Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 228 – Gennaio 2018 – Anno Ventesimo

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com
RM227 ha diffuso 3'245 copie e il 07/01/2018 per Google eravamo in 42'400 pagine.

Noi ricordiamo ancora con terrore le interrogazioni di geografia alle elementari, in particolare l'ineluttabile domanda "Con che paesi confina...?". Se avete fortuna, la mappa degli stati attuali mappati sulla ***Pangea*** potrebbe risultare una buona pezza d'appoggio per alcuni svarioni. Purtroppo (due volte) l'abbiamo trovata tardi, e non abbiamo registrato il nome del genio che l'ha disegnata.

1. Lo stretto indispensabile

"Ti bastan poche briciole,
lo stretto indispensabile
e i tuoi malanni puoi dimenticar.
In fondo basta il minimo,
sapessi quanto è facile
trovar quel po' che occorre per campar."[1]
(Terry Gilkyson, "Il Libro della Giungla",
film Walt Disney)

Non si può certo affermare che la tricologia sia una disciplina che venga citata molto spesso quando si parla di matematica. Paradossalmente è più probabile che venga chiamata in ballo la sua inesistente sorellastra, la tetratricotomia: ovvero la capacità di spaccare un capello in quattro (Umberto Eco, a dire il vero, preferiva il termine "tetrapiloctomia"); di persone che si affannano matematicamente in precisazioni complicatissime quanto inutili non c'è mai stata carenza, mentre di applicazioni della trigonometria o del calcolo differenziale alla tricologia vera e propria non abbiamo memoria. Siamo comunque ben consci che la matematica, onnipresente e onnipotente com'è, non avrebbe difficoltà veruna ad applicarsi anche alla scienza dei capelli, e non dubitiamo che qualche ricercatore abbia già avuto l'occasione e il coraggio di articolare una sommatoria o un integrale di superficie anche su qualche elaborata permanente con mèches o colpi di sole.

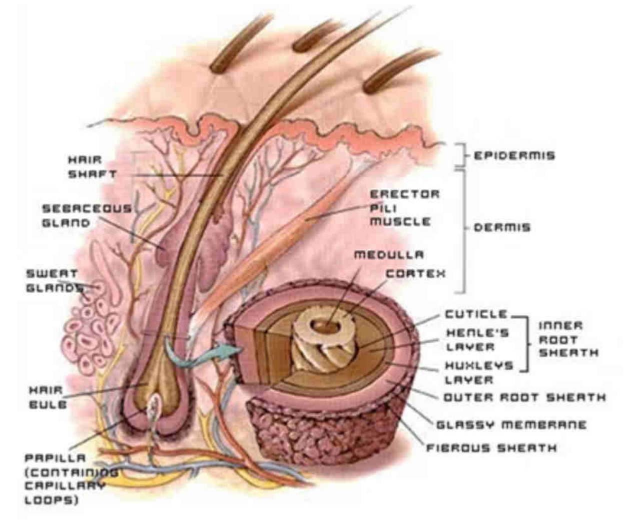
Fatto sta che anche episodi invero minimi, banalmente quotidiani nonché indubbiamente tricologici possono scatenare considerazioni con implicazioni che giungono dritte al cuore dei fondamenti della matematica. Di fronte allo specchio del bagno alla mattina, per esempio: manovrando con gesti insicuri (magari per ancora insufficiente dose di caffeina in circolo sanguigno) il rasoio destinato ad accorciare la barba. Il miagolio di protesta della giovane micia ancora convalescente dopo la chirurgica operazione di sterilizzazione può facilmente innescare l'associazione di idee: un rasoio taglia i peli della barba per velleitarie ragioni estetiche, così come il rasoio del veterinario ha rasato i peli della pancia della gatta per più stringenti ragioni igienico-terapeutiche. C'è il riconoscimento di una identità, che è il primo passo di una generalizzazione, agli occhi di un matematico. Del resto, in questo concordano serenamente anche i biologi: i peli sono un fattor comune tra i mammiferi, un segno distintivo e caratteristico. E le generalizzazioni sono conquiste importanti, nella scienza: splendide scorciatoie intellettuali, fantastiche semplificazioni nell'elaborazione razionale. Di alcune discipline, prima fra tutte la fisica, si potrebbe quasi scrivere la storia usando le generalizzazioni e le unificazioni di concetti come le pietre miliari che ne scandiscono l'evoluzione; non per niente, i fisici teorici stanno attraversando di questi tempi un periodo un po' frustrante, perché si sentono a un passo dal trionfo finale (la GUT, Grande Teoria Unificatrice; o la TOE, la Teoria del Tutto), ma si tratta di un ultimo passo che da troppo tempo non si riesce proprio a fare.

Il guaio è che, se anche può bastare il riconoscimento di una identità per iniziare l'iter di generalizzazione, completare il processo è dannatamente difficile e complicato; specialmente per quelle scienze che, a differenza della matematica, devono tener conto di un intero universo che abita fuori dalla nostra testa. Lo si vede anche restandosene

[1] "*Look for the bare necessities*
The simple bare necessities
Forget about your worries and your strife
I mean the bare necessities
Old Mother Nature's recipes
That brings the bare necessities of life".

Nella traduzione – di cui non abbiamo trovato gli autori – si perde inevitabilmente il bel gioco di parole tra "bare necessities" ("i meri bisogni") e "bear necessities" ("i bisogni dell'orso"), che ha il suo bel significato visto che a cantare è Baloo che orso, notoriamente, è. Va detto però che la traduzione italiana ("il minimo", "lo stretto indispensabile") si attaglia meglio ai loschi intenti di questo articolo.

ancora con il rasoio in mano davanti allo specchio: micia e umano condividono la classe Mammalia, ma fra un paio di settimane il *Felis catus* non avrà più bisogno di rasoi, mentre l'*Homo sapiens*, verosimilmente, si ritroverà di nuovo a spuntare i peli del mento. E quasi subito ci si accorge anche che si sta prendendo una strada sbagliata, perché la distinzione delle specie non c'entra un accidente: basta e avanza il corpo umano, dove la generalizzazione "peli" dovrebbe gioiosamente comprendere barba, capelli, peli delle gambe e delle braccia, peli pubici, sopracciglia, peli sul petto e sulle falangi, e praticamente in ogni area epidermica, compatibilmente con le capacità villògene di ogni individuo. Eppure differenze cruciali saltano subito agli occhi: ci sono peli (capelli, barba, baffi) che per quanto uno li tagli, continuano impietosamente a crescere, e ci sono peli (più o meno tutti gli altri) che se tagliati ricrescono, e poi si fermano diligentemente quando hanno raggiunto la lunghezza che ritengono opportuna.



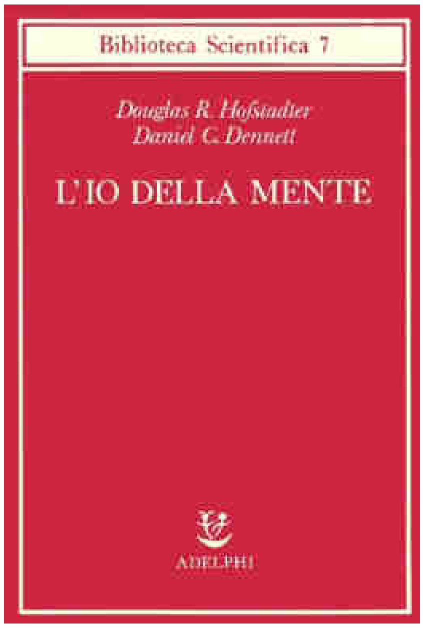
1 *Si fa presto a dire "pelo"*

La differenza è significativa, si potrebbe anche definire profonda: ma è sufficiente a demolire l'ipotesi di generalizzazione? Forse varrebbe la pena di consultare degli esperti, ma con la certezza che dermatologi e zoologi, nel migliore dei casi, potrebbero solo concederci un sorriso di compatimento, di fronte ad un approccio così ingenuo e a domande così dilettantesche: in men che non si dica ci si troverebbe travolti da un'infinità di classificazioni, dettagli, differenze e distinguo, perché la conoscenza specialistica è sempre molto, molto più profonda di quanto un curioso indagatore dilettante possa immaginarsi. Basta un accenno di ricerca in rete per scoprire follicoli, cuticole, cortecce, midolli, anagen, protanagen, mesanagen, metanagen, catagen, telogen, muscoletti orripilatori, e svariate decine di altri termini tecnici; per non parlare di zone glabre, mammiferi interamente glabri, relazioni cheratinose e impreviste con corna di rinoceronte, artigli dei predatori e aculei degli istrici.

D'altra parte, il potere informativo della generalizzazione risiede proprio nelle connessioni impreviste: Aristotele sarebbe certo molto stupito se potessimo raccontargli che la capacità attrattiva dei magneti e la folgore di Zeus sono aspetti della stessa interazione fondamentale, per non parlare della sconvolgente rivelazione che la romantica luce delle stelle risale, in ultima analisi, allo stesso principio fisico che causa il dolore conseguente ad un bel pugno sul naso (principio che, incidentalmente, è sempre quello responsabile della folgore e delle calamite).

È insomma necessario riconoscere – o almeno definire, fosse anche per mera convenzione – una sorta di crivello che riesca a trascurare, ai fini generalizzatori, le differenze eliminabili e a tesaurizzare le identità fondamentali. Come si è visto anche soltanto nel cercare di approcciarsi alle pellicce dei mammiferi, l'operazione è tutt'altro che semplice: a prima vista, sembra ridursi all'individuazione di una sorta di "minimo indispensabile" che garantisca l'appartenenza di un elemento a un determinato gruppo, ma le difficoltà permangono intatte.

Basta pensare a ciò che, da Cartesio in avanti (anzi, certamente anche da molto prima) viene considerato il punto di partenza di ogni indagine conoscitiva: il soggetto pensante, la mente indagatrice, l'ego cartesiano, l'"Io" dei filosofi o degli psicoanalisti. Se il riconoscimento di una identità è il primo passo verso la generalizzazione, e se la logica non esita a confermare che la più banale identità è quella tra un ente e sé stesso, almeno il primo passo dovrebbe essere semplice. Abituati come siamo a vivere nella realtà e a riconoscerla attraverso gli stimoli dei sensi e le capacità analitiche del cervello, difficilmente mettiamo in dubbio la continuità del nostro "Io": i più se lo immagineranno anche fisicamente, magari ben sistemato dietro gli occhi, al sicuro dentro la scatola cranica, dove arrivano gli stimoli ed è conservata la centrale analizzatrice. Eppure non è difficile immaginare regole e condizioni che potrebbero mettere in crisi questa posizione: se una persona è caratterizzata dalle sue convinzioni, emozioni, esperienze, è del tutto evidente che quella persona è oggi diversa da quella che era ieri, perché esperienze, emozioni e convinzioni cambiano continuamente. L'ottantenne che guarda la foto di sé stesso da bambino si riconosce, e usa lo stesso termine, appunto "io", per descrivere sia il sé stesso attuale sia il soggetto ritratto, ma è indubbio che la mente del vecchio sia diversa, quasi totalmente diversa, da quella che ospitava i pensieri del bimbetto in calzoni corti ritratto in fotografia.



2 *Un trattatello sull'Io (poi, a dire il vero, il titolo gioca parecchio con le parole, nell'originale)*

E un approccio meno metafisico rischia perfino di essere ancora più spietato: negli anni il corpo dell'ottantenne è cambiato quasi integralmente, e più volte, rispetto al corpo del bambino che era. Quanti sono gli atomi che componevano i venti chili di massa del bambino che ancora resistono immutati nel corpo dell'ottantenne? E avrebbe senso, anche se di questi atomi ce ne fossero molti, concludere che l'identità, l'"io" della persona sia da collocarsi in questa ridotta continuità delle particelle elementari che la compongono? A voler guardare gli esseri viventi dal punto di vista di un mero bilancio di materia/energia, apparirebbero tutti solo come trasformatori continui di materia (cibo, aria, acqua) in altra materia (rifiuti organici di vario genere); trasformatori con una fisicità quasi trascurabile, volatile, rispetto alla materia trasformata; niente di più, quasi, di una sorta di fronte di un'onda che aumenta l'entropia di ciò che incontra.

Si è già in territori troppo difficili, oscuri, complicati. È meglio tornare indietro, rifugiarsi nelle cosiddette "scienze dure" che, forse proprio per poter continuare ad essere tali, limitano rigorosamente i metodi e il campo d'indagine. E qui è facile ritrovare un celebre "minimo indispensabile" passato alla storia: il nome esatto, a dire il vero, è "Minimo Teorico", perché, a giudizio dell'inventore, era quanto (al minimo, appunto) si riteneva che uno studente dovesse padroneggiare per poter entrare a far parte della sua scuola di Fisica Teorica. Naturalmente, tale minima padronanza era verificata per mezzo di un esame da sostenersi direttamente con il creatore dell'idea.

La quantità di conoscenza fisica e matematica che occorreva dimostrare di possedere era semplicemente abnorme[2]. Si deve riconoscere che il professore in questione non era di quelli che non mettono a disposizione appunti per prepararsi, tutt'altro: insieme al suo più fido collaboratore ha scritto dispense dettagliate su ogni argomento che avesse la ventura di far parte del suo celebre "minimo". Quegli appunti, col tempo, sono diventati probabilmente la serie di testi di Fisica Teorica più famosi del mondo; una sorta di fattor comune, una caratteristica condivisa dei fisici di ogni nazione (quasi un indizio, se non proprio un criterio, per una sorta di generalizzazione, appunto).

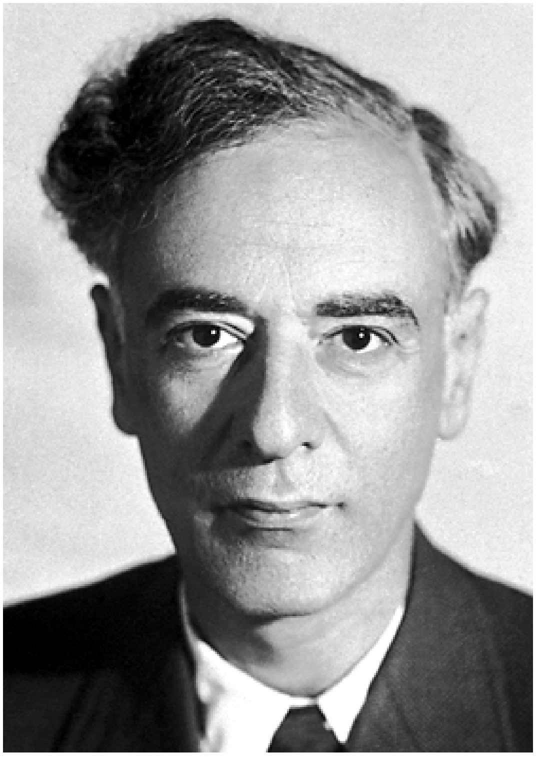
[2] A parziale consolazione di lettori che si sentiranno imbarazzati nel constatare la propria inadeguatezza, ricordiamo che coloro che possono vantarsi di aver superato il "Minimo Teorico" sono davvero pochi: 43 secondo alcune fonti, 42 (numero che ci piace un po' di più, per motivi letterari) secondo altre.


3 *La bibbia dei fisici teorici (sì, sì, manca il 6…)*

In Italia, sono stati pubblicati con questi titoli:

1 - Meccanica
2 - Teoria dei campi
3 - Meccanica quantistica: teoria non relativistica
4 - Teoria quantistica relativistica
5 - Fisica statistica
6 - Meccanica dei fluidi
7 - Teoria dell'elasticità
8 - Elettrodinamica dei mezzi continui
9 - Fisica statistica II – Teoria dello stato condensato
10 - Fisica cinetica

Si tratta del Corso di Fisica Teorica che, tra i fisici, è più semplicemente noto con il nome di Landau-Lifsits. Se Evgeny Mikhailovich Lifsits[3] deve la sua fama sostanzialmente alla parte avuta nella realizzazione di quest'opera colossale[4], lo stesso non si può dire del primo autore, che è da gran parte della comunità scientifica riconosciuto come l'ultimo dei "fisici teorici universali".


4 *Lev Landau*

Lev Davidovič Landau nasce il 22 gennaio 1908 a Baku, che al tempo della sua nascita era parte dell'impero russo degli Zar e che oggi è invece il più grande porto dell'Azerbaigian; ma non c'è dubbio che per Landau sia sempre stata, nella sua mente, città dell'Unione Sovietica. Padre ingegnere, madre medico, entrambi di religione ebraica; Lev cresce in un ambiente che apprezza l'educazione e la cultura, e ben presto mostra brillanti capacità, anche se opportunamente selezionate: impara facilmente il tedesco e il francese che gli insegna direttamente la madre; gli piacciono molto matematica, fisica e anche chimica, mentre mal digerisce gli studi ebraici e lo yiddish. Non parliamo poi del pianoforte, le cui lezioni odia cordialmente, e le rifugge ogni volta che ne ha possibilità, spesso rifugiandosi a leggere quella matematica che non studiava ancora a scuola: "*non ricordo periodi della mia vita in cui non sapessi derivare o integrare*", era solito dire; e c'è da credere che non fosse una spacconata, visto che entra all'università di Baku alla verde età di quattordici anni. A sedici si trasferisce a Leningrado, dove si trova il massimo centro per gli studi fisici dell'URSS; a diciannove ne

[3] O Lifshitz, secondo altre traslitterazioni dal cirillico.

[4] Un po' ingiustamente, a ben vedere, perché è stato un teorico di tutto rispetto; è uno degli autori della congettura BKL (la "L" indica lui) sulla curvatura delle singolarità nella Relatività Generale. Il guaio è che Lifsits stimava così profondamente Landau che lui per primo presenta l'opera come frutto essenziale del suo grande e geniale amico. La prefazione dell'opera è sostanzialmente una lunga agiografia di Lev Landau.

uscirà laureato, ma non senza aver già pubblicato la sua prima memoria, "*Sulla teoria degli spettri delle molecole biatomiche*", quando è ancora uno studentello diciottenne.

Sono gli anni in cui fiorisce la Meccanica Quantistica. Schrödinger e Heisenberg dipingono nuovi modi per interpretare la natura delle particelle elementari, e Landau ha l'entusiasmo e la convinzione di vivere in un periodo davvero eccezionale per la fisica. Tra il 1929 e il 1931 ha la possibilità di viaggiare per le maggiori università europee, e rimarrà segnato soprattutto dall'esperienza di Copenaghen, dove trova in Niels Bohr il suo padre spirituale nella ricerca scientifica.

Quando rientra in Unione Sovietica – prima a Leningrado, poi a Kharkov dove ottiene la cattedra di fisica teorica – è già probabilmente il fisico più prolifico del pianeta. Certo non il più celebre: Einstein con la Relatività, Bohr con il suo modello d'atomo, Schrödinger con la sua Equazione d'onda, Heisenberg con il suo principio di indeterminazione, Dirac con l'entanglement sono molto, molto più rinomati; e oltre a loro si possono facilmente trovare ancora una dozzina o due di nomi più noti di quello di Lev. Ma Landau è un genio universale, l'opposto esatto di uno specialista che riesce ad avere uno specifico, per quanto profondo, colpo di genio. Negli anni che precedono lo scoppio della seconda guerra mondiale pubblica memorie originali e innovative alla media di una ogni sei settimane. Più che un elenco degli argomenti che tratta con originalità o, peggio ancora, dei titoli delle pubblicazioni, può forse rendere meglio l'idea della sua produttività la ben più corta lista degli oggetti fisici che oggi portano il suo nome[5]:

- Distribuzione di Landau
- Quantizzazione di Landau
- Teoria delle transizioni di fase di Landau
- Smorzamento di Landau
- Poli di Landau
- Teoria della turbolenza di Landau-Hopf
- Equazione di Landau-Lifsits-Gilbert
- Modello di Landau-Lifsits
- Teoria di Ginzburg-Landau
- Teoria di Derjaguin-Landau-Verwey-Overbeek

La eccezionali capacità di Landau di spaziare virtualmente in ogni aspetto della fisica non devono peraltro lasciar credere che fosse incapace di ottenere risultati veramente eclatanti, e di essere solamente un collettore di conoscenza: nel 1962 ottiene il Nobel per i suoi studi sullo stato condensato, particolarmente sull'elio liquido.

È però forse possibile che Lev Landau rimanga presente nella memoria di chi lo conosce più per le sue caratteristiche più umane che per quelle, incontrovertibili ed eccezionali, dei suoi contributi scientifici. Ci sono decine di ricordi, aneddoti, particolarità che lo riguardano e che vengono ricordate con affetto e simpatia. Ogni fisico ricorda che gli amici lo chiamavano "Dau", nomignolo che usava lui stesso, sostenendo che derivasse dalla pronuncia francese del suo cognome; "Landau" diventava così "l'âne Dau", l'asino Dau. L'equino, del resto, non era il solo animale a cui si riallacciava: "Lev" significa "leone" e sulla sua porta si narra che ci fosse un cartello che metteva in guardia gli avventori dai suoi morsi.

Ma asino certamente non era: nella sua maniacale volontà di classificare, si era inventato una sorta di scala logaritmica in cui poneva i fisici tanto più vicini all'origine quanto più erano grandi. In coincidenza dell'origine piazzava Isaac Newton[6], mentre Einstein lo avvicina in corrispondenza del valore 0,5; i grandi fondatori della Meccanica Quantistica

[5] Ce ne sono anche altri (prevalentemente matematici): ma non vanno confusi con questi, opera di Lev, perché sono quasi tutti derivati dal lavoro di Edmund Landau, matematico.

[6] A dire il vero, nella prefazione al primo volume del Corso di Fisica Teorica, Lifsits ricorda la scala logaritmica (precisando anche che fosse in base 10, cosa che comportava che un fisico di classe 2 fosse cento volte meno importante di uno di classe zero), ma non cita Newton nell'origine. Lo fa pero Wikipedia, e noi di Wikipedia ci fidiamo.

(Bohr, Heisenberg, Schrödinger, Dirac) coabitavano in x=1. A sé stesso riservava un valore pari a 2,5, anche se più tardi la sua autostima crebbe fino al punto di assegnarsi un 2 pieno.

5 *Angelo con corona di funzioni d'onda*

Al di fuori della fisica, quasi per contrappasso, il grande generalizzatore affronta una vita che non si può non classificare come molto singolare. Crede nell'Unione Sovietica, nella sua patria, e certamente nei principi del marxismo-leninismo; ma non vive con leggerezza gli anni delle purghe staliniane, e non ne fa mistero. Così attira l'attenzione del regime, e viene arrestato il 28 aprile 1938; finisce prima alla Lubianka, poi nel carcere di Lefortovo, e passa circa un anno della sua vita in prigionia. Come dirà in seguito, non sarebbe sopravvissuto altri sei mesi; firmò una confessione per avere la possibilità di terminare la carcerazione.

Nel frattempo, gli scienziati russi si mobilitano perché sia liberato; Peter Kapitza arriva a proclamare una sorta di sciopero scientifico: avrebbe smesso di lavorare alle sue ricerche sino a quando Landau non sarebbe tornato libero. Niels Bohr, dalla Danimarca, scrive diverse lettere a Stalin chiedendone la scarcerazione.

Ma è una mobilitazione, per quanto clamorosa, che impallidisce rispetto a quella a cui si assiste nel gennaio 1962[7]. Sulla strada che va da Mosca a Dubna Lev ha un violento incidente automobilistico: le sue condizioni sono subito gravissime. All'ospedale di Mosca, dove viene ricoverato, subisce una serie di interventi (tracheotomia, craniotomia) che però non sembrano risolvere nulla; viene dichiarato clinicamente morto.

Non muore, però. L'ospedale di Mosca si riempie di fisici, tutti cercano di rendersi utili. Tutti si mobilitano, e mobilitano i fisici del resto del mondo. È il 1962, forse l'anno peggiore di tutto il periodo della Guerra Fredda, ma la comunità internazionale dei fisici sembra non ricordarlo: dall'occidente arriva l'urea, assente a Mosca, indispensabile per ridurre la pressione cerebrale di Lev; si ritarda il decollo di un aereo, perché arrivi in tempo.

Sembra comunque non essere ancora sufficiente, Landau viene comunque considerato a tutti gli effetti morto; ma non muore.

Resta inconscio per sei settimane, poi recupera, guarisce. Il 1962 è anche l'anno in cui riceve il Premio Nobel, ed è in via del tutto eccezionale che l'Accademia di Svezia consente che uno dei suoi premi sia consegnato non a Stoccolma, ma a Mosca, viste le particolari condizioni del vincitore.

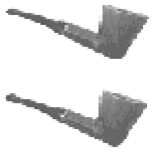
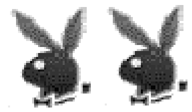
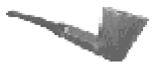
E Lev torna a vivere, anche a ridere e a scherzare. All'amico medico che ben conosce il suo carattere e la sua tendenza alla dialettica e alla discussione, quando lo sottopone ai test per verificarne l'integrità cerebrale, disobbedisce regolarmente: gli chiede di disegnare un cerchio, e lui disegna una croce; gli chiede di disegnare una croce, e lui disegna un cerchio. Quando l'amico gli chiede perché si comporta così, risponde: "Se ti obbedissi, penseresti che sono rimasto mentalmente menomato…"

Vivrà altri sei anni, fino al 1° Aprile 1968; se ne andrà sessantenne, senza aver mai ripreso a lavorare, a dedicarsi alla fisica. Forse l'incidente gli aveva effettivamente tolto qualcosa, chissà… forse, più semplicemente, era cambiata la sua visione del mondo.

[7] Vale la pena leggere "Storia umana della Matematica" di Chiara Valerio (Einaudi, 2016) anche solo per seguire il racconto di quest'episodio.

Forse, non era più in grado neppure di superare il suo "Minimo Teorico". O forse non era più pienamente Lev, Dau, Landau. Non è facile ottenere generalizzazioni, forse perché spesso è difficile anche solo conservare la propria identità.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Sta diventando sempre peggio			
Ubriachezza selettiva			

2.1 Sta diventando sempre peggio

Ci riferiamo al ritmo iperesponenziale che sta raggiungendo il nostro rimbambimento senile.

Dopo alcuni preclari episodi (tipo il proporre due volte lo stesso problema[8]) che tutti hanno notato, sono iniziati dei segnali più subdoli ma altrettanto (se non più) preoccupanti, quali il ricordare con toni arcadici ed estatici la losca congrega che si riuniva negli abbaini dell'Istituto Fisico; bene, considerate quanto segue come un ulteriore passo (nel senso di *"...a giant leap for me..."* sì, era al contrario, ma dovreste aver capito il senso) in quella direzione.

Rudy e Doc (dalle parti del primo anno) impegnavano proficuamente il tempo tra un'assemblea e l'altra giocando a Bridge.

Il fatto che fossero i migliori giocatori sulla piazza di fisica la dice lunga sia sul numero degli iscritti al suddetto Corso di Laurea che sulle capacità bridgistiche dei restanti, ma avevano preso la cosa abbastanza sul serio da costruire un sistema di licitazione derivato dal Fiori Romano particolarmente adatto alla versione *goulash* del Bridge (quella nella quale, grazie al non rimescolamento delle carte e ad una distribuzione non alternata, gli *slam* sono praticamente all'ordine del giorno).

Ora, mettere dei problemi di bridge in una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa *[orpo... era un mucchio che non lo dicevamo!]* potrebbe avere anche un remoto senso, ma non abbiamo la minima intenzione di esibirci in cose del tipo "N e S, con una distribuzione loffia e secchi a quadri, realizzano 7Q". Anche perché scrivere i semi è piuttosto complicato. E poi, il problema che ha trovato Rudy è un caso particolare di giocata a "senza atout", quindi, più che di Bridge, potrebbe essere di Whist[9] *[Giusto, Doc?]*.

Ma veniamo al gioco, o meglio, al problema. Supponiamo di essere in fase di analisi "post mortem", come dicono lugubremente i cugini scacchisti.

[8] Ve l'avevamo detto, che a rigirare il coltello nella piaga ci avremmo pensato noi.

[9] Rapido ripasso del caso particolare: il primo gioca una carta, e quello è, per quel giro, il seme di atout ("la briscola", per gli indigeni). Nei giri successivi, gioca per primo chi ha preso al giro precedente. L'ordine delle carte è 2, 3, 4, …,10, J, Q, K, A. Tredici carte a testa. Obbligo di risposta nel seme, se giocate altro non vale niente. Si gioca in coppie ("antipodali"), e ogni presa conta per la coppia.

Ovest deve giocare la prima carta, e una delle possibilità è quella di giocare ♥K; la cosa interessante è che, a seguito di rapida disamina delle carte, risulta per E-O *impossibile perdere il grande slam*: in pratica, qualsiasi giocata (legale, non necessariamente logica) facciano E-O, faranno tredici prese.

Il bello è che, se O gioca *qualsiasi delle sue altre carte*, allora per N-S risulta *impossibile perdere il grande slam:* qualsiasi giocata (l.,n.n.l.) facciano N-S, faranno tredici prese.

Ora, a noi non interessa sapere cosa direste a Ovest se gioca qualcosa di diverso da ♥K, anche se la cosa svilupperebbe probabilmente nuove insospettate retoriche turpiloquiali: sappiamo che N ha sicuramente ♠2 e ♣J, ma quello che ci interessa sapere è: chi ha ♦5?

Eh? Come si chiamava? "Fiori CF". Fortunatamente, perso nelle nebbie.

2.2 Ubriachezza selettiva

Tanto per cambiare, siamo in ritardo: stiamo scrivendo queste note in attesa del cenone di Capodanno, le famiglie hanno posto una moratoria sulla quantità di alcool che ci è permesso ingurgitare in attesa delle libagioni della serata. Quindi la nostra ebbrezza è non solo selettiva (ulteriori notizie in seguito), ma anche virtuale.

In realtà siamo perfettamente coscienti che questa sera, anche se solo in quattro, consumeremo una quantità di bottiglie degna dei "grandi numeri" di cui abbiamo parlato nei passati PM, quindi un po' di ragione c'è: sappiamo già come andrà a finire.

Sulla via del ritorno a casa (rigorosamente a piedi e completamente all'interno di isole pedonali, appena ci ritroveremo in una piazza ragionevolmente ampia (non necessariamente deserta: ci si aspetta che il resto della popolazione non sia in condizioni molto dissimili dalle nostre), inizieremo a verificare la sobrietà cercando di camminare in linea retta: sappiamo benissimo di farcela per dieci metri, ma non di più. Dopo i primi dieci metri, "sbanderemo" di un angolo a (...con tutto quell'alcol in corpo, non ci proviamo neanche, a scrivere "alfa") verso destra, e cammineremo per altri dieci metri in linea retta. Per poi sbandare (...e qui entra in gioco il "selettiva") verso *destra* di un angolo a... e avanti in questo modo: dopo nove camminate, ci ritroviamo al punto di partenza, dove biascichiamo "...hai vishto che non shono 'briaco?".

Prima domanda: quali valori di a ci permettono di realizzare questo exploit?

Seconda domanda: causa errore di calcolo sull'angolo a, dopo queste nove spericolate manovre vi ritrovate a dieci metri in linea d'aria dal punto di partenza; per nascondere il fallimento dell'operazione, enunciate al volo tutti i valori di a per cui vale esattamente questa condizioni. Quali sono?

"Rudy, ma non potevi dircele prima, che provavamo a Capodanno?" Tranquilli: il 15 febbraio finisce l'Anno del Gallo e inizia l'Anno del Cane. Anche se una sbronza di grappa di bambù non la auguro neanche al mio peggior nemico.

Questa sera (per noi, non per voi), un brindisi a Onorato Vigliani: ministro del secondo governo Minghetti, ha presentato un disegno di legge che diceva, suppergiù "Il primo gennaio è festa". *Sapevatelo*, l'anno prossimo, e farete un figurone.

3. Bungee Jumpers

Descrivete l'insieme dei punti P comuni a due (e solo due) rette tangenti alla curva $y=x^3$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Gennaio!

Questo mese ha molti significati, e ben sapete che da questo momento si aprono le danze delle celebrazioni in Redazione: a febbraio è il compleanno di RM, poi il Capo, poi Alice, infine il Doc. Inoltre vedete bene dall'indicazione in alto sulla pagina che l'anno è cambiato.

Tante altre cose sono cambiate, ma come ben sapete la paginazione di RM non cambia da molti anni. È vero che siamo molto affezionati a quello che abbiamo creato, ma è anche vero che non siamo tanto antiquati da non sapere che la nostra grafica non è proprio al passo con i tempi: per questo è bello sapere che i nostri lettori – con molta più conoscenza dei moderni metodi – ci offrono la loro esperienza per modernizzarci. È il caso di ***Talete di Mileto***, che ci ha preparato una possibile nuova versione grafica. Ne potete vedere il risultato a questo link: http://www.rudimathematici.com/extradoc/prova-rudi-matematici.pdf; il file è di 5MB e contiene solo tre pagine, ma probabilmente possiamo provare a considerare una soluzione intermedia che mantenga dimensioni modeste per tutti quelli che ci leggono solo online. Ci stiamo ancora pensando…

Ma tornando a noi, gennaio è anche mese freddo e comincia con festeggiamenti vari, per cui siamo già certi (anche perché sappiamo quando scriviamo queste righe), che usciremo parecchio in ritardo. Speriamo che non abbiate perso le speranze, noi siamo sempre qui.

Nel farvi ancora gli auguri per un prospero 2018, carico di matematica ricreativa e di momenti felici, vi ricordiamo che il nostro calendario è uscito ed è facilmente reperibile qui: http://www.rudimathematici.com/archivio/calendari/RM_2018_Calendar.pdf.

E con questo passiamo alle soluzioni del mese passato.

4.1 [226]

4.1.1 L'ultimo problema di quest'anno

Il mese scorso ci siamo persi una soluzione per questo problema, vediamo di rimediare, non prima di aver ricordato il testo:

> *Partite nell'anno uno, armati di un congruo numero di post-it e di un segmento molto lungo; il vostro lavoro, per quest'anno, consiste nel mettere due post-it agli estremi dell'intervallo, decorandoli entrambi con il numero "1". Nel generico anno n, considerate tutti gli intervalli sul vostro segmento limitati a sinistra e a destra da un post-it e inserite a metà di ogni intervallo un foglietto con scritta sopra la somma dei due valori che definiscono l'intervallo. In che anno e in che posizione scrivete "2017" per l'ultima volta? E quante volte l'avete scritto? E per "2016"? Che numero c'è sul milionesimo bigliettino e, riguardandoli tutti, qual è il numero più grosso utilizzato sino a quel momento?*

La soluzione pubblicata in RM227 il mese scorso era di ***Valter***, ma quella di ***Camillo*** è passata inosservata. Un gran peccato perché aveva in allegato una fotografia con i post-it che vale la pena allegare. Vediamo:

> Nelle domande dell'ultimo problema con 2017 c'è qualcosa che non mi torna.
>
> La mia risposta per l'ultima volta che scriverei 2017 sarebbe "infinito". Se invece la domanda fosse: l'ultima volta che scriverei 2017 nel 2017° anno del nostro compilatore di post-it la risposta sarebbe 2 elevato a 2016 ovvero $2^{(A-1)}$.
>
> Vorrei dimostrare questo "infinito" in modo semplice.
>
> I post-it necessari in ogni anno sono: $2^{(A-1)}+1$. Sul primo e l'ultimo è riportato sempre 1.
>
> Per comodità riporto l'esempio in RM a pagina 9 con l'aggiunta d'un paio di anni:
>
> A 1: 1, 1
>
> A 2: 1, 2, 1
>
> A 3: 1, 3, 2, 3, 1
>
> A 4: 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1
>
> A 5: 1, 5, 4, 7, 3, 8, 5, 7, 2, 7, 5, 8, 3, 7, 4, 5, 1
>
> A 6: 1, 6, 5, 9, 4, 11, 7, 10, 3, 11, 8, 13, 5, 12, 7, 9, 2, 9, 7, 12, 5, 13, 8, 11, 3, 10, 7, 11, 4, 9, 5, 6, 1
>
> Ogni colonna di numeri che inizia per 1 (a parte la prima colonna) sono la successione dei numeri naturali per cui il 2017 vi apparirà all'infinito.
>
> Le sequenze iniziali per gli anni:

2016: 1, 2016, 2015, 4029, 2014, 6041 ecc. per un numero di post-it tale da fare impallidire

2017: 1, 2017, 2016, 4031, 2015, 6044, …, il numero di atomi nell'universo.

2018: 1, 2018, 2017, 4033, 2016, 6047, 4031, 6046, 2015, …,

Tutto questo senza forza bruta e spero di non sbagliarmi (altrimenti che figuracciona).

Analizzando qualche anno incolonnato a sinistra si nota che di anno in anno il numero è costantemente distanziato.

Per quanto riguarda il numero più alto di ogni anno questo segue esattamente la serie del figlio di Bonacci. I post-it possono essere piccoli tanto il milionesimo non può essere più grosso di 5 cifre.

Utilizzando la forza bruta invece potrei dire la prima volta che appaiono sia il 2016 il 2017 ed anche il 2018: è il 18° anno. Nelle posizioni rispettive (ovvero al post-it) 11060, 19228 e 10940. E vi appaiono, rispettivamente 8, 24 e 20 volte nell'arco dell'anno.

Il 20000 appare per la prima volta alla posizione 633144 del 23° anno ed è scritto 20 volte nell'arco dell'anno. Per buon peso:

- il 50000 appare in posizione 2729178 del 25° anno per 12 volte,
- il 100000 in 6509900 del 26° per 8 volte,
- il 1000000 in 177550044 del 31° per 24 volte mentre al 32° anno è scritto 160 volte.

Nella prima milionesima posizione accessibile (21° anno) c'è scritto 233, nel 22° anno 424 e nel 23° 615 con una distanza tra loro di 191 per cui è inutile proseguire.

Riassumendo:

- nessuna ultima volta per il 2017,
- il 20000 appare per la prima volta al 23° anno su 20 post-it nell'arco dell'anno,
- sul milionesimo bigliettino che per la prima volta è al 21° anno c'è scritto 233,
- il numero più grosso utilizzato ogni anno segue la successione di Fibonacci anno per anno.

Complimenti a ***Camillo*** anche per la foto dei più piccoli post-it che ha trovato:

Mentre stavamo chiudendo il numero è ancora arrivato il contributo di trentatre, che vi passiamo subito e volentieri:

Il problema ha ricevuto una risposta da ***Valter*** . Ho cercato di analizzarlo più in dettaglio.

Le sequenze relative ai diversi anni sono simmetriche. Nella figura le prime sequenze (ogni anno una riga) sono scritte in forma di tabella (la riga 7 è troncata al valore centrale 2).

R \ C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	1	1															
2	1	2	1														
3	1	3	2	3	1												
4	1	4	3	5	2	5	3	4	1								
5	1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1
6	1	6	5	9	4	11	7	10	3	11	8	13	5	12	7	9	2
7	1	7	6	11	5	14	9	13	4	15	11	18	7	17	10	13	3

R \ C	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6	9	7	12	5	13	8	11	3	10	7	11	4	9	5	6	1	
7	14	11	19	8	21	13	18	5	17	12	19	7	16	9	11	2	...

La coordinata R indica la riga (l'anno), C la colonna (i termini della sequenza); $[R,C]$ indica il valore nella casella – p.es. $[5,4]=7$. Le caselle (non i valori) sono distinte in *pari* e *disp* (in figura bianche e grigie) a seconda della parità di C. I valori nelle caselle *disp* sono copiati dalle righe precedenti, nelle *pari* sono la somma dei valori adiacenti.

Valgono le

[1] la lunghezza totale della riga R è $L_R = 1+2^{R-1}$.

- il valore centrale di una riga è sempre 2 e due valori uguali e simmetrici sono

[2] $[R,C]$, $[R,C']$ con $C+C'=1+L_R$.

[3] data una coppia di valori consecutivi (p,q) in una riga, si ha

a) le caselle relative a p, q sono una *pari* e una *disp*, e il *pari* è il numero maggiore

b) p e q sono diversi e coprimi

c) la coppia ordinata (p,q) è unica nella intera tabella – l'inversa (q,p) è nella stessa riga

d) la tabella (estesa all'infinito) comprende tutte le coppie di valori coprimi senza ripetizione .

[4] il valore massimo in riga R è il numero di Fibonacci F_{R+1} – il valore compare nella riga due volte (per $R \geq 3$) in posizioni simmetriche – la prima è

$$R\ pari: C=(2^{R-1}+4)/3\ ,\ \ R\ disp: C=(2^{R-1}+2)/3$$

- in figura i valori max sono scritti in rosso.

Un numero presente in riga R viene copiato uguale nella riga successiva con

[5] $[R,C]=[R+1,2C-1]$ che genera sempre caselle *disp*

- l'operazione inversa è

[6] $[R,C]=[R-1,(C+1)/2]$ applicabile solo alle caselle *disp*

- p.es. $7=[5,4]=[6,7]=[7,13]=[8,25]=[9,49]=\ldots$, percorsa nei due sensi da [5] e [6]

[7] ogni serie di valori N inizia da una casella *pari* e prosegue nelle righe successive con caselle *disp*

- la casella *pari* iniziale è una *base* di N della serie (nel caso precedente $[5,4]$ è una *base* di 7)

- tutte le caselle *pari* sono una *base* – per ogni N le *basi* sono in numero finito $\varphi(N)$ (funzione di Eulero), pari al numero di modi in cui N può essere diviso nella somma di due numeri coprimi

p.es. 7 genera $\varphi(7)=6$ coppie : $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$ e le *basi* di 7 sono solo

$[7,2]=[5,10]=[5,14]=[5,4]=[5,8]=[7,64]$

- in ogni riga $R \geq N$ compaiono esattamente $\varphi(N)$ valori N tutti in caselle *disp* .

Quindi in una riga il valore N può comparire molte volte (***Valter*** ha ritenuto fossero solo due).

Le domande sono

A) dove sono scritti l'ultima volta certi numeri e quante volte compaiono – la domanda non ha senso perché ogni N compare nella tabella e poi riappare in tutte le righe successive.

B) quale valore ha un certo post-it, e il valore massimo comparso prima di questo – se indichiamo con X la posizione di un post-it e con $[X]$ il suo valore, occorre

i.) ottenere le coordinate R, C che corrispondono a X

ii.) calcolare il valore $N = [R,C] = [X]$

iii.) cercare il valore max precedente a N

- i calcoli sono riportati ai punti [8], [9], [10].

Elenco alcuni risultatati, con indicato il valore max precedente a $[X]$

$X = 100$, $[X] = [7,31] = 9$, max $= F_8 = 21$
$X = 1.000$, $[X] = [10,480] = 6$, max $= F_{11} = 89$
$X = 1.000.000$, $[X] = [20,475.694] = 581$, max $= F_{21} = 10.946$

- l'ultima riga corrisponde, per l'identità $[X] = [R,C)]$, al risultato di ***Valter***.

<u>dimostrazioni</u>

[1] iterando $L_2 = 2$, $L_R = 2L_{R-1} - 1$

[3]

a) le caselle *pari* sono generate per somma dalle due adiacenti

b) data la coppia di valori (p,q), $p < q$, esiste la terna $(p,q,q-p)$

$\rightarrow$ da $p = q$ si ha la terna $(p,p,0)$ impossibile $\rightarrow$ p, q sono diversi

c) - in riga R ogni coppia (p,q), $p < q$ implica la terna $(p,q,q-p)$ in cui il termine centrale è la somma degli altri due – la terna deriva dalla coppia $(p,q-p)$ in riga (R–1) che si ricava dalla coppia iniziale <u>sottraendo dal termine maggiore quello minore</u>

- l'operazione può essere ripetuta fino ad arrivare alla coppia (1,1) e le coppie coinvolte sono in numero di R

p.es. *riga* 7 da $(7,17) \rightarrow (7,10) \rightarrow (7,3) \rightarrow (4,3) \rightarrow (1,3) \rightarrow (1,2) \rightarrow (1,1)$ – il n° di coppie è $R = 7$

- quindi da una coppia (p,q) in riga R è possibile risalire al valore R – ne segue che <u>le coppie di due righe diverse sono tutte diverse fra loro</u> – inoltre sono <u>diverse anche le coppie di una stessa riga</u> – se due coppie sono uguali ripetendo il processo per tutte e due si arriva a una coppia con due valori uguali – impossibile per [3] b)

- il calcolo c) è di fatto l'algoritmo euclideo per il *mcm* e si riduce al calcolo della frazione continua del rapporto

p.es. $(7,17) \rightarrow 7/17 = \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3} \rightarrow R = 2+2+3 = 7$ (somma dei denominatori)

[4] in riga 1 compare la coppia $(1,1) = (F_1, F_2)$ che in riga 2 diventa la terna $(1,2,1) = (F_1, F_3, F_2)$ ecc. con il termine centrale somma degli adiacenti e valore max della riga

[5] il valore $[R,C]$ è copiato in riga (R+1) aggiungendo C–1 caselle *pari* da cui $C \to 2C-1$

[7] ogni coppia (p,q) in riga R genera in (R+1) la terna $(p,p+q,q)$ con la casella centrale *pari*, e inversamente ogni *pari* di valore $N = p+q$ è generato in questo modo – p e q sono coprimi per [3] b)

- da $\varphi(N)$ si ricava che in ogni riga 2 compare solo una volta, e i numeri 3, 4 e 6 al massimo due volte
- l'ultima *base*(N) è generata da $(1,N-1)$ ed è $[N,2]=N$ – nelle righe seguenti non ci sono più *basi*

[8] trasformazione coordinate $(R,C) \leftrightarrow X$

- sommando le lunghezze [1] delle righe precedenti, con

$S_m = L_1 + L_2 + ... + L_m = m + 2^m - 1$, il posto X si ricava dalle R, C con

$X = S_{R-1} + C = R + C + 2^{R-1} - 2$ (stessa formula di ***Valter***)

- inversamente da X si risale alle (R, C) ricavando R da $S_{R-1} < X \le S_R$ e quindi $C = X - S_{R-1}$
- p.es. $X = 50 \to S_5 < 50 \le S_6 \to R = 6 \to C = 50 - 36 = 14$.
  $\to [X] = [6,14] = 12$

[9] calcolo di $N = [R,C]$

- non ho trovato una formula algebrica finita ma N si può ottenere riducendo $[R,C]$ fino a valori noti
- con $C = 2n, C = 2n-1$ per i valori pari e dispari si ricava da [6]

$$[R,2n-1] = [R-1,n]$$
$$[R,2n] = [R,2n-1] + [R,2n+1] = [R-1,n] + [R-1,n+1]$$

p.es. $[7,35] = [6,18] = [5,9] + [5,10] = 2 \cdot [4,5] + [4,6] =$
$= 3 \cdot [3,3] + [3,4] = 4 \cdot [2,2] + [2,3] = 4 \cdot 2 + 1 = 9$

- o più semplicemente, usando i valori in figura, $[7,35] = [6,18] = 9$
- ad ogni passo si ha $p \cdot [R,m] + q \cdot [R,m+1]$ e il calcolo si programma facilmente.

[10] valore max precedente a $[X]$ – si ricava da [4]

R *pari* , $C \le (2^{R-1} + 4)/3 \to F_R$ *opp.* F_{R+1}.
R *disp* , $C \le (2^{R-1} + 2)/3 \to F_R$ *opp.* F_{R+1}

Niente male, vero? E adesso andiamo avanti con le soluzioni ai problemi del mese scorso.

4.2 [227]

4.2.1 L'emeroteca di Babele

Speriamo di non aver perso troppi lettori e solutori per le aperte critiche alla capitale lombarda con le quali il Capo (piemontesissimo e anti-milanese per partito preso) ha infarcito il primo problema del mese scorso. Vediamo di creare un sommario un po' più neutrale, trattasi di problema di ordinamento:

> *I 365 volumi di giornali del 2015, tutti uguali in altezza e spessore fanno bella mostra di sé in uno scaffale di 366 posti, ciascuno con la data di uscita sul dorso, ben visibile (l'ultimo posto – dedicato al 29 febbraio – è vuoto, visto che non era bisestile), ma sono in disordine.*

> *Rudy prende un volume e lo mette al posto "del 29 febbraio" (insomma, lo spazio libero al fondo). Poi prende il volume che deve andare dove adesso c'è il buco e lo mette "al suo posto", e avanti in questo modo.*
>
> *Supponiamo "la peggior disposizione possibile"; il metodo, ha fine? E in quante mosse? Qual è la peggior disposizione?*

Bene, per prima cosa riportiamo la risposta piccata di ***.mau.***, sempre pronto e veloce:

> quanto al problema 1, non lo capisco (e non perché è noto che a Natale, Capodanno, Ferragosto, Primo Maggio i giornali non escono e quindi non possono essere 365). Se il volume che Rudy prende "a caso" è sempre già nella posizione corretta, ovviamente il lavoro potrebbe non terminare mai, e quindi bisognerebbe calcolare il valore atteso dei numeri dei trasferimenti. Se invece prende "a caso" un volume solo dopo aver verificato che non fosse in posizione corretta, la procedura deve per forza terminare: se sposti A nel buco e metti quello giusto in A ti sei ricondotto a un caso precedente in cui c'è un volume in meno fuori posto e quindi per discesa infinita sai di terminare. La peggior combinazione è quella in cui sono tutti sfasati di un giorno, e quindi occorrono 366 spostamenti (sposti quello corrispondente al 1. gennaio, metti a posto gli altri 364, e rimetti a posto quello che avevi spostato inizialmente)

Come vedete, il problema era – come spesso accade – lontano dalla realtà e posto in modo da avere più di una interpretazione. Vediamo che cosa ne ha scritto ***Valter***:

> Numero i giorni da 1 a 365. Assegno il numero 366 al 29 febbraio (lo spazio libero in fondo). Se ho N giorni che:
>
> - non sono al loro posto
>
> - ognuno di essi occupa il posto di uno degli altri N–1
>
> occorrono minimo N+1 spostamenti per sistemarli (chiamo una disposizione di questo tipo sequenza).
>
> Un esempio per capirci:
>
> - N=5
>
> - giorno/posto occupato: 10/20, 20/30, 30/40, 40/50 (il giorno 10 si trova al posto del giorno 20, …)
>
> - spostamenti: 10>366, 20>10, 30>20, 40>30, 50>40, 366>10 (sposto il giorno 10 che è al posto del 20 nello spazio libero, …).
>
> Detto ciò mi pare che il metodo abbia fine (qualunque "disordinamento" si può ricondurre a X sequenze).
>
> La disposizione peggiore è quella con
>
> - 181 sequenze di N=2 giorni
>
> - 1 sequenza di N=3 giorni.
>
> Per ogni sequenza N=2 mi occorrono X=3 spostamenti (più quella con N=3 che richiede X=4 spostamenti).
>
> Il che mi dà un totale di 181*3 + 4 =547 spostamenti.
>
> P.e.: 2/1, 1/2, 4/3, 3/4, …, 365/364, 364/365, 365/363.
>
> Con altri N>2 si ridurrebbero gli spostamenti nello spazio libero (e quindi il totale complessivo di tutti gli spostamenti).

Direi che fin qui sono tutti d'accordo che il problema non sia complicato. ***Alberto R.*** a sua volta fa una generalizzazione:

> Generalizziamo: N oggetti numerati da 1 a N sono distribuiti a casaccio in N caselle progressivamente numerate, mentre un'ulteriore "casella di parcheggio provvisorio" è vuota.
>
> Gli N oggetti formano una generica permutazione che deve essere riordinata mediante successive "mosse", ciascuna delle quali consiste nello spostare un

elemento qualunque in una casella vuota. Non è consentito scambiare direttamente tra loro due elementi.

Si chiede qual è il numero minimo di mosse sufficiente a riordinare qualunque permutazione.

Consideriamo solo le permutazioni complete perché se una permutazione di N elementi ne ha già K al loro posto il problema si riduce a quello di una permutazione completa di N–K elementi.

Indicheremo la permutazione con i numeri da 1 a N, la casella di parcheggio provvisorio con una coppia di parentesi quadre e una posizione vuota con una coppia di parentesi tonde

Se N è pari la situazione peggiore è quella in cui gli elementi sono scambiati a coppie, ad esempio 1 con 2, 3 con 4, 5 con 6 ….

In tal caso le mosse occorrenti sono 3N/2, ad esempio 9 per N=6

2 1 4 3 6 5 [ ]
( ) 1 4 3 6 5 [2]
1 ( ) 4 3 6 5 [2]
1 2 4 3 6 5 [ ]
1 2 ( ) 3 6 5 [4]
1 2 3 ( ) 6 5 [4]
1 2 3 4 6 5 [ ]
1 2 3 4 ( ) 5 [6]
1 2 3 4 5 ( ) [6]
1 2 3 4 5 6 [ ]

Se N è dispari un esempio della permutazione peggiore si può ottenere in modo simile: si scambiano a coppie N–1 elementi uno dei quali viene nuovamente scambiato con l'ennesimo. Nell'esempio che segue le coppie da scambiare sono sottolineate.

<u>1</u> <u>2</u> 3 4 5 6 7
2 1 <u>3</u> <u>4</u> 5 6 7
2 1 4 3 <u>5</u> <u>6</u> 7
2 1 4 3 6 <u>5</u> <u>7</u>
2 1 4 3 6 7 5

Il numero di mosse occorrenti per riordinare queste permutazioni è dato dalla stessa formula 3N/2 con l'avvertenza che il numero semintero che si ottiene va arrotondato in difetto.

Nel caso specifico dell'emeroteca occorrono 3*365/2 – 0,5 = 547 mosse.

Osservo infine che la permutazione completa più facile da riordinare (bastano N+1 mosse) è quella che si ottiene mediante scorrimento circolare: il primo elemento al secondo posto, il secondo elemento al terzo posto …. l'ultimo al primo posto. Ad esempio la permutazione completa 9 1 2 3 4 5 6 7 8 si riordina con 10 mosse: si parcheggia il 9 (1 mossa) si spostano a sinistra i numeri da 1 a 8 (8 mosse) si mette il 9 in ultima posizione (1 mossa)

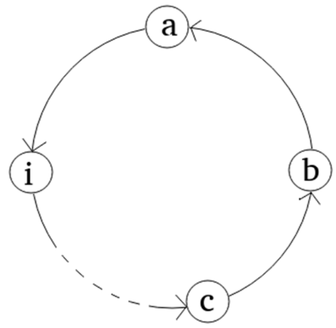
Ottimo lavoro, come vedete. Come se non bastasse il titolo della mail che ***Alberto*** ci ha inviato con la soluzione conteneva molti e benvenuti auguri e per titolo "Enoteca di Babele", ancora più beneaugurante per le gozzoviglie redazionali che arriveranno, speriamo, presto. In più risponde a tutte le domande in generale, e lo stesso vale per la versione di ***GaS***:

Cominciamo definendo "ciclo" un insieme di numeri (*a,b,c, …,i)* per i quali vale la seguente:

- il numero a è nella posizione b-esima,
- il numero b è nella posizione c-esima,
- il numero c è nella posizione d-esima,
- …
- il numero i è nella posizione a-esima

Quindi il volume c deve andare dove è b che deve andare dove è a che deve andare dove è i ecc...

Situazione che possiamo schematizzare come segue:



[Figura 1]

Prendiamo un caso semplificato di 9 volumi che sono inizialmente ordinati, si fa per dire, come segue: 4-6-2-5-1-7-9-8-3.

In questa disposizione abbiamo 2 cicli:

- **(4,1,5):** il 4 è al posto dell'1 che è al posto del 5 che è al posto del 4 (ed il ciclo si chiude)
- **(6,2,3,9,7)**: il 6 è al posto del 2 che è al posto del 3 che è al posto del 9 che è al posto del 7 che è al posto del 6 (ed il ciclo si chiude)

Rimane fuori il volume 8 che, essendo già al suo posto, non fa parte di nessun ciclo.

Sia "N" il numero dei volumi (365 nell'esempio del problema ma generalizziamo subito, per comodità, ad un numero qualsiasi di volumi), è immediato vedere che ogni disposizione iniziale degli N volumi sarà composta da:

A) Un certo numero, chiamiamolo "P", di volumi che sono già al loro Posto
B) Un certo numero, chiamiamolo "C", di Cicli (vd. definizione sopra)

Questo è tutto quello di cui abbiamo bisogno per risolvere il problema, possiamo infatti dimostrare che Rudy potrà sempre portare a termine il suo compito in un numero finito, diciamo "TOT", di passi adottando una strategia composta dalle due semplici regole:

1. ogni volume può essere spostato esclusivamente nella posizione che gli compete O nella posizione "jolly" (il 29 febbraio, per intenderci); in altre parole, un volume non può essere spostato, neanche temporaneamente, in una posizione che non gli competa a meno che non sia la postazione jolly
2. La posizione jolly può essere riempita esclusivamente con un volume che NON sia già al suo posto

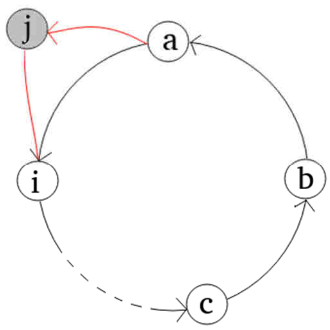
Vediamo cosa succede, nella pratica, applicando le due regole:

A) ogni volume che sia già al suo posto non può essere più spostato. Nessuna mossa quindi, ovviamente, per i P volumi che inizialmente sono già al loro posto
B) nella posizione jolly può essere messo solo un generico volume a che appartiene ad un ciclo $(a,b,c, …,i)$; a questo punto si libera la posizione in cui stava a ed il cui legittimo occupante è b; in questa situazione, sempre seguendo le due regole, non possiamo fare altro che spostare il volume b

nella sua posizione "legittima", quindi spostiamo *c* ecc... fino a quando non spostiamo il volume *i*. Per definizione, la posizione dove era posizionato *i* è quella spettante ad *a* che quindi possiamo rimuovere dalla posizione jolly per metterlo al suo posto. Vediamo che in questa sequenza ogni numero del ciclo è stato spostato 1 volta ad eccezione del volume *a* che è stato spostato 2 volte

C) Continuiamo come per il punto B) per ognuno dei C cicli che abbiamo nella disposizione iniziale

Il punto B può essere schematizzando immaginando che per il loop della Figura 1 aggiungiamo una posizione jolly (*j*) vuota che può essere utilizzata per spostarci il volume *a*, la posizione dove era presente *a* quindi si svuota e ci mettiamo *b* e così via fino a quando togliamo il volume *a* dalla posizione jolly per metterlo al suo posto.



[Figura 2]

La totalità degli step A, B e C comporta che:

- tutti i volumi appartenenti ad un ciclo, ed in totale sono N–P, vengono spostati almeno 1 volta
- per ogni ciclo, ed in totale sono C, un singolo volume (quello messo nella posizione jolly) viene spostato 2 volte mentre tutti gli altri vengono spostati una ed una sola, ci sono quindi solo C volumi che vengono spostati 2 volte
- non ci sono altri spostamenti

Abbiamo così che gli spostamenti totali sono

[1] **TOT=(N–P)+C**

e quindi il numero di movimenti totali è pari al numero dei volumi a cui si somma il numero di cicli distinti meno il numero dei volumi che inizialmente sono già al loro posto La cosa interessante, secondo me, è che è completamente ininfluente la lunghezza dei singoli cicli.

Visualizziamo il tutto tornando al nostro caso pratico con N=9 in cui la disposizione iniziale era 4-6-2-5-1-7-9-8-3.

Abbiamo:

- N=9
- P=1 (il volume 8 è già al suo posto)
- C=2 (un ciclo di lunghezza 3 ed uno di lunghezza 5)

E quindi TOT=9–1+2=10

Vediamo i 10 movimenti necessari (rappresentando con un _ la posizione vuota):

Step	posizione		Note
0	462517983	_	Posizione iniziale
1	_62517983	4	Gestione del primo ciclo (4,1,5) per il quale, essendo di lunghezza 3, sono necessarie 3+1=4 mosse
2	1625_7983	4	
3	162_57983	4	
4	162457983	_	
5	1_2457983	6	Gestione del secondo ciclo (6,2,3,9,7) per il quale, essendo di lunghezza 5, sono necessarie 5+1=6 mosse
6	12_457983	6	
7	12345798_	6	
8	123457_89	6	
9	12345_789	6	
10	123456789	_	

Abbiamo quindi trovato la formula che ci dice quanti sono gli spostamenti totali necessari partendo dallo studio dei cicli della posizione di partenza.

I RM ci chiedono qual è la posizione più disordinata e cioè quella che necessita di più movimenti per essere risistemata, dobbiamo quindi cercare il massimo della [1] che si ottiene ponendo:

- P=0
- C=max possibile e quindi C pari alla parte intera di N/2

Nell'esempio con N=9 si ha C=4 e quindi dobbiamo avere 3 cicli di lunghezza 2 ed un ciclo di lunghezza 3; questo si ottiene, ad es., con la disposizione seguente: 2-1-4-3-6-5-9-7-8 che presenta i seguenti cicli:

1. (2,1)
2. (4,3)
3. (6,5)
4. (9,8,7)

da cui TOT=9–0+4=13

Ovviamente molte altre combinazioni di partenza per N=9 con TOT=13 possono essere trovate

Per il problema dell'emeroteca con 365 volumi il massimo disordine si ha con C=182 (181 cicli di lunghezza 2 ed un ciclo di lunghezza 3) e quindi TOT=365-0+182=547 movimenti di volumi. Una situazione di partenza che richiede 547 spostamenti è, ad es., la seguente:

2-1-4-3-6-5-8-7-…-362-361-365-363-364

quindi con 181 cicli del tipo (n+1,n) e l'ultimo ciclo (365,364,363).

Come vedete ognuno ha speso il suo tempo in modo diverso con questo problema. Per esempio Camillo ci ha scritto:

In considerazione del pivot del 29 febbraio le risposte sono:

La sistemazione ha sempre termine qualunque disordine sia presente.

Le mosse necessarie sono 547 ovvero (365–3)/2*3+4.

La peggior disposizione possibile è quella in cui i volumi siano scambiati tra loro a coppie (non importa quali siano le coppie, il risultato non cambia). Ma visto che i volumi sono dispari 3 dei 365 sono scambiati tra di loro.

Quanto sopra è valido per il numero delle mosse, per lo spazio percorso dal Nostro è un'altra storia.

E tutto qui. Una diversa versione è quella di ***Franco57***:

A parte il primo volume che viene parcheggiato nel giorno bisestile (il 29 febbraio), gli altri sono spostati per essere messi al loro posto, quindi non accadrà mai che si ripresenti da spostare un volume già spostato, a parte, appunto, il primo. Poiché i volumi messi a posto sono sempre diversi, prima o poi quindi lo spazio liberato corrisponderà al volume messo nel giorno bisestile, che troverà la sua corretta collocazione. (In particolare non si cade quindi mai in un ciclo infinito).

A questo punto, se ci sono ancora volumi posizionati male, immagino che Rudy continui spostando temporaneamente uno qualsiasi di questi al giorno bisestile e ripetendo il procedimento. (Vedremo che la scelta di quale è ininfluente).

In questo modo, alla fine, dopo n di questi cicli tutti i tomi saranno al loro posto.

Se un ciclo contiene k volumi, gli spostamenti per sistemarli correttamente sono stati $k+1$, uno per volume messo a posto più il primo accantonato. In generale quindi, se scomponiamo la permutazione dei 365 volumi in cicli (come noto ogni permutazione si può scrivere come una composizione di cicli disgiunti in modo unico a meno dell'ordine dei cicli stessi), il numero di spostamenti è pari al numero di volumi in qualche ciclo (quindi tutti meno gli eventuali volumi già a posto) più il numero stesso dei cicli. (Naturalmente qui escludiamo il ciclo banale di un solo elemento che rappresenta un volume già al suo posto).

Per massimizzare il numero di spostamenti, bisogna quindi scegliere una permutazione nella quale tutti gli elementi siano coinvolti in cicli e poi occorre massimizzare il numero stesso di cicli. Se il numero di elementi è dispari $n=2k+1$, ciò si ottiene con un ciclo da 3 e $k-1$ cicli da 2, cioè con scambi di elementi. (Se fosse $n=2k$ pari solo con k scambi).

Nel nostro caso di 365 elementi, abbiamo quindi la situazione peggiore per Rudy con 181 scambi e un ciclo da 3, come ad esempio: $(1 \quad 2)(3 \quad 4)\Lambda\ (361 \quad 362)(363 \quad 364 \quad 365)$. Queste disposizioni richiedono 365 + 182 = 547 spostamenti ed è il massimo possibile.

Sarebbe interessante calcolare il numero medio di spostamenti per una permutazione a caso tra tutte le possibili, ma questo lo vedo troppo difficile.

Se vi aspettate da noi una conclusione siete ovviamente capitati qui per la prima volta… il secondo problema ci chiama.

4.2.2 …tanto tempo fa, in un Istituto Fisico lontano, lontano...

Due terzi della Redazione sono effettivamente amici dai tempi dell'università, e questo bel problema è posto dal Capo dando molti dettagli del periodo in cui si sono conosciuti. Per semplicità riduciamo molto nel testo, ma se siete curiosi andatevi a leggere lo scorso numero o chiedete dettagli:

Un gruppo di amici adotta orologi digitali con buona precisione ma che mostrano solo ore e minuti. Presi due elementi a caso, nell'ambito del minuto corretto, esisteva un periodo nel quale i due orologi avrebbero segnato la stessa ora (in ore e minuti). Trovate il massimo x per cui almeno una coppia di orologi presi a caso debbano necessariamente indicare la stessa ora (ore/minuti) per più di 1/x-esimo di minuto?

Una sola soluzione, ma dal grandissimo ***Franco57***:

La sfasatura δ tra due orologi, che per ipotesi è inferiore al minuto, determina esattamente per quanto tempo segneranno la stessa ora (ore/minuti): $1-\delta$, con il minuto come unità di misura del tempo.

Mettendo in ordine gli n orologi da quello più indietro a quello più in avanti, notiamo che la sfasatura tra un orologio e il successivo non può sempre essere maggiore o uguale a $\frac{1}{n-1}$, altrimenti la sfasatura tra il primo e l'ultimo sarebbe maggiore o uguale a 1 minuto.

Questo è un valore limite, infatti questa sfasatura può invece essere maggiore di ogni quantità y positiva minore di $\frac{1}{n-1}$, basta scegliere per tutte le coppie orologio

– orologio successivo una sfasatura z intermedia tra y e $\frac{1}{n-1}$, in formule $y < z < \frac{1}{n-1} \quad \Rightarrow \quad z\cdot(n-1) < 1$.

Non esiste quindi un massimo di sfasatura possibile, ma un estremo superiore che è appunto $\frac{1}{n-1}$.

Quindi il massimo x per cui almeno una coppia di orologi di due FVD (toglierei "presi a caso" visto che, per gioia di Alice, le probabilità non c'entrano) debbano necessariamente indicare la stessa ora (ore/minuti) per più di $\frac{1}{x}$ minuti corrisponde al massimo $y = 1 - \frac{1}{x}$ di sfasatura possibile che, come si è visto, non esiste!

Esiste però un estremo superiore che vale $x = \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-\frac{1}{n-1}} = \frac{n-1}{n-2}$.

La gioia di Alice, che qui conclude questa sezione, è grande. Tanti auguri a tutti per questo rotondo nuovo anno e alla prossima!

5. Quick & Dirty

Sia C un cerchio di centro O, e Q un punto interno a C diverso da O. Dove deve essere posto un punto P sulla circonferenza di C per massimizzare l'angolo OPQ?

> *Pensiamo al punto P come fisso, mentre Q varia sulla circonferenza di centro O con raggio OQ. È allora evidente che OPQ è massimo quando PQ è tangente al cerchio avente Q sul bordo.*
>
> *Quindi, OQP deve essere un angolo retto.*

6. Zugzwang!

Non abbiamo una statistica precisa, ma abbiamo l'impressione che buona parte dei giochi presentati in questa rubrica siano giochi da giocare in coppia. Con l'insistenza, sui luoghi di lavoro, relativa al *team building* e al *pair programming*, cerchiamo di porre una prima pezza a questa grave lacuna (sperando che, come si dice a Venezia, non sia "*peso el tacon del buso"*).

6.1 Quadriglia

Noto anche come ***Scacchi gemelli***, è una variante degli scacchi che probabilmente conoscete per linee generali, ma il nostro Angiolino-Sidoti ci permette di definire le regole con maggior precisione.

Servono *quattro* persone, che giocano a coppie: e servono *due* scacchiere, con pezzi e dimensioni compatibili (quindi, non usate una scacchiera da viaggio e quella in piazza a Marostica). Se volete fare le cose per bene, servono anche due orologi da scacchi (ma, come vedremo, non è fondamentale).

L'idea geniale, rispetto a due separate partite a scacchi, è che le due scacchiere sono "collegate" attraverso i giocatori: nel senso che se un membro della coppia gioca con il nero (e quindi prende i pezzi bianchi, sulla propria scacchiera), l'altro gioca con il bianco (e quindi prende i pezzi neri): quando su una delle scacchiere viene preso un pezzo, questo viene passato al compagno che, *quando vuole* (quindi non necessariamente alla mossa successiva) lo mette sulla scacchiera "dove vuole". Virgolette d'obbligo, visto che ci sono due eccezioni:

1. Un Pedone *non* può essere messo né in prima né in ultima traversa

2. Un pezzo posato sulla scacchiera non può mettere sotto scacco il Re avversario senza muovere *[A. & S. non citano questa regola, ma ne abbiamo ragionevole sicurezza dal "Bagnoli". Non solo, ma ci pare di ricordare che il pezzo "posato" non possa muovere sino al tratto successivo (qui c'è un grosso "forse"...)]*.

Un primo *fork* delle regole si ha quando sull'altra scacchiera viene preso un Pedone promosso: resta del valore acquistato o torna Pedone? Noi abbiamo una vaga simpatia per il "Torna Pedone", ma rimarchiamo il fatto che nessuna regola lo impone.

Vince il primo che vince, nel senso che quando su una scacchiera avviene uno scacco matto (...o qualcuno abbandona… Ma poi dovete tener fermo il suo compagno) vince la coppia cui appartiene chi lo ha dato (lo scacco matto). Patta solo se avviene su entrambe le scacchiere, altrimenti si continua.

"...Rudy, a cosa serve l'orologio?" Alla solita cosa, uno per tavolo. Altrimenti, troppo facile aspettare senza muovere che il compagno abbia preso un mucchio di pezzi per sferrare un attacco massivo al re avversario con le "truppe fresche" dall'altra scacchiera. Come dicevamo, anche qui c'è una variante: niente orologio, ma ognuno dei tavoli può aspettare al più *tre* mosse sull'altro tavolo, poi deve muovere comunque (anche qui, possibile sotto-variante: con "tre", qui, si intende "una mossa di uno, una mossa dell'altro, un'altra mossa di uno" o "tre mosse del compagno"? A. & S. propendono per la seconda ipotesi, a noi la prima sembra più "movimentata").

Leggenda vuole che, partendo dalla Canasta a Quattro, Ely Culbertson e consorte in viaggio di nozze inventassero la Canasta a Due (*no pun intended*): esiste anche la variante della "Quadriglia a due giocatori" *[e non si chiama "Biglia". Su, siate seri]*, anzi ne esistono due: una è detta S***cacchi Siamesi***[10], e sono semplicemente due persone che giocano due partite contemporaneamente con possibilità di scambio pezzi tra una scacchiera e l'altra: il tratto è "Due mosse un giocatore/due mosse l'altro giocatore" e se un giocatore alla prima mossa prende un pezzo, può usarlo subito sull'altra scacchiera (quindi, in contrasto con l'ultima parte della (2), potete muoverlo subito). L'altra variante è detta ***Crazyhouse*** o ***Bughouse*** (il secondo è termine spregiativo per "Manicomio", come dovreste aver intuito): vi servono due set di gioco, ma una sola scacchiera; ogni volta che prendete un pezzo, lo "cambiate" con il pezzo equivalente del vostro colore (per questo vi servono due set), e lo posizionate con le "solite" (o "variazioni delle solite") regole.

7. Pagina 46

Sia P = (a, b). Se una tangente alla curva $y=x^3$ passa per P, allora il punto (x, x^3) di tangenza deve soddisfare la:

$$x^3 - b = 3x^2 (x - a),$$

ovvero

$$2x^3 - 3ax^2 + b = 0.$$

Se le linee tangenti in due punti (x_1, x_1^3) e (x_2, x_2^3) hanno la stessa pendenza, allora deve essere $x_1 = -x_2$. Ma la tangente passante per (x_1, x_1^3) è:

$$y = 3x_1^2x - 2x_1^3,$$

mentre quella passante per $(-x_1, -x_1^3)$ è:

$$y = 3x_1^2 + 2x_1^3.$$

Il che sigifica che nessuna retta è tangente alla curva in due punti. Quindi, ci sono due e solo due tangenti alla curva passanti per P se e solo se

$$p(x) = 2x^3 - 3ax + b$$

ha *esattamente* due radici reali.

[10] Attenzione che per gli inglesi i *siamese chess* sono la "quadriglia"; non ci risulta un nome per gli "scacchi siamesi", che pare siano stati inventati in Italia (e qui siano rimasti).

Un polinomio di terzo grado con due radici reali deve avere tre radici reali (non necessariamente distinte), quindi $p(x)$ deve avere una radice multipla: questo avviene se e solo se $p(x)$ e $p'(x)$ hanno una radice comune.

Essendo $p'(x) = 6x^2 - 6ax$, la radice comune deve essere o 0 o a. Se $p(0) = 0$, allora $b=0$.

La terza radice deve allora essere $3a/2$, che è una radice reale distinta posto che sia $a\neq 0$. D'altra parte, se $p(a)=0$, si ha che $b=a^3$. La terza radice di $p(x)$ è allora $-a/2$, sempre con $a\neq 0$.

Quindi, i soli punti su due e solo due linee tangenti alla curva $y=x^3$ sono $(a, 0)$ e (a, a^3), con $a\neq 0$.

8. Paraphernalia Mathematica

Tra le varie macchine di Rudy, quella che gli è piaciuta meno è stata una Renault (di un modello ben preciso, quindi non generalizziamo); adesso, sta litigando con Inkscape.

Posto che non vi sia immediata la connessione tra i due elementi, la parte che gli risulta dura da comprendere su Inkscape è stata inventata alla Renault, ed è un oggetto che riveste un certo interesse matematico. Quindi, l'argomento è d'obbligo.

8.1 Girare "dolcemente"

...avete presente quei teoremi di matematica dei quali non si capisce assolutamente nulla, non si ha la più pallida idea di dove vadano a parare e anche sulla sintassi abbiamo dei potenti dubbi (tipo la Teoria di Ramsey per Rudy, ad esempio)? Ecco, qui è esattamente il contrario. Si potrebbe accettare l'oggetto così com'è e continuare ad usarlo, ma qualcuno ha trovato un modo simpaticamente cervellotico per introdurlo.

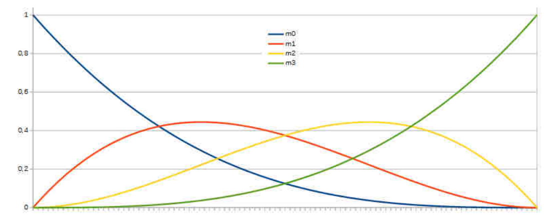
Partiamo da una cosa facile: abbiamo quattro punti materiali[11] $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$ individuati dai relativi vettori, su un piano. Con indubbio sforzo di fantasia, siano le loro masse m_0, …, m_3. A questo punto, non dovreste avere problemi a calcolare il *centro di massa* dei nostri oggetti:

$$P=\frac{m_0 P_0+m_1 P_1+m_2 P_2+m_3 P_3}{m_0+m_1+m_2+m_3}$$

...e sin qui, nessun problema. Adesso, non abbiamo certezza di chi sia l'autore dell'esempio che segue, ma sospettiamo fortemente di *Gengzhe Chang* e *Thomas Sederberg* (più del secondo che del primo).

Definiamo le *masse come variabili in funzione del tempo*; non solo, ma ognuna di queste varia secondo una legge diversa:

$$\begin{cases} m_0=(1-t)^3 \\ m_1=3t(1-t)^2 \\ m_2=3t^2(1-t) \\ m_3=t^3 \end{cases}$$



6 *Come girano le masse.*

Con calma. Caso mai vi chiedeste come variano le masse, lo trovate nel disegnino qui di fianco. Tanto per cominciare, notiamo che le funzioni sono definite solo in [0, 1], e non andiamo a cercarci guai al di fuori di questo intervallo. Poi, con il metodo reso famoso da Doc, andiamo a cercare cosa succede per i valori estremi: nel punto $t=0$, le masse 1, ...3 non pesano nulla, mentre la massa 0 ha peso unitario; inversamente, nel punto $t=1$ sono le masse 0, ...2 a non pesare, mentre la massa 3 ha lei peso unitario: questo significa che per $t=0$ il centro di massa coinciderà con $\mathbf{P_0}$, mentre per $t=1$ coinciderà con $\mathbf{P_3}$. Non solo, ma se vi prendete la briga di calcolare, per ogni punto, la somma delle masse in gioco, vi accorgete che è sempre pari a 1: quindi, evitate di importunare Fabiola Gianotti chiedendole un chilo di bosoni di Higgs: molto più prosaicamente, basta chiedere al Comandante Kirk se ci presta quattro (o sette? No, ne bastano sei) teletrasporti.

[11] È un mucchio di tempo che non lo citiamo: "Mi sono iscritto a Fisica perché voglio studiare oggetti *reali*. Come punti adimensionali dotati di massa, cilindri che si spostano con attrito nullo, omini senza peso che in tempo zero pongono masse infinite su oggetti in movimento..." [*Giò, comunicazione personale a Rudy e Doc, secondo semestre del primo anno di Fisica*]

Adesso, calcolate la traiettoria del centro di massa al variare di t: dovreste ottenere una curva che, anche se piuttosto complicata, si comporta "piuttosto bene", nel senso che non ha[12] brusche discontinuità, cuspidi o quant'altro possa dar fastidio ad un disegnatore.

Tutto questo (e altro ancora) lo ha inventato ***Pierre Bézier***, dipendente Rénault verso la fine degli anni Sessanta, da cui dovreste quantomeno dedurre la causa prima dello scarso amore di Rudy per questo concetto (il fatto che sia lo strumento principe per tracciare le curve in Inkscape dovrebbe anche spiegarvi la causa seconda).

Per garantire un po' di gergo tecnico, potreste cercare una buona traduzione del termine inglese *blending functions*, che sarebbero le "masse" (o meglio, le funzioni che le descrivono) viste sopra: i punti $\mathbf{P}_i$, invece, sono noti come *punti di controllo*, e la cosa ha un senso.

Infatti, è possibile definire le curve di Bézier per induzione: ci proviamo inserendo, poi, qualche ragionamento.

Nessun problema per n=0: avete un punto solo, che sta lì a contemplarsi il centro di massa coincidente con lui, ossia:

$$B_{P_0}(t)=P_0$$

Da qui, basta applicare la legge generale nella forma:

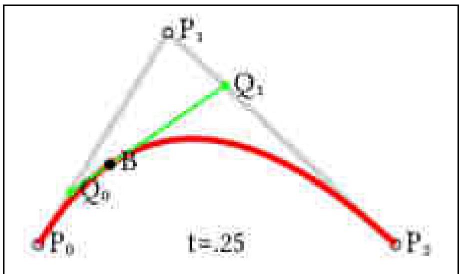
$$B(t)=B_{P_0P_1P_2\dots P_n}(t)=(1-t)B_{P_0P_1P_2\dots P_{n-1}(t)}+tB_{P_1P_2\dots P_n}(t)$$

Con calma, cerchiamo di chiarire qualche concetto.

Tanto per cominciare, notate che quando calcolate il grado n, usate *due* curve (diverse) di grado n–1: anche se la seconda non sembra, ha perso il termine di ordine zero: in pratica, avete n+1 punti (visto che il primo si chiama "zero") e una volta (primo termine) calcolate la curva dal punto 0 al punto n–1, mentre la seconda volta calcolate la curva dal punto 1 al punto n.

Prima di sommarli, moltiplicate il primo per (1–t) e il secondo per t, il che dovrebbe giustificarvi il crescere e il decrescere di questi termini nella formula iniziale (quella delle variazioni delle masse).

Esiste, di tutto questo, una simpatica interpretazione geometrica della quale vi diamo solo i primi passaggi:



7 *Tutto più chiaro, grazie a Wikipedia.*

- Se ho *due* punti, la curva di Bézier è il segmento congiungente i due punti, e il centro di massa si sposta (a velocità costante) su questo segmento.
- Se ho *tre* punti, considero la variazione del centro di massa del sottosistema formato dal punto 0 e dal punto 1 (si sposta a velocità costante su $\mathbf{P}_0$–$\mathbf{P}_1$) e la variazione del centro di massa del sottosistema formato dal punto 1 e dal punto 2 (si sposta a velocità costante su $\mathbf{P}_1$–$\mathbf{P}_2$); indi, considero la variazione del centro di massa del sistema formato da questi due punti.

Poco chiaro? Fortunatamente, Wikipedia ci aiuta con un disegno chiarificatore, che trovate qui sopra.

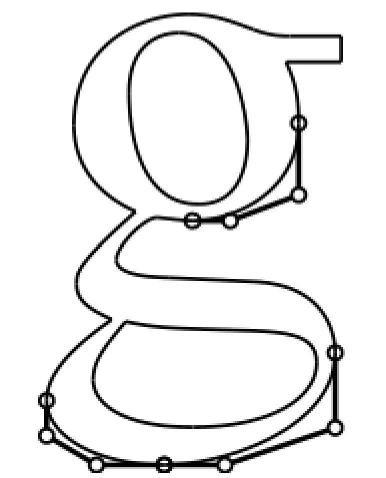
"...e come mai non ci dai anche gli esempi successivi?" Per il semplice fatto che potete vederli, a vostro rischio e pericolo, su Wikipedia[13]. "A vostro rischio e pericolo" in quanto il

[12] A meno che non abbiate scambiato due punti tra di loro. Questo è uno degli errori preferiti quando si prendono le quote di un modello, e fonte di insospettabile e inesauribile turpiloquio anche nel più calmo dei disegnatori [*Rudy, comunicazione personale (del disegnatore)*].

[13] https://en.wikipedia.org/wiki/Bézier_curve#Constructing_Bézier_curves

mal di testa nel vedere le animazioni è funzione esponenziale del grado: quella con cinque punti di controllo rischia di farvi esplodere il neurone.

A margine, notiamo che la costruzione “animata” (e la formula vista sopra) sottintendono un interessante teorema, dovuto a ***Paul de Casteljau***, che lavorava (stranezze della serendipità) in Citroen[14]: se dividete l’intervallo [0, 1] in due intervalli [0, *x*] e [*x*, 1] e tracciate (con gli stessi punti) le due curve di Bézier nei due intervalli, ottenete la stessa curva dell’intervallo originale. Carino, vero?



8 *La “g” di Sederberg.*

Un’altra caratteristica che rende la curva di Bézier particolarmente interessante per i disegnatori è che, oltre a passare per i punti iniziale e finale, in questi punti è anche t*angente* alla retta che la genera: questo rende particolarmente semplice il raccordo della curva con un segmento rettilineo (...o con un’altra curva, posto che sia il caso), e ammetterete che un cofano senza “gradini” aiuta molto sia dal punto di vista aerodinamico che da quello estetico, così come il decidere, quando si progetta un *font*, che tipo di curva debba rappresentare una certa zona del carattere: qui di fianco, vedete un esempio ormai diventato classico (e di questo, siamo sicuri della fonte). Il sistema *METAFONT* e i font di Adobe sono descritti con questo sistema, ed è questo che li rende ingrandibili quanto si vuole mantenendo l’intera figura “senza gradini”: non abbiamo notizie relativamente a Powerpoint, ma Present e Impress, della suite di LibreOffice, utilizzano ampiamente questo metodo (e anche Inkscape, certo. Altrimenti questo pezzo non avrebbe probabilmente mai visto la luce).

“Qui, ci pare di capire che il trucco stia tutto in quel profluvio di ‘*t*’ che hai piazzato nelle formule: da dove arrivano?”

Arrivano da ***Sergej Bernstein***. Nel senso che sono i *Polinomi di Bernstein*, la cui espressione generale (dove “*i*” è l’indice che scorre i punti di controllo) è:

$$B^n_i = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i, \quad i=1,\dots n$$

Bernstein aveva inventato questi aggeggi (che sono linearmente indipendenti, quindi formano base per uno spazio di funzioni – ...e tante grazie, altrimenti come potevo definire curve?) per risolvere un problema (nel senso di “guaio”) di quelli che si nascondono nelle cose semplici della matematica: Weierstrass (nel 1885) era riuscito a dimostrare che *Ogni funzione continua nell’intervallo* [0, 1] *può essere uniformemente approssimata da polinomi*. La cosa sembra abbastanza logica, e il teorema potrebbe essere derubricato a una di quelle “ovvietà”[15] che abbondano nel primo trimestre della quinta liceo, prima di cominciare a divertirsi con le derivate: ma le funzioni continue possono, in certi casi, mostrare dei comportamenti strani (pensate a una funzione con cuspide, ad esempio... Continua, ma derivata non definita nel punto; “Taylor”, qui, non è applicabile), e il teorema di Weiertstrass aiutava molto a trattare questi casi. L’unico problema era rappresentato dal fatto che si poteva svolgere un dialogo del tipo:

Weierstrass: “Tranquillo, c’è un polinomio che la approssima in modo arbitrariamente preciso”

Voi: “Ah, sì? Bene! E qual è?”

[14] ...e questa non è la sola stranezza: prima delle idee di Bézier e de Casteljau per disegnare le carrozzerie si prendevano le quote del modello e poi si tracciava la curva (la più “semplice” possibile) passante per questi punti. In inglese, il metodo era detto delle “*French curves*”.

[15] ...come direbbe Hardy

Weierstrass: "ehm... ti ho mai raccontato di quella volta, che..."

Già, il problema era trovare il polinomio. Bernstein riesce a dimostrare che, se dividete l'intervallo [0, 1] in n segmenti (uguali) e avete i valori della funzione in questi punti, allora

$$B_{n,f}(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{k}{n}(1-x)^{n-k}t^{k}$$

converge uniformemente a $f(x)$ al tendere di n a infinito. E quelli sotto sommatoria non sono altro che i polinomi di Bernstein.

Eh? La macchina? Ma insomma, sarete curiosi... Una "Chamade". E, come direbbero a Parigi, mai nome fu più azzeccato[16].

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[16] Una nota per i diversamente francofoni: in tutto il mondo, la "*chamade*" è lo squillo di tromba militare che propone la resa al nemico (la sua, non la vostra); nell'*argot* parigino, sta per "cosa raffazzonata, messa insieme alla svelta e piuttosto male". Ecco, appunto.