Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 229 – Febbraio 2018 – Anno Ventesimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM228 ha diffuso 3'249 copie e il 31/01/2018 per Google eravamo in 40'000 pagine.

Per dirlo con una frase fuori moda da alcuni anni, "*Fa la sua porca figura*".

È fondata opinione di alcuni complottisti che "Quelli di Codice" abbiano messo il titolo in basso per far star male la fascetta.

1. Pietruzze e sassolini

"I numeri perfetti, proprio come
gli uomini perfetti, sono molto rari"
(Cartesio)

Ci sono evidenti analogie tra discipline apparentemente molto distanti come l'etimologia e la matematica.

La prima, e certo più ovvia, è che entrambe hanno innegabili relazioni con il linguaggio. La matematica perché è essa stessa un linguaggio: è certo anche altro, e provare a definirla esclusivamente come una struttura linguistica volta alla comunicazione sarebbe assai riduttivo; ciò nondimeno la sua natura di linguaggio – e di linguaggio universale, perfino – è altrettanto incontestabile; un documento matematico può anche fare a meno di utilizzare le parole codificate dalle grammatiche e procedere solo attraverso formule e simboli, ma ha nondimeno una sua sintassi precisa, una sorta di narrazione che parte dai postulati per arrivare a delle conclusioni, e ha l'obiettivo indiscusso di comunicare delle informazioni dall'autore al lettore. L'etimologia, per contro, ha il linguaggio come oggetto unico di studio, e si concentra sulla storia delle parole che della lingua sono gli elementi costituenti.

Un'altra analogia è invece meno evidente, e sta tutta in quel peculiare processo di "compressione" degli elementi significanti. È opportuno chiarire subito che, in realtà, matematica e etimologia, in questo processo, procedono in direzioni diametralmente opposte: la matematica tende ad avanzare comprimendo in simboli sempre più compatti e maneggevoli i concetti complessi, mentre l'etimologia disseziona le parole per risalire ai significati originari; in un certo senso, tende a recuperare i diversi elementi che hanno concorso alla formazione della parola – magari conducendola poi ad assumere significati lontani dai componenti originari, e quindi inaspettati – in una sorta di processo analitico; la matematica invece procede mediante creazione di nuovi simboli aggreganti, che è ovviamente un autentico processo di sintesi. Sta di fatto che entrambe sono chiamate in causa, e con obiettivi del tutto simili, quando ci si chiede quale sia il vero significato di una proposizione, matematica o letteraria che sia.

1 *Equazione dell'amore o amore dell'equazione?*

A titolo di esempio, si prenda un'equazione ragionevolmente breve ed elegante; e siccome di questi tempi va di moda, consideriamo la celebre Equazione di Dirac[1]: la si ritrova spesso nella forma:

$$(\partial + m)\Psi = 0.$$

Ha innegabilmente del fascino: semplice nella struttura, perché arriva agli occhi con la semplicità di un prodotto di una grandezza per la somma di altre due, insomma una cosa ingenua come $(a+b)c = 0$, molto maneggevole. Al tempo stesso ha una certa dose di misticismo, che incute rispetto… se fosse davvero una cosa del tipo $(a+b)c = 0$, anche quelli che non erano i primi della classe in matematica possono facilmente concludere che o $c = 0$ o $a = -b$, se non fosse che quelle strane

[1] Dirac, Paul Adrien Maurice. Saprete già tutto su di lui, ma per un veloce ripasso si veda "*Non dire gatto…*", in RM103, Agosto 2007.

lettere greche, al posto delle familiari lettere del nostro alfabeto, mettono un po' paura. Si potranno davvero trattare come degli a e b qualunque?

La situazione si complica poi drammaticamente (e arricchisce emotivamente), non appena ci si imbatte in qualche articolo che presenta la formula come "l'Equazione dell'Amore". A questo proposito, non possiamo non confessare di sentirci un po' in imbarazzo: su queste pagine iniziali della Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa abbiamo fatto utilizzo, abuso, forse anche scempio di similitudini, farneticazioni, voli pindarici e quant'altro umanamente possibile per poter raccontare come la matematica sia onnipresente, diffusa, riconoscibile virtualmente in ogni legge fisica e quasi in ogni azione umana, e di conseguenza non siamo certo un buon pulpito per poter fustigare delle immagini letterarie volte a pubblicizzare aspetti intriganti dell'amata scienza. Ciò detto, quando qualcuna di queste immagini letterarie ha successo, c'è il rischio che proprio questa sua diffusione arrivi – un po' come nel vecchio gioco del telefono senza fili – ad assumere significati non propriamente giustificabili dal punto di vista scientifico, per quanto la scienza sia notoriamente molto tollerante verso i suoi appassionati divulgatori.

Si ricorderà il caso del Bosone di Higgs, che è ormai quasi impossibile incontrare (almeno nella letteratura divulgativa, non certo in quella accademica) disaccoppiato dal suo inevitabile attributo, "la particella di Dio". Come qualche lettore ben informato ricorderà, il nomignolo che le è rimasto attaccato addosso nasce in realtà da una sorta di imprecazione, più che dal mistico desiderio di sottolinearne la cruciale importanza (divina o meno che sia). E se il processo di perdita del significato reale è inevitabile (e, ripetiamo: anche inizialmente positivo, finché procede come innocuo alfiere pubblicitario della scoperta scientifica), quando viene troppo stressato insorgono realistici rischi di confusione, se non direttamente di informazione sbagliata.

Così, finché "l'Equazione dell'Amore" rimane come espressione in grado di suscitare interesse verso la meccanica quantistica, la fisica, o la scienza in generale, non può non essere benvenuta. Certo, se arriva ad essere protagonista di romanzi d'amore, giustificatrice di passioni inestinguibili nonostante la distanza siderale (tutto per colpa dell'entanglement), e ispiratrice di canzoni al festival di Sanremo, qualche rischio di sovraesposizione, indubbiamente, c'è[2]. Se non altro perché, nel gioco perverso della semplificazione comunicativa, si rischiano paradossi tutt'altro che scientifici ("*Tre anni fa mi hai fatto una carezza, Marta: ora non puoi andare a Timbuctu in missione umanitaria, perché i nostri sistemi quantistici sono indissolubilmente legati… lo dicono Dirac e la mia mazza da baseball*").

Tornando all'equazione, non ci vuole troppo a capire che i presupposti che convergono all'interno della "semplice" espressione sono tanti e tali che è oggettivamente rischioso infilarla in un discorso alla macchinetta del caffè per impressionare i colleghi. In parte, questo vale per qualsiasi formula, naturalmente: ma è indubbio che ci sono equazioni più complesse di altre. Tra gli otto simboli che compongono quella di Dirac ve ne sono cinque apparentemente innocui – le parentesi, il più, l'uguale e lo zero – che in realtà innocui non sono affatto, al punto che su ognuno di essi si potrebbero scrivere interi libri[3]; ma nel caso specifico, che è quello della matematica superiore applicata alla fisica teorica, i simboli residui sono davvero un condensato mostruoso di concetti.

[2] Ma è davvero difficile capire quando il danno, se danno c'è, comincia ad essere maggiore del benefico effetto di divulgazione. Siamo virtualmente certi che un caratteraccio snob come quello di P.A.M. Dirac sarebbe inorridito nel vedere come viene romanticamente esaltata la sua equazione, ma resta il fatto innegabile che quando, recentemente, il suo nome è stato citato sul palco del Festival di Sanremo, ha raggiunto un numero di orecchie di italiani assolutamente impensabile per i normali canali di divulgazione. Restiamo come l'asino di Buridano…

[3] E, per fortuna, qualcuno lo ha fatto davvero: anche senza voler esplorare la pletora di testi dedicati unicamente alla storia e all'importanza dello zero, è fortemente consigliabile avventurarsi nella lettura di libri dedicati proprio ai simboli matematici, come il celebre "*A History of Mathematical Notation*", di Florian Cajori; non ci risulta però che esistano edizioni disponibili in italiano, ma si rimedia facilmente dirigendosi sul recente "*Storia dei simboli matematici*", di Joseph Mazur (Il Saggiatore, 2017). E anche se foste a corto di tempo e denaro non avreste scuse lo stesso, perché c'è anche l'economicissimo e breve e-book di Peppe Liberti, "Più per meno diviso" (40K Unofficial).

Trattandosi di un'equazione di fisica, gran parte delle difficoltà di estrarne le implicazioni sono sostanzialmente di natura fisica. La m indica, come da tradizione, la massa, e ciò sembrerebbe confortante, almeno a prima vista: la massa è forse la grandezza fisica dall'aspetto più concreto e tangibile di tutta la fisica; più della velocità – che è grandezza già derivata – più della lunghezza, più del tempo, che, per quanto basilari e primarie, non hanno la stessa predisposizione ad essere associate a sensazioni dirette. Un corpo pesa sulle mani in maniera più comprensibile e immediata di quanto si possa intuire lo scorrere del tempo o misurare la pressione del vento sulla faccia durante una corsa. Solo che questa percezione di concretezza vale essenzialmente per il mondo macroscopico: a livello quantistico (che è quello, sia detto per inciso, in cui l'equazione di Dirac esercita le sue funzioni istituzionali) il concetto di massa è uno dei più problematici. Il già citato bosone di Higgs era molto atteso e ricercato anche e soprattutto perché sistema un po' meglio la massa nella complessa fenomenologia delle particelle elementari. Nel caso specifico di quest'equazione, poi, la massa è protagonista particolare e assoluta, anche a causa della sua imprevista predisposizione ad assumere valori negativi (al punto che molti commentatori puntualizzino come il segno "+" che la precede dovrebbe in realtà essere un "–").

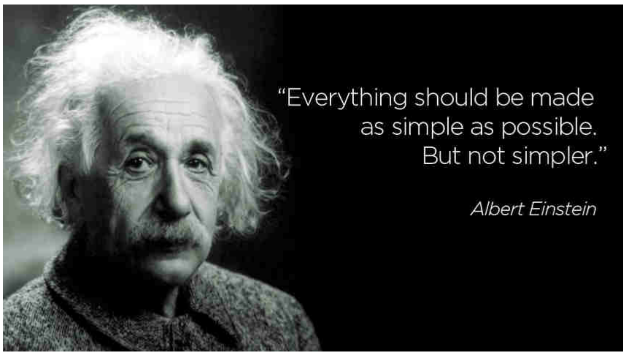
2 *L'equazione nell'Abbazia di Westminster, davanti alla tomba di Newton.*

L'altro simbolo, la leggendaria ψ che è la portabandiera delle equazioni quantistiche, non lascia molte scelte: o la si liquida con nonchalance dichiarandola come "funzione d'onda", o ci si deve avventurare necessariamente in lunghe dissertazioni matematico-storico-scientifiche anche solo per provare a dare una pallidissima idea di cosa rappresenti. E anche quella pallidissima idea potrebbe essere sbagliata visto che, in ultima analisi, gli stessi addetti ai lavori concordano che il significato "fisico" della ψ è qualcosa soggetto ad interpretazioni, non a certezze assolute[4].

Quello che resta è un simbolo puramente matematico, quella ∂ che agli occhi di un matematico richiama immediatamente il concetto di derivata. Si tratta forse proprio del concetto "ponte" tra diverse concezioni della matematica; per la maggior parte degli esseri umani, la matematica resta la disciplina che si insegna nei primi anni scolastici, che tratta essenzialmente di numeri, operazioni di somma e prodotto, con qualche incursione nella geometria euclidea. Se si arriva ad approcciare i rudimenti dell'analisi matematica e ad affrontare concetti come quelli di limite e di derivata, li si vive un po' come una sorta di rito di iniziazione a una nuova visione della matematica. Enti statici come i numeri cominciano a muoversi, le funzioni fioriscono sugli assi cartesiani e corrono impavide verso luoghi che fino ad allora sembravano più mistici e filosofici che matematici, come gli infiniti e gli infinitesimi. Si tratta di un passaggio cruciale e difficile, un vero e proprio cambio di paradigma; ciò non di meno, si tratta pur sempre solo di un primo passo. Se "divulgare" il concetto di derivata a partire dal limite del rapporto incrementale di una funzione di variabile reale è cosa forse più complicata e laboriosa di quanto lo sia semplicemente studiarla e capirla direttamente dai libri di testo, è opportuno ricordare che tra quella derivata iniziale e la ∂ che compare nell'equazione di Dirac giacciono – compressi in un unico simbolo – una pletora di concetti, limitazioni, generalizzazioni,

[4] Ciò non di meno, va precisato che l'interpretazione di "densità di probabilità" data da Max Born è condivisa e accettata praticamente da tutta la comunità dei fisici. Di Born abbiamo parlato un po' più approfonditamente in "*Maestro e Discepolo*", RM155, Dicembre 2011.

precisazioni che semplicemente eliminano quasi del tutto il significato originale di "derivata" dalla quella ∂ sfacciata che troneggia un mezzo all'espressione. Anche solo provare ad elencare alcuni degli elementi costitutivi che la strutturano (variabili complesse, derivate parziali, matrici, lagrangiane, hamiltoniane… per non parlare della parte fisica, che richiede concetti come spinori, principi relativistici, costanti quantistiche e qualche altro milione di oggetti) è sufficiente a stroncare anche l'entusiasmo del divulgatore meglio intenzionato. E il tutto senza contare che di equazioni, ben compresse, dentro quella formula ce ne sono quattro.



3 *L'attribuzione della citazione a Einstein non è sicura*[5], *ma il suggerimento che veicola è sicuramente valido*

Non si può quindi evitare di applicare un gigantesco corto circuito, e affidarsi ad una sintesi estrema: ma se questo è talvolta possibile con pochi *caveat* da anteporre per tutelare il lettore[6], in altri casi la prudenza suggerirebbe un approccio più cauto. E tanto più la suddetta "sintesi estrema" diventa qualcosa di molto evocativo dal punto di vista emozionale ("due enti che hanno interagito una volta continuano a farlo in eterno"), tanto più occorre delimitare oggettivamente il significato reale della conclusione scientifica.

Deontologia della divulgazione scientifica a parte, il punto originale ed essenziale resta l'incredibile quantitativo di informazione contenuta in un singolo simbolo di formula. Scavare all'interno della ∂ nell'equazione di Dirac equivale all'avventurarsi nel proverbiale pozzo senza fondo, che richiede (e consente) diramazioni virtualmente in ogni sezione della matematica e della fisica. Ed essendo ambedue queste scienze "esatte", per lo meno nella formalizzazione delle definizioni, l'esplorazione a ritroso dei significati è sempre possibile con fiscale esattezza.

Lo stesso lusso non può permetterselo l'etimologia, perché le parole non nascono regolamentate da definizioni condivise, ma dalle diverse, variegate, diffuse esigenze di comunicazione degli esseri umani. In compenso, la loro capacità di diffondersi, proliferare, mescolarsi e influenzarsi vicendevolmente è molto maggiore, proprio perché di utilizzo non regolamentato e soprattutto viralmente diffuso. Così, al pari di un simbolo matematico anche le parole sono esplorabili, decostruibili, enucleabili, e la ricerca dei significati originari è, oltre che inevitabilmente istruttiva, spesso assai sorprendente.

Gli amanti della matematica hanno ben presente, ad esempio, l'etimologia della parola "calcolo"; è una conoscenza che certo dividono con i chirurghi, visto che il significato di "piccola pietra" è per loro di evidenza diretta quando sono chiamati ad estrarli da qualche zona del corpo dei loro pazienti. Sia i calcoli renali sia i segnalini che venivano usati nelle operazioni di conteggio degli antichi sono a tutti gli effetti delle pietruzze, e la corrispondente parola latina ("*calcŭlus*"), a sua volta derivata dal corrispondente termine greco, ha sia il suffisso diminutivo ("*-ŭlus*") incaricato di indicarne le ridotte dimensioni, sia la radice che garantisce la natura rocciosa. Naturalmente, nonostante l'apparente totale identità, compare invece subito qualche differenza; gli esperti sanciscono che

[5] Un'interessante ricerca sulla corretta o meno attribuzione a Einstein la si può trovare qua: https://quoteinvestigator.com/2011/05/13/einstein-simple/.

[6] L'equazione più famosa del mondo, l'einsteiniana $E=mc^2$, è un esempio di equazione assai più facilmente divulgabile: non che non richieda anch'essa delle precisazioni (per esempio sulla E, che è "energia a riposo", assunzioni sulla velocità della luce, che è considerata costante come "postulato", e altro…) ma dal punto di vista fisico è di valenza generale, e dal punto di vista matematico è virtualmente solo un'identità, visto che nulla vieta di considerare c=1 (come del resto fanno tutti i fisici che hanno a che fare con la Relatività) riducendola così, dal punto di vista matematico, quasi solo a una definizione.

mentre il senso "medico" pare derivare con continuità dal latino, il significato matematico pare essere invece una sorta di ritorno recente, passato attraverso il verbo "calcolare".

È solo l'inizio di un viaggio di cui non sarà possibile vedere la fine, perché non abbiamo certo la possibilità di ricostruire pienamente la nascita del linguaggio, le iniziali attribuzioni di significati ai suoni emessi dagli ominidi, lo stabilirsi progressivo delle convenzioni che hanno fatto sì che una comunità si sia ritrovata ad associare un senso comunicativo preciso ad una serie di emissioni vocali codificate: ma le prime tappe del percorso bastano e avanzano a suscitare interesse. La parola latina di riferimento, la "radice" del termine è "*calx, calcis*", la cui traduzione più immediata è "calce", che effettivamente ha una chiara natura minerale. A dire il vero, però, la natura delle parole mostra subito la sua complessa versatilità: già in latino *calx* ha almeno due significati, uno dei quali è traducibile con *calcio*, ma non nel senso minerale (e tanto meno in quello dello sport nazionale), quanto in quello legato a "*calcagno*", ovvero "estremità inferiore". È da questo significato che l'italiano genera locuzioni come "calcio del fucile", il meno usuale "calcio dell'asta" (probabilmente assai più normale per gli antichi romani), e per estensione il significato di "piede" e da qui anche quello a noi più familiare di "colpo dato con il piede".

4 *Sorprendenti parenti linguistici*

Quel *calx* che invece genera, per diminuzione, il "calcolo" che ha dato inizio alla ricerca, ha generato parole prevedibili come calcio (nel senso di minerale), calce, calcare. Si rimane un po' in dubbio se "calco" possa venire da questo significato (i calchi si prendono con un minerale friabile come il gesso, il calcare), o dall'altro (visto che il calco più immediato e naturale, verosimilmente, è quello che si lascia con la pressione del piede); in compenso, è abbastanza certo che "calx" abbia preso, per estensione, anche il significato di "fine, termine", e questo per l'abitudine, già in tempi antichi, di segnare con una riga di calce la linea di arrivo delle gare di corsa, e comunque i confini tra sezioni di terreno comune. Ed è per quest'uso di segnare con la "calce" la fine del percorso che in italiano sopravvive la locuzione "firmare in calce", che in buona sostanza esplicita il luogo ove apporre il proprio autografo: alla fine del documento, appunto, quasi a voler dichiarare, così, d'averlo letto fino in fondo. E se questo può stupire, è ancora niente rispetto ad una parola che deriva sempre da questa abitudine di delimitare con la calce zone dei terreni di gara: il recinto iniziale in cui erano virtualmente rinchiusi i concorrenti alla partenza era pur sempre disegnato con la calce, e la parola che lo designava ha finito con il comprendere nel suo significato ben altri recinti destinati agli esseri umani: carcere.

Dal punto di vista dell'interesse matematico, quel che si può incontestabilmente concludere è che calcolare è sempre stato un esercizio che gli uomini hanno affrontato con l'ausilio di qualche sorta di strumento, a cominciare dai sassolini. Del resto, calcolare è un'operazione che sembra implicare attività più complesse del semplice contare, e la necessità di supporti esterni si è subito manifestata. Ma a questo punto è inevitabile, dopo aver riconosciuto l'importanza dei sassetti in matematica attraverso l'etimologia di "calcolare", chiedersi da dove venga il verbo "contare".

La prima sorpresa arriva dal fatto che "contare" sembra essere nient'altro che la contrazione del più lungo verbo latino "*computare*", che del resto sopravvive ancora abbastanza arzillo anche in italiano. Il dizionario etimologico poi ci costringe a osservare quanto avrebbe dovuto saltare subito agli occhi, e cioè che "computare" è naturalmente dato dall'accostarsi di "*con*" e "*putare*", e "*putare*" è verbo nobilissimo, perché mostra l'attività essenziale della mente: pensare, credere, ritenere. Emerge un significato bellissimo, e davvero significativo: "contare" significa dunque "pensare assieme", naturalmente non nel senso attivo di due menti congiunte nell'operazione (si rischierebbe subito un'altra deriva eccessivamente romantica), quanto in quello passivo degli oggetti contati: sono "pensati insieme", quindi considerati simili, e appunto "contabili" in quanto dotati della stessa natura. Non si possono sommare mele e pere, ma tutte le pere, tutte le mele, tutte le cose simili possono essere contate, pensate insieme.

Quantomeno, l'etimologia conferma qualcosa che non è particolarmente sorprendente: contare è un'attività primaria, essenzialmente mentale, mentre calcolare è azione successiva, che certo presuppone la prima e che per essere svolta a dovere richiede supporti, dal sassolino al Blue Gene/Q. Ciò detto, è facile poi constatare che i significati portati alla luce dall'etimologia vengono poi facilmente modificati dall'uso comune delle varie lingue.

5 *Gli spagnoli ci provano*

La lingua italiana, ad esempio, palesa degli evidenti problemi da risolvere qualora si prefiggesse di non voler veicolare disparità di genere: l'abitudine di usare desinenze diverse per i nomi maschili e femminili, l'assenza del genere neutro, la gerarchia nei plurali misti a favore delle desinenze maschili: tutti elementi che la rendono tutt'altro che predisposta alla piena parità di diritti. Si discute parecchio se sia meglio usare termini identici indipendentemente dal genere ("sindaco, presidente") per sottolineare l'uguaglianza tramite l'invarianza, o invece declinare anche quelli che solitamente non vengono declinati ("sindaca, presidenta") proprio per rafforzare la parità aggiungendo parole al femminile. Quale che sia la scelta preferita, la questione è ovviamente solo la punta dell'iceberg: l'innocua frase "Mario e Maria sono andati al cinema" porta già in sé una predominanza maschile nel participio passato declinato al plurale, che è insolubile a meno di sbilanciare a favore dell'altro genere ("Mario e Maria sono andate al cinema"), che sarebbe sovracorrezione parimenti non equa; o censurando artificiosamente le declinazioni ("Mario e Maria sono *andatx* al cinema"), come da qualche parte si prova a fare, con oggettive difficoltà di lettura e semi-impossibilità di pronuncia). Altri difetti sono più sottili e significativi: tornando alle parole connesse al calcolo, non v'è dubbio che "calcolatrice" sia il nome femminile attribuito una macchina con minore capacità (e dignità) di quella che viene maschilisticamente chiamata "calcolatore". La calcolatrice può solo fare "calcoli", il calcolatore invece è in grado di elaborarli. Dal punto di vista linguistico, questo introduce un nuovo termine, "elaboratore", che comunque si fregia del genere maschile.

L'italica questione del genere è comunque disinnescata, almeno parzialmente, dall'invasione e predominanza del termine inglese che ha quasi mandato in soffitta sia "calcolatore" che "elaboratore"; l'indeclinabile "computer" è ormai a tutti gli effetti parola regina anche in italiano[7]. L'ingresso a gamba tesa dell'inglese costringe a una certa revisione etimologica: si è indugiato sulla differenza di significato tra "contare" e "calcolare", ma "computer" discende con tutta evidenza da "*to compute*" che sembra palesare la strettissima parentela con l'italico "computare", e quindi con "contare". In realtà, i dizionari inglesi danno "*to calculate*" e non "*to count*" come primo sinonimo di "*to compute*", quindi l'osservazione è probabilmente peregrina; ma ci dà comunque il destro

[7] In quella soffitta, "elaboratore" e "calcolatore" saranno accolti dal vetusto e creativo "cervello elettronico" che trionfava nei media qualche decennio fa. Non vi troveranno "calcolatrice" proprio per la differenza cruciale di significato, che caratterizza oggetti comunque vivi e diffusi, ma è magra consolazione: l'italiano non ammette neutro, e "computer", per quanto indeclinabile, si trascina dietro aggettivi e verbi coniugati al maschile.

di restare in tema, se non altro perché, almeno per un piccolo periodo del XX secolo, la parola "computer" era associata assai più facilmente alle femminucce che ai maschietti.

A prescindere dalla lingua e dalle mutazioni di significato, computer e calcolatore sono termini non solo intercambiabili, ma anche svincolati dalla materia che li costituisce: è ormai assai difficile immaginarsi un "computer" che non sia una macchina, ma non c'è dubbio che il termine "calcolatore" possa adattarsi bene anche a un essere umano (e anche nel normale e primigenio senso di "esecutore di calcoli", non in quello dispregiativo di "persona che agisce in base al proprio interesse"). E di persone fatte di carne e ossa in grado di eseguire i calcoli – in fretta e bene – c'è stato un gran bisogno poco prima dell'avvento dei grandi calcolatori fatti di ferro e cavi elettrici.

E le donne erano considerate più affidabili, per fare i calcoli. O forse erano considerate solo parimenti affidabili ma meno costose, fatto sta che le società che avevano bisogno di eseguire un gran numero di calcoli si affidavano generalmente a "*computers*" che portavano gonne e orecchini, prima di affidarsi a quelli con schede perforate e valvole. Il film che meglio descrive il lavoro di queste persone è certamente "*Hidden Figures*" di Theodore Melfi, arrivato in Italia con il titolo[8] "*Il diritto di contare*".

6 *"Il diritto di contare"*

Non c'è dubbio che sia meglio vedere il film che sentirne parlare, e pertanto non ci si soffermerà troppo nel raccontarlo: ma vale davvero la pena di essere visto, e non solo per ragioni matematiche. Le battaglie civili e professionali di persone con una doppia, pesante discriminazione – il sesso femminile e la pelle nera – sono raccontate in un periodo (quello dei primi voli spaziali della NASA) e in un luogo (la Virginia ancora segregazionista) in cui il peso delle differenze era davvero opprimente, assai di più di quanto lo sia oggi, e per quanto ancora oggi si sia parecchio distanti dall'equità.

Tra gli altri aspetti, il film apre una finestra sul ruolo cruciale che i computer umani hanno avuto prima che la grossa ferramenta dell'IBM entrasse nei locali delle istituzioni americane, non solo la NASA; e rivelando così l'esistenza di un gran numero di "professionisti della matematica" che erano al di fuori di quelle che oggi sembrano le sole sedi "naturali" dei matematici: il mondo accademico e quello della didattica. Tra questi professionisti c'era anche una cameriera polacca.

[8] Titolo che perde il bel gioco di parole della versione inglese, dato che "figures" ha il doppio significato di cifra e traslato di figura, personaggio. Parlando di cifre nascoste si fa riferimento al calcolo di precisione (con molte cifre dopo la virgola), e i personaggi nascosti sono ovviamente le sottopagate donne che dietro alle scene risolvevano complessi calcoli matematici per permettere agli aitanti astronauti (uomini) americani di raggiungere le stelle.

7 *Gertrude Blanch*

Gertrude Blanch nasce con il nome di Gittel Kaimowitz a Kolno, una cittadina non troppo distante da Varsavia, il 2 Febbraio 1897, in tempi in cui sul luogo della sua nascita regna ancora lo zar di tutte le Russie.

La famiglia è numerosa e povera; suo padre Wolfe decide pertanto di emigrare negli Stati Uniti; nel 1907 sua madre Dora e le due bambine più piccole (tra cui Gertrude, che è la minore di sette fratelli) raggiungono il padre a New York. Qui Gittel diventa presto Gertrude, che appare essere il nome inglese più vicino, e frequenta le scuole americane fino al raggiungimento del diploma alla Eastern District High School di Brooklyn, nel 1914. L'anno del diploma è però anche l'anno in cui suo padre muore, così Gertrude decide di trovarsi un lavoro, e a diciassette anni inizia a fare la cameriera per contribuire alle ridotte risorse economiche della famiglia. Non sembra essere un lavoro provvisorio, da giovani in attesa di un posto migliore che fanno lavoretti per pagarsi le spese: continua infatti senza interruzioni di sorta fino al 1927, quando anche la madre muore. A trent'anni, Gertrude comincia a pensare che può ottenere qualcosa di più gratificante dalla vita, e decide di lasciare il lavoro per frequentare i corsi serali dell'Università di New York; l'idea di perdere una collaboratrice evidentemente assai brava spaventa il suo datore di lavoro al punto di offrirsi di pagarle gli studi a patto che restasse a lavorare con lui.

Così, Gertrude studia e lavora, e studia matematica e fisica. Ottiene il primo grado di laurea in entrambe le materie nel 1932, e con menzione di merito; questo la convince a proseguire gli studi, e nel 1934 ottiene il Master dalla Cornell University. L'anno dopo è già matura per ottenere il Ph.D. con una tesi di geometria algebrica sulle trasformazioni di Veneroni.

Nel frattempo, ha cambiato cognome, ma non per ragioni di matrimonio: già nel 1932 ha rinunciato a Kaimowitz, verosimilmente troppo astruso per le orecchie americane. Prendendo un cognome che è solo leggermente diverso da quello della madre, Dora Blanc: ormai si chiama ufficialmente Gertrude Blanch.

Anche se la sua tesi è innovativa e viene pubblicata, la carriera accademica resta un percorso difficile da intraprendere: una supplenza annuale in un college, poi un lavoro fisso da contabile in un'azienda di fotografia. Talmente fisso che non è facile immaginare come possa tornare a fare ricerca, ma tutto sta, come sempre, nella volontà di continuare a mettersi in gioco. Gertrude, per riempire le serate, decide di seguire un corso sulla Relatività tenuto da Arnold Lowan al Brooklyn College. Il corso serale non è particolarmente seguito dagli studenti, generalmente troppo stanchi per mostrare entusiasmo: così, le relazioni che scrive Gertrude (che peraltro ha già una preparazione di gran lunga superiore alla media dei frequentatori) colpiscono il docente. Gertrude e Lowan tornano a casa usando lo stesso autobus, e cominciano a chiacchierare: Lowan scopre che la sua studentessa è una matematica con tanto di Ph.D., e in men che non si dica le chiede se vuole partecipare allo studio che gli era stato proposto di condurre, il "*Mathematical Tables Project*". Gertrude, naturalmente, accetta.

Non ci vuole molto capire in cosa consista il "Progetto Tavole Matematiche" a cui Gertrude Blanch si unisce: si tratta di risolvere migliaia di problemi matematici ogni giorno, e di organizzarne i risultati in apposite tavole. È abbastanza difficile capirne l'importanza adesso, quando con un comune smartphone si riesce ad avere virtualmente il valore di qualsiasi funzione elementare nel giro di secondi, ma a quei tempi anche il calcolo di un banale seno o coseno andava fatto a mano, o ricercato su appositi manuali che lo riportavano.

Il "*Mathematical Tables Project*" intende produrre manuali del genere. Per farlo, mobilita un esercito di "calcolatori umani", e Gertrude si ritrova in breve a coordinare il lavoro di 450 persone che calcolano, calcolano, calcolano. I loro prodotti finiti sono 28 volumi di tavole di funzioni esponenziali, logaritmiche, trigonometriche. Nella gran parte di essi non si troverà mai neppure un errore. Il Progetto continua anche durante la Seconda Guerra Mondiale, quando diventa parte dell'Ufficio Federale degli Standard: Blanch è sempre parte di esso, e contribuisce a generare numeri e tavole per l'esercito, per la marina, e anche per il Progetto Manhattan.

8 *Il senatore Joseph R. McCarthy*

La guerra è un mostro che genera mostri, e il dopoguerra è un lungo periodo che dovrebbe essere destinato a rimuovere le cause delle follie umane, non a rigenerarle: ma spesso le cose funzionano in maniera diversa. Le donne protagoniste de "*Il diritto di contare*" devono combattere contro pregiudizi di genere e pregiudizi razzisti: la pelle di Gertrude è più chiara della media degli americani, ma deve ugualmente difendersi contro altri tipi di pregiudizi. Nonostante abbia fatto certo la sua parte di fedele americana durante la guerra, la caccia alle streghe del senatore McCarthy si avventa su di lei: alla fin fine si tratta di una immigrata dell'Europa Orientale, e poco conta che abbia vissuto negli USA da quando aveva dieci anni. La commissione per la repressione delle attività antiamericane punta gli occhi su di lei soprattutto perché sua sorella è iscritta al Partito Comunista, e questo è sufficiente per ipotizzare che Gertrude possa essere una spia sovietica. Ipotesi rafforzata da indizi preoccupanti e evidenti, come il fatto che non si sia mai sposata o abbia avuto figli.

Gertrude riesce a dimostrare di non essere una spia, fuga tutti i sospetti su di lei, e riprende serenamente il suo lavoro. Poi, al pari delle protagoniste del film, anche lei, computer umano, deve fare i conti con i computer di ferro che stanno arrivando in tutti i laboratori. E, al pari di loro, anche Gertrude riesce a sopravvivere e a rinnovarsi; il suo lavoro, per anni, è consistito nella creazione di algoritmi che riducessero il tempo di calcolo dei calcolatori umani, e di persone del genere c'è un bisogno spasmodico adesso che i computer umani non sono più. Si adatta benissimo al cambiamento tecnologico, e diventa così esperta nel trattare le macchine che David Grier finirà col dire "*Gertrude Blanch è allo stesso tempo l'ultima e più importante dei computer umani e una delle prime analiste digitali per i computer elettronici*".

Nel frattempo, il suo lavoro l'ha condotta a essere una delle maggiori esperte mondiali di alcune famiglie di funzioni; la sua memoria "*Le espansioni asintotiche per i periodi di ordine dispari delle funzioni di Mathieu*" viene pubblicata dalla American Mathematical Society nel 1960, e qualche anno dopo pubblica due volumi di tavole sugli autovalori delle stesse funzioni. Volente o nolente, è diventa la massima esperta mondiale di quella famiglia di funzioni.

Va in pensione a settant'anni, nel 1967; lavora ancora come consulente per la Ohio State University per tre anni, e nel 1970 si ritira definitivamente in California. Non riuscirà a spegnere novantanove candeline per un pelo, un mese appena.

Vita lunga e tutt'altro che semplice: ma, ci auguriamo, piena di soddisfazioni, di battaglie vinte e di felicità.

2. Problemi

2.1 Legge e Ordine!

No, dico, sembra che lo facciano apposta.

I VAdLdRM, intendiamo. Che ormai dovrebbero avviarsi verso una posata e seria maturità, ma si divertono ancora a fare scherzi degni dell'asilo (nido). L'ultima che hanno trovato è quella di mettere in parziale disordine l'enciclopedia.

Rudy è particolarmente affezionato alla sua prima enciclopedia[9], che lo ha seguito nelle peregrinazioni sue e della famiglia dalla più tenera età: ancora adesso, questa fa bella mostra di sé nel *Caer Abaq*, che poi sarebbe il suo nanostudio[10]: quei due scapestrati ogni volta spostano i volumi in modo tale che uno e uno solo degli n che compongono l'enciclopedia sia seguito da un volume con numero d'ordine minore: tutti gli altri, mantengono un ordinamento crescente.

E Rudy rimette tutto a posto.

E loro rimettono in disordine.

In un modo diverso.

Ora, la domanda è: "*Quousque tandem?*" Nel senso, quante disposizioni di questo tipo hanno i due teppisti? Il tutto supponendo una pazienza (da parte di Rudy, che rimette in ordine) sostanzialmente infinita?

2.2 Pianificazione a (si spera) lungo termine

I giardini, in questa stagione, sono di una tristezza impressionante: quando poi sono abbandonati da tempo, ricordano, come diceva un vecchio fumetto, "un funerale di terza classe sotto la pioggia". E questo (il giardino, non il funerale) è esattamente quanto abbiamo davanti.

Ora, in questa stagione, neanche a pensarci di mettersi a scavare: comunque, un minimo di *design* si può fare, ed è proprio qui che nasce il problema.

Tra i vari ruderi presenti nel giardino c'è il cordolo di un vecchio sentiero: questo è perfettamente rettilineo e corre da A a B, come ogni segmento che si rispetti: per capirci, in un sistema di assi cartesiani, A(0,0) e B(3,4). La nostra idea, al momento, è di utilizzare questo cordolo come bordo di un'aiuola triangolare.

Durante l'esplorazione, con indubbio sprezzo del pericolo, abbiamo notato che in quella che sembra la retta x=2 del nostro piano cartesiano il terreno ha l'aria più morbida, ed è notorio che nei vertici bisogna scavare un mucchio: quindi, vorremmo mettere il vertice C della nostra aiuola su quella retta.

Non solo, ma considerazioni sulla quantità di bulbi disponibili da piantare nell'aiuola ci impongono un'area pari a 5 (metri quadrati, tavole piemontesi, giornate canavesane... fate voi. Comunque, misure coerenti con il piano cartesiano che abbiamo impostato).

La nostra intenzione, seduti davanti al caminetto, è quella di presentare tutti i piani possibili per l'aiuola. Sotto questi vincoli, secondo voi, quanti disegni dovrò fare? E, nei vari casi, dove finirà il punto C?

Oh, con calma. La voglia di scavare, qui, è un epsilon piccolopiccolo...

[9] Facciamo una rapida escursione nel mondo meno importante, a futura memoria degli storici. Rudy possiede realmente una copia dell'"Enciclopedia Universale Curcio", edita nel settembre del 1961: sostiene che gli basta quella, in quanto tutte le cose successe dopo se le ricorda. Ma qui non stiamo parlando di quella, che è in soli otto volumi e il problema sarebbe troppo facile.

[10] Nota per gli ultimi arrivati: *Caer* in gaelico significa "castello", e *Abaq* dovreste saperlo, visto che da questo deriva "abaco". Ma il gioco di parole lo capiscono solo quelli che si ricordano le favole (e il francese).

3. Bungee Jumpers

Trovare tutti i numeri interi w, x, y, z che soddisfano la $w! = x! + y! + z!$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Febbraio!

Mese in cui, in un inverno dell'altro millennio, nasceva RM. Come si evince già dal ritardo del mese scorso i vostri eroi (che saremmo modestamente noi) sono presi e disperati nel mezzo di inenarrabili contrattempi logistico-lavorativi.

Se solo sapeste in quali multiple condizioni sono state scritte queste righe, vi stupireste anche solo per la varietà… ma dopotutto RM nasce da tre personaggi che non stanno mai in uno stesso posto, ed è evidente che la neve ad un certo punto è caduta al di là di finestre e finestrini per tutti e tre… ma in molto più di tre posti e momenti diversi.

Abbiamo approfittato del ritardo per cambiare la copertina e raccogliere qualche vostra soluzione in più, quindi non perdiamo altro tempo e passiamo al sodo.

4.1 [226]

4.1.1 L'ultimo problema di quest'anno

Ancora? Ebbene sì. Il 2017 è stato colmo di eventi e ci perseguita ancora con le sue conseguenze. Del resto tanti hanno goduto dei vari contributi sul problema, e – come se non bastasse – lo stesso problema è comparso anche su Le Scienze, così ancora più versioni e discussioni si trovano sul blog[11]. Comunque, ecco il testo:

> *Partite nell'anno uno, armati di un congruo numero di post-it e di un segmento molto lungo; il vostro lavoro, per quest'anno, consiste nel mettere due post-it agli estremi dell'intervallo, decorandoli entrambi con il numero "1". Nel generico anno n, considerate tutti gli intervalli sul vostro segmento limitati a sinistra e a destra da un post-it e inserite a metà di ogni intervallo un foglietto con scritta sopra la somma dei due valori che definiscono l'intervallo. In che anno e in che posizione scrivete "2017" per l'ultima volta? E quante volte l'avete scritto? E per "2016"? Che numero c'è sul milionesimo bigliettino e, riguardandoli tutti, qual è il numero più grosso utilizzato sino a quel momento?*

La soluzione pubblicata in RM227 era di ***Valter***, in RM228 quella di ***Camillo*** e ***trentatre***. Vediamo ora che cosa ci ha scritto ***Dano***, al quale diamo il benvenuto tra i solutori:

> Purtroppo a causa dei miei impegni non seguo con continuità i problemi proposti e anche quando ho il tempo di farlo mi limito ad esaminare i problemi senza inviare eventuali risposte. Questa volta faccio un'eccezione, perché le risposte finora fornite non mi hanno soddisfatto. Infatti, a mio parere, tutti sono caduti in un equivoco. I problemi proposti dai Rudi devono sempre essere analizzati con attenzione, perché a volte nascondono dei trabocchetti nei quali è facile cadere. In questo caso il tranello era nella scrittura dei post-it. Infatti:
>
> - Nel primo anno vengono scritti entrambi i post-it.
> - Nel secondo anno viene scritto un solo post-it, quello con il numero 2, e viene posto tra i post-it scritti nell'anno precedente.
> - Nel terzo anno vengono scritti solo 2 post-it, quelli con il numero 3, che vengono posti tra il 2 e gli 1 scritti negli anni precedenti per un totale di 5.

[11] http://rudimatematici-lescienze.blogautore.espresso.repubblica.it/2018/01/30/il-problema-di-gennaio-593-quello-sporco-ultimo-problema/

- Nel quarto anno vengono scritti soltanto altri 4 post-it: due con il numero 4 e altri due con il numero 5 che inseriti opportunamente in quelli scritti negli anni precedenti portano il totale a 9.
- E così negli anni successivi.

Perciò quando esaminiamo la situazione di un particolare anno, solo circa la metà dei post-it sono stati scritti in quell'anno, mentre tutti gli altri sono stati scritti negli anni precedenti. Quindi nessuna cifra verrà scritta un numero infinito di volte.

Veniamo ora alle mie considerazioni.

Chiamerò *fasi* anziché *anni* i vari passi della costruzione ipotizzata. Numero le fasi a partire dallo zero, quindi la prima fase, quella con {1; 1} sarà la numero 0, come riportato nella tabella seguente, dove sono in grassetto i numeri scritti nella fase:

Fase 0: **1**, **1**
Fase 1: 1, **2**, 1
Fase 2: 1, **3**, 2, **3**, 1
Fase 3: 1, **4**, 3, **5**, 2, **5**, 3, **4**, 1
Fase 4: 1, **5**, 4, **7**, 3, **8**, 5, **7**, 2, **7**, 5, **8**, 3, **7**, 4, **5**, 1
...ecc.

Analogamente numero le posizioni di ogni fase a partire dallo 0, mentre l'ultima posizione della fase n avrà il numero 2^n; quindi ogni fase risulta composta da $2^n + 1$ elementi (o post-it) dei quali 2^{n-1} occupano le posizioni dispari e $2^{n-1} + 1$ quelle pari (preciso che considero pari la posizione zero).

In ogni fase vengono scritti solo i post-it delle posizioni dispari, mentre quelli delle posizioni pari sono stati scritti nelle fasi precedenti; quindi in una fase sono raccolti tutti i post-it scritti fino a quel momento.

Infatti il numero $P(n)$ di tutti i post-it scritti fino alla fase n è pari alla somma di tutte le posizioni dispari dalla fase 1 fino alla fase n completa, più i 2 della fase 0:

$$P(n) = 2 + \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2 + 2^n - 1 = 2^n + 1 \qquad (1)$$

che è proprio uguale ai post-it complessivi della fase n.

Volendo sapere in quale fase scriverò il post-it numero t lo possiamo ricavare dalla precedente equazione (1)

$$n = \lceil \log_2(t-1) \rceil \qquad (2)$$

Se poi volessimo conoscere anche l'esatta posizione p del post-it t all'interno della riga n lo possiamo calcolare con

$$p = (t - (2^{n-1} + 1)) * 2 - 1 \qquad (3)$$

dove n è stato calcolato con la (2).

Per rendere più chiaro quanto dirò, definisco un insieme di numeri razionali della forma $p/2^n$ tali che:

- il denominatore è sempre uguale a una potenza di 2 dove l'esponente $n \geq 0$ è il numero di una fase;
- il numeratore p indica una posizione nella generica fase n, quindi $0 \leq p \leq 2^n$

Ogni numero razionale di questa forma identifica quindi una precisa posizione in una determinata fase, mentre con lo stesso numero razionale tra parentesi quadre indico il valore attribuito a quella posizione (cioè il numero scritto sul post-it).

$$\left[\frac{p}{2^n}\right] = \text{valore scritto nella posizione } p \text{ della fase } n$$

Naturalmente

$$\left[\frac{2^k p}{2^n}\right] \text{ e } \left[\frac{p}{2^{n-k}}\right]$$

rappresentano due posizioni diverse su due fasi differenti, ma, come enunciato dal problema, forniscono il medesimo valore; infatti vale l'uguaglianza

$$\left[\frac{2^k p}{2^n}\right] = \left[\frac{p}{2^{n-k}}\right] \qquad (4)$$

Dalla definizione del problema i valori della fase 0 sono:

$$\left[\frac{0}{2^0}\right] = [0] = 1 \qquad \left[\frac{1}{2^0}\right] = [1] = 1$$

Sempre dalla definizione del problema, per la generica fase $n > 0$ e per ogni indice i possiamo calcolare i valori delle posizioni pari con l'identità (4) mentre per le dispari sommiamo i valori dei termini delle posizioni precedente e successiva:

$$\left[\frac{2i+1}{2^n}\right] = \left[\frac{2i}{2^n}\right] + \left[\frac{2i+2}{2^n}\right] = \left[\frac{i}{2^{n-1}}\right] + \left[\frac{i+1}{2^{n-1}}\right] \forall i\text{: } 0 \leq i < 2^{n-1} \quad (5)$$

Quindi tutti i valori delle posizioni dispari della fase n possono essere calcolati a partire dalla fase $n - 1$ sommando i corrispondenti valori consecutivi.

Possiamo generalizzare quest'ultima identità per comprendere sia le posizioni dispari che le pari:

$$\left[\frac{2^k d}{2^n}\right] = \left[\frac{2^k d - 2^k}{2^n}\right] + \left[\frac{2^k d + 2^k}{2^n}\right] \quad (6)$$

dove d è dispari e $0 < 2^k d < 2^n$. Questa espressione mette in evidenza come si possano calcolare tutti i valori di una fase senza necessariamente calcolare le fasi precedenti. Infatti partendo i due valori estremi della fase che sono sempre uguali a 1, possiamo calcolare il valore intermedio

$$\left[\frac{2^{n-1}}{2^n}\right] = \left[\frac{2^{n-1} - 2^{n-1}}{2^n}\right] + \left[\frac{2^{n-1} + 2^{n-1}}{2^n}\right] = \left[\frac{0}{2^n}\right] + \left[\frac{2^n}{2^n}\right] = 2$$

Adesso possiamo calcolare allo stesso modo i due nuovi valori intermedi (che saranno uguali a 3), quindi, proseguendo per bisezioni successive, possiamo calcolare il valore corrispondente a qualsiasi posizione nella fase. Questo procedimento è facilmente implementabile in una procedura software.

Altre uguaglianze notevoli sono:

$$\left[\frac{p}{2^n}\right] = \left[\frac{2^n - p}{2^n}\right] \qquad \forall p \in N\text{: } 0 \leq p \leq 2^n \qquad (7)$$

la quale dimostra che i valori di ogni fase sono simmetrici rispetto al valore centrale. Ma anche

$$\left[\frac{2^{n-i}}{2^n}\right] = \left[\frac{1}{2^i}\right] = i + 1 \, \forall i \in N\text{: } 0 \leq i \leq n$$

che in particolare per $i = n - 1$ diviene

$$\left[\frac{2}{2^n}\right] = \left[\frac{1}{2^{n-1}}\right] = n \qquad (8)$$

Il numero più grande scritto nella fase n compare due volte in posizioni simmetriche secondo la (7)):

$$M_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \qquad \text{e} \qquad M_n = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}$$

Queste due posizioni dividono l'intera fase in tre parti quasi uguali. Sorprendentemente in queste posizioni di trovano i numeri della successione di Fibonacci! Infatti vale la

$$F_{n+2} = \left[\frac{M_n}{2^n}\right]$$

Il numero di volte che una determinata cifra viene scritta su un post-it è stato suggerito da ***Trentatre***, anche se non lo ha chiaramente specificato. Infatti i post-it che vengono scritti sono quelli che lui definisce *base*, perciò il numero delle volte che scriviamo un determinato numero è pari alla funzione toziente di Eulero $\varphi(N)$ che come noto vale:

$$\varphi(\mathrm{N}) = \mathrm{N}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) = N \prod_{p_i | N}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) (9)$$

dove i termini $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sono tutti i numeri primi che dividono N.

Risposte al problema

Qualsiasi numero n prendiamo in considerazione esso viene scritto per l'ultima volta nella fase $n-1$ nelle posizioni simmetriche 1 e $2^n - 1$. Pertanto scriveremo 2016 per l'ultima volta nella fase 2015 e in totale l'avremo scritto 576 volte perché come indicato dalla (9))

$$\varphi(2016) = 2016\,(1 - 1/2)(1 - 1/3)(1 - 1/7) = 576$$

Analogamente:

- 2017 viene scritto per l'ultima volta nella fase 2016 e l'avremo scritto 2016 volte (2017 è primo)
- 2018 viene scritto per l'ultima volta nella fase 2017 e l'avremo scritto 1008 volte.
- 20'000 viene scritto per l'ultima volta nella fase 19'999 e l'avremo scritto 8000 volte.

Che numero c'è sul milionesimo post-it utilizzato e quale è il numero più grande utilizzato sino a quel momento?

Dalla (2) possiamo immediatamente calcolare che $n = \lceil \log_2(1000000 - 1) \rceil = 20$. Quindi il milionesimo post-it viene scritto nella fase 20 alla posizione (vedi(3))

$$p = (1\,000\,000 - (2^{20-1} + 1)) * 2 - 1 = 951'421$$

corrispondente quindi al razionale $951'421/2^{20}$.

Con poche righe di software e qualche millisecondo di tempo di calcolo, determiniamo facilmente che:

$$\left\lceil \frac{951421}{2^{20}} \right\rceil = 2201$$

Il valore massimo che ho dovuto scrivere fino a quel momento è $F_{22} = 17'711$ sempre nella fase 20 alle posizioni 349'525 e 699'051.

Vorrei precisare che non era sicuro che il valore massimo fosse uguale al numero di Fibonacci perché nella fase, prima della scrittura del primo valore massimo, scriviamo altri numeri che sono comunque superiori al numero di Fibonacci della fase precedente.

Bene, complimenti a ***Dano*** per il suo primo contributo, e andiamo avanti.

4.2 [227]

4.2.1 L'emeroteca di Babele

Certamente vi ricordate il problema di ordinamento di cui abbiamo pubblicato le soluzioni il mese scorso:

I 365 volumi di giornali del 2015, tutti uguali in altezza e spessore fanno bella mostra di sé in uno scaffale di 366 posti, ciascuno con la data di uscita sul dorso, ben visibile (l'ultimo posto – dedicato al 29 febbraio – è vuoto, visto che non era bisestile), ma sono in disordine.

Rudy prende un volume e lo mette al posto "del 29 febbraio" (insomma, lo spazio libero al fondo). Poi prende il volume che deve andare dove adesso c'è il buco e lo mette "al suo posto", e avanti in questo modo.

Supponiamo "la peggior disposizione possibile"; il metodo, ha fine? E in quante mosse? Qual è la peggior disposizione?

A parte le diverse interpretazioni, abbiamo pubblicato in RM228 commenti e soluzioni di ***.mau.***, ***Valter***, ***Alberto R.***, ***Gas***, ***Camillo*** e ***Franco57***. Quest'ultimo ci ha mandato un ulteriore commento:

Nella mia soluzione al problema pubblicata sul numero di gennaio 2018 avevo scritto in coda "*Sarebbe interessante calcolare il numero medio di spostamenti per una permutazione a caso tra tutte le possibili, **ma questo lo vedo troppo difficile***". Invece in seguito trovato una formula per questo (o meglio un'espressione algebrica che dipende da altre già note) e sono qui a proporla.

Posto V_n il numero medio di spostamenti che Rudy deve fare se gli n volumi sono *in completo disordine*, cioè ogni ordinamento è possibile ed ha la stessa probabilità, prendo un volume e considero la lunghezza del ciclo della permutazione (dei volumi) alla quale esso appartiene.

Una bellissima proprietà è che la probabilità P_k di essere in un ciclo di lunghezza k, non dipende da k e quindi vale $\frac{1}{n}$, poiché esistono cicli di n lunghezze possibili: 1, quando un elemento è mappato in sé stesso, nel nostro caso un volume è casualmente già al posto giusto, 2 se l'elemento A è mappato in B e viceversa (uno scambio), eccetera fino al ciclo di lunghezza n, un unico ciclo che coinvolge tutti gli elementi. Infatti, se contiamo le permutazioni nelle quali un dato elemento è inserito in un ciclo di lunghezza k troviamo che sono il prodotto dei $\binom{n-1}{k-1}$ possibili insiemi degli altri $k-1$ elementi che devono formare il ciclo, i quali sono permutabili in un unico ciclo in $(k-1)\cdot(k-2)\Lambda\ 2\cdot 1=(k-1)!$ modi possibili, da combinare poi con una qualsiasi delle $(n-k)!$ permutazioni dei rimanenti $n-k$ elementi. Troviamo cioè $\binom{n-1}{k-1}\cdot(k-1)!\cdot(n-k)!=(n-1)!$ differenti permutazioni, perciò la probabilità che un dato elemento sia in un ciclo di lunghezza k è $\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$.

Come si è visto da tutte le soluzioni pubblicate, se il volume che prendo non è al suo posto, Rudy deve eseguire $k+1$ spostamenti per completare la sistemazione dei volumi nel ciclo di lunghezza k al quale esso appartiene e si troverà poi a fare in media altri V_{n-k} per i restanti. Se per caso il volume è già al suo posto, il numero medio di spostamenti sarà semplicemente V_{n-1}. Se c'è un solo ciclo nella permutazioni Rudy fa $n+1$ scambi ed ha terminato il lavoro. Come dimostrato tutte queste eventualità hanno la stessa probabilità $\frac{1}{n}$, perciò $V_n=\frac{1}{n}V_{n-1}+\frac{1}{n}(3+V_{n-2})+\frac{1}{n}(4+V_{n-3})+\Lambda+\frac{1}{n}(n+V_1)+\frac{1}{n}(n+1)$ con la condizione inziale $V_1=1$.

Elaborando ottengo $nV_n=V_1+V_1+\Lambda+V_{n-1}+\frac{(n+4)\cdot(n-1)}{2}$ e al passo precedente $V_1+V_1+\Lambda+V_{n-2}=(n-1)V_{n-1}-\frac{(n+3)\cdot(n-2)}{2}$. Sostituendo la seconda nella prima, abbiamo

$$nV_n=(n-1)V_{n-1}+\frac{(n+4)\cdot(n-1)}{2}+V_{n-1}-\frac{(n+3)\cdot(n-2)}{2}=nV_{n-1}+\frac{n^2+3n-4}{2}-\frac{n^2+n-6}{2}=nV_{n-1}+n+1$$

cioè $\begin{cases} V_n=\frac{1}{n}+1 \\ V_1=0 \end{cases}$ da cui $\boxed{V_n=A_n+(n-2)}$ con $A_n=1+\frac{1}{2}+\Lambda+\frac{1}{n}$ l'n-esimo termine della serie armonica, che come è noto viaggia lento come logaritmo naturale di n, cioè $\frac{A_n}{\ln(n)}\to 1$.

Per ordinare l'emeroteca, dunque Rudy deve fare, in media, $V_{365}=A_{365}+363\cong 369{,}4784823$ spostamenti, quindi a spanne credo che sarebbe impegnato almeno un'ora.

Bene, un'oretta che noi possiamo stare tranquilli… E qui chiudiamo con i problemi vecchi e passiamo a quelli più freschi.

4.3 [228]

4.3.1 Sta diventando sempre peggio

Il Capo continua la sua rivisitazione dei gloriosi anni universitari e decide di proporre un problema di Bridge, o meglio, un'analisi di una particolare partita:

> *Supponiamo di essere in fase di analisi "post mortem" di una partita di bridge. Ovest deve giocare la prima carta, e una delle possibilità è quella di giocare ♥K; la cosa interessante è che, a seguito di rapida disamina delle carte, risulta per E-O impossibile perdere il grande slam: in pratica, qualsiasi giocata facciano E-O, faranno tredici prese. Se O gioca qualsiasi delle sue altre carte, allora per N-S risulta impossibile perdere il grande slam: qualsiasi giocata facciano N-S, faranno tredici prese. Sappiamo che N ha sicuramente ♠2 e ♣J, ma quello che ci interessa sapere è: chi ha ♦5?*

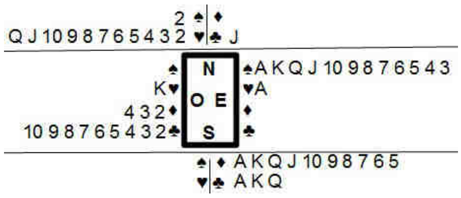
Malgrado il problema sia uscito insieme a RM228, quindi le tempistiche di risoluzione sono state molto brevi, abbiamo un'immediata risposta di ***Valter***:

> (…) Mi pare che la distribuzione delle carte sia:
> N = 2♠ / J♣ / Q…2♥
> S = A…5♦ / A…Q♣
> O = K♥ / 10…2♣ / 4…2♦
> E = A♥ / A…3♠
> Mi pare quindi che 5♦ ce l'abbia S.
> Motivo:
> - O non può avere nessun A (N-S non farebbe grande slam se lo giocasse come prima carta)
> - E deve avere A♥ (E-O non farebbe grande slam se lo avesse N-S)
> - E non deve avere altri ♥ oltre A♥ (per non far prendere O alla prima carta perdendo il grande slam)
> - E deve avere almeno un altro A (non potendo avere tutti ♥ per fare il grande slam)
> - E deve avere carte, per il seme, maggiori di O (per non farlo giocare per primo perdendo il grande slam)
> - E deve avere carte, per il seme, maggiori di N-S (per non perdendo il grande slam)
> - S deve prendere se O non gioca prima carta K♥ (se prendesse N, avendo 2♠, N-S non farebbe grande slam)
> - S deve quindi avere due A (per lo stesso discorso di E).

Abbiamo tagliato il pezzo iniziale con dati sensibili, ma ne approfittiamo per fare gli auguri in ritardo a ***Valter***… ma aspettate, è arrivato un bel ricordo di ***Camillo***:

> Quando ho letto il problema sul Bridge ho avuto una specie di déjà vu. (…)
>
> Nel 1972 a causa dell'allargamento della famiglia mio padre mi comprò un bar a Pietra Ligure. Mi capitò per le mani, non ricordo come, un libro sul Bridge probabilmente scritto da Belladonna. Nei noiosissimi inverni quando gli avventori erano pochi assieme ad un gruppetto di loro ormai stufi della solita Scopa, Busso e striscio o Scala 40 pensammo al Bridge. Misi in piedi una versione ridottissima di Fiori Romano (se la memoria non mi inganna ci fermavamo a 2 quadri). Le carte venivano mescolate e non mi ricordo che qualcuno abbia mai dichiarato slam.
>
> Qualche volta 12 o 13 prese sono state fatte ma senza dichiararle.
>
> Nessuna posta era prevista solo il piacere di vincere.
>
> Proseguendo nella lettura del problema mi è balenato in testa il "Grande slam della morte" dove James Bond fa quell'incredibile partita ("cul mazet" direbbero dalle mie parti) ma non ha niente a che fare col problema, ho verificato nel romanzo.
>
> In allegato la mia risoluzione del problema.
>
> In sintesi; se O gioca ♥K fa grande slam altrimenti le 13 prese le fanno N e S.

Se per (l.,n.n.l.) si intende che giocano 4 scimmie e non possono sbagliare c'è una sola possibile smazzata.

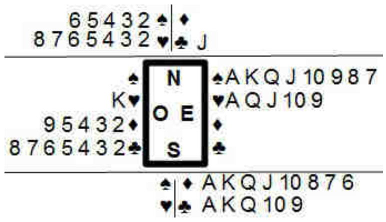


Dove O deve avere ♥K secco ed il suo compagno E deve avere ♥A altrettanto singolo.

A seconda dei casi E o S prendono in mano il gioco e lo portano alla fine coi loro lunghi pali.

Se invece "post mortem" si analizzasse la partita le smazzate possibili sarebbero molteplici.

Quella che segue è una di queste.



Per quanto riguarda il ♦5 qui lo potrebbero avere tutti tranne E.

Per la cronaca a metà degli anni 80 vendetti il bar e ci trasferimmo a Genova. Da allora non ho quasi più toccato carte, tanto meno a Bridge.

E con questo bel ricordo di ***Camillo*** passiamo al secondo problema.

4.3.2 Ubriachezza selettiva

Ci siamo dichiarati sempre dei gran bevitori, anche se più nel senso che ci piace bere buon vino, buona birra e tutta una serie di spiriti di alta qualità, però è chiaro che le conseguenze del consumo alcolico, prima o poi, si fanno notare. Per esempio questo problema per testare il livello di ubriachezza non è niente male:

> *Scelta una piazza ragionevolmente ampia, inizieremo a verificare la sobrietà cercando di camminare in linea retta: sappiamo benissimo di farcela per dieci metri, ma non di più. Dopo i primi dieci metri, "sbanderemo" di un angolo a verso destra, e cammineremo per altri dieci metri in linea retta. Per poi sbandare (...e qui entra in gioco il "selettiva") verso destra di un angolo a... e avanti in questo modo: dopo nove camminate, ci ritroviamo al punto di partenza. Quali valori di a ci permettono di realizzare questo exploit?*
>
> *Causa errore di calcolo sull'angolo a, dopo queste nove spericolate manovre vi ritrovate a dieci metri in linea d'aria dal punto di partenza; per nascondere il fallimento dell'operazione, enunciate al volo tutti i valori di a per cui vale esattamente questa condizioni. Quali sono?*

Abbiamo cercato di lasciare il più possibile colore nel testo, perché è un peccato perdersi la sbronza… Anche qui, a stretto giro di posta, è arrivata la soluzione di ***Valter***:

Prima domanda:

- a = 120° / 240° (triangolo equilatero, 3 volte)

- a = 40° / 320° (ennagono regolare, 1 volta)

Seconda domanda:

- a = 180° (segmento di 10 metri, 9 volte)

- a = 90° / 270° (quadrato, 2 volte + 1 lato)

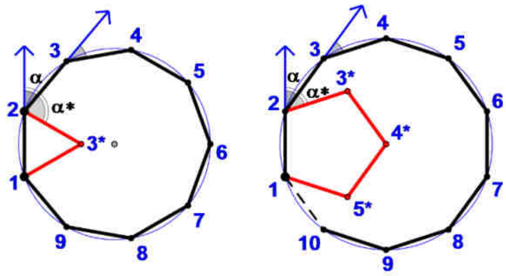
- a = 45° / 315° (ottagono regolare una volta + 1 lato)

- a = 72° / 288° (pentagono regolare due volta – 1 lato)
- a = 36° / 324° (decagono regolare una volta – 1 lato).

Visto l'equilibrio precario eviterei giravolte multiple.

Se adesso andate a guardare la risoluzione di ***trentatre***, che segue noterete qualcosa di interessante:

Il percorso è composto di tratti di uguale lunghezza L, ruotati uno dopo l'altro di un angolo fisso α, sempre verso destra.



Dalla figura

- bastano due tratti (3 punti) per tracciare il cerchio su cui stanno tutti i punti
- il poligono di N lati è chiuso solo se $\alpha = 360° / N$.

Le risposte alle domande, <u>con 9 tratti</u>, sono

1) si torna all'origine – il poligono è un 9-agono con $\alpha = 40°$

2) ci si ferma a distanza L dall'origine – con un altro passo si chiude un 10-agono, con $\alpha = 36°$.

Se il nostro è molto ubriaco, può non accorgersi di essere tornato a casa, e continua a girare. Se conta i tratti e questi sono 9, può percorrere (tre volte) il percorso (1, 2, 3*) con $\alpha^* = 120°$ nel primo caso, e (due volte) il percorso (1, 2, 3, 4*, 5*) con $\alpha^* = 72°$ nel secondo.

In altri termini per N divisore di 360° ($N = 3,4,5,6,8,10,12,...$) si ha un N-agono con $\alpha = 360° / N$, e ad ogni divisore di N corrisponde un percorso ridotto. Per N pari (caso 2) esiste il divisore 2, e quindi il percorso (1, 2) ripetuto $N/2$ volte con $\alpha = 180°$, ma in questo caso siamo ormai a quell'ubriaco che girava abbracciato a un albero e dopo un giro chiedeva di farlo uscire.

Avete notato? Esperienza diretta o meno, sono tutti preoccupati che noi si giri un po' troppo intorno in condizioni di ebbrezza. I nostri solutori ci vogliono ancora bene.

Ci fermiamo qui e vi auguriamo un bellissimo carnevale. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

A, B e C sono imparentati/coniugati tra di loro, e non ci sono matrimoni tra consanguinei.

[1] - Tra i tre ci sono il padre di A, l'unica figlia di B e il fratello/sorella di C.

[2] - Il fratello/sorella di C non è né il padre di A né la figlia di B.

Definite i generi di A, B e C.

6. Pagina 46

Per simmetria, assumiamo che $x \leq y \leq z \leq w$.

Se $y>x$, allora $(x+1)!$ divide $y!$, $z!$ e $w!$; quindi, $(x+1)!$ divide $x!$, il che è una contraddizione. Da cui, deve essere $x=y$.

Possiamo allora dividere il problema in due casi:

Caso 1: $y<z$.

In questo caso, $(x+1)!$ divide $z!$ e $w!$, quindi deve dividere $x! + y! = 2y!$, il che implica che $(x+1)$ divida 2, e quindi deve essere $y=1$. Quindi, la nostra equazione diventa:

$$w! = z! + 2.$$

Questo significa $w>z$, e siccome $z!$ divide $w!$, deve anche dividere 2. Ma essendo $z > y = 1$, otteniamo $z=2$, e quindi $w!=4$, che non è possibile. Quindi, questo caso *non ammette soluzioni*.

Caso 2: $y=z$.

In questo caso, la nostra equazione diventa:

$$w! = 3x!$$

quindi deve essere $w>x$ e quindi $x+1$ deve essere divisibile per 3.

Essendo $x\geq1$, si ha che $x=2$ e quindi che $x=y=z=2$ e $w=3$.

Quindi, l'unica soluzione è (2, 2, 2, 3).

7. Paraphernalia Mathematica

Prima la bella notizia: partiamo con un altro argomento a puntate. La brutta notizia è che di alcune di queste cose abbiamo già parlato.

Il motivo palese è per affrontarle in un modo più strutturato partendo da un'ottica più formale; quello nascosto, è che per Rudy questo argomento ha sempre avuto un notevole interesse (ma non lo ha mai studiato: non era in nessun piano di studi...), e spera che il doverne scrivere sia una buona ragione per decidersi a studiarlo per bene.

Se proprio volete dei tag, "#matematicaeecologia" dovrebbe andare bene. Ma a occhio ci sta anche la politica, e nonostante i nostri ritardi cronici dovremmo farcela ad uscire prima del 4 marzo.

7.1 Crescete e moltiplicatevi [1] – Gli economisti sono pazzi.

Chiunque creda in una crescita continua, o è un economista o è pazzo
Kennet BOULDING

OK, ne abbiamo già parlato, o meglio ne ha parlato Alice nell'unico PM che abbia mai scritto[12]. Ma proviamo ad affrontarlo da un altro punto di vista.

La funzione di crescita più semplice che si possa immaginare è quella di un *tasso* costante nel tempo: detto a il tasso, se N è la nostra popolazione che cresce (sarebbe la funzione che descrive la popolazione nel tempo), possiamo impostare una semplice equazione differenziale:

$$\frac{dN}{dt}=aN$$

Insomma, la nostra popolazione cresce a *tasso* costante, e quindi l'aumento è funzione del valore raggiunto al passo precedente[13].

Siccome stiamo parlando di matematica *applicata*, quindi vorremmo avere dei risultati senza l'aggiunta della frase: "Più una costante, che vale boh!", ci servono le cosiddette "Condizioni dell'Antipatico[14]", ossia il sapere quanto vale la funzione da qualche parte: di solito, anche perché è il valore più facile da ottenere, per t=0, ragione per cui la condizione iniziale viene di solito indicata con $N(0)=N_0$. Da cui, la nostra equazione ha soluzione:

$$N=N_0 e^{at}\,.$$

Questa formula è nota (beh, no, mica tanto…) come "Equazione della crescita dell'altro antipatico[15]": i motivi dell'antipatia sono matematicamente sintetizzabili nel fatto che:

$\frac{dN}{dt}=a\,N_0 e^{at}$ rappresenta la *pendenza* della curva in un punto,

$\frac{d^2N}{dt^2}=a_0^N e^{at}$ rappresenta la *curvatura* della curva in un punto,

$\int_{-\infty}^{t} N\,dt=\frac{1}{a}N_0 e^{at}$ rappresenta *i consumi* della popolazione dall'inizio del tempo.

[12] RM148, maggio 2011 – Paraphernalia Mathematica – "I risparmi di San Giuseppe".

[13] Nel seguito, confonderemo spesso e volentieri discreto con continuo: la cosa semplifica di molto la trattazione e i risultati sono validi, ma la dimostrazione (per ogni singola "confusione") è estremamente noiosa. Quindi, se vi interessa, ve la fate da soli.

[14] Come lo ha chiamato, con il nostro pieno ed entusiastico consenso, Doc nel Compleanno a lui dedicato (RM127). Sì, stiamo parlando di Cauchy.

[15] Malthus. Ma gli antipatici *veri* sono i suoi *minions*.

E il fatto che siano tutte crescenti, non è considerata una bella cosa, dal punto di vista di Malthus, ma nel suo caso, almeno secondo noi, *el tacon xe peso del buso*[16].

Ora, chiariamo un possibile misunderstanding: non stiamo parlando di sociologia. Quindi, anche se abbiamo, sinora, parlato di *popolazione*, i numeri possono riferirsi a esseri umani sul globo terracqueo, trattori in un'economia agricola, pesci in uno stagno o quel che vi pare: la potenza di queste equazioni sta appunto nel fatto di poter analizzare fenomeni completamente diversi uno dall'altro con lo stesso metodo e secondo la stessa logica.

Un famoso "Quick & Dirty", tempo fa, poneva la domanda di quanto ci mettesse una colonia di microbi che si riproduce quotidianamente a riempire una scatola che in una settimana si era riempita a metà. La generalizzazione di questo problema consiste nella ricerca del *tempo di raddoppio*: quanto impiega un oggetto che cresca esponenzialmente a raddoppiare in dimensione? Imponendo $N=2N_0$ e risolvendo in t l'equazione, si ha che $t_2=\ln 2/a$: il che significa che la popolazione *raddoppia sempre in un tempo costante*: utilizzando un meme relativo agli ingegneri diffuso sui social[17], il tempo di raddoppio vale il 70% dell'inverso di a.

Va detto che, nella realtà, *bel gioco dura poco*. Come sottinteso nella citazione all'inizio di questo pezzo, un'esponenziale non è per sempre. Un caso piuttosto interessante riguarda una ben specifica popolazione umana: se prendiamo i dati del *Census Bureau*[18], vediamo che nei primi anni (dal 1790 al 1870, ad esempio), la crescita è effettivamente esponenziale, per poi "schiacciarsi" (il "punto" è una virgola, e i numeri sono milioni):

Anno	Pop.
1790	3.929
1800	5.308
1810	7.240
1820	9.638
1790	3.929

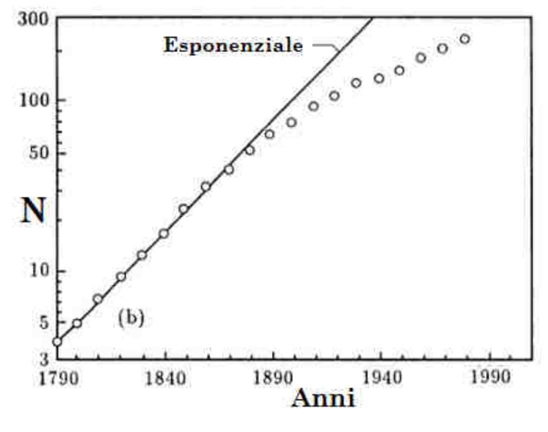
Anno	Pop.
1830	12.861
1840	17.064
1850	23.192
1860	31.443
1830	12.861

Anno	Pop.
1870	38.558
1880	50.189
1890	62.980
1900	76.212
1870	38.558

Anno	Pop.
1910	92.228
1920	106.021
1930	123.203
1940	132.165
1910	92.228

Anno	Pop.
1950	151.326
1960	179.323
1970	203.302
1980	226.546
1950	151.326

Il motivo per il quale utilizziamo il termine "schiacciarsi" è dato dal fatto che la cosa è particolarmente evidente se tabuliamo i dati in un grafico semilogaritmico, come quello che dovreste vedere qui a fianco: in questo grafico l'esponenziale pura è rappresentata da una retta, e vedete come dopo qualche tempo i nostri dati tendono ad assumere dei valori sempre minori rispetto alla retta all'esponenziale.



9 *Prima o poi, anche il West finisce.*

"Rudy, ma la linea dell'esponenziale, come l'hai tirata?" Accenniamo di sfuggita alla vecchia battuta in base alla quale per tre punti passa una sola retta, se la matita è abbastanza grossa: qui, "a occhio" si vede che una retta "ci sta", per i primi otto o nove punti: se volessimo fare le cose più precise, potremmo utilizzare il metodo dei minimi quadrati, ma ce lo teniamo per la prossima puntata (forse: potremmo sforare su quella dopo ancora...): comunque, il risultato è

[16] Detto popolare padovano, che tradotto significa: è peggio la toppa del buco, cioè il rimedio è peggiore del danno.

[17] Il meme dice che si definisce ingegnere chi scrive $e=\pi=3$ e $g=10$.

[18] Che, vi ricordiamo, fa un censimento ogni dieci anni. E ci ha lavorato uno statistico che compie gli anni ogni quattro anni: di lui e dei censimenti si parla nel compleanno di RM109, "Contare coi Buchi".

qualcosa del tipo N_0=3.956 (milioni), a=0.0295 y^{-1} (...e ne abbiamo approfittato per introdurre la dimensione di a: anni "alla meno uno"), t_2=23.5 anni.

Dicevamo, dopo un po' (dalle parti del 1865: Guerra di Secessione, all'incirca) la nostra esponenziale non funziona più: la ragione, molto probabilmente, è da attribuire non a massacri bellici ma al fatto che (nelle parole del nostro mentore) "il posto cominciava a diventare affollato", ossia anche il West aveva un termine: le capacità produttive dell'area riducevano il tasso demografico, evitando di portare nel 1980 la popolazione statunitense a superare il miliardo di individui.

"Rudy, non per fare i portasfiga, ma guarda che ogni tanto la gente muore". Vero, ma di questo si tiene comunque conto nel valore di a: la successiva evoluzione infatti tiene conto di una variazione più sottile nella dinamica della popolazione, ed è nota come ***esponenziale con migrazione***. Se consideriamo una *immigrazione* di s elementi nell'unità di tempo e una *emigrazione* di h elementi (sempre nell'unità di tempo), la nostra equazione differenziale diventa:

$$\frac{dN}{dt}=aN+s-h$$

con soluzione:

$$N=N_0 e^{at}+\frac{s-h}{a}\left(e^{at}-1\right).$$

L'interesse di questa formula (che pare una futile complicazione della nostra formula originale) consiste nell'esaminare un valore ben preciso di t:

$$t_e=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{1}{1-\frac{a N_0}{h}}\right)$$

che sarà significativo nel momento stesso nel quale $h>aN_0$: questo è noto come *tempo di estinzione*, e in questo tempo la nostra popolazione raggiunge il valore zero[19].

Se torniamo alla nostra espressione originale della legge di crescita esponenziale, possiamo complicarci la vita anche in un'altra direzione: per evidenti ragioni, diamo l'espressione in due forme, di cui la seconda non è altro che un cambiamento di variabili rispetto alla prima:

$$\frac{dN}{dt}=a N^r \quad ; \quad \frac{dN}{dT}=W^r.$$

Questa è nota come ***legge di potenza*** della crescita esponenziale; le sue soluzioni (sempre nei due formati, ma questa volta al contrario) sono:

$$W=\left[1+(1-r)T\right]^{\frac{1}{1-r}} \quad ; \quad \frac{N}{N_0}=\left[1+(1-r)a t\right]^{\frac{1}{1-r}}.$$

Proviamo a calcolare qualche valore numerico.

Per r=0, abbiamo una relazione lineare, il che è un risultato di scarso interesse.

Per r=1/2, la nostra relazione diventa *quadratica*: $\frac{N}{N_0}=\left(1+\frac{1}{2}a t\right)^2$.

Per r=3/4, *quartica*: $\frac{N}{N_0}=\left(1+\frac{1}{4}a t\right)^4$.

[19] Avevamo detto che avremmo parlato di politica: il saldo demografico annuale (del 2017) dell'Unione Europea è negativo e inferiore, per il momento, al numero di migranti giunti nell'ultimo anno in Europa. *[Da questa nota è possibile ricavare unicamente la posizione sull'argomento di Rudy: la parte restante della Redazione non è da considerare automaticamente in accordo]*

Per r=1, il risultato per pura sostituzione diventa indeterminato, ma sfruttando il limite notevole:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = e^z,$$

possiamo ricavare che in questo caso la legge è un'esponenziale.

Siccome vorremmo leggeste anche la prossima puntata, ci teniamo per allora il caso r=2. Garantiti quantomeno i titoli tra il pessimista e il catastrofico.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms