principale estensore.

Oddio, se volessimo essere del tutto sinceri (ma lo vogliamo davvero?), dovremmo raccontare che a far vedere la luce a questa trentesima recensione ospitata nell'apposito spazio dell'e-zine hanno contribuito essenzialmente due fattori predominanti: e no, non si tratta del fatto che uno degli autori del testo recensito è probabilmente "l'amico di più vecchia data di RM" e neppure, che ci crediate o no, dal fatto che uno dei redattori di RM ha avuto il privilegio (e l'onere) di essere uno dei "lettori alfa" del libro.

No, i due elementi discriminanti sono stati diversi: il primo è che una recensione di questo libro – per quanto breve, limitata a 1700 caratteri – i redattori di RM l'hanno scritta per le auguste pagine di *Le Scienze*[10], e a noi dispiace sempre un po' quando quel che scriviamo in giro non trova spazio nell'adorata Prestigiosa Rivista Italiana di Matematica Ricreativa, dove tutto è cominciato e tutto, ora e sempre, continua. Il secondo fattore invece si chiama Alice Riddle, anima solerte *et deo gratia* pragmatica della Redazione tutta, che ha educatamente fatto notare come ben poco sarebbe costato riciclarla e fare con ciò una necessaria respirazione bocca a bocca a questa moribonda rubrica.

Insomma, ve lo ricordate, no, quale sia la forza motrice di tutto l'universo RM? Certo, la pigrizia. E siccome bastava copincollare per far finta d'aver scritto un articolo, beh, diamine, abbiamo copincollato. E adesso, per favore, non correte subito a fare la spia a *Le Scienze*, dicendole che abbiamo fatto i truffaldini sui diritti dell'articolo che, anche se scritto da noi, è pur sempre roba loro. Vi ricordate, nevvero, quale sia il prezzo stampato sulla copertina di ogni numero di RM? Non possiamo permetterci un avvocato…

4.1 Scimmie digitali

[«Cosa significa dunque essere una persona al tempo di Internet? Noi crediamo che il concetto di "persona" abbia come base la nostra materialità, ma vi aggiunga una seconda natura fatta di storie culturali, sociali e tecnologiche. Siamo sempre stati il prodotto della cultura in cui viviamo: ma l'architettura della Rete non è altro che un'applicazione a una nuova tecnologia del nostro sistema di conoscenze, così come si è andato evolvendo nel campo della matematica e delle scienze dell'informazione.»]

Non c'è dubbio: le scimmie del titolo siamo noi, gli esseri umani; e anche se i tempi che viviamo ci fregiano dell'aggettivo "digitali", questo non addolcisce il giudizio di fondo. È la tesi centrale di questo libro: anche se la maggior parte degli analisti saluta l'avvento della Rete come la maggiore rivoluzione della storia, Paolo Artuso e Maurizio Codogno

[10] Vedi "*Le Scienze*" numero 595, marzo 2018, pagina 95.

preferiscono una posizione minoritaria, quella di chi crede che, nonostante l'innegabile progresso tecnologico, la natura degli uomini non muti se non con passi assai più lenti.

Va precisato che gli autori sono ben lontani dal propugnare una sorta di luddismo, tutt'altro: forti di studi scientifici e filosofici e soprattutto di una conoscenza di Internet che risale ai primi vagiti del web italico, argomentano la tesi con perizia, suddividendo il testo in tre parti. La prima, "La matematica della rete", fornisce gli strumenti essenziali per la comprensione del web; segue una sezione, "Alle origini della rete", in cui si ricostruisce il ruolo certo non trascurabile che, fin dall'inizio, hanno avuto le pulsioni emotive nell'evoluzione di Internet. La parte finale, "Filtri, occhiali, lenti d'ingrandimento e visioni del mondo", si assume il compito di mostrare i limiti e soprattutto i rischi della Rete.

La conclusione, in fondo, appare tutt'altro che pessimistica: se le chiacchiere da bar sono davvero, come sostengono alcuni, la naturale evoluzione dei gesti comunicativi dei nostri ancestrali progenitori, la frenetica compulsione di tasti sui social è certo l'ulteriore – ma altrettanto naturale – evoluzione comunicativa. La rivoluzione del cuore e del cervello non è veloce come la tecnologia, ma non è detto che ciò sia un male.

[I millesettecento caratteri sono finiti, e quanto scritto tra queste parentesi quadre (compresa la citazione in testa all'articolo) non fa parte della recensione ufficialmente emessa e stampata. Ci piacerebbe aggiungere qualcosa in più, ma sarebbe un po' come violare il tono del testo o, peggio ancora, convincere definitivamente i lettori più attenti che il difetto principale di RM sia proprio l'eccesso parolaio, l'assenza di capacità di sintesi, il proliferare coniglieseo di termini inutili. Quindi, non aggiungeremo granché, se non la constatazione che la regola principe di questa rubrica – ve la ricordate? "*Si recensiscono solo opere in cui abbia messo mani un lettore di RM*" – è rispettata alla grande, visto che ***PuntoMauPunto*** è anche più che un semplice lettore di RM; e che questo rispetto della regola quasi ci dispiace di constatarlo, perché può far pensare che la recensione sia stata scritta solo per gratificare il dotto Codogno, e questo sarebbe ingiusto verso il libro. Perché si tratta di un libro che, a volerlo definire con un solo aggettivo, dovrebbe essere chiamato coraggioso. Coraggioso perché non è facile scrivere libri che tentano di esplorare le zone di confine, come fa questo che passeggia sui crinali che dividono scienza e filosofia, matematica e sociologia, informatica e psicologia. Coraggioso perché nel farlo non teme di dichiarare fin dall'inizio di arroccarsi in quella che è una posizione ben lontana dal *mainstream* del settore, quello che vede la rivoluzione digitale come profonda e invasiva, quasi capace di modificare geneticamente gli esseri umani nel giro di un paio di decenni. Coraggioso perché non esita a congiungere le penne – okay, le tastiere – di autori dall'esperienza, formazione e interessi tutto sommato abbastanza diversi, se non proprio distanti, per dare un quadro d'insieme sulle nuove tecnologie traguardato da un punto di vista insolito, e originale. E a noi le voci che si uniscono in una sola sono sempre piaciute.]

Titolo	Scimmie digitali
Sottotitolo	Informazione e conoscenza al tempo di Internet
Autori	Paolo Artuso - Maurizio Codogno
Editore	Armando Editore
Collana	Comunicazione e M@ss-Media
Data Pubblicazione	15 febbraio 2018
Prezzo	15 euro
ISBN	978-88-6992-352-4
Pagine	160

5. Soluzioni e Note

Marzo!

Per quanto le temperature sembrano contrarie al cambio stagione, è sempre in questo mese che arriva la primavera, e noi la aspettiamo trepidazione. Sapete bene ormai quanto siamo parziali alla primavera, che tra tutte le stagioni è quella che più simboleggia la rinascita. Come se non bastasse siamo tutti e tre nati in primavera, e – per quanto si sia raggiunta un'età per cui i compleanni si dimenticherebbero volentieri – festeggiare è sempre uno dei nostri piaceri più grandi.


8 *Rudy d'Alembert, Accademico del Sole, Gran Capo e Bel Soggetto*

Sappiate quindi, se ve lo siete dimenticati, che ricorre proprio questo mese il genetliaco del Grande Capo, del quale abbiamo ripreso una delle sue foto preferite, scattata qualche anno fa da Piotr.

Se avete guardato la copertina saprete anche che a marzo ricorre almeno un altro compleanno di un capitano, ma il numero di compleanni di grandi scienziati nati a marzo è enorme, appena un piccolo numero è coperto da quelli di cui noi stessi abbiamo celebrato la vita in uno dei nostri articoli: Cantor, Einstein, i fratelli Herschel, Goldbach, Grothendieck, Banach, Cartesio, Noether, Bachelier, Schwartz, Ulugh Beg, Erdős, Faà Di Bruno, Levi-Civita, Staffilani… a ripensarci anche questa lista non è poi tanto corta, contando anche gli speciali per la festa della donna… visto che marzo contiene anche l'otto marzo.

Insomma, ci sono tantissime ragioni per fare festa, e i miei compari non hanno ancora finito di girare per l'Italia a promuovere il nostro ultimo libro, se ci seguite su faccialibro o sul sito trovate le date e i luoghi… e se non avete ancora letto il libro, che cosa aspettate?

Bene, mi sono già dilungata troppo, torno a fare festa con le vostre soluzioni.

5.1 [229]

5.1.1 Legge e Ordine!

Grosso è stato l'interesse per i problemi di ordinamento degli scorsi mesi: è ormai nota l'intolleranza del Capo per il disordine, malgrado la sua infinita capacità di mantenere i testi dei problemi il più oscuri possibile… Vediamo come è andata cn questo problema enciclopedico. Eccone il testo:

> *L'enciclopedia di Rudy viene messa in disordine dai VAdLdRM: ogni volta spostano i volumi in modo tale che uno e uno solo degli n che compongono l'enciclopedia sia seguito da un volume con numero d'ordine minore: tutti gli altri, mantengono un ordinamento crescente. E Rudy rimette tutto a posto. E loro rimettono in disordine, in un modo diverso. Quante disposizioni di questo tipo hanno i due teppisti?*

Sappiate che ***Alberto R.*** e ***Valter*** hanno fatto a gara a chi ci mandava più revisioni della propria soluzione, ***Alberto*** per questo problema, ***Valter*** per il secondo. Nello scusarmi in anticipo se non ho pescato quella giusta, parto dalla soluzione di ***Alberto R.***:

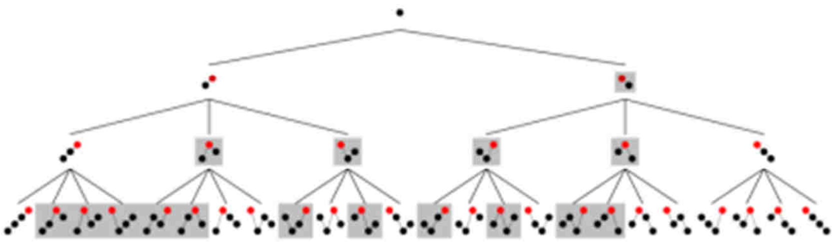
> Sembrava fin troppo facile. Vi ho mandato la soluzione e il giorno dopo mi sono accorto che era sbagliata. Vi ho quindi mandato una nuova soluzione e adesso scopro che è sbagliata anche quella!
>
> Ora che finalmente ho scoperto la soluzione corretta:
>
> $$2^N - N - 1$$
>
> non so che farmene perché non riesco a dimostrarla.
>
> Se fosse un problema di fisica o di chimica o di biologia o altra disciplina potrei dire: "è così perché confermato da numerosi esperimenti".
>
> Perché ai matematici non è consentito ciò che è permesso a tutti gli altri? Non è giusto! Scenderò in piazza e spero che qualche partito, paladino dell'uguaglianza, vorrà appoggiare la mia protesta.

Siamo certi che in tanti vi parteciperanno, nel frattempo vediamo la versione di ***Valter***:

> Detti N i libri mi pare che le disposizioni siano: $\binom{N}{2}$.
>
> Per induzione:
>
> - per $N = 2 / 3$ si verifica facilmente: (2, 1) / (2, 1, 3) (1, 3, 2) (3, 1, 2)
>
> - se vale per N allora ottengo le disposizioni per N+1 c.s.:
>
> -- prendo le disposizioni di N
>
> -- aggiungo 1 al loro numero d'ordine
>
> -- piazzo il libro 1 come primo
>
> -- p.e. per N=3: (1, 3, 2, 4) (1, 2, 4, 3) (1, 4, 2, 3)
>
> -- aggiungo le N disposizioni con il libro 1 fuori ordine
>
> -- p.e. per N=3: (2, 1, 3, 4) (2, 3, 1, 4) (2, 3, 4, 1)
>
> -- da cui: $\binom{N}{2} + N = \binom{N+1}{2}$.

Come vedete ci sono parecchi approcci per arrivare allo stesso risultato, come ci mostra anche ***Guido*** con il suo contributo:

> Rappresentiamo l'ordinamento dell'enciclopedia segnando un punto per ogni volume, con ascissa uguale alla posizione attuale e ordinata uguale al numero del volume stesso: in questo modo i gruppi di volumi ordinati saranno rappresentati da sequenze di punti crescenti mentre tra un gruppo e l'altro vi sarà una discesa.
>
> La figura seguente rappresenta il processo di inserimento dei volumi dell'enciclopedia nello scaffale, cominciando dal primo e proseguendo in ordine: contiamo zero permutazioni con una e una sola discesa per un'enciclopedia con un solo volume, una per una con due, quattro per una con tre, undici per una con quattro.



Il volume n-esimo può essere aggiunto in n modi diversi; se viene aggiunto alla fine (quindi in ordine) oppure all'interno di una discesa (quindi in ordine nel gruppo precedente la discesa stessa) esso non altererà il numero totale delle discese: qualsiasi altra posizione incrementerà tale numero di uno.

Siamo interessati, come già detto, alle permutazioni che hanno una e una sola discesa, permutazioni che possono essere ottenute in due modi: aggiungendo l'ultimo volume, non in ultima posizione, con i precedenti volumi in ordine, oppure aggiungendolo in modo opportuno avendo i precedenti volumi una sola discesa.

Nel primo caso questo può essere fatto in $n-1$ modi, nel secondo in due: uno aggiungendo il volume alla fine e l'altro aggiungendolo prima del secondo gruppo. Questo ci da agio di impostare la relazione ricorsiva

$$a_n = 2a_{n-1} + n - 1, a_1 = 0$$

la cui condizione iniziale si ricava dal fatto che un solo volume non può che essere in ordine e quindi non vi possono essere discese.

Questa è una relazione ricorsiva disomogenea del primo ordine: la relazione ricorsiva omogenea associata è $h_n = 2h_{n-1}$, ed ha soluzione generale $h_n = c_3 2^n$; per una soluzione particolare della relazione di partenza proviamo con un polinomio di primo grado in n

$$p_n = c_2 n + c_1$$

Verifichiamo tale soluzione sostituendo il polinomio nella relazione ricorsiva e ottenendo

$$c_2 n + c_1 = 2[c_2(n-1) + c_1] + n - 1$$

ovvero l'equazione

$$(c_2 + 1)n + (c_1 - 2c_2 - 1) = 0$$

Perché tale equazione sia vera per qualsiasi valore di n devono annullarsi i coefficienti

$$\begin{cases} c_2 + 1 = 0 \\ c_1 - 2c_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -1 \\ c_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow p_n = -n - 1$$

La soluzione generale della relazione ricorsiva sarà $a_n = c_1 2^n - n - 1$, cioè, considerando la condizione iniziale $a_1 = 0$

$$0 = c_3 2^1 - 1 - 1 \Rightarrow c_3 = 1 \Rightarrow \boxed{a_n = 2^n - n - 1}$$

I VAdLdRM si rivelano morigerati nella loro voglia di disordine dato che vi sono $n! - 1$ modi di mescolare i volumi dell'enciclopedia.

Che ne dite? Non vogliamo ancora fermarci, diamo la parola a ***Camillo***:

Considerando che al massimo le canaglie spostano 2 volumi e poi ricompattano il tutto direi che facciano poca fatica a scombussolare l'enciclopedia di papà. Di conseguenza anche Rudy a fare l'operazione opposta.

Quando i tomi sono in ordine i VAdLdRM possono prenderne uno e piazzarlo in fondo questo comporta un numero di posizioni che è il numero di volumi meno uno. D'altronde se aggiungiamo a questo lo spostamento di 2 volumi invertiti tra di loro e sistemati di volta in volta in posti opportuni le disposizioni totali diventano il fattoriale del numero dei volumi meno uno per il numero dei volumi meno uno:

> (n–1)! * (n–1).
>
> Quindi gli 8 volumi della E.U.Curcio può essere sistemata in soli 35280 modi. Secondo me i figli di Rudy fanno più fatica ha tenere il conto delle posizioni usate e da usare che non a spostare volumi.

La fatica è misurabile solo con criteri individuali, quindi non ci esprimiamo, pur sapendo che il solo vedere l'enciclopedia in disordine è un grosso stress per il Capo. Per concludere in bellezza, la soluzione di ***Franco57***:

> Ho trovato il quesito piuttosto facile, ma non la sua generalizzazione.
>
> I VAdLdRM dispongono gli n volumi della enciclopedia in due blocchi crescenti. La scelta del primo blocco corrisponde a un qualsiasi sottoinsieme, opportunamente ordinato, non vuoto e con almeno un "buco", cioè si devono escludere gli n sottoinsiemi $\{1\},\{1,2\},\ldots,\{1,2,\ldots,n\}$. Il secondo blocco, infatti, è costituito dai volumi rimanenti e proprio in virtù del "buco" comincia con un numero d'ordine inferiore al massimo del primo blocco (il "buco" è condizione necessaria e sufficiente). Cosicché le possibili disposizioni di questo tipo sono $\boxed{2^n-1-n}$, dove 2^n sono i possibili sottoinsiemi, 1 è l'insieme vuoto e n sono i suddetti sottoinsiemi da escludere.
>
> Per la generalizzazione del calcolo delle $B_{n,k}$ permutazioni di $\{1,2,\ldots,n\}$ con k blocchi crescenti invece di solo 2, ho trovato per adesso solo una formula ricorsiva che si basa sulla collocazione del primo volume, cioè l'elemento di numero d'ordine 1, il più piccolo. Esso può stare (nell'ipotesi $n>k>1$):
>
> - in prima posizione in uno dei blocchi di una k-blocchi di $\{2,3,\ldots,n\}$, quindi in $k\cdot B_{n-1,k}$ casi;
> - nel mezzo uno dei blocchi di una $k-1$-blocchi di $\{2,3,\ldots,n\}$, poiché aggiunge un blocco spezzandone uno in due, in $(n-k)\cdot B_{n-1,k-1}$ casi;
> - essere a fine sequenza di una $k-1$-blocchi di $\{2,3,\ldots,n\}$, quindi aggiungendo un blocco alla fine, in $B_{n-1,k}$ casi.
>
> Non essendovi altre possibilità, si ottiene la formula ricorsiva $\boxed{B_{n,k}=k\cdot B_{n-1,k}+(n-k+1)\cdot B_{n-1,k-1}}$ con le condizioni iniziali $\boxed{B_{n,n}=B_{n,1}=1}$, che esprimo un fatto ovvio: esiste una sola permutazione monoblocco, la $(1\quad 2\quad \ldots\quad n-1\quad n)$ e una sola permutazione a n blocchi, quella con tutti gli elementi invertiti: $(n\quad n-1\quad \ldots\quad 2\quad 1)$ (più in generale invertendo l'ordine degli elementi di una permutazioni a k-blocchi se ne ottiene una con $n-k+1$ blocchi cioè abbiamo l'uguaglianza $B_{n,k}=B_{n,n-k+1}$).
>
> A conferma della validità della formula ricorsiva, per $k=2$, cioè il testo del quesito, otteniamo $B_{n,2}=2\cdot B_{n-1,2}+(n-1)$, con la quale si può agevolmente dimostrare per induzione la formula già trovata con altri mezzi: $B_{n,2}=2^n-1-n$.
>
> Di più, per ora, non sono riuscito a fare.

Direi che questa ingloba più elementi visti prima, per cui non possiamo fare di più nemmeno noi: chiudiamo qui e passiamo al secondo problema.

5.1.2 Pianificazione a (si spera) lungo termine

Un bel problema di geometria! Con assi cartesiani e tutto! Certo, uno dei miei tipi preferiti. Ecco il testo:

> *In giardino c'è il cordolo di un vecchio sentiero, da utilizzare come bordo di un'aiuola triangolare: questo è perfettamente rettilineo e corre da A a B, in un sistema di assi cartesiani, A*(0,0) *e B*(3,4)*. Vorremmo mettere il vertice C della nostra aiuola sulla retta x*=2 *del nostro piano cartesiano. L'area dell'aiuola deve essere pari*

a 5. *Quante possibilità ci sono per il disegno dell'aiuola? E, nei vari casi, dove finirà il punto C?*

Cominciamo subito dalla soluzione di ***Valter***, sperando di aver preso quella giusta: ci ha proposto parecchie versioni, ogni volta aggiungendo approcci diversi, che non può che farci piacere:

Premesse:

Lunghezza di AB: $(3^2 + 4^2)^{½} = 5$ (avendo ABC area 5 la sua altezza su base AB deve valere 2).

Indico con Q il punto di intersezione retta per AB con retta x=2.

Le coordinate del punto Q sono (2, 8/3) (soluzione del sistema lineare delle equazione delle 2 rette).

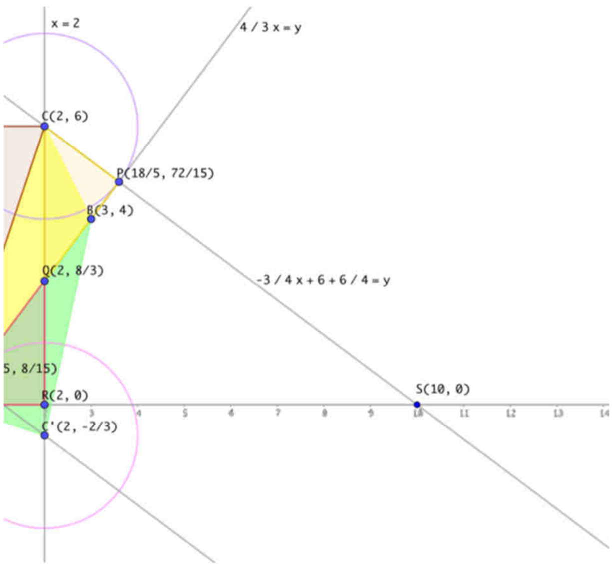
Tutte le soluzioni proposte dipendono dall'altezza 2 su AB. L'unica che fa eccezione è "Con Erone" (ha i calcoli più complessi ma è utilizzabile con altre aree).

Ci sono 2 triangoli ABC che possono avere tale altezza. Sono situati sopra e sotto AB. I loro punti C e C' hanno egual distanza da Q (altrimenti i 2 triangoli non avrebbero stessa altezza 2).

Indico con (2, X) le coordinate del punto C.

Trovato X si ottengono quindi le coordinate di C e C' (avendo C e C' hanno egual distanza da Q).

Con Geogebra:



Con somma area triangoli:

L'area di ACBC' è la somma di ABC + ABC' quindi vale 10. Tale area è anche la somma dei triangoli ACC' e BCC'.

Per quanto detto CC' è due volte CQ quindi 2*(X – 8/3).

Altezza in CC' di ACC' = 2.

Altezza in CC' di BCC' = 1. (ottenuta dalle coordinate x dei punti B e C).

Quindi 10 = area ABC + area ABC' = 2*(X – 8/3) + (X – 8/3).

Risolvendo si ottiene X = 6.

Con triangoli congruenti:

P = punto intersezione rette:

4/3*x = y (retta per AB)

– 3/4*x + X +6/4 = y (retta perpendicolare ad AB e passante per C).

Q = punto intersezione rette:

x = 2

4/3*x = y

Coordinate Q: (2, 8/3).

R = punto con coordinate (2, 0).

I triangoli rettangoli AQR e CQP sono congruenti (AR = CP = 2, angoli in A e C uguali). Quindi:

Prima soluzione:

- QR = 8/3 (ordinata del punto Q)
- AQ = CQ = 10/3 (con Pitagora usando coordinate punto Q)
- X = CQ + QR = 10/3 + 8/3 = 6.

Seconda soluzione:

- $CQ^2 = AQ^2 = AR^2 + QR^2 = 2^2 + (8/3)^2 = 100/9$
- QC = ± 10/3.
- Coordinate C = (2, 8/3 ± 10/3) = (2, 6), (2, – 2/3).

Terza soluzione:

I triangoli rettangoli ACT e ACP sono congruenti (lato AC in comune e CT=CP=2).
Determino l'equazione della retta passante per AC:

- considero come ascissa la retta $x = 0$ (scambio l'asse x con l'asse y)
- la retta per AB ha equazione 3/4*x=y (avendo equazione 4/3*x=y con ascissa y=0).
- L'angolo di AB con l'ascissa è doppio di quello di AC (è formato dai 2 angoli uguali dei triangoli ACT e ACP).
- Trovo l'equazione della retta per AC:
-- β = angolo formato da AT con AB
-- γ = angolo formato da AT con AC
-- 3/4 = tan(β)
-- 3/4 = tan(2γ)
-- 3/4 = 2*tan(γ) / (1 – $\tan^2(\gamma)$)
-- risolvendo ottengo: tan(γ)=1/3 (soluzione positiva dell'equazione di secondo grado)
-- equazione della retta per AC: 1/3*x = y (passa per l'origine e 1/3 è il suo coefficiente angolare).

L'altezza CT del triangolo ACT vale 2. Quindi $X = x$ deve soddisfare l'equazione 1/3*x = 2. Risolvendo si ottiene $X = x = 6$.

<u>Con triangoli simili:</u>

Faccio riferimento all'immagine Geogebra. I triangoli rettangoli AQR, APS, CRS sono simili (APS e CRS sono anche congruenti):

- AQR e APS hanno l'angolo in A in comune
- APS e CRS hanno l'angolo in S in comune.

Lunghezze dei lati:

- CR = X
- CP = 2 (l'altezza in AB del triangolo ABC deve valere 2)
- AR = 2
- QR = 8/3 (da 4/3*x = y con x = 2)
- AQ = 10/3 (con Pitagora su AR e QR)
- AS = 4/3*X + 2 (da –3/4*x + X + 6/4 = y e y = 0)
- RS = AS – 2 = 4/3*X
- $CS^2 = RS^2 + CR^2 = 25/9 \cdot X^2$
- CS = 5/3*X
- PS = CS – CP
- PS = 5/3*X – 2
- CS / RS = AS / PS
- CS / RS = 5/4
- AS / PS = (4/3*X + 2) / (5/3*X – 2)
- 5/4 = (4/3*X + 2) / (5/3*X – 2)
- X = 6.

<u>Con cerchio:</u>

La retta per AB è tangente al cerchio con centro C e raggio 2 (il cerchio è anche tangente alla retta x = 0).
Risolvo sistema di equazioni:

1) $4/3*x = y$ (retta per AB)
2) $(x - 2)^2 + (y - X)^2 = 4$ (cerchio con centro C e raggio 2)
3) $-(2(x - 2))/(2(y - X)) = 4/3$ (inclinazione cerchio nel punto di tangenza: dy/dx di 2).

Risultati:
$x = 2/5$, $y = 8/15$; $X = -2/3$
$x = 18/5$, $y = 24/5$; $X = 6$.

Seconda soluzione:

Equazione cerchio O con centro $(2, X)$ e raggio 2:
$(x - 2)^2 + (X - y)^2 = 4$.
Sostituisco y con $4/3*x$ (mi interessa il punto di intersezione con la retta $4/3*x = y$):
$(x - 2)^2 + (X - 4/3*x)^2 = 4$.
Si nota dal grafico che O incontra la retta in:
- 2 punti per X > oppure < di un valore massimo/minimo (oltre tali valori non incontra più la retta)
- un punto per X = a tali valori massimo/minimo.
A noi interessano tali valori massimo/minimo (sono i valori di X per cui la retta è tangente a O). Calcolo la derivata dell'equazione di O (dovrebbe valere 0 per tali valori):
$d/dx\ [(x - 2)^2 + (X - 4/3*x)^2 - 4] =$
$2*(x - 2) + 8*(X - 4/3*x)/3 =$
$50/9*x - 8/3*X - 4$.
Risolvendo il sistema di 2 equazioni:
- $(x - 2)^2 + (X - 4/3*x)^2 = 4$
- $50/9*x - 8/3*X - 4 = 0$
dovrei ottenere le coordinate:
- X = ordinata del centro di O
- x = ascissa del punto in cui O incontra la retta.
Mi sono fatto calcolare da un tool online X e x:
- $X = - 2/3$, $x = 2/5$
- $X = 6$, $x = 18/5$.
I 2 possibili vertici C del triangolo ABC hanno coordinate:
- $(2, -2/3)$
- $(2, 6)$.
L'altezza del triangolo ABC incontra AB nei punti:
- $(2/5, 8/15)$
- $(18/5, 72/15)$.

<u>Con coordinate:</u>

Funzione retta perpendicolare ad AB e passante per C:
$-3/4*x^2 + X + 6/4$
Trovo coordinate punto in AB dell'altezza di ABC.
Lo faccio risolvendo il sistema in 2 equazioni delle rette:
$4/3*x = y$
$-3/4*x^2 + X + 6/4 = y$
Si ha:
$x = 12/25*X + 72/100$
$y = 16/25*X + 96/100$.
La lunghezza dell'altezza di ABC passante per tale punto è 2.
La calcolo usando Pitagora con le sue coordinate e quelle di C:
$(12/25*X + 72/100 - 2)^2 + (16/25*X - X + 96/100)^2 = 2^2$.
Risolvendo ottengo $X = -2/3, 6$.

<u>Con Pitagora:</u>

$$\sqrt{2^2 + X^2 - 2^2} + \sqrt{(3-2)^2 + (X-4)^2 - 2^2} = 5$$

- 5 = lunghezza AB
- $2^2 + X^2$ = lunghezza AC^2

- $(3-2)^2 + (X-4)^2$ = lunghezza BC^2
- 2^2 = (altezza)^2

quindi:

$$\sqrt{X^2} + \sqrt{(X-4)^2 - 3} = 5$$

Da cui $X = 6$, -2/3; si verifica che le 2 distanze da P coincidono.

Con Erone:

AB = 5 (con Pitagora usando coordinate vertice B).

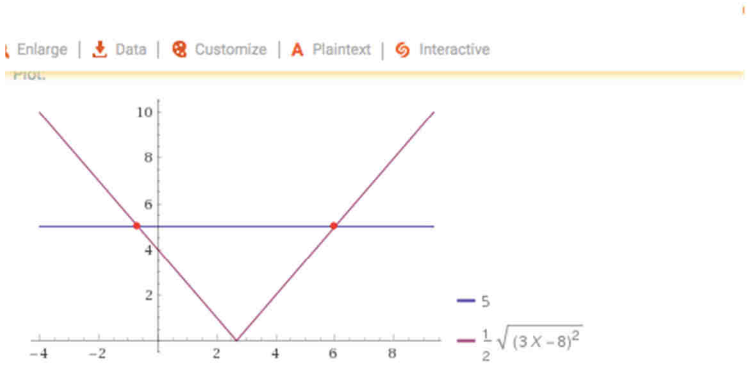
AC = $\sqrt{4 + X^2}$ (con Pitagora usando coordinate vertice C).

BC = $\sqrt{1 + (X-4)^2}$ (con Pitagora usando coordinate vertici B e C).

Semiperimetro = $\frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{4 + X^2} + \sqrt{1 + (X-4)^2}\right)$

Quindi:

$$5 = \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{4+X^2} + \sqrt{1+(X-4)^2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{4+X^2} + \sqrt{1+(X-4)^2}\right) - 5\right) \left(\frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{4+X^2} + \sqrt{1+(X-4)^2}\right) - \sqrt{4+X^2}\right) \left(\frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{4+X^2} + \sqrt{1+(X-4)^2}\right) - \sqrt{1+(X-4)^2}\right)\right)}$$



Come vedete ***Valter*** si è molto divertito a trovare versioni alternative per ottenere lo stesso risultato. ***Alberto R.*** ci ha mandato una versione molto succinta:

La doppia area di un triangolo in funzione delle coordinate dei suoi vertici P1, P2, P3 è data dal determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Nel nostro caso essendo

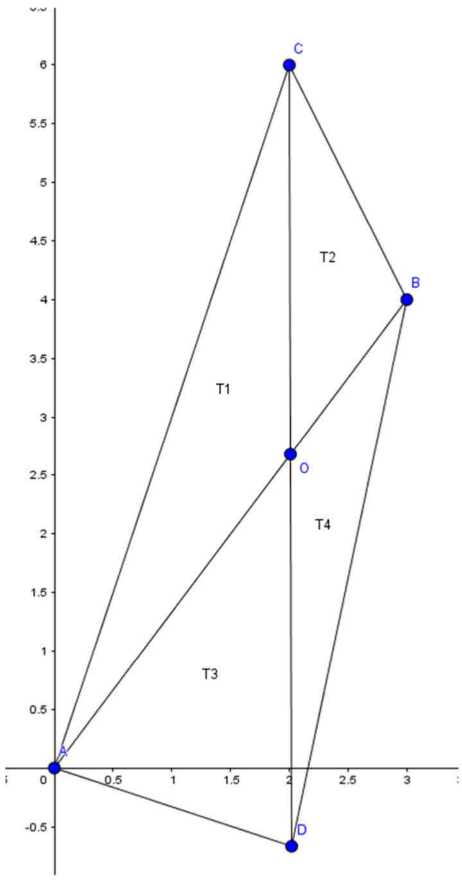
$(x_1, y_1) = (0, 0)$; $(x_2, y_2) = (3, 4)$; $(x_3, y_3) = (2, y)$; doppia area =10

Otteniamo l'equazione $3y - 8 = \pm 10$ da cui $y = 6$ oppure $y = -2/3$

La doppia soluzione, conseguente al più-o-meno davanti al 10, è dovuta al fatto che il determinante fornisce la doppia area col segno più o col segno meno a seconda che il percorso P1, P2, P3, P1 (che determina l'ordine delle righe della matrice) giri in senso destrorso o sinistrorso; ciò corrisponde a posizionare il terzo vertice – incognito – nell'uno o nell'altro dei due semipiani rispetto alla retta dei due vertici dati.

No, ci divertiamo troppo per smetter qui. Vediamo la soluzione di ***Emanuele***:

Per snellire la spiegazione ho fatto un disegno:



Dobbiamo trovare quante configurazioni permettano il tracciamento di una Aiuola di 5 mq, triangolare, in cui uno dei lati sia il segmento AB e un vertice appartenga alla retta $x = 2$. La risposta è naturalmente 2, in quanto due vertici sono A e B, Il terzo vertice dovrà essere posto alla coordinata $x = 2$ e potrà essere o "sopra" o "sotto" il segmento posto sulla retta $y = (4/3)*x$ per x che va da 0 a 3 .

Quindi basta trovare le y dei punti C e D.

Sappiamo che la somma delle aree dei due triangoli T1 e T2 dovrà essere 5:

$$T1 + T2 = 5$$

quindi si vede abbastanza agevolmente che :

$$(OC * 2)/2 + (OC * 1)/2 = 5$$

da cui:

$$OC = 10/3$$

lo stesso ragionamento lo possiamo fare anche con OD, T3, T4, quindi abbiamo:

$$OC = OD = (2*N)/3$$

Il punto O è situato alle coordinate (2, 8/3) quindi abbiamo che:

$$C(2, 8/3 + 10/3) \Rightarrow C(2, 6)$$

$$D(2, 8/3 - 10/3) \Rightarrow D(2, -2/3)$$

Bene, prima di concludere lasciamo spazio alla soluzione di ***Alessandro***, un nuovo solutore:

> Questo mese vorrei provare a rispondere a uno dei vostri indovinelli. Parto con quello che mi sembra meno difficile – visto che richiama concetti semplici di geometria – e così spero di riuscire fare almeno una trattazione esauriente. Ma questo spero me lo diciate voi alla fine di questa lettura.

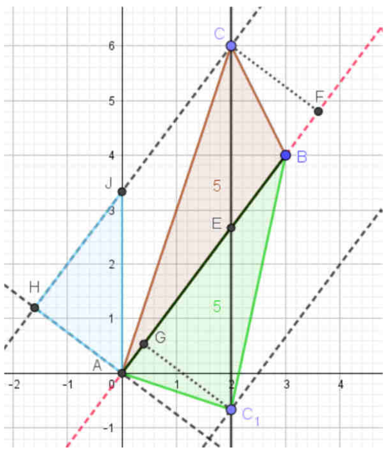
Il problema consiste nel trovare la posizione del (o dei vertici) C di un triangolo che abbia come base il segmento AB, con A(0;0) e B(3;4), il terzo vertice C sulla retta x=2, e come area 5.

Ora, già la scelta dei punti iniziali richiama la più famosa delle terne pitagoriche e si trova subito che la lunghezza di AB è la radice quadrata di $(X_B-X_A)^2+(Y_B-Y_A)^2$, cioè la radice quadrata di 25, ovvero 5. Giacché l'area di un triangolo è base per altezza diviso 2, a partire dalla base AB che giace sulla retta y=4x/3 e che divide il piano in due parti, vanno cercati, tra i punti che sono a distanza 2 dalla retta y, quelli che giacciono sulla retta x=2. Il luogo dei punti a distanza 2 dalla retta y è costituito evidentemente da due rette parallele a y, una sopra e una sotto, che quindi hanno lo spesso coefficiente angolare m=4/3. Per trovare anche la loro intercetta q, si può considerare il triangolo AJH formato dall'intercetta in questione (AJ), dal segmento di perpendicolare alla retta AB passante per l'origine O=A delimitato dall'origine stessa e dall'intersezione H con la retta parallela cercata, e dal terzo cateto HJ giacente sulla retta cercata. Per le proprietà dei fasci di rette parallele tagliate da trasversale, anche questo triangolo ha i lati nella proporzione 3:4:5. Nota la distanza tra le rette AH=2, si ricava velocemente l'intercetta AJ come i 5/3 di 2 cioè 10/3. Le due rette parallele cercate hanno quindi equazione y=4x/3 + 10/3 e y'=4x/3 – 10/3. Ora basta mettere a sistema tali equazioni con l'equazione della retta verticale x=2 per trovare le ordinate dei due punti C e C' cercati:

$$Y_C = 4*2/3 + 10/3 = 18/3 = 6 \text{ e } Y_{C'} = 4*2/3 - 10/3 = -2/3.$$

I due punti soluzione del problema sono dunque C(2;6) e C'(2;-2/3).

Se posso aggiungere, i punti C e C' sono ovviamente simmetrici, sulla retta x=2, rispetto all'intersezione di questa con la retta AB (sempre per le proprietà dei fasci di rette parallele, ved. disegno sotto).



Per trovare rapidamente una soluzione grafica, con uno dei tanti programmi gratuiti di geometria analitica (p.es. GeoGebra) bastava costruire i triangoli in questione sulla base AB e, facendo scorrere il punto C sulla retta x=2 fermarsi quando l'area calcolata dal programma assumeva il valore 5.

Approccio troppo tradizionale?

Esiste "troppo tradizionale" in matematica? Non lo sappiamo, ma facciamo i complimenti ad ***Alessandro*** per la sua prima soluzione. Siamo certi che questo problema sia stato una buona idea del Capo, speriamo che ne trovi degli altri. Alla prossima!

6. Quick & Dirty

A, B e C sono imparentati/coniugati tra di loro, e non ci sono matrimoni tra consanguinei.

[1] - Tra i tre ci sono il padre di A, l'unica figlia di B e il fratello/sorella di C.

[2] - Il fratello/sorella di C non è né il padre di A né la figlia di B.

Definite i generi di A, B e C.

Da [1], tra i tre ci sono un padre, una figlia e un fratello/sorella.

Se il padre di A fosse C, allora il fratello/sorella di C dovrebbe essere B. Quindi, da [2], la figlia di B dovrebbe essere A. Da cui A sarebbe la figlia di B e di C, e B e C sarebbero fratelli/sorella, il che non è permesso. Quindi, il padre di A è B. Da [2], il fratello/sorella di C è A. Quindi la figlia di B è C. In conclusione, da [1], A è il figlio di B, e quindi C è la sola femmina.

7. Pagina 46

Soluzione 1: Sia a il numero i elementi presenti in A ma non in B, b il numero di elementi in B ma non in A e c il numero di elementi sia in A che in B.

Il numero dei sottoinsiemi di A è 2^{a+c}, mentre il numero dei sottoinsiemi di B è 2^{b+c}, e quello dei sottoinsiemi sia di A che di B è 2^c.

L'insieme dei sottoinsiemi di A e dei sottoinsiemi di B conterrà delle duplicazioni, il cui numero è dato dal numero di quelli che sono sottoinsiemi sia di A che di B. Tenendo conto di questo, abbiamo:

$$2^{a+c} + 2^{b+c} - 2^c = 144.$$

$$2^c\,(2^a+2^b) = 2^c + 2^4 3^2.$$

$$2^a + 2^b = 1 + 2^{4-c}\,3^2.$$

Se a=0, allora $2^b = 2^{4-c}\,3^2$ ossia, equivalentemente, $2^{b+c-4} = 3^2$, il che è impossibile. Nello stesso modo, si ottiene una contraddizione supponendo b=0.

Da questo si ricava che il primo membro dell'ultima espressione deve essere pari, e quindi il termine 2^{4-c} può solo essere pari a 1 (altrimenti il secondo membro risulterebbe dispari), da cui c=4 e $2^a + 2^b = 10$.

Le uniche soluzioni di questa espressione sono 1 e 3 (intercambiabili sui valori di a e b), ma in entrambi i casi si ha che $a + b + c = 1 + 3 + 4 = 8$.

Soluzione 2: Possiamo supporre che $|A|\geq|B|$. Il numero dei sottoinsiemi di un insieme con c elementi è 2^c. Da cui,

$$2^{|A|} \leq 144 \leq 2^{|A|} + 2^{|B|} \leq 2^{|A|+1}.$$

Quindi, $|A|$=7. I 16 sottoinsiemi mancanti devono essere sottoinsiemi di B ma non di A. Da cui

$$16 = 2^{|B|} - 2^{|A\cap B|} = 2^{|A\cap B|}\,(2^{|B|-|A\cap B|} - 1).$$

La sola possibilità è $|A\cap B| = 4$ e $|B| - |A\cap B| = 1$, e quindi:

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B| = 7 + 1 = 8.$$

Che è il risultato cercato.

8. Paraphernalia Mathematica

Il bello di cominciare una serie a febbraio è che almeno per il primo anno la numerazione è facile (se vi chiamate von Neumann: i mesi sono zero, uno, due,…).

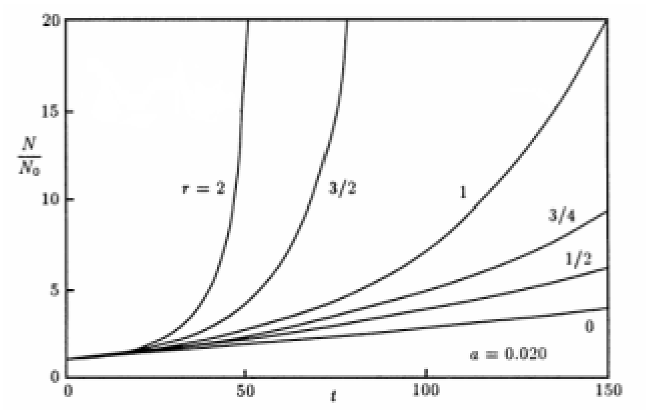
8.1 Crescete e moltiplicatevi [2] – L'economista iperbolico

Dicevamo che ci tenevamo il caso della l*egge di potenza* per la seconda puntata, e intendiamo mantenere l'impegno.

Nel finale del mese scorso avevamo analizzato alcuni casi tra *n*=0 e *n*=1, e avevamo promesso di tenerci per questa volta il caso *n*=2: qui, la soluzione risulta:

$$\frac{N}{N_0}=\frac{1}{1-at}.$$

E, nel caso questa equazione non vi terrorizzi abbastanza, nella figura a fianco tabuliamo alcuni valori della legge di potenza, inclusi i casi esaminati il mese scorso.



9 *…da paura…*

Si direbbe succeda qualcosa di piuttosto strano (e qui, meglio tornare alla nostra equazione): esiste un *valore critico*, *finito*, di *t* nel quale il valore della nostra funzione diventa infinito: nella fattispecie, quando

$$t = 1/a$$

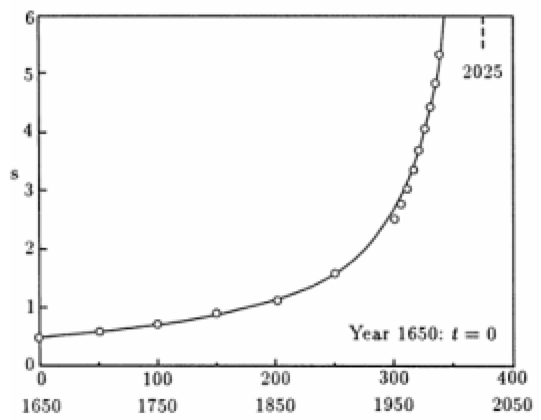
la nostra equazione "esplode", arrivando al valore infinito.

"Rudy, guarda che a inventare crescite impossibili ci riescono tutti, anche gli economisti..." Impossibili? Se vi prendete la briga di tabulare la popolazione mondiale tra il 1650 e il 1990... No, conoscendovi, non lo farete mai, quindi lo facciamo noi (o meglio, lo copiamo da chi lo ha fatto: Keyfitz, nel 1968. Popolazione in miliardi, la virgola è una "vera virgola", nel senso che indica i decimali):

Anno	Popolazione (10^9)
1650	0,510
1700	0,625
1750	0,710
1800	0,910
1850	1,130
1900	1,600
1950	2,525

Anno	Popolazione (10^9)
1960	3,307
1965	3,354
1970	3,696
1975	4,066
1980	4,432
1985	4,822
1990	5,318

Come sempre, i dubbi sono facilmente fugabili da un grafico, che trovate qui sotto.



10 *It's the Final Countdown… (cit. EUROPE).*

Insomma, secondo i calcoli, e se avete una fiducia infinita nell'esattezza delle formule (come amano dire i fisici, *"la realtà approssima le formule"*), il 16 luglio 2024, alle ore 02:24, la popolazione del globo terracqueo diventa infinita *[a quanto ci risulta, i calcoli sono stati effettuati sul fuso orario CET, quindi ricordatevi dell'ora legale].*

Va detto che a qualcuno questo modello sembra un po' troppo radicale: ad esempio, ***von Foerster*** sostiene che vada piuttosto utilizzato un modello di *crescita di coalizione*, nel senso che la crescita della popolazione umana debba essere vista come la crescita di un organismo unico (o, appunto, di una coalizione): la civilizzazione migliora gli standard di vita e quindi il tasso di natalità cresce più velocemente del tasso di mortalità: in pratica, il nostro a dipende da N, e cessa di essere costante.

Da cui:

$$\frac{dN}{dt}=a(N)N=aN^{\frac{1}{k}}N=aN^{1+\frac{1}{k}},$$

che, per k=1, è la nostra formula di prima.

...e questo, cambia qualcosa? Beh, sì. Secondo von Foerster, possiamo stare tranquilli sino al 13 novembre 2026, in questo caso[11].

Parliamo di chimica, che è meno deprimente.

Supponiamo una sostanza A che si trasforma in una sostanza B per dare infine origine ad un prodotto finale C. Supponiamo inoltre che questo cammino sia irreversibile: se indichiamo con k_i i rispettivi tassi di reazione, possiamo schematizzare la cosa come (...lo so, scritta malissimo... "*Damn it, Jim, I'm a Math Editor, not a Chemist!"*):

$$A \underset{\rightarrow}{k_1} B \underset{\rightarrow}{k_2} C$$

Se indichiamo con x, y, z le concentrazioni rispettive delle tre sostanze, possiamo ottenere tre equazioni differenziali (con le rispettive condizioni iniziali):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-k_1 x \\ \frac{dy}{dt}=-k_1 x-k_2 y \\ \frac{dz}{dt}=-k_2 y \end{cases} \quad \begin{cases} x(0)=x_0 \\ y(0)=y_0 \\ z(0)=z_0 \end{cases}$$

dove, nel nostro caso, y_0=z_0=0, ma volendo restare sulle generali non terremo conto di questo fatto: quello di cui teniamo conto è che, come diceva Lavoisier, "nulla si crea, nulla si distrugge, tutto si trasforma" o, più prosaicamente,

$$x + y + z = x_0 + y_0 + z_0 = r_0.$$

Prima di passare alla soluzione delle tre equazioni, *arzigogoliamo* un pochino attorno all'argomento. Siamo partiti da un esperimento chimico, ma molti modelli economici sono basati su leggi di questo genere, almeno secondo ***Sharif*** e ***Ramanathan***: se supponiamo

[11] Esiste in realtà un modello molto più ottimistico (il cosiddetto "modello modificato di crescita di coalizione") il quale sostiene che raggiungeremo i 38 miliardi nel 2060 e che, comunque, non supereremo mai i 50 miliardi. Ma ne parliamo poi.

una popolazione di indecisi all'acquisto di uno smartphone[12] economico (la nostra *x*): inizialmente il numero delle persone che lo acquista aumenterà (la nostra *y*), facendo diminuire *x*. Diventando sempre più esperti nel manovrare il telefono, dopo un certo periodo di tempo si orienteranno verso un modello più costoso ma con migliori prestazioni (la nostra *z*). Tutto più chiaro, ora?

Passiamo alla soluzione delle equazioni. La prima delle tre non rappresenta un problema:

$$x = x_0 e^{-k_1 t}$$

Un normale esponenziale negativo. Se sostituiamo nella seconda, otteniamo l'equazione:

$$\frac{dy}{dt} + k_2 y = k_1 x_0 e^{-k_1 t}$$

Che è abbastanza una brutta bestia, ma si riesce a risolvere: qualsiasi testo relativo alle equazioni differenziali vi spiega che per le equazioni del tipo $\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t)$ esiste una formula risolutiva con quattro comodi integrali, un paio dei quali ad esponente di *e* (...e qui, quasiquasi vi spiace di non aver messo qualche condizione iniziale pari a zero...):

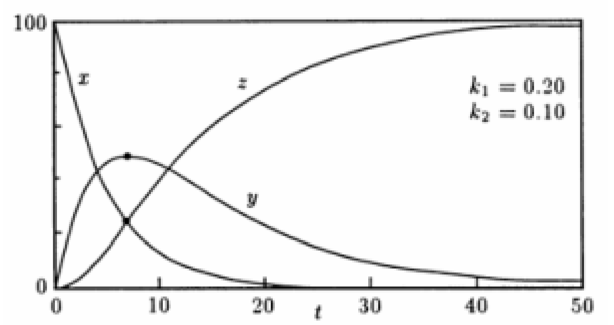
$$y = y_0 e^{-k_2 t} + \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$$

derivando rispetto al tempo (due volte), ponendo le derivate prima e seconda pari a zero e risolvendo in *t*, si scopre che la funzione ha un massimo e un punto di flesso. Coraggio, che è l'ultimo passaggio: se sostituiamo nella terza equazione il risultato ottenuto, abbiamo:

$$z = r_0 - y_0 e^{-k_2 t} - \frac{x_0}{k_2 - k_1}\left(k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t}\right)$$

che, sempre attraverso le derivate, si scopre non avere massimi o minimi per *t* positivi ma un punto di flesso, *nello stesso punto nel quale la nostra y*(*t*) *aveva il massimo* (...il che, ha una sua logica: quando cala la concentrazione del prodotto intermedio, la produzione del prodotto finale rallenta. I chimici sono pregati di non picchiarmi per le eventuali castronerie).

...ma come sono fatte, queste curve? Beh, per dei valori "comodi" ne abbiamo calcolata una. La trovate nel grafico qui di fianco, dove è evidenziato anche il punto di massimo della seconda funzione e il punto di flesso della terza (che *casualmente* – sì, la cosa è proprio casuale – coincide con il suo incrocio con la prima funzione).



11 ...*subito prima che cada la provetta.*

Ma adesso basta, con gli esponenziali. La prossima volta, usiamo delle funzioni *serie*.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[12] Siccome i Nostri ne parlavano nel 1982, l'esempio originale era basato su televisioni in bianco e nero o a colori. Il principio, comunque, ci pare lo stesso.