Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 226 – Novembre 2017 – Anno Diciannovesimo

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM225 ha diffuso 3'228 copie e il 10/11/2017 per Google eravamo in 48'800 pagine.

La composizione in copertina è un regalo di ***Camillo***, ormai nuovo fotografo ufficiale della Redazione dopo averci fotografato nella nostra migliore luce al Festival della Scienza di Genova. Un plauso per aver protetto i Sacri Testi con dell'inutile cartaccia dal contatto con il pavimento.

1. C'è modo e modo

"Noi siam fabri a noi stessi de nostri danni; libero è 'l voler nostro e non mai servo"

Dovrebbe risultare pleonastica, inutile, sovrabbondante un'ulteriore apologia del congiuntivo[1]. La lingua è sovrana e tiranna, ma al tempo stesso profondamente democratica: la si impara da piccolissimi, solo per imitazione; poi la si studia, senza soluzione di continuità, in tutte le classi di scuola assorbendone regole, classificazioni, eccezioni; e se la sua tirannia si mostra nel rigore delle coniugazioni, nella logica dell'ipotassi, nell'anatomia comparata che la dichiara figlia diretta e primogenita di idiomi antichi e nobili, la sua proletaria democrazia è sacramentata dalle parole parlate, dai suoni prima che dai segni; ed è spudoratamente palesata non solo dallo scambio di informazioni e dall'apprendimento di dotte lezioni, ma anche e soprattutto dalla trasmissione di umori, emozioni, dettagli, origini e provenienze.

La lingua è viva, e fa quel che le pare di se stessa: animata da milioni di voci, si adatta ai tempi e articola dentali, labiali, sibilanti e palatali sia per sollecitare un pagamento sia per dichiarare una passione in distici elegiaci. Ha un bisogno disperato di regole, certo; ma pure la necessità impellente e incontrollabile di violarle. E il congiuntivo sta lì in mezzo, tra la tempesta dell'immediatezza indicativa e imperativa e l'articolazione modulata delle subordinate che raccontano di ipotesi, condizioni, necessità.

È proprio bello, il congiuntivo. Dovesse davvero sparire, sarebbe ben giustificato il senso di lutto degli amanti della ricchezza della lingua, della possibilità di modulazione delle sfumature di significato; ciò nondimeno, che la lingua sia un oggetto tutt'altro che statico dovrebbe essere ben presente a tutti, non solo ai grammatici. I modi verbali che sono ben ordinati nelle tabelle dei libri di grammatica sono istantanee di un periodo storico, non leggi divine scritte a caratteri di fuoco su tavole di pietra; lingue anche strettamente imparentate gestiscono i modi, i tempi e le sfumature del verbo (e del discorso tutto) in maniera spesso diversa, ed è davvero difficile ricostruirne la storia.

Basterebbe pensare al condizionale passato, nell'uso canonico che serve ad esprimere il futuro nel passato: è quasi una caratteristica della lingua italiana, ed è anche di recente acquisizione. Rubando l'esempio dalla voce di Wikipedia, è palese a tutti il senso e la correttezza della frase "*Ieri era tardissimo, ma sapevo lo stesso che saresti venuto*"; eppure, in casi del genere, la gran parte delle lingue romanze preferisce usare il condizionale presente: "*Ieri era tardissimo, ma sapevo lo stesso che verresti*". Roba da far sfoderare immediatamente la matita rossoblù a qualsiasi insegnante, eppure è così che suonava la nostra stessa lingua italiana fino a non molto tempo fa, come verosimilmente avranno notato coloro che si sono trovati tra le mani un libro sette-ottocentesco[2]. E se muta facilmente anche la lingua letteraria, figuriamoci la lingua parlata.

[1] Soprattutto da parte di una rivista che, per statuto, dovrebbe limitarsi solo a giocare con la matematica.

[2] A mero titolo di esempio: la benemerita Radio Tre trasmette quotidianamente il ciclo "Ad alta voce", all'interno della più vasta trasmissione dedicata ai libri "Fahrenheit". Si tratta della lettura – appunto ad alta voce – di interi libri, generalmente classici della letteratura nazionale e straniera. Non molto tempo fa è stato trasmesso integralmente "I Mille, da Genova a Capua" di Giuseppe Bandi, letto da Alessandro Benvenuti; il condizionale presente in luogo del condizionale passato era assai frequente, e suonava abbastanza straniante alle orecchie italiane del XXI secolo.

Sembra, secondo alcuni, che in diversi dialetti della penisola il congiuntivo non esista già più, o forse che non sia proprio mai esistito. Non abbiamo conoscenze e informazioni sufficienti per sapere se sia vero: certo è che almeno nel vernacolo di alcuni di noi, il congiuntivo resiste indomito soprattutto in forma ottativa, permanendo duraturo nell'uso anche colloquiale, grazie soprattutto alle maledizioni. "Che tu *possa esser colto da un lieve malanno*" non è una traduzione esattamente letterale delle svariate forme di improperio che si sentono evocare con gioiosa frequenza, ma la costruzione verbale e sintattica è assolutamente coincidente. La constatazione, ahimè solo linguisticamente consolatoria, apre però subito nuovi fronti di indagine: cosa pericolosa, perché i fronti di indagine grammaticale sono tanti, profondi e complicatissimi. Nel modesto (e poco urbano) esempio di poco sopra, si è parlato di "forma ottativa[3]", e antiche reminiscenze liceali[4] ci fanno sospettare che, in qualche lingua, l'ottativo abbia piena dignità di modo verbale, senza sognarsi di delegare il compito al modo congiuntivo.

1 *Gadget non propriamente augurale che utilizza il vernacolare congiuntivo ottativo. Nutriamo qualche dubbio sull'efficacia della traduzione inglese.*

Così, dobbiamo subito constatare che all'italiano manca almeno un modo verbale, e provvede alla bisogna arrangiandosi in qualche maniera; e allora volgiamo lo sguardo verso altre lingue, scoprendo con orrore che da qualche parte il congiuntivo è già sparito: in inglese, ad esempio, ha forme indistinguibili dall'indicativo, anche se il senso "congiuntivale" della frase riesce in qualche modo a venire conservato. A margine, sembra già significativo che quello che in italiano è chiamato "modo"(verbale), in inglese è detto "mood", che rende ancora meglio l'aspetto un po' umorale dell'albionica sintassi. Gli anglofoni, del resto, hanno già da tempo celebrato il funerale del condizionale; quanto meno in senso puramente "modale", visto che per veicolare il senso ipotetico fanno uso di ausiliari come *to will* (in questo, supportati anche dai tedeschi con *werden*), cosa che a italiche orecchie può sembrare barbaro e macchinoso. Ma è davvero così?

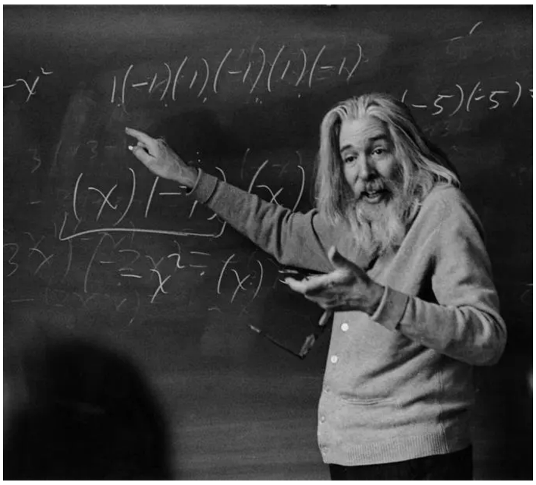
Basta fare un esercizio semplicissimo per farsi venire dei dubbi: è sufficiente rispolverare (o più semplicemente cercare in rete) la coniugazione latina del verbo più facile, "amare". Non sarà difficile trovarla, magari accompagnata, a fronte, della corrispondente coniugazione italiana: legioni di ragazzini ci hanno perso sopra ore e pazienza, mandando a memoria i vari *amavērunt* e *amavissēmus*, e certo vedendo nelle forme italiane una sorta di appiglio familiare, anche se un po' antico. Quante volte nella vita ci sarà davvero occasione di dire "che noi avessimo amato"? E nel consolarsi, è quasi certo che non noteranno la profonda, prima stranezza del confronto diretto: perché mai l'italiano fa un uso smodato del verbo "avere", in quelle tabelle, mentre il latino ne resta castamente immune? Siamo ormai abituati – forse addirittura affezionati – ai nostri cari ausiliari *avere* ed *essere*, ma chissà se, nei secoli che spaziano tra l'Indovinello Veronese e il Dolce Stil Novo, non fossero stigmatizzati come barbari corruttori dai puristi talebani del latino.

Difficile a dirsi, difficile orientarsi, specie per chi, come chi scrive, è lontanissimo dall'avere le sufficienti competenze nelle ardue discipline della lingua. È già stupefacente

[3] …e già ci prendono i dubbi: sarà lecito parlare di "forma" ottativa? O bisognerebbe usare termini più appropriati? E se non fosse ottativo ma esortativo?

[4] Stiamo brutalmente barando: ci ricordiamo perfettamente che in greco antico l'ottativo c'era, ed era abbastanza difficile da ricordare e recitare davanti alla lavagna. Il latino già opera l'assorbimento dell'ottativo nel congiuntivo, guadagnandosi diversi punti di stima nel giudizio di molti ginnasiali. Comunque, il greco antico non è solo: l'ottativo resiste indomito almeno in albanese, kazako, finlandese, nepalese; e c'era ovviamente già nel sanscrito.

scoprire che ci sono lingue che sfoggiano modi verbali appositi per esprimere situazioni che il nostro bell'idioma non si sogna nemmeno di nobilitare con un modo apposito: il nostro imperativo già si limita a contare due sole persone (seconda singolare e plurale), ripiegando sul congiuntivo per le altre: eppure l'arabo, ad esempio, oltre all'imperativo usa anche il modo "iussivo", che gli somiglia ma non è esattamente la stessa cosa. Giapponesi e finlandesi ritengono necessario il modo "potenziale" (o "tentativo"), mentre alcuni idiomi baltici e balcanici sembrano condividere – oltre alle prime tre lettere dell'aggettivo geografico – anche il modo "inferenziale" (o "obliquo", o "rinarrativo").



2 *Raymond Smullyan (1919-2017): "Perché mai dovrei preoccuparmi della morte? Non mi capiterà in tutta la mia vita!"*

Per porre domande, noi italiani di solito ci limitiamo a dare una particolare inflessione alla frase, quando usiamo la voce, o a sistemare un punto di domanda in fondo quando usiamo penna o tastiera: ma gallesi, siberiani e eschimesi la pensano ben diversamente, e si sono dotati dell'apposito modo interrogativo. Ci potrebbe poi avventurare in spinosissime (e forse più filosofiche che linguistiche) questioni riguardanti la distinzione tra i modi "deontici" ed "epistemici" di alcune lingue, o addirittura di modi "reali" e "irreali" di certi idiomi di isolette polinesiane, verosimilmente le stesse che hanno ispirato Raymond Smullyan quando inventava i suoi indovinelli logici con Furfanti e Cavalieri. Come spiegare altrimenti l'accuratezza semantica degli abitanti dell'atollo Pingelap, nelle Isole Caroline, che nel loro linguaggio usano modi diversi per esprimere il diverso grado di certezza che hanno nell'esprimere una certa affermazione?

L'argomento è, con tutta evidenza, troppo complicato per le nostre forze. Se ne abbiamo parlato è solo per avere giocato un po' con l'idea di assegnare i modi verbali alle diverse discipline, un po' come si fa nell'infantile passatempo "*Se fosse…*". L'imperativo, ad esempio, è certamente il modo verbale della Guerra (e non è certo un caso che "*imperium*", almeno in origine, significava esattamente "comando militare"), e probabilmente anche della Politica; e non ci sembra esagerato attribuirlo anche alla Religione e a quella sezione della Filosofia che è l'Etica. Il condizionale trionfa ovviamente nella Fantascienza, anzi più generalmente nella Fantasia, ma governa certo anche la Logica, l'Organizzazione, la Pianificazione, per non parlare della Strategia. L'indicativo è così strabordante che le sue discipline protette sono troppe per essere elencate, e dovrebbero almeno suddividersi ulteriormente nei tempi verbali, non solo nel modo: il presente per l'Osservazione, la Cronaca, il Giudizio, la Misura, l'Analisi; i tempi passati per la Narrazione, la Storia, quasi tutta la Letteratura, e così via.

Ma si parlava soprattutto del congiuntivo, perché forse è il modo che meglio si attaglia alla Scienza: al pari della Lingua, la Scienza è vasta e multiforme, e assi difficilmente può essere ristretta in un solo modo verbale, anche se per gioco. L'Analisi e l'Osservazione, la Misura e la Logica sono pezzi cruciali della Scienza, e sono già stati incasellati in altri modi. Ma è lo spirito generale della Scienza che forse viene ben veicolato dal congiuntivo: connette l'inevitabilità della conseguenza a fronte della necessaria ipotesi reggente, la dipendenza delle sue asserzioni dal perimetro degli assiomi assunti; in breve, dà meglio conto dell'incompletezza e dei limiti a sé stessa che la Scienza cocciutamente pone, ricerca e persegue, e che la definiscono più di qualsiasi altra cosa. E forse solo per questa sua abilità nel trasmettere l'approccio scientifico che spezziamo volentieri la nostra lancia in favore del congiuntivo.

Ma sono solo giochi, è bene ricordarlo. Giochi che mischiano le regole della grammatica con la grammatica della scienza, argomenti che per molto tempo – e per molte persone ancor oggi – pare che non debbano essere mischiati. Eppure, una volta ancora, basta raschiare appena un po' la polvere depositata sulle vite dei grandi del passato, per scoprire che separare le "Due Culture" è azione non solo sciocca, ma anche tutt'altro che nobilmente antica: è solo una scemenza di recente formazione, come viene a raccontarci Giambattista, un tipo che di culture – giuste o meno – ne metteva insieme almeno una mezza dozzina.

3 *Giovan Battista Della Porta*

Giovan Battista Della Porta nasce a Vico Equense, sulla penisola sorrentina, il 1° novembre 1535. È un periodo ancora assai acerbo per la scienza, almeno così come la consideriamo oggi, e assai difficile per molti abitanti del pianeta: gli europei hanno da poco scoperto un mondo nuovo dall'altra parte dell'oceano, e hanno cominciato a credersi davvero padroni del pianeta: Napoli è da poco passata sotto il dominio spagnolo che si protrarrà per più di due secoli, ma Giovan Battista ha la fortuna di nascere in una casa che è tutt'altro che povera. Il padre Nardo è un nobile, ricco armatore e proprietario terriero, mentre la madre è della nota famiglia Spadafora; e anche se i suoi genitori hanno dei rapporti traballanti con i viceré spagnoli a causa del sospetto di aver partecipato a un complotto[5], non si può certo dire che i Della Porta rischiassero di morire d'inedia; del resto Nardo Della Porta era stato a lungo "scrivano di mandamento", al servizio diretto dell'imperatore Carlo V. Giambattista ha pertanto la possibilità di fruire di una educazione vasta, estesa e variegata, proprio come si conveniva a un giovane rampollo della nobiltà napoletana del sedicesimo secolo.

Viene pertanto educato da insegnanti privati, al pari dei fratelli Giovan Vincenzo e Giovan Ferrante; ma è verosimile che la parte più sostanziale della sua multiforme educazione venga dai molti intellettuali che regolarmente venivano ospitati a Villa delle Predelle, sua casa natale, ospitati dal padre Nardo. Fior di istitutori si fanno carico dei giovani Della Porta: filosofi come Donato Altomare e Giovanni Pisano, letterati come Domenico Pizzimenti e, certo non ultimi per importanza, matematici come Girolamo Cardano.

E Giovan Battista impara bene, e in fretta; e si interessa di tutto, di qualunque cosa possa apparire intrigante alla sua anima. La sua epoca è ancora priva dei fondamenti del metodo scientifico, ed è difficile – probabilmente anche per gli stessi protagonisti – distinguere bene le indagini propriamente scientifiche dalle curiosità ammantate di magia. Così, il carattere di Giovan Battista si sostanzia nel titolo di quella che è forse la sua opera più famosa, quella "*Magiae Naturalis sive de miraculis rerum naturalium*" in quattro libri, pubblicata nel 1558 (e quindi a soli ventitré anni d'età) che, pur con tutti i limiti propri dell'epoca, si può comunque interpretare come una sorta di trattato di fisica sperimentale; certo, parla anche di demonologia, oltre che di ottica e magnetismo, ma in questo è semplicemente figlia dei suoi tempi.

[5] La cosiddetta "Congiura dei Baroni".

E in quest’ambito, in questi tempi, la fondazione di una istituzione denominata “*Accademia dei Secreti*[6]” è altrettanto significativa, perché la si può leggere sia come entità votata alla risoluzione dei misteri del mondo fisico, sia come circolo magico dedicato a condividere arcane conoscenze solo tra pochi eletti. Per essere ammessi a cotanta accademia è necessario dimostrare di aver scoperto qualcosa, relativo al mondo fisico, che non era mai stato notato da nessuno in precedenza: e tutte le scoperte finiscono poi ad arricchire proprio quella “*Magiae Naturalis*” che, anche sull’onda del grande successo internazionale che aveva riportato la sua prima edizione, cresce e si espande fino a diventare una monumentale opera in venti volumi.

Il clima dei tempi, del resto, si ritrova non solo nella fondazione dell’Accademia dei Secreti, ma anche – e forse più esplicitamente – nella sua fine: nel 1578, meno di vent’anni dopo la sua creazione, l’Accademia viene indagata e chiusa dalla Santa Inquisizione, naturalmente dopo aver sottoposto lo stesso Giovan Battista ad un accurato interrogatorio.

4 *Tavola del “De humana physiognomonia”*

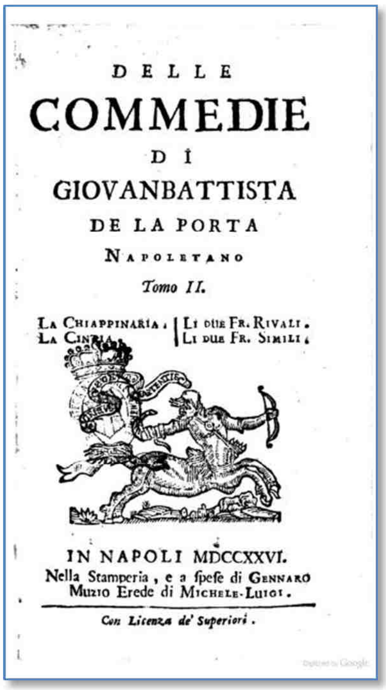
Il risultato del processo è abbastanza oscuro, perché risultano versioni assai diverse nelle cronache che ne parlano: la più ottimistica – almeno per i simpatizzanti di Giovan Battista – è quella che racconta di come riuscì a convincere i padri inquisitori che ogni affermazione espressa nell’opera fosse del tutto naturale e spiegabile senza alcun intervento demoniaco, e meravigliando i giudici grazie alla sua enciclopedica cultura e saggezza. Altre, probabilmente più veritiere, raccontano di un Giovan Battista che si avvilisce e deprime per la fatica di dover in prima battuta difendere le sue tesi e poi, convinto infine all’abiura (verosimilmente dopo un periodo di imprigionamento), da quella di doverle condannare.

Certo è che dopo il passaggio attraverso le forche caudine del Sant’Uffizio, Giambattista Della Porta si ritrova affiliato nell’Ordine dei Gesuiti, impegnato a dedicare un giorno alla settimana ad opere di carità e devozioni religiose; altrettanto certo è che comunque continuerà a scrivere altre opere, molte delle quali saranno nuovamente fustigate e proibite dalla Santa Inquisizione. E forse rende meglio lo spirito del tempi e del personaggio proprio l’elenco delle opere, dense come sono di varietà di interessi:

- Magiae naturalis sive de miraculis rerum naturalium libri IIII
- De furtivis literarum notis, vulgo de ziferis
- Phytognomonica
- Magiae naturalis libri XX
- De refractione optices
- De telescopio
- Criptologia

[6] Va però precisato che ci troviamo di fronte a un caso in cui il latino è più chiaro dell’italiano: quella che è nota come “Accademia dei Secreti”, nella sua dizione latina suona “Academia Secretorum Naturae”. Tra l’altro, l’accademia in questione era generalmente più nota con il nome “Accademia degli Otiosi” (anche se non è del tutto chiaro, almeno a chi scrive, se si tratti davvero della stessa istituzione o di un’altra), nome che nobilita ulteriormente l’indubbia utilità della pigrizia.

- Metoposcopia
- Ars reminiscendi
- Coelestis physiognomonia
- Claudii Ptolemaei Magnae constructionis liber primus
- De äeris transmutationibus
- De naturalis physiognomoniae
- Chirofisonomia,
- Elementorum curvilineorum
- Pneumaticorum
- De munitione
- De humana physiognomonia



5 *Le Commedie*

È evidente che ad una tale pletora di opere non può che corrispondere una vita altrettanto densa e stupefacente: oltre a compiere moltissimi viaggi durante la giovinezza, si interessa di chimica, inventando uno strumento per la distillazione; di meccanica, approntando marchingegni per sollevare le acque grazie alla forza dell'aria; di metallurgia e ingegneria militare. Perfeziona notevolmente la camera oscura, restando tra i primi ad applicarvi una lente convessa; mostra come lo stesso occhio umano abbia un funzionamento del tutto analogo a quello della camera oscura; rivendica l'invenzione del telescopio (ma morirà prima di completare il trattato in cui ne rivendica la paternità).

Uno scienziato a tutto tondo, per i suoi tempi: e certo anche un filosofo, perché era semplicemente impossibile distinguere Scienza e Filosofia, all'inizio del sedicesimo secolo. Ma non solo scienziato, non solo filosofo: Giovan Battista Della Porta si staglia anche come uno dei maggiori commediografi del suo tempo: paga forse il fatto che al giorno d'oggi è più celebrata la "commedia dell'arte" rispetto alla "commedia erudita", che è il campo dove Della Porta invece si misura; ma di lui si conservano ancora 14 commedie, una tragedia e una rappresentazione liturgica[7].

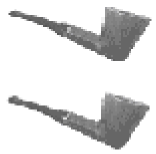
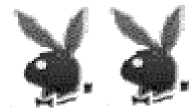
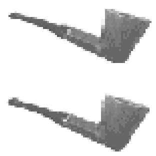
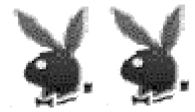
C'è infatti chi di Giovan Battista della Porta conosce solo l'opera teatrale; e, ovviamente, chi non lo conosce affatto. E noi non abbiamo idea di come lui avrebbe definito se stesso, essendo un personaggio così complesso e difficilmente catalogabile: letterato, perché autore rinomato di opere teatrali? Scienziato, perché entusiasticamente dedito ad investigare la natura? Negromante, come lo apostrofò l'Inquisizione? Linceo, come lo volle Federico Cesi[8]? "*Ammirato da sovrani, principi e cardinali*" o "*dalla gente ordinaria stimato Mago*", come lo stesso Cesi lo ricorda in due passaggi del suo elogio funebre?

Niente di tutto questo, probabilmente: o forse "tutto di questo niente", se ci è concesso un gioco di parole. Perché ancora oggi le parole sembrano riuscire più a creare giochi e approssimazioni, anziché a ritagliare perfette definizioni.

[7] Ma ne ha scritte almeno 28 o 29.

[8] Della Porta è il quinto socio dell'Accademia di Lincei, accolto nel 1610. Il sesto, accettato nel 1611, è un certo Galileo Galilei.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
L'ultimo problema di quest'anno			
Yet another classic			

Rudy si sta portando avanti con il progetto del rimbambimento senile, e il mese scorso ha pubblicato un problema che era già stato pubblicato nel numero 222: non accamperemo come scusa il fatto che l'ambientazione era migliorata, ci limitiamo a porgere le nostre più sentite scuse. Per favore, non spargete sale sulle ferite, che ci pensiamo già noi.

2.1 L'ultimo problema di quest'anno

No, tranquilli. Tutto normale. Semplicemente, questo con ogni probabilità è l'ultimo problema contenente il numero "2017". Una volta tanto, potrete proporlo a S. Silvestro per chiudere in matematica allegria l'anno.

Vi ricordate il concetto (matematico) di "Supertask"? Veloce ripassino con un esempio. Avete un sacchetto vuoto, e alle 11:00 mettete dentro l'uno della tombola. Alle 11:30 mettete dentro il due e il tre. Alle 11:45 il quattro, il cinque, il sei e il sette. E avanti in questo modo, dimezzando i tempi e raddoppiando il numero dei gettoni. Bene, questo aggeggio lo ricorda, anche se per certi versi ce la prendiamo molto più calma.

Partite nell'anno uno, armati di un congruo numero di post-it (che brevettate immediatamente, garantendovi, con la ragionevole ricchezza guadagnata, il tempo da perdere per compiere questo arduo compito) e di un segmento mooolto lungo; il vostro lavoro, per quest'anno, consiste nel mettere due post-it agli estremi dell'intervallo, decorandoli entrambi con il numero "1".

Nel generico anno n, considerate tutti gli intervalli sul vostro segmento limitati a sinistra e a destra da un post-it (nell'anno due, sarà un intervallo solo, con due "1" agli estremi) e inserite a metà di ogni intervallo un foglietto con scritta sopra la somma dei due valori che definiscono l'intervallo (sempre nell'anno due, scriverete "2" sull'unico foglietto aggiunto). Per capirci, qualche esempio:

Anno 1: 1, 1

Anno 2: 1, 2, 1

Anno 3: 1, 3, 2, 3, 1

Anno 4: 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1

...e avanti in questo modo. Adesso, qualche domanda.

Quando e dove (nel senso "in che anno e in che posizione") scrivete "2017" per *l'ultima volta*? E quante volte l'avete scritto? E per "2016"?

Lasciamo a voi la ricerca delle estensioni, però effettuare gli stessi calcoli per "2018" ci pare il minimo sindacale: così, quando Rudy ripubblicherà il problema (per la serie: "Sale sulle ferite"), avrete meno lavoro da fare...

Un'altra simpatica direzione che potrebbe prendere il problema implica che ad un certo punto vi siate stufati: per la precisione, vi siete stufati appena avete appiccicato il milionesimo bigliettino. La nostra fonte chiedeva quante volte era comparso un certo numero (per la precisione, il 20000), ma la domanda ci pare poco interessante (oh, se a voi piace, fate pure...); quello che Rudy si chiedeva (ma non ha trovato) era che numero c'è sul milionesimo bigliettino e, riguardandoli tutti, quale fosse il numero più grosso utilizzato sino a quel momento (che ci pare una domanda piuttosto importante: serve a decidere quanto devono essere grossi i post-it).

2.2 Yet another classic...

Tranquilli, la creatività sta bene e vi saluta tutti. È che ogni tanto, troviamo dei problemi che a noi sembrano decisamente belli, ma assolutamente non trasformabili in qualcosa di (come dice Doc) "de-matematizzato", e quindi ve li proponiamo i modo abbastanza brutale, con al più qualche cachinno collaterale per facilitare la digestione.

Bene, partiamo da un progetto ambizioso: definire un nuovo spazio metrico.

Come tutti sapete, è quello nel quale è definita una *metrica*, ovverossia la *distanza* tra due punti: insoddisfatti da quelle di Euclide & Compagnia Cantante, decidiamo di definirne una noi.

Diciamo che due interi a e b "distano 1" se ab+1 è un quadrato perfetto: per capirci, "2" e "24" distano 1, visto che (24*2)+1=49 (che è il quadrato di 7: nel seguito, ignoreremo le parentesi). Anche "24" e "7" distano 1, visto che 24*7+1=169 che è il quadrato di 13.

Sempre per restare nell'esempio, notiamo che "2" e "7" non distano 1, in quanto 7*2+1=15 che non è un quadrato perfetto, quindi, "7" e "2" "distano 2" ("mediati" dal 24, per capirci... Su, un minimo di sforzo creativo).

Adesso, visto che noi abbiamo fatto la fatica di dare le definizioni, voi ricavate qualche teorema.

1. Dimostrate che due numeri *distinti* qualsiasi hanno comunque una distanza (nel senso suesposto) finita.
2. Qual è la distanza tra due numeri n e n+1?
3. Quanto dista "1" da "4"?

La cosa ci sembra già abbastanza incasinata da lasciare a voi le generalizzazioni... Premio Speciale della Giuria a chi trova un'utilizzazione a questo aggeggio.

3. Bungee Jumpers

In una data (non necessariamente raggiungibile) posizione degli scacchi, il numero dei pezzi in una qualsiasi riga e il numero dei pezzi in una qualsiasi colonna sono dispari.

Dimostrate che il numero totale dei pezzi sulle caselle nere è pari.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Novembre.

I Rudi sono stati al Festiva della Scienza, come sanno quelli che ci seguono sui cosiddetti "social", e in via eccezionale c'era anche Alice. Ormai uno dei tormentoni più noti sulla sottoscritta, a parte la simpatia per il calcolo delle probabilità, è che in realtà non esisto, ma che i miei augusti compari mi hanno inventato, un po' come Littlewood per Hardy, così non sono stati pochi quelli che sono venuti a stringermi la mano per vedere se ero proprio vera. In compenso – come si suol dire in questi casi – l'evento eccezionale ha scatenato le forze della natura: durate la nostra conferenza c'era l'allarme arancione su Genova, e vi lasciamo immaginare la desolazione dei vostri eroi che avevano preparato materiale per parlare ore ed ore ed hanno trovato un pubblico sparuto e piuttosto bagnato.

Comunque, come si vede dalle foto di repertorio scattata dal grande ***Camillo***, ci siamo molto divertiti e abbiamo ricevuto molti onori. ***Giorgio Dendi***, che abbiamo avuto la fortuna di conoscere qualche milione di anni fa alla fiera del pesce algebrico (e auguri a scoprire di che cosa si tratta, se non ci conoscevate allora) segue ancora le nostre tracce e ha fatto un bellissimo regalo all'evanescente conferenziera. ***Pino Rosolini*** non solo ci ha presentato con grande affetto, malgrado gli allarmi metereologici e la sua influenza, ma ci ha anche fatto tanti complimenti che ancora oggi ci fanno arrossire.

È stata una grande festa per noi, e potremmo parlarne per ore, ma è tempo di soluzioni, delle vostre.

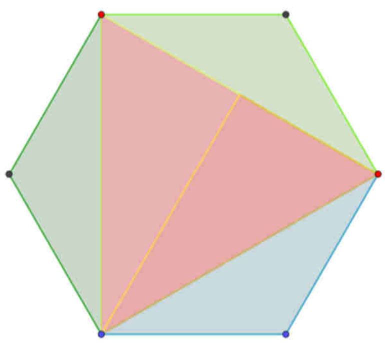
4.1 [224]

4.1.1 Excusatio non petita

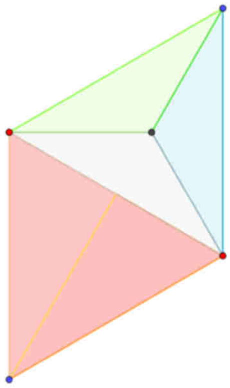
Questo problema, che il mese scorso ha visto pubblicate le soluzioni di ***Valter***, ***Alberto R.*** ed ***Emanuele***, ha stimolato ancora qualche contributo. Il testo era il seguente:

> *Disegnare due aiuole a forma di n-agoni regolari, l'uno circoscritto all'altro; il poligono esterno deve avere un'area doppia rispetto a quella del poligono interno. Esaminare tutti i casi per n validi, per poi scegliere quello esteticamente migliore. Quanti sono? E quali?*

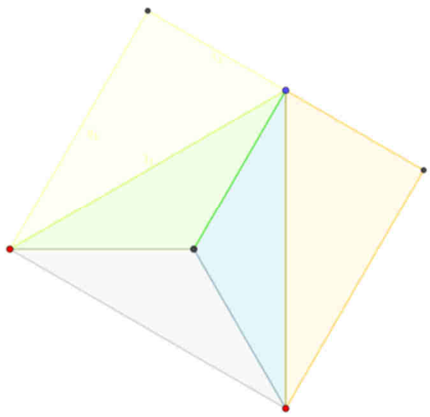
Per prima cosa vediamo che cosa ci ha scritto ***Valter***:

> Mi ha molto colpito il compleanno (come sarebbe stato bello avere come amico Sawdust e poter farneticare con lui). I pensieri vanno un po' dove vogliono e si intrecciano gli uni con gli altri … .
>
> A un certo punto mi è venuto in mente il problema delle aiuole e mi sono detto che poteva essere applicato anche al tavolo di Sawdust. Spero di non aver fatto una delle mie solite asinate …
>
> 
>
> Nel disegno parto da un tavolo esagonale con all'interno un triangolo equilatero di area 1/2 del tavolo.

Se ruoto i due triangoli isosceli in basso sui due cardini rappresentati dai punti in rosso dovrei ottenere un rombo formato da due triangoli equilateri.

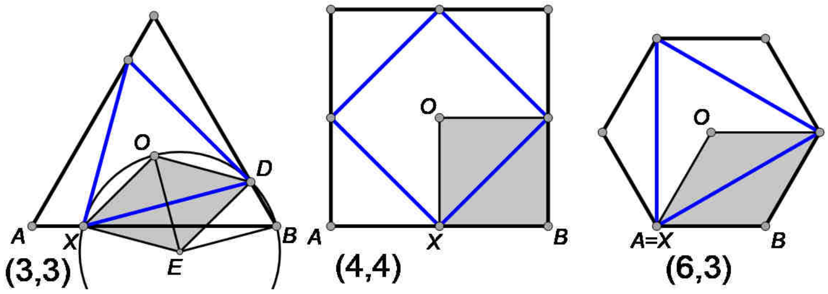


Se ruoto poi i due triangoli in rosso sempre sui due punti di prima ottengo un tavolo rettangolare con all'interno il triangolo equilatero di area ½ (i lati del rettangolo dovrebbero essere la base e l'altezza del triangolo equilatero).



L'idea ci è piaciuta molto. Abbiamo poi ricevuto un'integrazione da ***trentatre***:

Leggo le soluzioni riportate su RM225. Non è molto chiaro nel testo originale del problema, ma risulta evidente nel riassunto premesso alle soluzioni, che i due poligoni possono avere un numero di lati diverso. Ammesso questo le soluzioni possibili sono le tre in figura, dove (n, k) indica il numero di lati dei due poligoni.



Per il caso (3,3) ***Alberto R.*** dà una dimostrazione algebrica, che si ottiene anche per via geometrica: il triangolo *XBD* deve avere la stessa area di *XOD* (un terzo del triangolo blu) uguale per ribaltamento a *XED*; ne segue che *EB* deve essere parallela a *XD*. Dai triangoli equilateri grigi segue che gli angoli *DXB*, *BXE* sono di 15°, ed *E* è centro del cerchio per *BDOX*. La relazione dei triangoli grigi con il triangolo interno è la stessa in (3,3) e in (6,3).

> Forse per l'equivoco iniziale il caso (6,3) è sfuggito ai vari solutori, e questa è la ragione di questa nota.
>
> Non esistono altre soluzioni, infatti due poligoni regolari sono inscrivibili solo nei casi
>
> $(pn, qn),\ p \geq 1,\ q = 1, 2,\ n \geq 3$
>
> $(n, k),\ n \geq 3,\ k = 3, 4 \text{ con } n, k : \text{coprimi}$
>
> - nel primo caso si hanno solo le soluzioni in figura, nel secondo – più difficile perché i due poligoni non hanno lo stesso centro – non ci sono soluzioni.

E con questa precisazione possiamo passare all'altro problema del mese passato.

4.1.2 Strani conigli

Grande interesse per nomi e tipologie alternative per il conigli, che sono normalmente abbastanza bravi a riprodursi, ma non dal nulla. Il problema originale, in breve, era:

> *Avete un numero infinito di gabbie quadrate, messe una vicino all'altra; ogni gabbia comunica con le quattro vicine (ortogonali, quindi le vicine diagonali non sono "vicine"), e tutte le gabbie sono vuote o meglio sono tutte piene di zerigli . Messo un coniglio in una gabbia, questo si riproduce con i quattro zerigli vicini, lasciando un coniglio in ogni gabbia (di quelle attorno, dove trova lo zeriglio); anche gli zerigli si riproducono con i loro vicini, lasciando zero conigli nelle gabbie limitrofe (ivi inclusa quella dove c'era il coniglio originale, che sparisce)*
>
> *Dopo n passi, quanti conigli abbiamo? E quanti saranno nella gabbia centrale (ha l'aria di un posto affollato...)? Ma i numeri non-zerigli, hanno qualche caratteristica particolare?*

Le soluzioni del mese scorso erano di ***Valter***, ***Emanuele***, ***trentatre***, ***Franco57***. Vediamo ora una nota di ***Camillo***:

> Anch'io sono perplesso dai conigli che si riproducono per scissione. Per cui ho deciso di trasformarli in insetti col loro alveare a celle quadrate.
>
> A proposito della conigliera il dialetto "stagera" mi lascia perplesso, dalle parti dove sono cresciuto (in Piemonte orientale nell'area insubra di confine) la stagera è uno scaffale o un ripiano di un mobile l'altra è la "cuninera".
>
> Quindi invece dell'allevamento di stranigli propongo l'allevamento di insetti, oltretutto saranno il cibo del futuro. I nostri insetti si riproducono per partenogenesi migrando nelle cellette ortogonali ad ogni generazione che avviene all'istante per tutti contemporaneamente.
>
> Risposte alle domande:
>
> Purtroppo non sono riuscito a trovare una formula per l'occupazione della celletta centrale.
>
> Per il numero totale degli insetti nell'alveare la formuletta è: 2 elevato del doppio del numero di generazione ovvero 1, 4, 16, 256, 1024, 4096 ecc.
>
> Di caratteristiche particolari i numeri non-zerigli non ne ho trovate.
>
> Ma di caratteristiche ne hanno parecchie a cominciare dalle simmetrie per rotazione e riflessione all'occupazione romboidale delle celle nell'alveare che si ingrandisce col passare delle generazioni.
>
> Una particolarità delle celle è che ad ogni generazione una volta sono occupate ed una sono vuote.
>
> Cosicché anche la cella centrale nelle generazioni dispari è vuota ed in quelle pari, partendo dalla generazione 0, è occupata con: 1, 4, 36, 400, 1225, 4900, 15876, 63504, … 2363904400 alla generazione 18 (qui il buon vecchio TurboC si ferma per superamento del calcolo a 32bit).
>
> La possibilità di variazioni sul tema è infinita ad esempio se considerassimo che solo un insetto di ogni cella si possa riprodurre ad ogni generazione l'alveare risulta

più utilizzato (dalla seconda generazione solo 4 celle sono vuote) e la crescita avviene molto più lentamente.

Le celle vuote sono quelle adiacenti diagonalmente a quelle d'angolo.

Dalla quarta generazione la cella centrale e le adiacenti ortogonali contengono lo stesso numero di insetti.

Vi sono poi le possibilità di occupazione delle 8 celle adiacenti e non solo delle 4 ortogonali. E se l'alveare fosse a celle esagonali?

A quanto pare non abbiamo ancora finito con le riproduzioni assurde. Che ne dite delle domande di ***Camillo***? Scriveteci e diteci di più. Passiamo ora alle soluzioni dei problemi proposti a ottobre.

4.2 [225]

4.2.1 Pericolosamente vicino a Collatz

Un gioco da analizzare con un bel titolo accattivante che ha ricevuto molto interesse:

Rudy e Doc si sono sfidati ad un gioco: viene generato un numero N e attribuito al giocatore "1", il quale ha una serie di possibilità:

1. *Se il numero è pari, a scelta:*
   - *Sottrai 1 dal numero, oppure*
   - *dimezza il numero*
2. *Se il numero è dispari, a scelta:*
   - *Sottrai 1 dal numero, oppure*
   - *sottrai 1 dal numero e dimezza il risultato.*

Il gioco finisce quando qualcuno raggiunge il valore zero e vince).Vince il primo o il secondo giocatore, se entrambi sono perfettamente logici con N=1000? E con un generico N? Supponiamo di scegliere a caso (distribuzione uniforme) un intero tra 1 e N: come variano le probabilità di vincita dei due giocatori, se N tende a infinito?

Tante le mail che abbiamo ricevute, cominciamo con ***Alberto R.***:

Sono *"brutti"* tutti i numeri del tipo 4N+2, più alcuni multipli di 8, precisamente quelli che si ottengono moltiplicando per 8 questo elenco:

0, 1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 25, 27, 28, 29, 31, 33, 35, 36, 37, ..., 121, 123, 124, 125, …

Sono *"belli"* tutti gli altri numeri[9].

Se io ho un numero bello (perché il gioco comincia con un numero bello e sono il primo a giocare, oppure perché l'ho ricevuto dall'avversario) posso sempre giocare in modo da lasciare all'avversario un numero brutto, mentre questi non potrà che restituirmi un numero bello, e il ciclo si ripete, con numeri sempre minori, finché gli lascerò lo zero che è il più piccolo dei brutti e mette fine alla partita con la sua sconfitta.

Quindi, per rispondere alla prima domanda, Se partiamo da 1000 vince chi gioca per secondo perché 1000 è un numero brutto ($1000 = 8 \cdot 125$ con 125 contenuto nell'elenco).

Ma quale formula si nasconde dietro quel maledetto elenco che mi ha fatto impazzire? Esso comprende tutti i dispari e solo alcuni pari, quali? Dopo ostinati e deludenti tentativi di trovarci una qualche regolarità mi è venuta l'idea di ricorrere a OEIS. Ho così scoperto che si tratta della sequenza A003159 "*formata dai numeri*

[9] La classificazione si ottiene facilmente per ricorsione: Stabiliti alcuni valori iniziali (nel nostro caso 0 è brutto e 1 è bello), si passa al primo numero successivo non ancora classificato. Se da esso si possono ottenere solo numeri belli, allora esso è brutto, se invece da esso si può ottenere almeno un numero brutto, allora esso è bello.

che, scritti in base 2, terminano con un numero pari di zeri". Io, più semplicemente, li definirei come i numeri del tipo $D \cdot 2^P$ con D dispari e P pari.

E veniamo alla probabilità. Si chiede, in sostanza, in quali percentuali i numeri si suddividono in brutti e belli.

I numeri del tipo $D \cdot 2^P$ sono:

per P=0 i dispari che sono 1/2 di tutti i numeri

per P=2 i multipli dispari di 4 che sono 1/8 di tutti i numeri

per P=4 i multipli dispari di 16 che sono 1/32 di tutti i numeri

per P=6 i multipli dispari di 64 che sono 1/128 di tutti i numeri

etc, etc.

In totale[10]: 1/2 +1/8 + 1/32 +1/128 + … = 2/3

Pertanto i numeri brutti del tipo $8 \cdot D \cdot 2^P$ sono 1/8 di 2/3 = 1/12 di tutti i numeri. Ad essi vanno aggiunti i brutti del tipo 4N+2 che sono 1/4 di tutti i numeri. In definitiva la frequenza dei brutti[11] è 1/12 + 1/4 = 1/3. I restanti 2/3 sono belli, quindi chi gioca per primo su un numero scelto a caso su un amplissimo intervallo vince con probabilità 2/3.

Numeri belli e brutti, ecco. Vediamo la versione di ***Valter***:

Se N è dispari vince sempre il primo giocatore:

- se N – 1 è perdente per il primo giocatore sottrae 1 dal numero

- se N – 1 è vincente sottrae uno dal numero e dimezza il risultato.

In entrambi i casi mette il secondo giocatore in una posizione perdente.

Se N è pari bisogna distinguere per capire se il primo giocatore vince:

- se, nella fattorizzazione di N, 2 è elevato a un valore dispari perde

- se, nella fattorizzazione di N, 2 è elevato a un valore pari vince.

In quanto:

- se sottrae 1 mette il secondo giocatore in posizione vincente (N dispari è sempre vincente per quanto detto prima)

- se dimezza diminuisce di 1 la potenza a cui è elevato 2 (quindi le posizioni vincenti/perdenti si alternano).

Per capirci, per N pari:

- se N/2 è una posizione perdente chiaramente N sarà vincente (dimezzando N mette il secondo giocatore in posizione perdente)

- se N/2 è una posizione vincente N sarà perdente (sia che scelga N – 1 o N/2 finisce in posizione vincente per l'altro).

Partendo con 1000, essendo = $2^3 * 125$, dovrebbe vincere il secondo (in quanto 2 è elevato a 3 che è un numero dispari).

Al crescere di N è più frequente che si alternino N pari vincenti/perdenti.

La probabilità di vittoria del primo giocatore dovrebbe tendere a ¾ (per gli N dispari vince sempre per quelli pari quasi la metà delle volte).

Non preoccupatevi per le differenze nelle probabilità, io non lo faccio mai: mi preoccupo di più se sono tutti d'accordo. Vorremmo adesso dare la parola ad ***Antonino***, che ci manda la sua prima soluzione, ed al quale vogliamo dare il benvenuto. Prima di partire,

[10] Lo stesso risultato si può ottenere usando la definizione data da OEIS. Infatti la prob che un numero random scritto in base 2 termini con N zeri è 1/2^(N+1). Notare che l'esponente è N+1 e non N perché bisogna imporre anche la condizione che la cifra (N+1)esima sia 1, altrimenti avremmo "almeno" N zeri e non "esattamente" N zeri.

[11] La somma è lecita perché i due insiemi sono disgiunti, come si verifica facilmente constatando che i numeri tipo $8 \cdot D \cdot 2^P$ sono multipli di 4 e quelli tipo 4N+2 non lo sono.

ricordiamo che se ci mandate soluzioni in pdf ci mettete in grandi ambasce per l'editing e vi preghiamo ancora una volta di mandare le soluzioni in formato editabile: word, open office, testo, latex, qualsiasi cosa che possiamo copincollare senza dover riscrivere tutte le formule. Bene, partiamo:

Fissato $n > 0$, sia:

- sot n la giocata che produce $n - 1$
- div n la giocata che produce $n/2$ se n è pari, $(n - 1)/2$ se n è dispari,

Sia n_0, n_1, n_2, … la sequenza di numeri nella quale:

- n_0 è il numero generato inizialmente;
- n_1, n_3, … la sequenza giocata dal primo giocatore;
- n_2, n_4, … la sequenza giocata dal secondo giocatore. Poiché risulta:

Poiché risulta $n_{i+1} \leq n_i - 1$, la partita termina in al più n_0 giocate.

Sia $w = w_0, w_1, \ldots, w_n, \ldots$ la successione che, in funzione del numero n_0 generato inizialmente, fornisce 1 se il primo giocatore vince, altrimenti 0.

<u>Costruzione di *w*</u>

Per $n_0 = 1$, il primo giocatore vince con entrambe le giocate. Per $n_0 = 2$, entrambe le giocate possibili producono $n_1 = 1$ che è vincente per il secondo giocatore, e dunque il primo giocatore perde. E dunque: $w = 1, 0, \ldots$

Se i giocatori sono perfettamente logici, per ciascun giocatore n è perdente se sot n e div n sono entrambe vincenti, altrimenti n è vincente. Inoltre, poiché le giocate che possono produrre n sono: sot n+1, div 2n, div 2n+1.

se n è perdente risulta:

1. n+1 è vincente (sot n+1 = n, n perdente)
2. 2n, 2n+1 sono vincenti (div 2n = div 2n+1 = n, n perdente)
3. n–1 è vincente (se fosse perdente, sot n = n – 1 implicherebbe n vincente);
4. 2n+2 è perdente (div 2n+2 = n+1 e sot 2n+2 = 2n+1 sono entrambi vincenti);
5. 2n+3 è vincente (sot 2n+3 = 2n+2, 2n+2 perdente)

Con riferimento al primo giocatore, si deducono pertanto i valori di w implicati da $w_n = 0$ come sintetizzato nella seguente tabella A:

		n-1		n		n+1	
w		1		$\boxed{0}$		1	
	2n-3	2n-2	2n-1	2n	2n+1	2n+2	2n+3
w	?	?	?	1	1	0	1

Appurato che nella successione w gli 0 devono essere sempre "solitari" (101), si passa ad esaminare le sequenze di 1, e cioè i seguenti casi:

1. sequenza 010
2. sequenza 0110
3. sequenza 01110
4. sequenza 011110
5. …

costruiti applicando a ciascun n per il quale $w_n = 0$ le regole della tabella A.

Sequenza 010

		n-1		n		n+1		n+2		n+3	
w		1		0		1		0		1	
	2n-3	2n-2	2n-1	2n	2n+1	2n+2	2n+3	2n+4	2n+5	2n+6	2n+7
w	?	?	?	1	1	0	1	1	1	0	1

Sequenza 0110

		n-1		n		n+1		n+2		n+3		n+4	
w		1		0		1		1		0		1	
	2n-3	2n-2	2n-1	2n	2n+1	2n+2	2n+3	2n+4	2n+5	2n+6	2n+7	2n+8	2n+9
w	?	?	?	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1

Sequenza 01110

		n-1		n		n+1		n+2		n+3		n+4		n+5	
w		1		0		1		1		1		0		1	
	2n-3	2n-2	2n-1	2n	2n+1	2n+2	2n+3	2n+4	2n+5	2n+6	2n+7	2n+8	2n+9	2n+10	2n+11
w	?	?	?	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1

Sequenza 011110

		n-1		n		n+1		n+2		n+3		n+4		n+5		n+6	
w		1		0		1		1		1		1		0		1	
	2n-3	2n-2	2n-1	2n	2n+1	2n+2	2n+3	2n+4	2n+5	2n+6	2n+7	2n+8	2n+9	2n+10	2n+11	2n+12	2n+13
w	?	?	?	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1

Si osserva che:

1. la sequenza 010 produce 1 sequenza 01110
2. la sequenza 0110 produce 1 sequenza 01110 e 1 sequenza 010
3. la sequenza 01110 produce 1 sequenza 01110 e 2 sequenze 010
4. la sequenza 011110 produce 1 sequenza 01110 e 3 sequenze 010

E cioè, in generale, comunque lunga si sceglie la sequenza di 1, con le regole del gioco è possibile produrre soltanto "solitari" (010) o triplette (01110) e pertanto tutte le sequenze diverse da queste vanno bandite. Diventa allora possibile completare "a sinistra" le sequenze 101 e 01110 come segue:

0 in n

		n-1		n		n+1	
w		1		0		1	
	2n-3	2n-2	2n-1	2n	2n+1	2n+2	2n+3
w	1	0	1	1	1	0	1

111 'centrato' in n

		n-3		n-2		n-1		n		n+1		n+2		n+3	
w		1		0		1		1		1		0		1	
	2n-7	2n-6	2n-5	2n-4	2n-3	2n-2	2n-1	2n	2n+1	2n+2	2n+3	2n+4	2n+5	2n+6	2n+7
w	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1

ed in definitiva assemblarle in un'unica "regola" (tabella B):

				n-1				n				n+1			
w				1				0				1			
		2n-3		2n-2		2n-1		2n		2n+1		2n+2		2n+3	
w		1		0		1		1		1		0		1	
	4n-7	4n-6	4n-5	4n-4	4n-3	4n-2	4n-1	4n	4n+1	4n+2	4n+3	4n+4	4n+5	4n+6	4n+7
w	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1

che riempie w senza lasciare "buchi" quando la si applica in corrispondenza di ogni 0 e dalla quale si evince che:

1. per n dispari $w = 1$ (in rosso)
2. per n pari con $n/2$ dispari, $w = 0$ (in azzurro)
3. per n pari con $n/2$ pari, $w_n = w_n/4$ (in verde)

e dunque, la successione w i cui elementi sono:

$$w_n = \begin{cases} w_{n/4} \text{ se } n\bmod 4 = 0 \\ n\bmod 2 \text{ altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

(ove "mod" è l'operatore resto della divisione fra interi) fornisce 1 se il primo giocatore vince, altrimenti 0.

In altri termini, gli elementi di indice divisibile per 4 sono definiti ricorsivamente in funzione di elementi antecedenti, gli altri sono 1,0,1. Si ottiene:

1,0,1,**1**,1,0,1,**0**,1,0,1,**1**,1,0,1,**1**,1,0,1,**1**,1,0,1,**0**,1,0,1,**1**,1,0,1,**0**,…

NOTA: È sufficiente iterare la seguente "porzione" della tabella B in ogni 0 per riempire w senza lasciare "buchi":

	n				n+1			
w	0				1			
	2n		2n+1		2n+2		2n+3	
w	1		1		0		1	
	4n	4n+1	4n+2	4n+3	4n+4	4n+5	4n+6	4n+7
w	0	1	0	1	1	1	0	1

<u>1° Quesito</u>: Applicando la (1) si calcola: $w_{1000} = 0$, e dunque, per $n = 1000$ il primo giocatore perde.

<u>2° Quesito</u>: La probabilità di vincita P del primo giocatore per $n \to \infty$ vale:

$$P = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n/4}\sum_{j=0}^{3} w_{4i+j}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\frac{n}{4}}[w_{4i}+1+0+1]\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n} w_i + \frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n} 2\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i\right)}{4} + \frac{1}{2} = \frac{P}{4} + \frac{1}{2}$$

da cui:

$$P = \frac{2}{3}$$

NOTE AGGIUNTIVE:

Si può anche costruire w partendo dalla sequenza 10 e concatenando 2 volte a destra la metà sinistra della sequenza:

10

1011

10111010

1011101010111011

…

Inoltre, vale la seguente proprietà assai interessante che non dimostro:

Sia $w^{(k)}$ la successione ottenuta estraendo gli elementi di w multipli di k intero:

$$w^{(k)} = w_k,\ w_{2k},\ \ldots,\ w_{nk},\ \ldots$$

risulta:

$$w^{(k)} = \begin{cases} w \text{ se } w_k = 1 \\ 1 - w \text{ altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

ove con $1 - w$ s'intende la successione i cui elementi sono il complemento ad 1 degli elementi di w. In altri termini, risulta:

$w^{(1)} = w =$ 10111010101110111011101010111010

$w^{(2)} = 1 - w =$ 01000101010001000100010101000101

$w^{(3)} = w =$ 10111010101110111011101010111010

$w^{(4)} = w =$ 10111010101110111011101010111010

$w^{(5)} = w =$ 10111010101110111011101010111010

$w^{(6)} = 1 - w =$ 01000101010001000100010101000101

$w^{(7)} = w =$ 10111010101110111011101010111010

$w^{(8)} = 1 - w =$ 01000101010001000100010101000101

…

Speriamo di aver fatto un lavoro decente nell'estrarre la soluzione di ***Antonino*** dal suo pdf, se così non fosse ci scusiamo in anticipo. Vediamo ora la versione di ***trentatre***:

> Riporto prima i risultati. Il giocatore con il numero N passa all'altro uno dei due numeri

[1] $Na = N - 1, Nb = \lfloor N/2 \rfloor$.

I numeri N si dividono in due classi, distinte dalla probabilità $P(N)$ con

[2] $P(N) = 1$: chi inizia la partita con N vince, $P(N) = 0$: chi inizia con N perde.

Per ogni N vale la

[3] $P(N) = 1 - P(Na) \cdot P(Nb)$ da cui

- ogni $P(N)$ si calcola per iterazione a partire da $P(1) = 1$

- si ricava la seguente forma finita (con D: qualsiasi dispari)

[4] $P(N) = 1 \; : N = 2^{2n} D, n \geq 0$.
$P(N) = 0 \; : N = 2^{2n+1} D, n \geq 0$

Scelto L a caso fra 1 e N la probabilità di vincere iniziando con L è

[5] $q(N) = S(N) / N$ con

[6] $S(N) = K_1 + K_3 + K_5 + ...$ dove $K_m = \lfloor N/2^m + 1/2 \rfloor$

- da cui si può calcolare la probabilità per qualsiasi intervallo, p.es.

$S(1000) = 500 + 125 + 31 + 8 + 2 = 666 \rightarrow q(1000) = 666/1000 = 2/3 - 1/1500$.

I quesiti sono

1) dato N vince il primo o il secondo ?

- per [4] basta calcolare la max potenza di 2 contenuta in N (p.es. $N = 1000 = 2^3 \cdot 125$ vince il secondo).

2) scegliendo a caso L fra 1 e N quali sono le probabilità dei due giocatori ?

- per N finito la probabilità del primo giocatore è data da [5]

- per $N \rightarrow \infty$ si ha $q(N) \rightarrow 2/3$, cioè su tre partite chi gioca per primo ne vince due e ne perde una.

<u>dimostrazioni</u>

Siano A e B il primo e il secondo giocatore; in una partita "razionale", se A vince e inizia con N_1, la sequenza dei numeri giocati è $N_1, N_2, N_3, N_4, ...\, 2,1,0$. Ogni partita termina poiché i numeri sono decrescenti e la fine 2,1,0 si ricava da [1]. A vince se ottiene 1, cioè se la sequenza ha un n° pari di termini. Quindi sono vincenti, come numeri iniziali, $N_1, N_3, N_5, ...$ e perdenti $N_2, N_4, N_6, ...$.

La probabilità di vincere $P(N)$ è quindi 1/0 per i due tipi di N, e gli interi si dividono in due sequenze

$\boldsymbol{U}$: gli N con $P(N) = 1$

$\boldsymbol{Z}$: gli N con $P(N) = 0$.

Durante la partita

- gli $N \in \boldsymbol{U}$ <u>permettono</u> ad A, scegliendo fra Na, Nb, di passare a B un $N \in \boldsymbol{Z}$

- gli $N \in \boldsymbol{Z}$ <u>obbligano</u> B, scegliendo fra Na, Nb, a passare ad A un $N \in \boldsymbol{U}$

- il calcolo $N \rightarrow (Na, Nb) \rightarrow (P(Na), P(Nb))$ può generare solo le coppie $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$

- ogni giocatore passa all'avversario il n° corretto solo se le coppie sono ripartite con

$N \in \boldsymbol{U}$: deve generare le coppie $(0,0), (0,1), (1,0)$ che <u>permettono la scelta (0)</u>

$N \in \boldsymbol{Z}$: deve generare la coppia $(1,1)$ che <u>obbliga la scelta (1)</u>

- cioè se $P(N)=1/0$ allora $P(Na)\cdot P(Nb)=0/1$, quindi

$P(N)=1-P(Na)\cdot P(Nb)$

- da questa e da $P(1)=1$ si ha per ricorrenza

$P(2)=1-P(1)\cdot P(1)=0,\ P(3)=1-P(2)\cdot P(1)=1,\ P(4)=1-P(3)\cdot P(2)=1$ ...

- e proseguendo

U	1	3	4	5	7	9	11	12	13	15	16	17	19	20 ...
Z	2	6	8	10	14	18	22	24	26	30	32	34	38	40 ...

- sempre da [1] e [3] si ricava

a) $P(2N)=1-P(2N-1)\cdot P(N)$, b) $P(2N+1)=1-P(2N)\cdot P(N)$

- eliminando $P(2N)$ e tenendo presente che $P(N)^2=P(N)$

c) $P(2N+1)=1-P(N)\cdot(1-P(2N-1))$

- da $P(1)=1$ con $N=1,2,3,\dots$ si ha $P(N)=1$ per <u>tutti i dispari</u> (che sono tutti in ***U***)

- la a) diventa quindi

d) $P(2N)=1-P(N)$ (cioè N e $2N$ sono sempre di tipo opposto) da cui

$P(D)=1\rightarrow P(2D)=0\rightarrow P(4D)=1$ ecc. $\rightarrow P(2^{2n}D)=1, P(2^{2n+1}D)=0$ cioè le [4].

Sia $S(N)$ il n° di interi $L\le N$ in ***U***; $S(N)$ conta i <u>casi favorevoli</u> (vincenti) fra 1 e N e la probabilità di vincere scegliendo un qualsiasi L è $q(N)=S(N)/N$

- $S(N)$ si ottiene da [4] contando separatamente gli $L\le N$ di tipo $D, 2^2D, 2^4D,\dots$ nella sequenza degli interi

- il k-esimo D è $(2k-1)$, il massimo $2^mD\le N$ è $2^m(2k-1)=(2^{m+1}k-2^m)\le N$ da cui

$k\le(N+2^m)/2^{m+1}\rightarrow k=\left\lfloor N/2^{m+1}+1/2\right\rfloor$ e dalla [4]

$S(N)=K_1+K_3+K_5+\dots$ con $K_m=\left\lfloor N/2^m+1/2\right\rfloor$

- per $N\rightarrow\infty$ si ha $K_m/N\rightarrow 1/2^m+\delta/N$ con $|\delta|\le 1/2$, quindi $K_m/N\rightarrow 1/2^m$ e sommando

$q(N)=S(N)/N\rightarrow 1/2+1/2^3+1/2^5+\dots=2/3$.

Lo stesso risultato in questo modo: se $T(N)$ è il n° di interi $L\le N$ in ***Z*** si ha $S(N)+T(N)=N$, ma la [4] mostra che la sequenza ***Z*** contiene i numeri ***U*** duplicati, da cui $S(N)=T(2N)$; eliminando dalle due equazioni la funzione T si ha $S(N)+S(2N)=2N$ e quindi $q(N)/2+q(2N)=1$.

Se per $N\rightarrow\infty$, $q(N)\rightarrow x$ allora $x/2+x=1\rightarrow x=2/3$.

Tristemente nelle ultime soluzioni la probabilità tende a convergere. Ancora non siete soddisfatti, lo sappiamo. E quindi ecco a voi un gradito ritorno, quello del ***Panurgo***:

Osserviamo per prima cosa che, se n è pari, il giocatore può scegliere tra togliere un'unità $[n-1]$ o dimezzarlo $[n/2]$; viceversa, se n è dispari, il giocatore può togliere un'unità $[n-1]$ o togliere un'unità e dimezzarlo $[(n-1)/2]$.

Ma, per definizione, la divisione tra interi è

$$q=\frac{n-r}{d}$$

dove d è il divisore, q è il quoziente e r è il resto. E, quando $d=2$, abbiamo

$$q = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & n \text{ pari} \\ \dfrac{n-1}{2} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Quindi la regola è la stessa per i numeri pari e i numeri dispari se consideriamo la divisione tra interi (÷): togliere un'unità $[n-1]$ o dividere per due $[n \div 2]$.

Nella figura seguente (Fig. 1) i segmenti che congiungono i punti rappresentano la sottrazione di uno, gli archi di cerchio rappresentano la divisione (di un intero) per due.

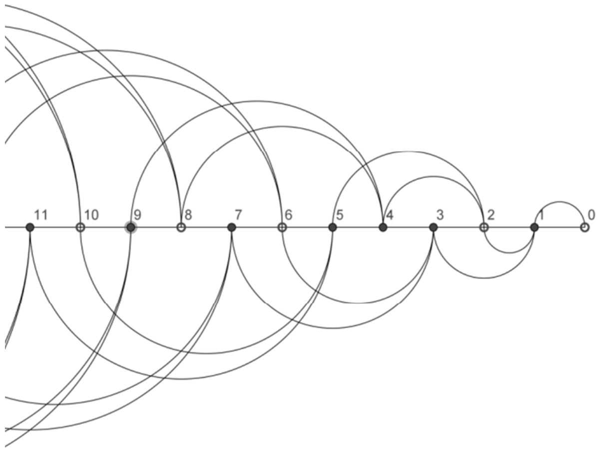


Fig. 1: "tutte le strade portano a uno".

Osserviamo innanzitutto che solo l'uno può arrivare a zero quindi, si dovrà raggiungere l'uno, qualsiasi sia il numero di partenza; inoltre, dal due si può raggiungere solo l'uno quindi il giocatore che dovesse riceverlo sarà obbligato a consegnare la vittoria all'avversario.

L'ovvia strategia vincente consiste nel lasciare il *due* all'avversario, per esempio sottraendo uno nel caso in cui si parta dal tre e dividendo per due nel caso in cui si parta dal quattro o dal cinque.

Dal numero sei sono raggiungibili solo il cinque (sottraendo uno) e il tre (dividendo per due): il sei è un altro numero perdente.

A questo punto è utile rovesciare la nostra prospettiva (vedi Fig. 2)

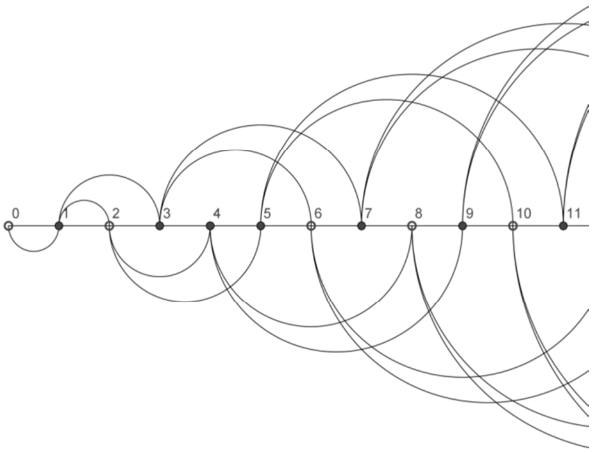


Fig. 2: "doppi e successori"

considerando, invece dei numeri raggiungibili da n, i numeri dai quali n può essere raggiunto: il suo successore, il suo doppio e il successore del suo doppio.

n	$n+1$	$2n$	$2n+1$
0	1	0	1
1	2	2	3
2	3	4	5
3	4	6	7
4	5	8	9
5	6	10	11
6	7	12	13
⋮	⋮	⋮	⋮

Limitiamo ora la tabella ai soli numeri perdenti

n	$n+1$	$2n$	$2n+1$
0	1	0	1
2	3	4	5

Il due è raggiungibile dal tre, dal quattro e dal cinque che sono perciò numeri vincenti: il prossimo numero perdente è il sei

n	$n+1$	$2n$	$2n+1$
0	1	0	1
2	3	4	5
6	7	12	13

Il sette è vincente (come il dodici e il tredici) e l'otto è perdente

n	$n+1$	$2n$	$2n+1$
0	1	0	1
2	3	4	5
6	7	12	13
8	9	16	17

Continuiamo a riempire la tabella considerando le righe corrispondenti ai numeri che non sono presenti nelle righe precedenti: così facendo abbiamo che la prima colonna contiene i numeri perdenti mentre le altre tre contengono numeri vincenti

n	$n+1$	$2n$	$2n+1$
0	1	0	1
2	3	4	5
6	7	12	13
8	9	16	17
10	11	20	21
14	15	28	29
18	19	36	37
⋮	⋮	⋮	⋮

Tutti i numeri dispari sono vincenti: dobbiamo ora trovare la regola per distinguere i numeri pari perdenti (2, 6, 8, 10, 14, 18K) da quelli vincenti (4, 12, 16, 20, 28, 36K).

Osserviamo che un numero naturale può essere espresso univocamente con prodotto di un numero dispari e di una potenza di due: l'esponente di tale potenza può essere pari, dispari o zero. Nei primi due casi il numero è pari, nell'ultimo è dispari.

Chiamiamo *dìpari* i numeri pari con esponente della potenza di due pari ($2^{2k}d = 4^k d$), *monòpari* i numeri pari con esponente dispari ($2^{2k+1}d = 2 \cdot 4^k d$), *àpari* quelli con esponente zero ($2^0 d = d$) e costruiamo la tabella seguente

àpari	monòpari				dìpari			
1	2	8	32	⋯	4	16	64	⋯
3	6	24	108	⋯	12	48	192	⋯
5	10	40	160	⋯	20	80	320	⋯
7	14	56	224	⋯	28	96	384	⋯
9	18	72	288	⋯	36	144	576	⋯
11	22	88	352	⋯	44	176	704	⋯
13	26	104	416	⋯	52	208	832	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	

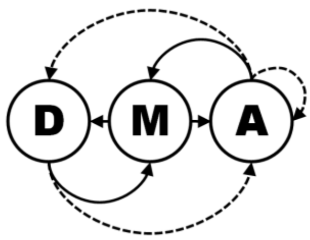
Mirabilia, tutti i nostri numeri perdenti sono monòpari!

Per dimostrare l'ipotesi secondo la quale i numeri monòpari sono sempre perdenti consideriamo che:

1. se n è dìpari, dividendo per due otteniamo un monòpari dato che, se l'esponente della potenza di due è pari, una divisione per due lo rende dispari
2. se n è àpari ed è il successore
    a. di un monòpari, sottraendo uno otteniamo il monòpari stesso
    b. di un dìpari, dividendo per due otteniamo il monòpari che è metà del dìpari di cui n è il successore
3. se n è monòpari
    a. dividendo per due otteniamo
        i. un dìpari, se l'esponente della potenza di due è maggiore di uno e per lo stesso motivo, mutatis mutandis, del caso 1
        ii. un àpari, se l'esponente della potenza di due è uguale a uno
    b. sottraendo uno otteniamo un àpari.

Da ciò segue che se n è dìpari o àpari è sempre possibile lasciare un monòpari mentre se n è monòpari è possibile lasciare solo un dìpari o un àpari.

Schematicamente



Quindi, il giocatore che si ritrova con un dìpari o un àpari è in grado di lasciare all'avversario sempre un monòpari mentre n diminuisce ad ogni mossa fino ad arrivare a due, il più piccolo monòpari.

Nello specifico, $1000 = 2^3 \times 125$ è monòpari quindi, nel caso deterministico, il primo giocatore perde.

Il caso probabilistico è alquanto più semplice.

Sia $p(n)$ la probabilità di vincere partendo da n: da n è possibile raggiungere $n - 1$ o $n \div 2$ con eguale probabilità (in base al Principio di Indifferenza); per vincere partendo da n è necessario perdere partendo da $n - 1$ e $n \div 2$.

Di conseguenza possiamo scrivere la relazione ricorsiva

$$\begin{cases} p(n) = 1 - \dfrac{p(n-1) + p(n \div 2)}{2} \\ p(1) = 1 \\ p(2) = 0 \end{cases}$$

Per esempio

$$p(3) = 1 - \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, p(4) = 1 - \frac{\frac{1}{2}+0}{2} = \frac{3}{4}, p(5) = 1 - \frac{\frac{3}{4}+0}{2} = \frac{5}{8}$$

eccetera

Trovare una forma chiusa è impresa superiore alle mie forze: mi basterà osservare che, conti alla mano, al crescere di n la probabilità si avvicina sempre più a ½.

Avevamo già chiuso questo pezzo, ma la soluzione di ***Franco57*** ha trovato il suo posto:

Riporto gli stati *P* di Perdita e *V* di Vincita sui primi numeri, in base alle regole, e scopro delle interessanti proprietà: la coppia 2,3 ripete gli stati della coppia 0,1; la quaterna 4÷7 quelli della quaterna 0÷3 ma con lo stato del primo numero cambiato. Poi si prosegue sempre nello stesso modo e cioè la ottupla 8÷15 ripete gli stati della ottupla 0÷7 mentre la *esadecina*[12] 16÷31 quelli della *esadecina* 0÷15 eccetto che nello stato del primo, che viene invertito, e così via a coppie di raddoppi.

0	P	16	V	32	P	48	V
1	V	17	V	33	V	49	V
2	P	18	P	34	P	50	P
3	V	19	V	35	V	51	V
4	V	20	V	36	V	52	V
5	V	21	V	37	V	53	V
6	P	22	P	38	P	54	P
7	V	23	V	39	V	55	V
8	P	24	P	40	P	56	P
9	V	25	V	41	V	57	V
10	P	26	P	42	P	58	P
11	V	27	V	43	V	59	V
12	V	28	V	44	V	60	V
13	V	29	V	45	V	61	V
14	P	30	P	46	P	62	P
15	V	31	V	47	V	63	V

Sembra proprio che lo stato abbia a che vedere con la rappresentazione in base 2 e in effetti dopo aver consumato abbastanza inchiostro e carta trovo che lo stato *P* si ha esattamente quando il numero n rappresentato in base 2 termina con un numero dispari di 0.

Per la dimostrazione ho trovato più conveniente esprimere questa proprietà in forma algebrica. Scriviamo il numero n come prodotto di un numero dispari D e una potenza $k \geq 0$ del 2, cioè $n = D \cdot 2^k$. Questa rappresentazione è unica poiché D contiene tutti i fattori dispari e 2^k i fattori 2 della scomposizione in fattori primi di n.

Indicando con $S(n)$ lo stato *P* o *V* di $n = D \cdot 2^k$, abbiamo $\boxed{S(n) = P \quad \Leftrightarrow \quad k \quad dispari}$

Ecco la dimostrazione per induzione su n, che fornisce anche la strategia di vittoria per le situazioni V:

- per n=1, situazione *V*, è verificato perché abbiamo D=1 e k=0 quindi pari;
- per $n > 1$ e supposta vera per tutti i numeri minori di n, bisogna dimostrarla vera anche per n e cioè che se k è dispari tutte le mosse portano ad una situazione *V*, perciò n è in situazione *P*, mentre se k è pari esiste una mossa che porta ad una situazione *P*, quindi n è in situazione *V*.

Nel caso k dispari, n è pari perché ha almeno una potenza del 2, quindi se gli tolgo 1 ottengo un dispari che per ipotesi induttiva è *V* poiché la sua potenza del 2 è 0 e quindi pari; se invece divido per 2 ottengo $n = D \cdot 2^{k-1}$ quindi ancora una volta un numero con potenza pari del 2 e ricado ancora in uno stato *V*. Comunque muova ricado in uno stato *V*, quindi sono in stato *P*.

Nel caso $k = 0$ abbiamo un generico numero dispari, perciò $n-1$ è pari. A questo punto $n-1$ stesso oppure $\frac{n-1}{2}$, cioè una delle due mosse possibili, ha una potenza dispari del 2 e perciò si ha sempre modo di muovere verso una situazione *P*.

[12] mi sa che non si dice proprio così

Infine nel caso k pari e positivo, muovendo verso $\frac{n}{2}$ si va verso una situazione P poiché la potenza del 2 del numero ottenuto, diminuita di 1, risulta dispari.

In particolare partendo da $n = 1000 = 125 \cdot 2^3$ il primo giocatore perde se il secondo gioca bene.

Nel caso che n sia scelto a caso tra 1 e $N = 2^k - 1$ con k pari, la probabilità di vincere è esattamene il doppio di quella di perdere. Mi avvalgo di una tabella con classi di rappresentazioni binarie degli n nella prima colonna, dove gli x che sono bit qualsiasi, lo stato P o V in seconda colonna e la numerosità in terza.

$xx \cdots xxx1$	V	2^{k-1}
$xx \cdots xx10$	P	2^{k-2}
$xx \cdots x100$	V	2^{k-3}
$xx \cdots 1000$	P	2^{k-4}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$x1 \cdots 0000$	V	2^1
$10 \cdots 0000$	P	2^0

Indicando con P_N e V_N il numero di situazioni P e V, abbiamo:

$$V_N = 2^{k-1} + 2^{k-3} + \cdots + 2^1$$
$$= 2 \cdot \left(2^{k-2} + 2^{k-4} + \cdots + 2^0\right) = 2 \cdot P_N ,$$

quindi $P_N = \frac{N}{3} = \frac{2^k - 1}{3}$. Perciò se, come si intuisce, un limite per $\frac{P_N}{N}$ esiste, deve valere 1/3, ma dimostrarlo si è rilevato faticoso!

Si comincia dal caso analogo n scelto a caso tra 1 e $N = 2^k - 1$ con k dispari, per il quale abbiamo

$$V_N = 2^{k-1} + 2^{k-3} + \cdots + 2^2 + 2^0 = 2 \cdot \left(2^{k-2} + 2^{k-4} + \cdots + 2^1\right) + 1 = 2 \cdot P_N + 1$$

e quindi $N = P_N + V_N = 3 \cdot P_N + 1$ da cui $P_N = \frac{N-1}{3} = \frac{2^k - 2}{3}$.

Adesso prendiamo un generico naturale $N = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_r}$ con $a_1 > a_2 > \cdots > a_r \geq 0$ (cioè $a_1, a_2, \cdots, a_r$ sono i bit a 1 nella sua rappresentazione binaria). Anche qui partiziono i numeri n tra 1 ed N in classi e per ciascuna di esse calcolo un range possibile sul numero di situazioni perdenti $\#P$:

classe	Calcolo range situazioni P
$n = x$ con $1 \leq x < 2^{a_1}$	$\frac{2^{a_1}}{3} - \frac{2}{3} \leq \#P \leq \frac{2^{a_1}}{3} - \frac{1}{3}$
$n = 2^{a_1}$	$0 \leq \#P \leq 1$
$n = 2^{a_1} + x$ con $1 \leq x < 2^{a_2}$	$\frac{2^{a_2}}{3} - \frac{2}{3} \leq \#P \leq \frac{2^{a_2}}{3} - \frac{1}{3}$
$n = 2^{a_1} + 2^{a_2}$	$0 \leq \#P \leq 1$
$n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + x$ con $1 \leq x < 2^{a_3}$	$\frac{2^{a_3}}{3} - \frac{2}{3} \leq \#P \leq \frac{2^{a_3}}{3} - \frac{1}{3}$
$n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + 2^{a_3}$	$0 \leq \#P \leq 1$
...	...
$n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{r-1}} + x$ con $1 \leq x < 2^{a_r}$	$\frac{2^{a_r}}{3} - \frac{2}{3} \leq \#P \leq \frac{2^{a_r}}{3} - \frac{1}{3}$
$n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{r-1}} + 2^{a_r}$	$0 \leq \#P \leq 1$

dove il numero di situazioni *P* nella classe generica $n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{i-1}} + x$ con $1 \le x < 2^{a_i}$ coincide con quanto già calcolato per $N = 2^{a_i} - 1$ perché se sommo potenze del 2 maggiori di a_i lo stato *P* o *V* non cambia (ricordiamo che dipende dal numero di bit a 0 binari con cui termina la sua rappresentazione binaria), perciò si può dire in questo caso $\frac{2^{a_i}}{3} - \frac{2}{3} \le \# P \le \frac{2^{a_i}}{3} - \frac{1}{3}$.

A questo punto sommando le disuguaglianze ottengo

$$\frac{2^{a_1}}{3} + \frac{2^{a_2}}{3} + \cdots + \frac{2^{a_r}}{3} - \frac{2}{3} r \le P_N \le \frac{2^{a_1}}{3} + \frac{2^{a_2}}{3} + \cdots + \frac{2^{a_r}}{3} + \frac{1}{3} r + r$$

cioè $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\frac{r}{N} \le \frac{P_N}{N} \le \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{r}{N}$. Ma *r* al massimo raggiunge il numero di cifre binarie di *N* quindi

$r \le 1 + \log_2 N$, perciò $\frac{r}{N} \to 0$ e infine l'agognato $\boxed{\frac{P_N}{N} \to \frac{1}{3}}$, ma spero in qualche dimostrazione più elegante degli altri solutori.

E adesso che l'ordine universale delle probabilità non coincidenti è ristabilito, possiamo passare al secondo problema.

4.2.2 Zappa & Spada!

Il Capo ha finalmente trovato un nuovo modo per ambientare i problemini geometrici, ne siamo molto orgogliosi ma tagliamo tutta l'ambientazione per ricordare il succo del problema:

> *Il compito è di tracciare tre aiuole e zappare le aree comuni ad almeno due di esse. Le aiuole sono tutte e tre circolari e di ugual raggio, e hanno un punto in comune a tutte e tre. Quale configurazione minimizza la somma delle aree comuni a due aiuole? Quale sistema di notazione possiamo inventarci, per descrivere le configurazioni?*

Cominciamo con la risposta di ***Alberto R.***:

> "*Quale configurazione minimizza la somma delle aree comuni a due aiuole?*"
>
> Il minimo si ha in configurazione simmetrica con i centri dei tre cerchi ai vertici di un triangolo equilatero (come il Sole delle Alpi di bossiana memoria che abbia perso metà dei petali). Infatti basta fare la figura e salta all'occhio che con qualunque spostamento di un cerchio dalla posizione di simmetria l'area comune che si guadagna da una parte è più grande di quella comune che si perde dall'altra. Mi resta solo un dubbio: che il *saltallocchio* risulti indigesto al severo Euclide.
>
> "*Quale sistema di notazione possiamo inventarci, per descrivere le configurazioni?*"
>
> Per rispondere a questa domanda occorre preventivamente rispondere a quest'altra domanda: "che cavolo si domanda con la prima domanda?"
>
> Troppe domande per i miei gusti!

Bene, la non troppo velata critica all'esposizione del problema ci ricorda di ricordarvi che il Capo non fa nessuno sforzo per rendere i problemi fumosi, il suo è un talento naturale. Quando riesce a renderli troppo chiari ci pensa la impaginatrice a fare pasticci. Ecco quindi la versione di ***Valter***:

> Come ha mostrato Sawdust in RM224: "*possiamo idealmente trasferire il settore (1) … per ottenere, unendolo ai settori (2) e (3), un semicerchio*". Quindi se prendo le 3 coppie di settori circolari e le unisco ottengo un cerchio unitario. L'area che si vuole minimizzare è la somma delle lunule di tali settori.

Quindi è l'area del cerchio unitario meno l'area dell'esagono inscritto al cerchio (per capirci l'esagono ottenuto con le 6 corde delle rispettive lunule). Minimizzare l'area delle lunule, quindi, dovrebbe equivalere a massimizzare l'area dell'esagono.

L'esagono inscritto in un cerchio che ha area massima dovrebbe essere quello regolare. Per tale esagono i 6 triangoli, costruiti sui 6 lati e con vertice comune nel suo baricentro, sono equilateri. I settori circolari le cui corde sono i lati di un esagono regolare hanno quindi gli angolo al centro di 60°.

Tornando alla "*configurazione che minimizza la somma delle aree comuni a due aiuole*" quindi:
- si ottiene dalla sovrapposizione di 3 coppie di settori circolari con angolo al centro di 60° (ogni cerchio contribuisce con 2 settori circolari abbinati ciascuno ad un degli altri 2 cerchi)
- o, analogamente, come ci dice Sawdust: "*si ha nel caso in cui i centri dei 3 cerchi si trovano nei vertici di un triangolo equilatero di lato* $l = 3^{1/2}$".

Per mostrare che l'esagono inscritto in un cerchio di area massima è quello regolare l'ho pensata così: il triangolo inscritto in un cerchio di area massima è quello equilatero; provo a convincervi:
- prendo un triangolo inscritto non equilatero

- fisso come base il suo lato più lungo (o uno dei 2 se isoscele con lati uguali "lunghi")

- sposto il vertice opposto a tale lato seguendo i cerchio in modo da allungare il lato più corto

- in questo modo aumenta l'altezza del triangolo rispetto al lato che ho fissato come base (e, di conseguenza, anche l'area del triangolo, avendogli mantenuto la base ma aumentata l'altezza)

- quindi da ogni triangolo non equilatero è sempre possibile ottenerne uno con area maggiore

- per il triangolo equilatero, invece, comunque muovo uno dei 3 vertici lungo il cerchio l'altezza si abbassa (e, di conseguenza, anche l'area del triangolo risultante)

- il triangolo degenere ottenuto su un diametro del cerchio ha area 0

- partendo da tale triangolo, quindi, si possono costruirne con area crescente sino a quello equilatero (che risulta quello con area massima perché da esso si può solo costruirne con area inferiore)

- dal triangolo equilatero si ottengono tutti i possibili esagoni appoggiando sui suoi lati 3 triangoli (il vertice opposto al lato del triangolo equilatero, chiaramente, sarà sulla circonferenza del cerchio)

- massimizzando l'area di tali triangoli minimizzo quella delle lunule con corde 2 lati di ciascuno di loro

- i 3 triangoli costruiti avranno area massima se isosceli con i lati uguali che partono dal vertice su cerchio (lo si mostra in modo analogo al precedente in quanto spostando tale vertice diminuisce l'altezza)

- l'esagono così ottenuto, avendo i 6 lati uguali, è regolare e ha area massima perché composto da:

- un triangolo equilatero inscritto sia al l'esagono che al cerchio (che è il triangolo di area massima inscrivibile in un cerchio)

- 6 triangoli isosceli appoggiati al triangolo equilatero (che sono i triangoli di area massima costruibili sulle lunule con corde i lati del triangolo equilatero).

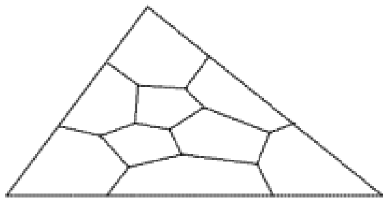
Questo mese gli interventi di ***Valter*** sono in onore di ***Sawdust***, e ci fa molto piacere, anche se abbiamo perso l'indentazione ad un certo punto. Concludiamo qui. Grazie a tutti e alla prossima!

5. Quick & Dirty

Mostrare che ogni poligono può essere tassellato con pentagoni convessi.

È noto che ogni poligono può essere tassellato con triangoli, quindi è sufficiente dimostrare che ogni triangolo può essere tassellato con pentagoni convessi. Dati due triangoli qualsiasi, uno può essere trasformato nell'altro per mezzo di una trasformazione affine (una trasformazione lineare seguita da una traslazione). Ma la trasformazione affine porta pentagoni convessi in pentagoni convessi.

Quindi, è sufficiente dimostrare che almeno un triangolo è tassellabile con pentagoni convessi per dimostrare che lo sono tutti. Il caso particolare in figura risolve quindi il problema generale.



6. Pagina 46

Partiamo da una disposizione corretta della scacchiera, con una casella nera in basso a sinistra. Numeriamo le diverse colonne da sinistra verso destra: le colonne dispari inizieranno con una casella nera e, viceversa, le colonne pari inizieranno con una casella bianca. Nello stesso modo, numeriamo le diverse righe dal basso verso l'alto: le righe dispari inizieranno con una casella nera e, viceversa, le righe pari inizieranno con una casella bianca.

In questo modo, le caselle nere sono costrette o nelle *righe dispari* (per le colonne dispari) o nelle *colonne pari* (per le righe pari).

Indichiamo ora le caselle nere delle *righe* dispari con A, e le caselle nere delle *colonne* pari con B; indichiamo inoltre le caselle bianche delle colonne dispari con C, lasciando le restanti caselle non marcate.

Siano ora a, b, c il numero di pezzi residenti sulle caselle di tipo A, B, C; scopo del problema è dimostrare che $a+b$ è pari.

Se ogni riga contiene un numero dispari di pezzi, le quattro righe 1, 3, 5, 7 conterranno in totale un numero pari di pezzi (in quanto somma di quattro numeri dispari); questo numero è pari ad $a+c$ che quindi sarà un numero pari.

Nello stesso modo, il numero totale di pezzi delle colonne 2, 4, 6, 8 è un numero pari, in quanto somma di quattro numeri dispari; questo numero è pari a $b+c$.

Questo significa che $(a+b) + (b+c) = a+b+2c$ deve essere un numero pari (in quanto somma di due numeri pari); ma $2c$ è pari per definizione, quindi $a+b$ deve essere pari.

Che è la tesi.

7. Paraphernalia Mathematica

Non siamo sicuri di trovare il numero più grande, ma di sicuro abbiamo trovato il nome più lungo.

7.1 La legge dei numeri VERAMENTE grandi [7] – L'invasione delle nutrie.

Che erano animali noti, nel periodo del boom economico, come “castorini”. Ampiamente utilizzati all'epoca per pellicce e che la moglie di Rudy non sopporta, da quando ne ha viste alcune uscire dall'acqua nella peraltro matematicamente corretta località di Béziers. E che ora stanno allegramente riproducendosi lungo le rive del Po. Zona Vanchiglietta, per chi fosse interessato. No, non potete farvi la pelliccia.

Calma, i castori arrivano dopo. Prima un po' di ripasso.

Sinora, per la definizione dei numeri *grossi*, ci siamo tenuti all'interno di sistemi che utilizzavano un ben definito algoritmo, basato su un numero finito di valori che ci permettevano di definire una funzione in grado di crescsere rapidamente; abbandonando questa via, possiamo formulare un nuovo metodo che, sperabilmente, riuscirà a generare funzioni ad ancora più rapida crescita; questo sistema è noto come ***Metodo Lin / Rado / Goucher / Rayo / Wojowu*** e, anche se non genererà grossi numeri, quantomeno il nome è abbastanza grosso da dargli un ruolo importante nella matematica:

> *B(n)* è il massimo numero computabile in un qualche modo che può essere completamente definito in *n* o meno simboli appartenenti ad un alfabeto finito e utilizzando un insieme finito di regole di combinazione o di operazione, su tutte le quali c'è accordo tra le parti prima di qualsiasi tentativo di osservare il valore di *B(n)* per un qualsiasi argomento *n*.

Non sappiamo voi, ma a noi questo *B(n)* ricorda un gatto (quello di Schrödinger), piuttosto che un castoro; eppure, la cosa funziona, a quanto pare.

Il punto principale, qui, sembra essere che *non potete* inventarvi funzioni come la tetrazione o cose del genere: avete un qualchecosa (non abbiamo il coraggio di chiamarlo “metodo”), e vi chiedete quale sia, con *n* simboli, il numero più grosso che potete costruire. Il “salto”, qui, nella costruzione dei numeri, è che ne lasciate spensieratamente la costruzione al lettore.

Prima che decidiate di picchiarmi, forse è meglio se facciamo un esempio: ***Macchina di Turing***, vi suggerisce qualcosa?

Veloce ripassino: la MdT è una *macchina a stati* che ha un certo numero (finito) di stati possibili, uno spazio di memoria (infinito, questo: di solito viene descritto come una striscia di carta di lunghezza infinita che può essere letta, cancellata o scritta) e un insieme di regole che dicono che cosa possa fare la macchina trovandosi in un determinato stato e con un determinato simbolo sulla posizione di memoria: le regole sono limitate, nel senso che sono cose del tipo “muoviti di uno spazio in avanti o indietro sulla memoria”, “leggi cosa c'è scritto in memoria nella posizione corrente”, “scrivi un simbolo nella posizione corrente” (di solito zero o uno, come potete facilmente intuire), “vai nello stato...”, “fermati”.

Le regole, di solito, sono descritte da *quintuple* [*A, B, C, D, E*], e vengono interpretate come: “Se sei nello stato *A* e sul nastro leggi il simbolo *B*, allora vai nello stato *C*, scrivi il simbolo *D* e spostati di *E* spazi sul nastro”: risulta evidente che *A* ha un valore compreso tra 1 e *N*, *C* dovrà avere un valore in più (indicato di solito con “*H*”) per il comando “fermati” (che *non* viene considerato come stato), *B* e *D* varranno 0 o 1, mentre *E* varrà 1 o –1 (per dare la possibilità di movimento nelle due direzioni: di solito, per evidenti motivi di comprensibilità da parte degli umani, i più o meno uno vengono sostituiti dai simboli “<” e “>”).

Bene, la ***Funzione del Castoro Operoso*** (gli autarchici non ce ne vogliano, ma preferiamo di gran lunga la dizione inglese di *Busy Beaver Function*), indicata con BB è stata definita da ***Tibor Rado***: partite da un nastro pieno di zeri, e fate partire la vostra

Macchina di Turing a N stati (con N ben definito); quanti "1" riesce a scrivere la vostra macchina sul nastro prima di fermarsi? No, deve fermarsi, quindi una macchina che non raggiunga mai lo stato H non vale. Bene, quel numero è la BB(N).

Adesso, rileggetevi la parte precedente, quella indentata.

Ci siamo messi d'accordo su un metodo (la MdT), ci siamo messi d'accordo su N (il numero degli stati) e vogliamo sapere qual è il numero più grosso che possiamo scrivere (il numero di 1 sul nastro). La macchina (le quintuple) ve la costruite voi, posto che interessi[13].

Non stiamo a dimostrare che le Macchine di Turing a N stati sono $(4N + 4)^{2N}$; è abbastanza evidente però che in realtà dovete controllarne molte meno, visto che molte di queste non si fermano e quindi non valgono (il fatto che il "Problema dell'Arresto" non sia risolubile da una MdT verrà affrontato in seguito e risolto in modo estremamente insoddisfacente. Per voi): a naso, comunque, sembra un metodo estremamente efficace per trovare numeri "grossi".

Insomma, le funzioni Busy Beaver vanno viste come un insieme di simboli (o meglio, come una *quantità di informazione)* necessari per specificare un sistema formale: ogni regola che aggiungete (o ogni simbolo, o ogni funzione) richiede un po' più di informazione per essere completamente definita.

"Ma che numeri generano?" Domanda legittima. Per il momento, quanto si sa in merito è sintetizzato dalla tabella seguente[14]:

N	Macchine generabili	BB(N)	Passi richiesti
1	64	1	1
2	20.736	4	6
3	16.777.216	6	21
4	25.600.000.000	13	107
5	63.403.380.965.376	$\geqslant 4.098$	47176870
6	232.218.265.089.212.416	$\geqslant 3{,}515 \times 10^{18.297}$	$\geqslant 7{,}412 \times 10^{36.534}$

(scusate la notazione ibrida virgole/punti, ma esteticamente è la preferita dallo scrivente).

Adesso, astraiamo dal castoro.

Abbiamo un formalismo sufficientemente generale e ricaviamo un funzione $f(N)$ in grado di fornirci il massimo valore "dentro quel formalismo" nel momento stesso in cui venga computata per un dato N: $f(N)$ assumerà valori finiti per ogni valore di N e quindi possiamo dire che cresca ad una certa velocità ma, appunto in quanto i valori ottenuti sono finiti, potremo sempre dire che esiste una g tale che $g(N)$ è maggiore di $f(N)$ per ogni N.

Non cascheremo nel trucco di rispondere alla domanda "...e come è fatta g?". L'idea è che esista "un qualcosa" (conoscenza? assunzioni?) al di fuori del sistema formale definito con N, e il nostro sforzo diventa quello di "far entrare" nel sistema questo qualcosa, ottenendo un nuovo sistema. Ma a questo punto, ripetendo esattamente lo stesso ragionamento, potete trovare qualcosa "fuori dal nuovo sistema" che… e avanti di questo passo.

Dicevamo che avremmo parlato della funzione di stop delle Macchine di Turing. Esattamente come il matematico alle prese con una lattina di minestra e senza apriscatole, "Imponiamo come assioma del sistema che la lattina sia aperta", ossia espandiamo il nostro sistema formale in modo tale che al suo interno sia compresa una

[13] È il momento della citazione più abusata di questa rivista: "Allevare un segugio è estremamente frustrante. Non gli importa nulla di dove sei, quello che lo affascina è scoprire come ci sei arrivato" (James Thurber). Una volta tanto, ci pare esattamente il contrario. E la cosa è seccante.

[14] A quanto ci risulta, non ci sono dati per N=7, mentre ci sono risultati insoddisfacenti per quanto riguarda BB(8): al momento, si sa solo che è maggiore o uguale (sic!) ad un valore inferiore a BB(6). Se avete di dati più aggiornati, ben lieti di essere smentiti.

Macchina di Turing in grado di risolvere il problema dell'arresto (...ve l'avevamo detto, che sarebbe stata insoddisfacente, come soluzione) e, giacché siamo sulle spese, anche una macchina in grado di trovare la Busy Beaver.

Definiamo queste macchine come "*Oracoli di Turing*".

Logicamente, nel sistema espanso ci saranno il problema dell'arresto e una Busy Beaver, e quindi posiamo definire una gerarchia. Nel "mondo normale", ipotizziamo l'esistenza degli Oracoli. Poi, nel mondo degli Oracoli, possiamo ipotizzare l'esistenza di "Oracoli del Secondo Ordine". E avanti così.

Le due lettrici là in fondo che hanno detto "Peano" e "Gödel" vincono la possibilità di scrivere la prossima puntata. Noi, a quella dopo, faremo qualche conto.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms