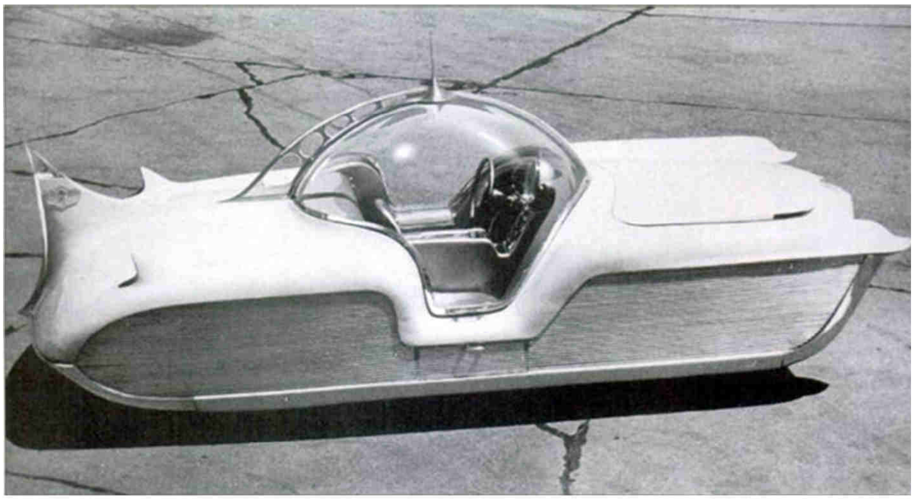
Rudi Mathematicei

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 225 – Ottobre 2017 – Anno Diciannovesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM222 ha diffuso 3221 copie e il 02/10/2017 per Google eravamo in 79'200 pagine.

In casa d'Alembert si sta pensando di cambiare la macchina "piccola": dato che Rudy risulta l'utilizzatore minimo di questo mezzo, fortunatamente la sua proposta non viene presa in grossa considerazione. Chiede, però, di considerare spassionatamente l'opzione di una ***Astra-Gnome***, progettata nel 1955 da ***Richard Arbib*** su telaio Nash Metropolitan. Ha un solo dubbio: "*Fully operational Hi-Fi*" è evidentemente un errore di stampa, non è ancora riuscito a capire se il wi-fi è standard o opzionale.

1. Nobiltà della segatura

" Falegname col martello
perché fai den-den?
Con la pialla su quel legno
Perché fai fren-fren?
Costruisci le stampelle
per chi in guerra andò
dalla Nubia sulle mani
a casa ritornò?"
"Mio martello non colpisce,
pialla mia non taglia
per foggiare gambe nuove
a chi le offrì in battaglia
ma tre croci: due per chi
disertò per rubare
la più grande per chi guerra
insegnò a disertare"
(Fabrizio De André,
"*Maria nella bottega d'un falegname*", 1970)

Se vi capitasse mai, di questi tempi, di vedere piovere della segatura dal cielo, per favore avvertiteci, perché la segatura è importante.

Più che importante, è davvero estremamente simbolica, un condensato di significati. È persino difficile provare ad esplorarli tutti, non si sa da dove cominciare. Tanto vale partire allora da quelli più facili e immediati: la segatura è, innanzitutto, legno. Legno in polvere, certo; ma pur sempre solo ed esclusivamente purissimo legno. E il legno è un materiale così familiare, così universalmente noto, così assolutamente comune e amichevole che è facile scordarsi che è materia organica, ben diversa dai metalli e dalle plastiche, perché è stata viva. Gli esseri umani hanno sempre utilizzato gli altri esseri viventi del pianeta per i loro scopi e bisogni: è nella natura dell'Uomo, farlo. Anzi, si potrebbe anche affermare, un po' darwinianamente, che è nella natura della Natura stessa. L'importante è sopravvivere, e per sopravvivere si mettono in campo tutte le armi a disposizione; e poi, non c'è davvero storia: siamo costruiti in modo tale che per vivere dobbiamo alimentarci, e possiamo alimentarci solo di altri esseri viventi. Dopo qualche millennio di civiltà e – soprattutto – dopo qualche decennio di benessere privo dei tormenti della fame, qualche gruppo di esseri umani ha cominciato a chiedersi se gli animali non meritassero un maggior rispetto di quello usualmente concessogli, evitando loro il destino di essere usati come alimento. Dubitiamo che tale privilegio possa assurgere a comandamento universale, e soprattutto siamo certissimi che non potrà essere esteso anche ai vegetali, che pure vivi sono, ma che dovranno sempre rassegnarsi ad essere alimento, per la più ovvia delle ragioni naturali.

Neglette le piante, anche dagli esseri umani più rispettosi; negletto il legno, perché non commestibile; negletta fra i negletti la polvere di legno, che perde subito le sembianze dell'essere vivente, e persino la forma solida: perché la polvere, qualsiasi polvere, giace sempre in questo strano limbo: con particelle troppo grandi per essere considerate interessanti dal punto di vista microscopico e allo stesso tempo troppo piccole per mantenere una qualsivoglia identità dal punto di vista macroscopico. Ma la polvere c'è, resiste e conquista il mondo. E la polvere di legno, la segatura, è l'unica polvere che può autenticamente farsi riconoscere come polvere che è stata viva.

Non è già incredibilmente simbolica, la segatura? Se l'etimologia di "simbolo" è davvero quella di "legare insieme", cosa c'è di più simbolico di questa cosa che fa da ponte sia tra la materia animata e quella inanimata che tra lo stato solido e quello aeriforme?

E bastasse questo.

Dicono che il genere umano abbia cominciato ad essere tale quando ha conquistato la posizione eretta. L'elevarsi dalla visuale dei quattrozampe ha certo ampliato – non solo in senso metaforico – l'orizzonte degli umani, ed è certo stato un passaggio cruciale dell'evoluzione: si potevano vedere prima i predatori, si potevano scoprire meglio le prede. Soprattutto si poteva dare un ruolo migliore a quello strumento eccezionale che sono le mani, con quell'optional fenomenale costituito dal pollice opponibile. Liberate dall'onere della locomozione, le mani potevano finalmente essere destinate a compiti più originali e creativi: e il primo compito speciale è stato certamente quello di poter afferrare degli strumenti. Il primo, e per molto tempo unico, strumento a disposizione dei nostri antenati è stato un banale ramo caduto, un bastone. Prolungava gli arti, consentendo di raggiungere frutti; proteggeva il corpo, consentendo di toccare cose intangibili senza rischi; e moltiplicava le forze, diventando sia leva, sia arma rivoluzionaria e terribile. Quando la divisione dei compiti e dei ruoli nei gruppi di ominidi ha cominciato a rendersi necessaria, hanno pian piano cominciato a nascere i mestieri, le professioni. Tutti contadini, una volta scoperta l'agricoltura, certo; e tutti soldati, quando diventava necessario combattere; ma poco alla volta si sarà resa necessaria qualche automatica correzione culturale, con alcuni individui destinati ad essere più contadini che soldati, altri più soldati che contadini; e poi certo con qualcuno destinato ai culti religiosi e qualcun altro diventato abbastanza potente (e prepotente) da aver chi lavorasse per lui. In questa primordiale suddivisione, non dev'esserci voluto molto prima che qualcuno diventasse uno specialista del legno. Perché i bastoni degli ominidi servivano ancora, e sempre più specializzati: lunghi o corti, appuntiti o piatti. E il legno non è solo rami secchi, ma tronchi grandi, buoni per costruire abitazioni, mobili, contenitori, strumenti. Perché il legno è trasformabile in quasi qualsiasi cosa, fin dai tempi più remoti. Il falegname è per forza uno dei mestieri più antichi: la sua bottega era – e in molti sensi è ancora – come l'antro magico di uno sciamano, in cui entravano tronchi e rami e ne uscivano tutti gli oggetti che la mente riusciva a immaginare.

È il falegname l'interprete principale della trasformazione, della prima produzione culturale della storia. Gli agricoltori governano le leggi della natura per ottenere il cibo, i cacciatori e i guerrieri moltiplicano la forza offensiva necessaria alla sopravvivenza, ma non producono manufatti. Sono le donne che tessono, i vasai che trasformano la terra in contenitori, i falegnami che mutano il legno in qualcosa di inaspettato i primi veri operatori culturali. E tra questi, i falegnami sono forse i soli a segnare la loro opera di arricchimento culturale con una firma volatile e indelebile: il grosso ramo che si trasforma in aratro o in palo da costruzione lascia gli scarti del lavoro del falegname a terra; pezzi di corteccia, rametti inutilizzabili, trucioli arricciati, e soprattutto segatura. La segatura è viva, ma nasce solo attraverso il lavoro: nasce in natura, ma non può assumere la sua propria identità se non passa attraverso il lavoro dell'uomo.

Merita rispetto, la segatura. Ne merita in maniera particolare, poi, da parte dei filosofi e dei matematici.

C'è una strana questione – verrebbe quasi da definirla ontologica – alle origini della matematica. La matematica non ha oggetti, perlomeno non ha oggetti reali, tangibili; e "oggetto" è, quasi per definizione, ciò che è constatabile, registrabile dai sensi, visto che significa "ciò che viene posto davanti". Viceversa, tutto l'universo matematico è formato da concetti mentali, da idee che sfuggono alla materia e al mondo fisico. Si può cercare quanto si vuole una retta, un numero, un cerchio, nel nostro mondo, senza avere la benché minima speranza di trovarli: perché le rette non hanno estensione, i cerchi non hanno spessore, i numeri non hanno sostanza; neppure i solidi, se sono perfetti e matematici, possono avere materia che li compongano. Ciò nondimeno, sembra del tutto impossibile essere iniziati al pensiero matematico, all'iperuranio totalmente immateriale della geometria, senza un lungo processo di avvicinamento che utilizzi a man bassa esempi materiali. Provate a spiegare a un bambino cosa sia "cinque" senza l'ausilio delle dita della mano, o di cinque arance, o comunque di cinque cose tangibili o visibili. Provate a fargli costruire mentalmente l'idea di "cerchio" senza cercare in giro un oggetto sufficientemente rotondo e mostrarglielo. La mente dei bambini è davvero meravigliosa, come dice Yoda, se in poco tempo riescono a estrarre l'idea pura di "tre" dopo aver visto per un certo numero di volte tre sassi, tre alberi o tre dita; e se riescono anche, forse con più lentezza ma con altrettanta determinazione, a cogliere l'essenza delle linee, le proprietà dei quadrati, l'assoluta e rigorosa perfezione dei cerchi attraverso la visione e il contatto con dei simulacri reali e tangibili. Per questo è così importante il disegno, per questo è così importante che sia il più preciso possibile. La geometria nasce forse davvero dalla necessità di ricostruire i confini dei campi egizi dopo le inondazioni del Nilo, ma è nei disegni dei Greci che comincia davvero a rivelare la sua potenza, armata solo di riga e compasso. Se il maggior contributo dei Greci nella matematica risiede davvero nell'essersi imposti la necessità della dimostrazione, non è immaginabile che tale conquista potesse mai essere davvero raggiunta senza il disegno geometrico.

Eppure, come sempre, la magia vera si opera nelle contaminazioni, nelle zone di confine. Il disegno, fatto con linee sottili ma comunque dotate di spessore, è già un compromesso tra i sensi – che di quello spessore hanno bisogno per riconoscere – e l'idea, che invece quello spessore nega e rimuove. Compromesso leggero e necessario, ma che deve compiere ancora un passo cruciale, per completare il ponte tra matematica e realtà. Il passo finale è quando il disegno assurge a progetto, e manifesta l'intenzione di entrare nel mondo reale: il disegno su carta si trasferisce sul legno, e gli attrezzi del falegname si preparano ad estrarre l'ideale platonico d'una figura geometrica per operare con socratica maieutica la nascita d'un oggetto. Un quadrato estratto dal legno non sarà mai matematicamente perfetto: avrà tre dimensioni invece di due, avrà lati non perfettamente rettilinei (non fosse altro che per l'impossibilità fisica di ridurre atomi e molecole a punti matematici) e certamente non perfettamente uguali, se misurati su scala microscopica; ma lo sarà abbastanza per i sensi e gli scopi degli esseri umani, che potranno usare, studiare e soprattutto toccare l'oggetto nato per rappresentare al meglio possibile l'idea matematica.

Oggetto che, qualunque esso sia, ancora oggi nasce molto spesso dal legno. La tecnologia progredisce: i disegni abbandonano la carta, i laboratori stanno cominciando a fare prototipi con altri materiali, per non parlare del luminoso futuro che aspetta le stampanti 3D; e queste sono buone notizie, senza dubbio. Ma si perderà, forse, un piccolo atto poetico: perché una tavola di legno che riporta su di sé il disegno delle linee dei tagli fa ancora riconoscere facilmente la matematica che sta per deciderne il destino: già si immagina che i denti della sega morderanno lungo quelle linee precise, con l'attenzione e la cura che quelle linee meritano, perché è in quelle linee che si nasconde tutta la geometria generatrice del futuro oggetto. Ed è proprio in quel momento che si celebra una sorta di sacrificio, nel vero senso etimologico del termine, quello di "atto sacro": la sega, strumento sacrificale nella nascita del nuovo oggetto matematico e tangibile, è guidata dal falegname officiante proprio sulle linee matematiche. E tanto più correttamente sarà guidata dalle linee, tanto più esattamente dovrà cancellarle, in una sorta di sublimazione che vede la matematica ideale immolarsi per consentire alla sua succedanea fisica di prendere forma. E cosa resta, poi, della matematica originaria? Dove si ritroverà poi l'idea iniziale delle linee, il concetto primigenio fermato sul legno dai tratti leggeri di matita, dopo tutto questo atto di nascita? È evidente e ovvio: nella segatura. Le linee matematiche sono tutte lì, sublimate nella segatura. La polvere viva generata dalla vita, dal lavoro, e dall'essenza ideale della geometria.

In inglese segatura si dice *sawdust*, polvere della sega: parola che si dichiara onestamente fin dall'inizio, sposando appunto *saw* (sega) e *dust* (polvere). Per quanto onesta e facile, a più di un redattore di Rudi Mathematici non era mai capitato di sentirla nominare, probabilmente per una conoscenza solo approssimata della lingua inglese, o per avere rubricato persino il termine italico "segatura" nell'ambito di uno slang tecnico abbastanza lontano dei propri campi professionali. Per fortuna, il 9 marzo 2012 l'arrivo di una mail firmata da qualcuno che aveva scelto ***Sawdust*** come allonimo, come nome di battaglia per rispondere ai quesiti della Prestigiosa Rivista, ha presto colmato la lacuna.

1 . *Sawdust, al secolo Sandro Vitucci*

A nascondersi dietro il nobile allonimo, scopriamo in fretta, è Sandro Vitucci, matematico e falegname; difficile capire quale delle due caratteristiche sia la prevalente, nella sua natura anfibia. Certo, il mestiere vero, la professione che lo vede muoversi tra Mondovì e Vicoforte, tra la provincia di Cuneo e quella di Torino (e anche fuori dal Piemonte) è quella di artigiano del legno; non per niente tra i primi contatti che stabilisce con RM ci sono progetti realizzati di particolari tavoli sostenuti da gambe intrecciate[1]. Ma è la natura matematica che è davvero sorprendente, per la redazione di Rudi Mathematici; o forse sarebbe più corretto dire "la sua natura geometrica", perché Sawdust va in brodo di giuggiole quasi esclusivamente per la geometria; o forse, ancor meglio – anche se un po' da presuntuosi – sarebbe dire "la sua natura *rudimathematica*", perché Sandro diventa subito matto per questo nostro giornalino.

L'espressione "essere più realista del re" non ci era ancora del tutto chiara, prima di conoscerlo. Per quanto tutti e tre i redattori di RM siano orgogliosi della loro creatura più o meno come una tigre è orgogliosa dei suoi tigrotti, la stupefacente sensazione che presto assale Alice, Rudy e Piotr è che l'entusiasmo di Sawdust per RM sia di diverse lunghezze superiore alla somma degli entusiasmi dei genitori dell'e-zine. A puro titolo di esempio: Sawdust non ha una connessione stabile, nel 2012, quindi scarica RM viaggiando tra posti pubblici, gratuiti o a pagamento; ma soprattutto tormenta parenti e amici, si connette, infila nelle porte USB e scarica lo scaricabile, lasciando ragionevolmente basiti coloro che gli concedono ospitalità di connessione. Anche perché nel 2012 RM è già vecchia di quasi quattordici anni, e ce n'è davvero tanta, di roba da scaricare.

Ci rivela subito di essere davvero molto, molto contento di aver il compleanno coincidente con quello del Gran Capo; un paio d'anni di differenza, d'accordo, ma giorno e mese[2] coincidono con matematica esattezza, e brillano accoppiati su entrambe le carte di identità. Comincia a mandare alla rivista disegni e soluzioni su ogni tipo di problema geometrico, e che ci siano evidenti sintomi di dipendenza diventa chiaro quando, oltre a cercare e risolvere i problemi dei numeri di RM, si lancia a collezionare, studiare e risolvere anche quelli che popolano i "Calendari di RM"; quando poi, scavando in archivio, trova in RM121 (Febbraio 2009) un bell'elenco di "*sangaku*", tradizionali problemi giapponesi di geometria, è felice come un bambino la mattina di Natale.

Dall'altra parte dello schermo, tre paia d'occhi sono sempre più stupiti e incuriositi. Si incrociano mail (Sandro è perennemente stupito che la redazione risponda alle sue mail, manco fossimo la redazione del Giornale di Crelle o dell'Enciclopedia Galattica), e inevitabilmente nasce presto l'idea di incontrarsi di persona, se non altro perché la

[1] La copertina di RM161, Giugno 2012, mostra molto meglio di quanto potremmo fare a parole l'oggetto (reale) che rispondeva al dubbio (ideale) della redazione. Assai più cara alla redazione è la copertina di RM166, Novembre 2012.

[2] Il 13 Marzo, per coloro che avessero la ventura di non saperlo.

regione di residenza è la stessa, anche se i chilometri che separano le rispettive tastiere non sono pochissimi. L'occasione più fruttuosa d'incontro è probabilmente quella in cui i redattori con residenza italiana decidono di muoversi alla volta di Mondovì, in un giorno d'ottobre del 2012.

Il luogo d'incontro è a Vicoforte, nel piazzale davanti alla basilica della Natività di Maria Santissima: ma in realtà, se pure di pellegrinaggio si tratta, non è pellegrinaggio religioso. Non si fa in tempo a salutarci, che Sandro racconta di quando, proprio in quella piazza, fu interrogato da due turisti venuti da lontano, forse addirittura stranieri, che gli chiesero: "Ma è davvero questa la chiesa che ha la più grande cupola del mondo?", al che lui sospirò e rispose: "Beh, sì… ma solo a patto che alla parola 'cupola" facciate seguire anche l'aggettivo 'ellittica'…".

2 . *La più grande cupola ellittica del mondo*

La giornata ottobrina scorre proprio come se si fosse dentro le pagine di un numero della Prestigiosa Rivista Italiana di Matematica Ricreativa: cercando e trovando stelle a sette punte nel pavimento della basilica, cercando di individuare i fuochi nelle ellissi della cupola e della lanterna, saltando a Mondovì per visitare il bellissimo Museo della Stampa, e perfino in un birrificio artigianale (ma solo per dovere d'ospitalità, che Sandro beve solo acqua).

La gita merita davvero, tant'è che è ancora ben stampata nella memoria: ma è necessario precisare che se i due terzi (pigrissimi) della Redazione si sono messi in viaggio non è solo per ricerca di diletto; la causa principale è solo la gretta avidità.

Entrambi si ricordano ancora di un vecchio pezzo di Martin Gardner, in cui il sommo divulgatore matematico parlava di sezionamenti di poligoni; a farla da padrona, nella loro memoria, è un geniale sezionamento – opera probabilmente di Sam Loyd – di un quadrato in quattro soli pezzi; pezzi che possono ricomporsi in modo da formare un triangolo equilatero. Forse perché letto in età ancora verde, forse perché la cosa è oggettivamente meravigliosa, sta di fatto che Rudy e Piotr si ricordano benissimo quell'articolo, compresa anche la nota a piè di pagina in cui Gardner dichiara che un suo lettore americano aveva notato che i quattro pezzi del sezionamento potevano essere incernierati, di modo che "chiudendoli" in un senso formavano il quadrato, mentre chiudendoli nel senso opposto componevano il triangolo. Forse se era parlato in un numero precedente di RM, forse la meraviglia era stata comunicata a Sawdust per mail, non lo ricordiamo. Quello che è impossibile dimenticare è che un bel giorno lui scrive in redazione che, a tempo perso, tanto per divertirsi, con materiale di scarto… insomma, con un sacco di illegittima modestia, il tavolino lui l'aveva costruito, e voleva regalarcelo.

Per questo siamo qui, in questa domenica d'ottobre 2012: Sawdust ce lo avrebbe anche portato, ma il minimo che si poteva e doveva fare è andarlo a prendere.

Anche perché così si riesce a vedere l'ambiente certamente più meraviglioso di tutta la gita: il laboratorio di Sandro, la falegnameria, il posto dove, insieme a Sawdust regna nobile e sovrana anche lei, sawdust, la segatura.

3 . *Il laboratorio di Sawdust*

Forse l'atmosfera è la stessa in tutti i laboratori. Forse non c'è poi troppa differenza tra lo stanzino di un calzolaio e i sotterranei del CERN. È lecito pensarlo, perché la sensazione è comunque densa di una sorta di sacralità laica, sempre e comunque. Un laboratorio dove si costruiscono cose è forse più simile ad una sala parto che a una catena di montaggio: ogni oggetto ha una storia precisa, che l'abitante del laboratorio conosce e ricorda; ogni strumento rivela il suo carattere, le sue peculiarità e le sue particolarità, perché è credibile che una pialla abbia comunque una specie di "carattere" diverso dalla sua sorella gemella, che ogni cacciavite trovi posto nella mano in una sua maniera precisa, identitaria.

Sandro racconta dei diversi intrecci studiati per le gambe dei suoi tavoli; racconta di aiutare diversi ragazzi con i compiti di matematica, racconta di dare una mano, sia in senso fisico sia intellettuale, ad un pensionato che frequenta. Racconta di divertirsi tanto con i problemi, con la geometria euclidea, e di come gli piaccia provare, di tanto in tanto, ad applicare qualche proprietà incontrata nei testi di geometria per applicarla in costruzioni di legno.

Sta lì e lavora, mentre noi guardiamo il laboratorio come fosse un posto quasi alieno: anni di lavoro fatto seduti alla scrivania, lustri di prodotti che al massimo si misurano in kilobyte non preparano abbastanza alla meraviglia di tutte quegli oggetti toccabili, misurabili in centimetri, chilogrammi, spanne e millimetri.

E poi, finalmente, ce lo mostra: il materiale di scarto, il gioco fatto nei ritagli di tempo, la sciocchezza che ci voleva regalare. Il tavolino quadrato che la magia della geometria, alleata con la magia della falegnameria, trasforma a piacere in tavolino triangolare. Una sciocchezza, dice Sandro; la realizzazione di un sogno che ci accompagna dall'adolescenza, pensiamo noi.

Il tavolo lascia Mondovì diretto a nord, e continuerà in seguito lungo la stessa direzione fino a raggiungere Zurigo. Noi lo fotografiamo, lo mettiamo in copertina sul successivo numero di RM, e continuiamo a meravigliarci di come sia curioso, e bello, trovare chi riesca a rendere tangibili i giochi matematici.

Scopriamo poi, nei giorni immediatamente seguenti e anche in quelli più vicini a questi, che i "giocattoli" che Sawdust costruisce con lo "scarto", come dice lui, sono molti. Gabriella insegna, e a scuola ci sono menti giovani e pronte facili ad essere accese dalla curiosità, dalla matematica e dal gioco; anche non necessariamente geometrico, peraltro. Il paradosso di Monty Hall, di cui su queste pagine si è spesso parlato, è in pieno territorio del Calcolo delle Probabilità, ovvero quanto di più distante, forse, dalla geometria euclidea, se si vuole restare nel campo della matematica. Ma un falegname ha più libertà, e forse anche più potere di un geometra. Sawdust costruisce un giocattolo anche per Gabriella: un giocattolo con tre porte, dietro le quali sarà possibile sistemare simulacri di capre e simulacri di macchine sportive, in modo che si potrà vedere – e toccare, di nuovo toccare – quello che i libri raccontano con parole e disegni.

4. *Il paradosso di Monty Hall secondo Sawdust*

Tra i redattori di RM e Sawdust si stabilisce in breve una sorta di relazione basata sulla reciproca meraviglia: con noi che non riusciamo a capacitarsi del suo entusiasmo e delle sue capacità di *Homo faber*, e lui che continua a meravigliarsi e ad apprezzare l'e-zine, parlandone a tutti i suoi conoscenti come se si trattasse del giornale più bello del mondo.

5. *Sawdust, il suo giubbotto, e un GC molto soddisfatto*

Ci lusinga con atteggiamenti da vero fan: continua a mandare delle bellissime soluzioni corredate da disegni, e ogni volta che può – e spesso può – viene ad assistere alle nostre conferenze e presentazioni. Arriva perfino a creare un giubbotto apposta per queste occasioni speciali: sulla schiena applica un'enorme logo di Rudi Mathematici inserito in un ettagono. Il sette è un sempre stato un numero affascinante, per Sandro. Nello scorso numero della rivista, l'appena passato RM224, abbiamo pubblicato una sua soluzione. Alice, nel redigere le "Soluzioni & Note", commentava che è sempre un piacere quando Sawdust torna a farsi sentire. Certo non si aspettava, nessuno di noi si aspettava che nel numero successivo gli avremmo dedicato il "compleanno", il pezzo d'apertura della rivista.

E forse la cosa sorprende anche chi si ritrova a leggere queste righe, questo compleanno che con tutta evidenza non è un compleanno, ma un saluto. Questo è il posto che riserviamo ai grandi della matematica, per parlare un po' dei grandi uomini, quasi sempre del passato, che hanno reso grande la nostra amata scienza: e Sandro sarebbe certo il primo a stupirsi, a scandalizzarsi nel leggersi qua sopra.

Però lui se ne è andato; lo ha fatto senza preavviso, senza rumore, nel sonno. Forse il modo migliore possibile, al punto che in alcune zone d'Italia chiamano questa "la morte dei santi". E ci ha sorpreso essere stati tra i primi a saperlo, perché molti dei suoi amici si sono premuniti di dircelo, di avvertirci, anche se non ci conoscevano affatto. Perché, dicevano, Sandro ci teneva così tanto, a Rudi Mathematici… ne parlava sempre, ed era così contento quando vedeva il suo nome sulla rivista. Forse, pensavano loro, gli sarebbe piaciuto essere ricordato sul giornale. Forse sì, pensavamo anche noi.

E potevamo salutarlo con un saluto fatto apposta per lui, fuori dalle rubriche di RM. O ricordarlo su Facebook, o nelle Newsletter, lasciando in pace i "compleanni", che raccontano le vite dei grandi della scienza.

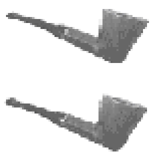
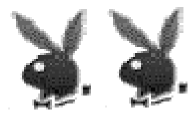
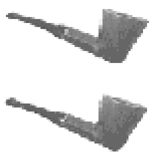
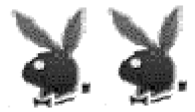
Solo che abbiamo pensato che anche noi avevamo forse un po' bisogno di ricordare chi siamo, e a chi parliamo. Siamo tre dilettanti che giocano con la matematica, che scrivono sciocchezze per gente che si diverte con la matematica. La nostra fortuna è quella di aver incontrato parecchie persone, davvero tante, che si divertono anche loro con la matematica. E Sandro le rappresenta tutte: è proprio perfetto, per rivestire il ruolo dell'amante della matematica giocosa.

Al pari della sua nobile omonima, la segatura, Sawdust è davvero un simbolo, per noi, e ci sentiamo perfettamente rappresentati da lui. E i simboli sono persino più importanti dei campioni, degli eroi, dei geni che proviamo a cantare ogni mese. Quindi, speriamo davvero che a lui avrebbe fatto piacere, vedersi raccontare – raccontare quel poco che di lui conosciamo – e sentirsi salutare dalle pagine di questo giornalino che è davvero niente più di un giornalino, ma che lui considerava alla stregua d'una grande pubblicazione.

E naturalmente andremo avanti, un po' tristi perché non ce lo potremo più immaginare a leggerci: siamo seguaci della razionalità, non confidiamo molto nelle previsioni di altre vite ed esperienze. Però nulla ci vieta di giocare anche con le illusioni, per prenderci in giro ancora una volta, e ridere del mondo e di noi stessi. Pertanto, come dicevamo all'inizio, se vi dovesse capitare di vedere piovere della segatura dal cielo, avvertiteci.

Non si può mai dire, no?

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Pericolosamente vicino a Collatz			
Zappa & Spada!			

2.1 Pericolosamente vicino a Collatz

Vi ricordate tutti la *Congettura di Collatz*, vero? Prende il nome da *Lothar Collatz* (...nato a luglio.... Doc, prendi nota) ed è anche nota come "problema del $3n+1$" o "Congettura di Ulam" (aprile. Doooc!), o con una serie di altri nomi che non staremo ad esaminare, pena il riempimento dell'agenda del nostro vergatore di compleanni.

La riepiloghiamo qui in poche righe: partite con un numero qualsiasi; se è pari, dividete per 2; se è dispari, moltiplicate per tre e aggiungete uno. E poi ricominciate da capo.

La "Congettura di Qualcuno Qui Sopra" sostiene che prima o poi vi ritrovate un "1", e quindi parte un ciclo (che, tra l'altro, dovrebbe essere l'unico ciclo della serie)[3].

No, non vogliamo la dimostriate: non ci è ancora riuscito nessuno[4]. Ma ci è parso simpatico esplorare le "vicinanze" di questo teorema, con qualcosa di più facilmente affrontabile.

Rudy e Doc si sono sfidati ad un simpatico gioco: viene generato un numero ("grossino") a caso, e attribuito al giocatore "1", il quale ha una serie di possibilità:

1. Se il numero è *pari*, a scelta:
    1. Sottrai 1 dal numero, oppure
    2. dimezza il numero
2. Se il numero è *dispari*, a scelta:
    1. Sottrai 1 dal numero, oppure
    2. sottrai 1 dal numero e dimezza il risultato.

Il gioco finisce quando qualcuno raggiunge il valore zero (e il "qualcuno" vince); adesso, come al solito, abbiamo qualche domanda.

Supponiamo di partire da 1000: ...ma vince il primo o il secondo giocatore, se entrambi sono perfettamente logici? E con un generico N?

In merito, supponiamo di scegliere a *caso* (distribuzione uniforme) un intero tra 1 e N: come variano le probabilità di vincita dei due giocatori, se N tende a infinito[5]?

[3] In realtà, le congetture di Collatz sono due: la congettura *debole* dice: "prima o poi, finisci in un ciclo", quella *forte* dice "l'unico ciclo esistente contiene l'uno".

[4] Se comunque volete provarci, e ce la fate, e avete meno di 35 anni, citateci nel discorso di accettazione della Fields.

Con calma, eh?

2.2 Zappa & Spada!

Ciao Davide! Eravamo sicuri di prenderti, con questo titolo: adesso, risolvi il problema.

Qualche riga di spiegazione per i *non sapenti* (nel senso di quelli che non sanno chi è Davide): il Nostro scrive (tra le altre cose), quella che fuori di qui si chiama *Low-Fantasy*, con una particolare predisposizione per le storie ambientate in uno scenario più o meno contadinesco: per opposizione alla *Cappa & Spada*, ha inventato il bellissimo termine che dà il titolo a questo problema. E siccome scrivere cose del genere già è compicato, le scrive in un posto dove i bit per arrivare hanno bisogno della guida alpina, da lui soprannominato l'*Astigianistan*[6].

Ora, se "Zappa & Spada" non vi piace, liberi di inventarvi qualcosa di più italicamente connotato (chi ha detto *Cincinnaterie*? Come dicono in *Ammeriga*, filate a lavarvi la bocca con il sapone); comunque, il nostro eroe, dopo aver sfidato draghi, affettato zombie e sventrato negromanti, torna al paterno podere e logicamente, essendo un po' stanco, non ha molta voglia di mettersi a *ruscare*[7]: quindi, vorrebbe minimizzare l'azione con il *bastone stupido* (definizione di Heinlein: bastone con lama di vanga da una parte e uno stupido dall'altra): il compito della giornata è quello di tracciare tre aiuole e zappare le aree comuni ad almeno due di esse.

Le aiuole sono tutte e tre circolari e di ugual raggio, e hanno un punto in comune a tutte e tre; quello che ci interessa, nell'ordine, è:

Quale configurazione minimizza la somma delle aree comuni a due aiuole?

Quale sistema di notazione possiamo inventarci, per descrivere le configurazioni?

Doc, affascinato da "Astigianistan" e trovandosi suppergiù nella stessa situazione come connessione alla Rete e invasione di esseri soprannaturali malvagi, ha costruito il termine *Viskestan*[8], che puzza di scopiazzatura lontano un miglio: riuscite a inventarvi qualcosa di meglio, che esprima lo stesso concetto?

3. Bungee Jumpers

Data una permutazione dei numeri 1, 2, …, n, definiamo *fluttuazione totale* la somma di tutte le differenze prese in modulo tra due numeri consecutivi della permutazione.

Calcolate, in funzione di n, il valore massimo della fluttuazione totale tra le permutazioni dei numeri 1, 2, …, n.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Ottobre.

Il tempo passa alla sua velocità e lo sappiamo bene. Ogni volta che qualcuno menziona il tempo, quello scandito dall'orologio, non quello atmosferico che – per quanto ottimo argomento di conversazione – tende ad essere piuttosto tedioso, è sempre per connotarne gli eccessi e le mancanze: troppo lento, troppo veloce, troppo poco, troppo. Il tempo passa troppo lento quando ci si annoia, troppo veloce quando ci si diverte e ne abbiamo sempre troppo poco, forse perché ne sprechiamo troppo.

Il tempo di tutto questo se ne fa un baffo. Si tende a relativizzare ogni cosa alla nostra percezione: noi per esempio scriviamo ogni mese queste belle righe, e misuriamo il tempo

[5] Attenzione: non ci risulta calcolata la formula *in funzione di N*, ma vorremmo sapere cosa succede se il numero è scelto a caso tra 1 e infinito. Insomma, lavorate sull'estremo, non sul caso particolare. Poi, se volete provarci, vale lo stesso punto della nota precedente...

[6] Insomma, sta in provincia (*molto* provincia) di Asti. I nomi sin qui utilizzati hanno il *TradeMark* di Davide: noi li usiamo a scopo di citazione, se decidete di usarli a scopo commerciale litigate con lui.

[7] Come ritengono opportuno oggi tradurre le pagine locali di alcuni giornali, piemontese per "lavorare duro".

[8] Come ricorderete, abita vicino a Vische (TO).

in unità-RM. Il mese scorso abbiamo pubblicato l'ultima soluzione di ***Sawdust*** su queste pagine, lui l'aveva inviata il mese prima, e questo mese non vedrà che abbiamo parlato di lui. Siamo andati a cercare negli archivi e ci sembra che la prima soluzione pubblicata del nostro falegname preferito sia del 2012, in RM159.

Scanditelo come volete, questo tempo, passa come vuole. In unità-RM abbiamo misurato arrivi e partenze, nuove avventure, RMers che entravano in università, diventavano dottorandi, professori, genitori, professionisti di ogni tipo, pensionati. Qualcuno ci è stato più vicino di altri ed è dura pensare che non ci scriverà più, ma anche per quelli che ci hanno scritto una sola volta o anche mai, per tutti quelli che leggono solo il compleanno o solo i problemi, per tutti quelli che leggono solo la newsletter, ecco qui un'altra unità-RM.

4.1 [223]

4.1.1 Un classico moraleggiante

Avevamo promesso di riprendere questo problema, per le soluzioni che abbiamo lasciato indietro il mese scorso:

> *Otto coppie si trovano per una cena, e si dispongono attorno ad un tavolo rotondo. Decidono di sedersi in modo tale che nessuno abbia al proprio fianco il rispettivo partner e vi sia un'alternanza di genere tra un posto e l'altro. Quante possibili disposizioni esistono? E per N coppie? E se avessimo gruppi di tre invece di coppie?*

Come detto, in RM224 comparivano le soluzioni di ***Alberto R.***, ***Alberto***, e ***trentatre***. Vediamo ora la versione di ***Valter***:

> Chiamo D le donne e U gli uomini e li numero da 1 a N (p.e. D1 è la partner di U1).
>
> Chiamo i posti a sedere, accoppiando U con D, da P1 a PN (p.e. U1D2… potrebbe essere la prima accoppiata, cioè P1, della tavolata). Per contare le disposizioni possibili parto sempre con U1 in P1. Non dovrebbe cambiare nulla nel conteggio se fisso un primo commensale in quanto:
>
> - la disposizione del tavolo è circolare
>
> - *"la disposizione dell'altra volta, ma spostati di uno in senso orario" non vale*
>
> Ho cominciato con 4 commensali per vedere se individuavo una qualche regolarità. Per prima cosa distinguo dove si piazza D1 per conteggiare assieme casi simili. D1 può sedersi in P2 oppure in P3 (altrimenti affiancherebbe U1 a destra o a sinistra). Se D1 si piazza in P2 in P1 come D ci posso mettere 2, 3 oppure 4.
>
> In P2 a questo punto si può sedere uno dei 2 U rimanenti (U1 l'ho già sistemato e, chiaramente, non può sedersi il partner di D seduta in P2).
>
> Accomodati questi commensali, i restanti 4 (le accoppiata in P3 e P4) hanno un'unica scelta. Totale delle possibili disposizioni con D1 in P2: 3*2=6.
>
> Rimangono da conteggiare le disposizioni con D1 in P3. Con un ragionamento simile (che vi risparmio) sono anch'esse 6. Il totale disposizioni per N = 4 risulta quindi 6 + 6 = 12.
>
> Con N = 5 le cose si complicano. Se piazzo D1 in P2 posso utilizzare il conteggio anche per D1 in P4 essendo posizioni simmetriche. La faccio breve:
>
> - 4 D in P1, 3 U in P2, 3 U in P3 e a questo punto devo di nuovo distinguere:
>
> - se U in P3 è il partner della D in P1: 2 D in P3 (quindi conteggio 1 volta per tale U)
>
> - se U in P3 non è il partner della D in P1: 3 D in P3 (conteggio 2 volte per i 2 U rimanenti).
>
> Totale per D1 in P2: (4*3*2) + (4*3*3*2) = 96.
>
> Un discorso analogo per D1 in P3 mi dà un totale di 120 disposizioni. Il totale disposizioni per N = 5 risulta quindi 96*2 + 120 = 312. Allego[9] un programma che

[9] [*Lui lo allega alla mail, noi ce lo teniamo, ovviamente. NdAlice*]

calcola le disposizioni possibili e le stampa (basta variare il numero dei commensali nella variabile C in testa). C'è anche un ciclo di generazione di disposizioni random per verificare che le ho previste tutte.

L'esecuzione è quasi immediata e mi fornisce questo numero di disposizioni:

- 9.600 per N=6
- 416.880 per N=7
- 23.879.520 per N=8.

Mi paiono valori plausibili in quanto se togliamo gli U/D nelle disposizioni otteniamo numeri MOD(N+1) di N*2 cifre. Tali numeri devono soddisfare le condizioni richieste cioè (allego le disposizioni stampate dal programma per N = 4, 5, 6):

- la prima cifra è 1
- due cifre uguali non devono essere affiancate nemmeno se una all'inizio e una alla fine
- devono essere presenti 2 volte tutte le cifre da 1 a N
- le cifre uguali devono stare una in P pari e l' altra in P dispari.

Forse c'è un modo per passare da N–1 a N ma non l'ho trovato.

Bene, c'è ancora spazio per la soluzione di ***Camillo***, che ci ha scritto in due puntate, ecco la prima:

"Quante sono le disposizioni possibili?" Diversi milioni.

Quella che segue vuole essere un'indicazione alle nostre coppie di amici per non creare confusione (cosa di cui noi italiani siamo maestri) sul modo di sedersi pur lasciando una certa libertà di scelta.

Visto che matematico non sono direi di cominciare prima di tutto con la sistemazione delle 8 signore ma siccome sarà proibito spostarsi sia in senso orario che antiorario di uno o più posti prendo una signora a caso nel gruppo e la chiamerò Presidentessa (odio i termini Ministra, Sindaca (non sono un giornalista) figuriamoci Presidenta) e la faccio sedere dove più Le aggrada. Poi sistemo le 7 rimanenti signore attorno a lei in senso orario o antiorario ad una sedia i distanza tra una e l'altra. Le possibili permutazioni di posto per queste 7 signore è 5040 (7!) e detto questo con una cena a settimana ci vogliono 96 anni e più, quindi passeranno la loro vita cenando, spero almeno che abbiano l'accortezza di cambiare ristorante ogni tanto.

Per quanto riguarda la sistemazione dei signori l'algoritmo da utilizzare è questo: si mettano in fila con l'ordine che preferiscono ed il primo della fila si sistema accanto alla moglie del signore che lo segue nella fila e cosi fino ad esaurire la fila e tutti si trovano sistemati accanto a 2 signore che non sono la loro moglie.

Naturalmente la settimana dopo e poi tutte quelle seguenti la Presidentessa si siede dove vuole e le altre signore (con una nuova permutazione) si siedono attorno a lei rispettando sempre il senso scelto la prima volta.

P.S. sto affrontando il duro problema dei tre generi per ora ho solo deciso di chiamarli: maiuscolo, minuscolo e accentato.

Bene, come potete immaginare la prossima missiva contiene la soluzione per tre generi:

Come un ciclista spompato ho inviato le mie note al problema fuori tempo massimo, un giorno prima della pubblicazione di RM224. Mentre riprendo fiato ne approfitto per leggere quelle ivi pubblicate.

Non mi sembra che i 3 lavori abbiano centrato il problema dove si dice che non valgono le rotazioni ma non si accenna alle riflessioni che sono senz'altro diverse disposizioni delle tavolate e quindi valide. Il tutto è partito da qui: https://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/menage/menage/menage.html

> Come già fatto presente da "trentatre" si può trovare questo: http://oeis.org/wiki/M%C3%A9nage_problem però la sequenza che ci interessa e la: http://oeis.org/A094047 che riporta 0, 0, 2, 12, 312, 9600, 416880, 23879520, 1749363840, 159591720960, 17747520940800, ecc.
>
> I primi risultati corrispondono esattamente a quelli trovati dal mio programma di forza bruta. Quelli oltre il miliardo non li ho provati visto il tempo eccessivo di elaborazione.
>
> Ho poi brutalmente affrontato il problema dei 3 sessi che ho deciso di chiamare: maiuscolo, minuscolo e accentato.
>
> Naturalmente considero non valide le tavolate dove membri della stessa famiglia o dello stesso sesso siedano vicini. Partendo da 2 famiglie ho trovato questi numeri: 2, 24, 2508, 500064 e poi mi sono fermato. àeAèaE, aèAeàE sono le 2 tavolate per *N*=2.
>
> Se a qualcuno potessero servire in allegato i file di testo per *N*=3 ed *N*=4.
>
> Ma poi perché fermarsi a 3 sessi per cui consideriamo delle famiglie composte da: padre, madre, figlio e figlia.
>
> Dove vicini di tavolo non possono essere dei membri della stessa famiglia e neppure individui dello stesso genere. Con 2 famiglie non ci sono soluzioni, con 3 128 e con 4 79488. Con 5 famiglie si devono analizzare più di 31000 miliardi di permutazioni; lascio. A manina ho trovato questa AìeÀEòiÈIàoÌOèaÒ tra le innumerevoli tavolate possibili.
>
> Anche qui in allegato il file con la disposizione per 3 famiglie.

Bene, gli allegati non sappiamo come farli entrare nell'impaginazione, così li lasciamo alla vostra immaginazione, sono in ogni caso liste ottenute per forza bruta, come lo stesso ***Camillo*** ci ha scritto. Ci piacerebbe continuare a contare i generi, ma le capacità combinatorie di Alice, che qui scrive, sono molto limitate. Passiamo quindi ai problemi di settembre.

4.2 [224]

4.2.1 Excusatio non petita

Un bel problema geometrico:

> *Disegnare due aiuole a forma di n-agoni regolari, l'uno circoscritto all'altro; il poligono esterno deve avere un'area doppia rispetto a quella del poligono interno. Esaminare tutti i casi per n validi, per poi scegliere quello esteticamente migliore. Quanti sono? E quali?*

Siccome ci immaginavamo di trovare subito soluzioni con milioni di disegni e di doverne valutare l'estetica, partiamo subito con la soluzione di ***Valter***, che di disegni non ne ha proprio:

> La soluzione dovrebbe essere il quadrato che ne circoscrive uno i cui vertici toccano quello esterno a metà dei suoi lati (i 4 triangoli ottenuti dall'incrocio delle diagonali di quello interno sono congruenti ai 4 costruiti sui vertici di quello esterno).
>
> Riguardo alle espansioni…: non sono andato oltre la terza dimensione (poi diventava troppo per me). Ecco il poco che ho ottenuto (se non sbaglio come al solito …):
>
> - il triangolo regolare inscritto dovrebbe essere ¼ di quello esterno (si verifica sempre contando i triangoli che si formano)
>
> - un cubo si può comporre con un tetraedro regolare più altri 4 con 3 facce uguali (quello regolare ha i 6 lati sulle diagonali delle facce del cubo, gli altri una faccia con lati 3 diagonali e le altre una diagonale e due lati)
>
> - ruotando all'estero le 6 piramidi quadrate che si incontrano al centro di un cubo ottengo un dodecaedro con facce a rombo (l'area del dodecaedro quindi è doppia di quella del cubo; cercando in internet ho visto che si chiama dodecaedro rombico)

- un tetraedro regolare si può comporre con 4 di lato dimezzato sui vertici e un ottaedro regolare centrale; vedi tetraedro di Sierpinski (l'ottaedro ha metà del volume del tetraedro composto poiché i 4 tetraedri piccoli ne hanno volume = 1/8 avendone il lato = 1/2).

La soluzione che viene ora è di ***Alberto R.***:

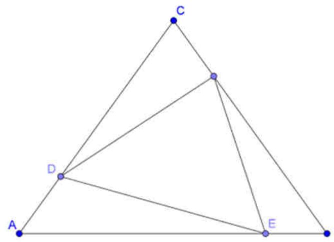
Un poligono regolare inscritto in un altro poligono simile ha area minima quando i suoi vertici sono i punti medi dei lati dell'altro poligono. In tal caso il cerchio circoscritto al poligono piccolo coincide col cerchio inscritto nel poligono grande.

Perché le aree dei due poligoni stiano nel rapporto 1 a 2 occorre che le rispettive misure lineari stiano nel rapporto 1 a radice di 2. Ma in un poligono regolare di N lati il rapporto ρ tra i raggi dei cerchi circoscritto e inscritto è:

ρ < rad(2) per N>4, quindi non ci sono soluzioni;

ρ = rad(2) per N=4 quindi c'è la soluzione banale con i vertici di un quadrato sui punti medi dei lati dell'altro;

ρ > rad(2) per N=3, quindi con la soluzione di figura.



Posto AC =1 si ha:

AE = DC = 1 – AD

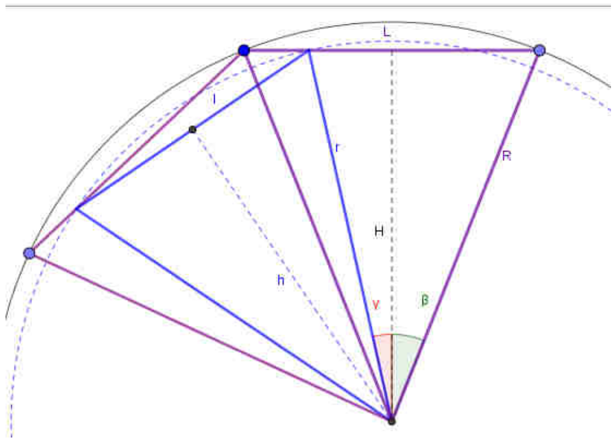
DE = 1/rad(2) affinché l'area del triangolo piccolo sia la metà del grande

AD = [3 – rad(3)] / 6 per il teorema di Carnot sul triangolo ADE

Bene, direi che i nostri primi due solutori non sono esattamente d'accordo. Vediamo ***Emanuele***:

Sinceramente non sono sicuro di aver azzeccato il significato di "circoscritto" (e so che non mi direte mai se ho fatto centro) per quanto riguarda l'inserimento di un n-agono in un altro n-agono. Ad ogni modo con "circoscritto" (secondo me n-agonoscritto sarà pure cacofonico ma probabilmente più preciso) ho inteso che una volta disegnato un n-agono regolare, si possa disegnare un altro n-agono regolare all'interno (o al massimo sovrapposto) al primo semplicemente indicando un punto in un lato ad una certa distanza da un vertice, per esempio quello destro, determinare gli omologhi punti sugli altri lati e quindi unirli. In questa maniera otterremo un n-agono regolare con lo stesso numero di lati di quello esterno ma con un area che al massimo potrà essere uguale a quella dell'n-agono più esterno (caso limite in cui i punti scelti corrispondo con i vertici).

Essendo gli n-agoni regolari, essi sono composti da n triangoli isosceli, quindi la mia disquisizione si limiterà a studiarne due appaiati, ben sapendo che questi avranno altri n–2 gemelli con i quali forma il nostro n-agono.



Se prendiamo due triangoli isosceli appaiati componenti il nostro poligono regolare (nella figura i due di colore viola) e disegnano il triangolo isoscele che andrà a comporre il poligono inscritto (nella figura quello in celeste), possiamo indicare delle misurazioni utili:

n = numero di lati dei poligoni
L = lato del poligono "Grande" (Esterno)
l = lato del poligono "piccolo" (Interno)
H = altezza del triangolo del poligono "Grande"
h = altezza del triangolo del poligono "piccolo"
R = Raggio del cerchio in cui è inscritto il poligono "Grande"
r = Raggio del cerchio in cui è inscritto il poligono "piccolo"
β = Angolo compreso tra R e H
γ = Angolo di rotazione del triangolo "piccolo" rispetto a H
A = Area Poligono "Grande"
B = Area Poligono "piccolo"

Da semplici considerazioni possiamo calcolare β, il quale altri non è che la metà dell'angolo al centro avente come corda il lato del poligono esterno, quindi:

$\beta = (2*\pi/n)/2 = \pi/n$

usando il teorema del coseno possiamo scrivere:

$L^2 = R^2+R^2-2*R*R*\text{Cos}(2*\beta)$

$L = \text{Radice}(2*R^2(1-\text{Cos}(2*\beta)))$

avendo i due poligoni gli stessi lati, hanno anche gli stessi angoli, quindi:

$l = \text{Radice}(2*r^2(1-\text{Cos}(2*\beta)))$

Inoltre sono vere le seguenti uguaglianze:

$h = r*\text{Cos}(\beta)$
$H = R*\text{Cos}(\beta)$
$H = r*\text{Cos}(\gamma)$

dalle ultime due possiamo ricavare:

$r = R*\text{Cos}(\beta)/\text{Cos}(\gamma)$

Per continuare la disquisizione definiamo A e B:

A = $n*(L*H)/2$
B = $n*(L*H)/2$

Al fine della risoluzione del problema dobbiamo trovare i possibili valori di n per cui è possibile avere l'uguaglianza: A/B=2. Quindi facendo alcune semplificazioni possiamo scrivere:

$(L*H)/(l*h) = 2$

Espandendo:

$(\text{Radice}(2*R^2(1-\text{Cos}(2*\beta))) * R*\text{Cos}(\beta)) /(\text{Radice}(2*r^2(1-\text{Cos}(2*\beta))) * r*\text{Cos}(\beta)) = 2$

e semplificando otteniamo :

$(\mathrm{Cos}(\gamma)/\mathrm{Cos}(\beta))^2 = 2$

Quindi, per avere un poligono regolare inscritto in un altro poligono regolare (con lo stesso numero di lati) che abbia l'area equivalente alla metà dell'area del poligono esterno, dobbiamo fare in modo che:

γ = ACos(Radice(2)*Cos(β))
γ = ACos(Radice(2)*Cos(π/n))

Ora la funzione ACos (Arcocoseno) è definita solo se il suo argomento è compreso tra –1 e 1, possiamo scrivere:

–1 ≤ Radice(2)*Cos(π/n) ≤ 1

che ho risolto scomponendo nel sistema:

(1) –1 ≤ Radice(2)*Cos(π/n) ≤ 0 (Coseno < 0)
(2) 0 ≤ Radice(2)*Cos(π/n) ≤ 1 (Coseno > 0)

proseguendo (1):

–1/Radice(2) ≤ Cos(π/n) ≤ 0

cioè:

$\pi/2 \leq \pi/n \leq (3/4)*\pi$

la (2):

$\pi/2 \geq \pi/n \geq \pi/4$

Quindi abbiamo:

$(3/4)*\pi \geq \pi/n \geq \pi/4$

da cui, finalmente:

$4 \geq n \geq (4/3)$

Quindi la scelta dell'aiuola nel caso in cui vogliate un rapporto A/B = 2 si riduce a scegliere un quadrato o un triangolo equilatero. A meno che non dobbiate costruire l'aiuola nel paese di Flatlandia, in tal caso forse è possibile disegnare un poligono con soli 2 lati.

Se vogliamo generalizzare possiamo porre A/B=m in tal caso ci troveremmo ad avere che:

γ = ACos(Radice(m)*Cos(π/n))

e quindi a dover risolvere la disequazione:

–1 ≤ Radice(m)*Cos(π/n) ≤ 1

A questo punto le *excusatio* si sono sentite in abbondanza e direi che siamo pronti per passare al secondo problema… a meno che non vogliate riprendere il discorso il mese prossimo!

4.2.2 Strani conigli

Meraviglioso caso di riproduzione "strana" secondo Rudy:

> *Avete un numero infinito di gabbie quadrate, messe una vicino all'altra; ogni gabbia comunica con le quattro vicine (ortogonali, quindi le vicine diagonali non sono "vicine"), e tutte le gabbie sono vuote o meglio sono tutte piene di zerigli . Messo un coniglio in una gabbia, questo si riproduce con i quattro zerigli vicini, lasciando un coniglio in ogni gabbia (di quelle attorno, dove trova lo zeriglio); anche gli zerigli si riproducono con i loro vicini, lasciando zero conigli nelle gabbie limitrofe (ivi inclusa quella dove c'era il coniglio originale, che sparisce)*
>
> *Dopo n passi, quanti conigli abbiamo? E quanti saranno nella gabbia centrale (ha l'aria di un posto affollato...)? Ma i numeri non-zerigli, hanno qualche caratteristica particolare?*

Pronti? Avete anche voi pensato a una strana forma di life? Oppure avete veramente imparato a generare *zerigli*? Anche qui cominciamo con ***Valter***:

> Indico con N i successivi passaggi. Parto con N=1 per 4 gabbie con un coniglio attorno a una vuota. In "geometria del taxi" i passaggi li rappresento c.s.:
>
> - considero un quadrato di N*2 + 1 gabbie di lato
>
> - ci inscrivo un rombo di lato N + 1 gabbie.
>
> Su un lato del rombo i conigli nelle gabbie saranno:
>
> - in successione N su X binomiale con X da N sino a N/2 (N/2 è arrotondato all'intero successivo se N dispari)
>
> - le rimanenti gabbie avranno la successione in ordine inverso (se N pari la successione inversa parte con X = N/2 + 1).
>
> Le successioni "N su X binomiale" sono:
>
> - numeri triangolari se N = 3
>
> - numeri tetraedrici se N = 4
>
> - numeri pentatopici se N = 5
>
> - ... (se si può: l'analogo del triangolo nelle successive dimensioni).
>
> Nelle diagonali che affiancano il lato del rombo i conigli sono:
>
> - nella prima (cioè quella che affianca il lato del rombo): zero
>
> - nella seconda: quelli sul lato * secondo valore in successione
>
> - nella terza: 0
>
> - nella quarta: quelli sul lato * terzo valore in successione
>
> - ... (itero sino a completare tutto il rombo).
>
> Chiaramente la somma totale dei conigli sarà = 4^N (ad ogni passaggio si moltiplicano per 4 i conigli precedenti).
>
> (Forse ...) chiarisco meglio con un esempio in cui assumo N=5. Il rombo dovrebbe essere (spero in una indentazione decente)[10]:

```
                 1
             5   0   5
        10   0  25   0  10
    10   0  50   0  50   0  10
  5  0  50   0 100   0  50   0  5
1  0  25   0 100   0 100   0  25   0  1
  5  0  50   0 100   0  50   0  5
    10   0  50   0  50   0  10
        10   0  25   0  10
             5   0   5
                 1
```

> Totale conigli: 1*4+5*8+10+25*4+50*8+100*4 = 1.024 (cioè 4^5). Successione conigli su uno dei lati: 1 5 10 10 5 1 (5 su X binomiale con X da 5 sino a N/2=3 e poi a scendere).
>
> Successioni sulle diagonali successive alternate alle vuote:
>
> 5 25 50 50 25 5 (quella sul lato * 5)
>
> 10 50 100 100 50 10 (quella sul lato * 10)
>
> ... (cioè quella sul lato moltiplicata per il successivo valore).

Direi che la situazione è abbastanza chiara. Vediamo anche qui la versione di ***Emanuele***:

> Ora voi ci avete visto delle stagere affiancate le une alle altre con all'interno degli animaletti molto prolifici, ma non appena avevo terminato la lettura del vostro problema io ci ho visto un bellissimo automa cellulare a stati infiniti, la cui crescita non ha fine. Proprio per questo motivo la prima cosa che mi è venuta in mente è farlo crescere tramite un semplice programma che lo ha fatto sviluppare fino alla sedicesima generazione (mi sembrava sufficiente).
>
> La prima cosa che ho notato è che nella cella centrale (quando diversa da 0) c'erano sempre quadrati perfetti e così nel "cardo" e nel "decumano", quindi ho provato a

[10] *Anche noi… quello che è arrivato (che non è poi male) lo abbiamo trasformato in figura. [NdAlice]*

colorarli per vedere l'effetto che fa, gli zeri con sfondo giallo e i quadrati perfetti in rosso, tutto il resto in bianco.

Da un'unica cella rossa quindi si è sviluppato un organismo che contiene sempre celle rosse negli assi verticale e orizzontale, anche se per qualche generazione appaiono altri quadrati perfetti che in maniera simmetrica si aggiungono agli assi. L'organismo cresce sempre in maniera perfettamente simmetrica rispetto al centro, inoltre mi sono accorto di alcune proprietà di cui gode, ma iniziamo a rispondere a qualche domanda.

Quanti zerigli ci sono in tutto all'ennesima generazione?

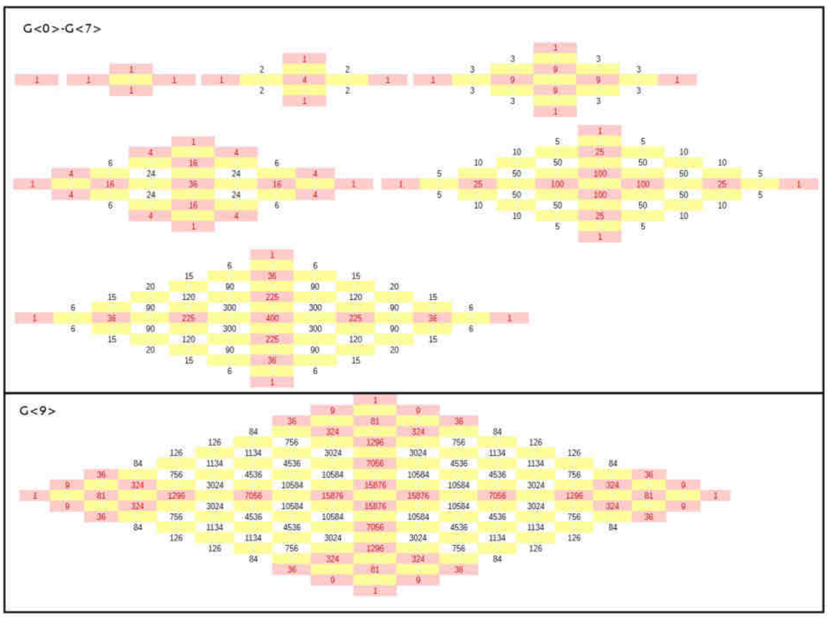
Come fece Sierpinski, nell'aneddoto delle valigie, inizierò a contare le generazioni da 0, quindi, indicando con $G<n>$ l'ennesima generazione con n cha va da 0 a infinito, abbiamo:

$G<0> = 1$
$G<1> = 4*G<0>$
$G<2> = 4*G<1>$
.....
$G<n> = 4*G<n-1>$ (per $n > 0$)

quindi esplodendo ricorsivamente le varie generazioni arriviamo al risultato:

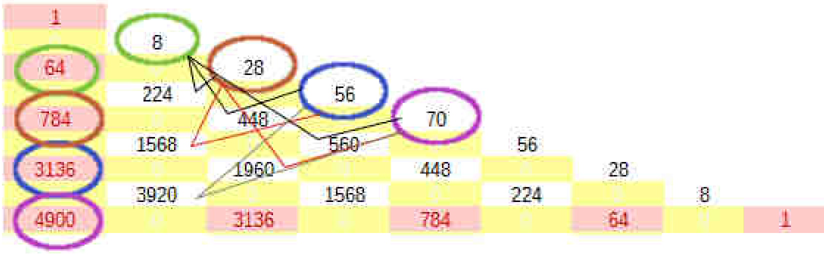
$G<n> = 4^n$

0 1
1 4
2 16
3 64
4 256
5 1024
6 4096
7 16384
8 65536
9 262144
10 1048576
11 4194304
12 16777216
13 67108864
14 268435456
15 1073741824



Per quanto riguarda il calcolo della cella centrale non sono riuscito ad analizzarne matematicamente lo sviluppo, ma ho cercato un po' grezzamente di trovare il modo di risalire al valore cercando delle proprietà intrinseche dell'automa.

Come accennato prima mi sono accorto che il centro dell'automa contiene 0 (nel caso di generazioni con n dispari) o un quadrato perfetto (nel caso di generazioni pari). Inoltre se analizziamo un semi-asse centrale qualsiasi (essendo l'automa simmetrico non serve prendere in considerazione tutto) si può notare che laddove vi è un valore questi è anch'esso un quadrato perfetto e la sua radice la possiamo trovare ai confini dell'automa seguendo la diagonale (idealmente a 45 gradi), questo vale anche per la casella centrale.



Nella figura ho cercato di evidenziare questo fatto prendendo la G<8> e mettendo dei cerchi con lo stesso colore per indicare le radici, sul lato diagonale esterno, e i corrispettivi quadrati, sull'asse verticale.

Sempre nella figura ho cercato di evidenziare un'altra proprietà dell'automa, moltiplicando tra di loro i numeri nella diagonale esterna, possiamo calcolare tutti i valori "interni" (seguendo le linee che uniscono i vari cerchi colorati troviamo il risultato del loro prodotto nella cella dove si spezza la linea), quelli in bianco per capirci. Ed è proprio quando ho notato questa cosa (eh sì... ce lo avevo sotto gli occhi ma ero cieco)... ho notato che la diagonale esterna altro non è che lo sviluppo dei coefficienti di espansione di un binomio all'ennesima potenza. Quindi alla fine l'automa non è altro che un triangolo di Tartaglia (o di Pascal ... dipende come sempre dalla nazionalità) vivente. Quindi a questo punto mi basta calcolarmi, nel caso di generazioni con n pari, il coefficiente binomiale appropriato, cioè quello centrale, ed elevarlo al quadrato.

Quindi se volessi sapere quanti sono gli zerigli al centro alla generazione n=10 (quindi undicesima generazione) mi trovo i vari coefficienti nel triangolo di Tartaglia:

1-10-45-120-210-252-210-120-45-10-1

prendo quello centrale (252) e lo elevo al quadrato: 63504.

Ora per evitarmi di consultare Tartaglia, posso utilizzare il calcolo con i coefficienti binomiali ad esso associati.

Alla fine il calcolo sarà $(n\ k)^2$ (n sopra k al quadrato) = (n!/(k!*(n–k)!)), dove n è il numero di generazione da prendere in considerazione e k indica il termine centrale dello sviluppo, che corrisponde a:

$k = (n/2)+1$

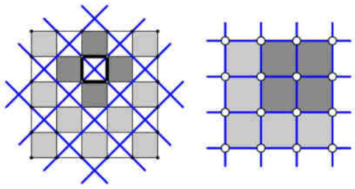
Quindi nel nostro caso n=10 abbiamo k=6:

(10 6) = 210 che elevato al quadrato dà 63504 come ci aspettavamo.

Non posso dare nessuna dimostrazione matematica delle mie osservazioni, spero solo siano sufficientemente corrette.

Bene, le deduzioni le avete lette, vediamo adesso qualche formula e dimostrazione. Arriva ***trentatre***, spero che siate pronti:

Indico con S_n , $n = 0,1,2,3,...$ i successivi schemi (gabbie) del problema. In ogni schema le caselle vuote e quelle con i numeri sono alternate come le caselle bianche e nere di una scacchiera, e si possono togliere le bianche con la trasformazione di fig. 1, dove le diagonali che dividono le bianche tracciano una nuova scacchiera che ruotata (a destra) mostra solo le nere, con le bianche (incroci della griglia) sostituite con un pallino. Dato S_n i numeri di S_{n+1} si ottengono, anziché dalle quattro caselle adiacenti alle bianche, dalle quattro attorno al pallino.

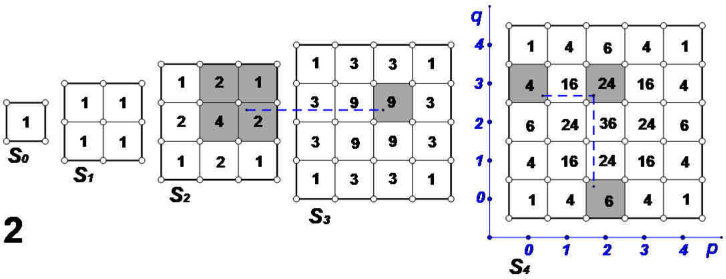


1

In fig. 2 il risultato, dove ogni S_n comprende $(n+1)^2$ caselle e $(n+2)^2$ pallini, ognuno dei quali diventa una casella in S_{n+1}. Se $k_n(p,q)$ è il valore della casella di S_n indicata con le coordinate (p,q) di fig. 2 si ha

[1] $k_{n+1}(p,q) = k_n(p-1,q-1) + k_n(p,q-1) + k_n(p-1,q) + k_n(p,q)$

- nb. si intende S_n bordato con un anello di caselle vuote.



2

Segue da [1] che i bordi di S_n sono le righe del triangolo di Tartaglia, cioè i coefficienti binomiali costruiti con

[2] $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

I valori interni, in ogni S_n, sono dati dal prodotto dei valori sui bordi (come nella tavola pitagorica).

Dato che $\binom{n}{0} = 1$, <u>per tutti i valori</u> di S_n si ha quindi

[3] $\boxed{k_n(p,q) = \binom{n}{p} \cdot \binom{n}{q}}$

- che si dimostra per induzione; infatti vale per i primi S_n, e sostituendo [3] nella [1]

$$k_{n+1}(p,q) = \binom{n}{p-1} \cdot \binom{n}{q-1} + \binom{n}{p} \cdot \binom{n}{q-1} + \binom{n}{p-1} \cdot \binom{n}{q} + \binom{n}{p} \cdot \binom{n}{q}$$

- applicando [2] a ogni coppia di prodotti

$$k_{n+1}(p,q) = \binom{n+1}{p} \cdot \binom{n}{q-1} + \binom{n+1}{p} \cdot \binom{n}{q} = \binom{n+1}{p} \cdot \binom{n+1}{q}.$$

Da [3] si ricavano alcune proprietà degli S_n, p.es. la somma di tutti i valori di S_n vale 4^n, la somma alternata (con valori +/– secondo le caselle bianche/nere) è nulla, la somma di una diagonale vale $\binom{2n}{n}$, ecc.

Inoltre, dalla identità $\binom{n}{p} / \binom{n-1}{p-1} = n/p$ applicata alla [3] si ricava, per $p,q > 0$

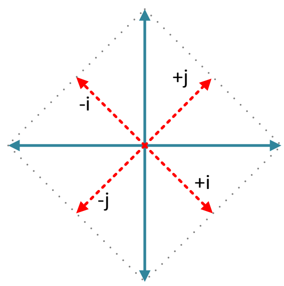
[4] $$\boxed{\frac{k_{n+1}(p,q)}{k_n(p-1,q-1)} = \frac{(n+1)^2}{pq}}$$

- che mette in relazione le singole caselle di due S_n consecutivi, e di fatto sostituisce la [1].

Certo, sappiamo da chi arrivano le dimostrazioni rigorose, per esempio ***Franco57***:

Si nota che il problema può essere visto come un calcolo di percorsi: in una certa casella, dopo n passi, ci sono F_n stranigli se tanti sono i percorsi che la raggiungono partendo dalla casella centrale ed eseguendo n spostamenti di una casella nelle quattro direzioni a destra, a sinistra, in alto o in basso.

Infatti, per arrivare in una casella bisogna essere transitati da una delle 4 affiancate, ognuna delle quali a sua volta ha il suo numero di percorsi con un passo in meno, perciò occorre sommarli per ottenere tutti i percorsi. In formule sarebbe: $F_n(x,y) = F_{n-1}(x-1,y) + F_{n-1}(x+1,y) + F_{n-1}(x,y-1) + F_{n-1}(x,y+1)$. Inoltre per giungere alla casella centrale con percorsi di lunghezza 0 è impossibile eccetto che se siamo già nella casella centrale, quindi 1 "percorso" in questo caso, come nelle condizioni iniziali del quesito.



Da questa interpretazione è chiaro che dopo n riproduzioni i conigli diventano 4^n, perché tanti sono i percorsi di lunghezza n.

Esiste una stupenda soluzione geometrica per calcolare il numero di percorsi: basta scomporre ogni movimento base nelle due componenti ortogonali ***i*** e ***j*** rosse in figura.

Se i percorsi che seguono il reticolo delle coppie di interi cioè sono ammessi $(x,y) \to (x+1,y)$ $(x,y) \to (x-1,y)$ $(x,y) \to (x,y+1)$ $(x,y) \to (x,y-1)$ abbiamo $i = \left(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $j = \left(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$

Per capirci, andare a est di una unità ha lo stesso risultato di andare a nordest e contemporaneamente a sudest quanto basta ($\frac{\sqrt{2}}{2}$ volte). Ognuno dei quattro movimenti verdi corrisponde ad una diversa di combinazione di segni $+$ e $-$ per le componenti ***i*** e ***j***. Ogni nostro percorso fatto nelle direzioni verdi di lunghezza *n* corrisponde sempre ad una diversa combinazione di lunghezza *n* nelle due direzioni ***i*** e ***j*** e viceversa.

La cosa bella è che ogni passo ha sempre una componente ***i*** (negativa o positiva) e una componente ***j*** (negativa o positiva) e che i percorsi di lunghezza *n* da un punto ad un altro in una dimensione sono facili da calcolare. Ad esempio per tornare nel punto di partenza in $n = 2k$ passi basta scegliere quali dei *2k* passi quali sono i *k* positivi, i percorsi sono quindi $\binom{2k}{k}$.

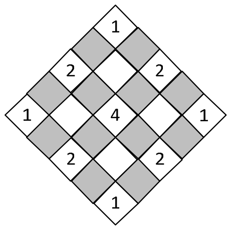
Vista l'indipendenza delle due direzioni ***i*** e ***j*** per calcolare il numero nostri percorsi basta moltiplicare i percorsi delle due componenti ottenendo $\binom{2k}{k}^2$ coniglietti nel punto centrale.

La formula generale, divisa per $n = 2k$ pari o $n = 2k+1$ dispari trovata con questo metodo (risparmio i noiosi dettagli dovuti al cambio sistema di riferimento) sarebbe, chiaramente con (0,0) il punto centrale,

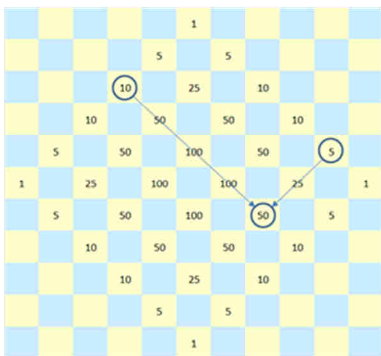
$$F_{2k}(x,y) = \binom{2k}{k+\frac{x-y}{2}}\binom{2k}{k+\frac{x+y}{2}}$$ se $x+y$ pari (uno zeriglio altrimenti),

$$F_{2k+1}(x,y) = \binom{2k}{k+\frac{x-y+1}{2}}\binom{2k}{k+\frac{x+y+1}{2}}$$ se $x+y$ dispari (uno zeriglio altrimenti).

Una estensione a più dimensioni viene naturale se pensiamo ad un problema equivalente: nelle gabbie quadrate la riproduzione avviene da una gabbia alle 4 in diagonale, come nella figura a lato, dopo 2 cicli riproduttivi.



Analogamente in 3 (o più) dimensioni, in un reticolo di gabbie cubiche (o ipercubiche), ogni gabbia supponiamo si riproduca con le 8 (o 2^d) celle con le quali condivide un vertice. In questo caso semplicemente $F_{2k}(0,0) = \binom{2k}{k}^3$ (o elevato alla *d*) sempre perché ogni percorso diverso è la combinazione di 3 (o *d*) percorsi diversi mono-dimensionali e perpendicolari tra loro.



Infine, tornando alle 2 dimensioni e rappresentando le gabbie in formazione "standard", un'altra conseguenza carina di questa proprietà geometrica è che se si esaminano i valori per un certo numero di passi (5 nell'esempio in figura), il valore ai bordi, che è un coefficiente binomiale come non è difficile provare, determina il valore nelle altre celle semplicemente per moltiplicazione: occorre spostarsi in diagonale sulle caselle gialle al bordo e moltiplicarle.

E con questo chiudiamo, il tempo di queste S&N è concluso. Grazie a tutti e alla prossima!

5. Quick & Dirty

Mostrare che ogni poligono può essere tassellato con pentagoni convessi.

6. Pagina 46

La media dei numeri tra 1 e n è:

$$M = (n+1)/2.$$

Sia a_1, a_2, ..., a_n una qualsiasi permutazione del nostro insieme; la fluttuazione totale della permutazione vale:

$$\begin{aligned}
\text{¿}\sum_{i=1}^{n-1} |a_{i+1}-a_i| &= \sum_{i=1}^{n-1} |a_{i+1}-M+M-a_i| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \left(|a_{i+1}-M|+|M-a_i|\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(|M-a_{i+1}|+|M-a_i|\right) \\
&= |M-a_1|+2|M-a_2|+\ldots+2|M-a_{n-1}|+|M-a_n| \\
&= -|M-a_1|-|M-a_n|+2\sum_{i=1}^{n} |M-a_i| \\
&= -|M-a_1|-|M-a_n|+\sum_{i=2}^{n} |M-i|
\end{aligned}$$

Dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che i termini $|M-a_i|$ non sono altro che i termini $|M-i|$ in un qualche altro ordine.

La diseguaglianza al secondo passaggio è stretta se entrambi i termini a_i, a_{i+1} sono entrambi dalla stessa parte di M (siano essi maggiori o minori di M); se questo non succede mai, la diseguaglianza diventa un'eguaglianza. Notiamo inoltre che il termine:

$$2\sum_{i=1}^{n} M-i$$

è *indipendente dalla permutazione*.

Quindi, per massimizzare la fluttuazione totale, dovremmo scegliere i valori a_i alternativamente dai due lati di M, onde ottenere l'uguaglianza *[Questo è sempre possibile, in quanto esistono un pari numero di valori* 1, 2, …, n *a sinistra e a destra di M]*; inoltre, dovremo fare in modo che $|M-a_1|+|M-a_n|$ sia il minimo possibile.

Se n è dispari, M è un intero, e la somma qui sopra è minimizzata per $a_1 = M$ e $a_n = M+1$; di converso, se n è pari, la nostra somma è minimizzata per $a_1 = M - 1/2$ e $a_n = M + 1/2$ (o viceversa). In entrambi i casi, il valore minimo che può assumere la nostra somma è 1, e quindi il valore massimo che può raggiungere la fluttuazione totale è:

$$-1+2\sum_{i=1}^{n} |M-i|$$

Quindi, se n è pari:

$$\begin{aligned}
-1+2\sum_{i=1}^{n}|M-i| &= -1+4\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n+1}{2}-i\right)\\
&= -1+4\cdot\left(\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\right)\\
&= -1+\frac{n^2-1}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(n^2-3\right)
\end{aligned}$$

mentre, se n è dispari:

$$\begin{aligned}
-1+2\sum_{i=1}^{n}|M-i| &= -1+4\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n+1}{2}-i\right)\\
&= -1+4\cdot\left(\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)\right)\\
&= -1+4\left(\frac{n^2}{4}-\frac{n^2}{8}\right)\\
&= \frac{1}{2}n^2-1
\end{aligned}$$

7. Paraphernalia Mathematica

Siamo d'accordo che chiamare "seconda tappa" una puntata vicina al record di *sequel* dei PM rappresenta uno slittamento della frizione numerica non da poco. Ma qui abbiamo intenzione di riferirci alla conclusione del pezzo del mese scorso, che era:

> *Bowers, però, non si ferma qui: ma questa ce la teniamo per la prossima puntata.*

Ecco, questa è la "prossima puntata". Allacciate le cinture, che si vola alto.

7.1 La legge dei numeri VERAMENTE grandi [6] – Seconda tappa.

Dicevamo che Bowers ha cercato di stringere la sua notazione a bra e ket, utilizzando un approccio che dovrebbe esservi noto: come al solito, procediamo per gradi:

$$[a] = a$$

$$[a, b] = [a, b, 1] = a+b$$

$$[a, b, 2] = a*b$$

$$[a, b, 3] = a^b$$

...e sin qui, niente di trascendentale, tranne il fatto che Bowers li chiama *vettori*. E a noi sembra proprio un bel nome.

$$[a, b, c] = [a, b, c, 1] = a<c>b$$

$$[a, b, c, 2] = a<<c>>b$$

Il che accorcia le notazioni. Anche qui è possibile dare una sequenza di regole per la "semplificazione" dei numeri (e qui, la regola 4 esiste): come al solito, quella più generica è l'ultima e vanno, come sempre, applicate dalla prima in avanti (nel senso che si applica sempre "la prima che ha validità"):

Per i vettori di uno o due elementi, sommate i termini, ottenendo uno "scalare".

1. Se la regola 1 non vale ed esistono degli 1 in coda, semplicemente eliminateli.
2. Se le regole 1 e 2 non valgono e la seconda componente è un 1, eliminate tutti i termini tranne il primo.
3. Se le regole 1, 2 e 3 non valgono e la terza componente è 1:
$$[a, b, 1, d] = [a, a, [a, b-1, 1, d], d-1]$$
4. Se tutti gli elementi sono maggiori di 1:
$$[a, b, c, d] = [a, [a, b-1, c, d], c-1, d]$$

Quello che ci sembra interessante è che il primo numero tende a "sopravvivere" sino alla fine (non esistono regole per farlo diminuire, tranne la 1), mentre in base alle diverse regole cominciate a lavorare sulla seconda componente: la quarta sembra un po' ignorata, e infatti per cominciare a lavorare su di lei bisogna aspettare che valga 1 la terza componente, quando potete applicare la regola 4; si noti che la regola 4 può essere applicata istantaneamente anche al vettore che fa da terza componente, ottenendo la "torre:

$$[a, b, 1, d] = [a, a, [a, b-1, 1, d], d-1] = [a, a, [a, a, [a, b-2, 1, d-1], d-2], d-1] = \ldots$$

Posto che vogliate acquisire familiarità con questi oggetti, vi lasciamo qualche esercizietto (con la soluzione, tranquilli):

$$[2, 2, 2, 2] = 4$$

$$[3, 2, 1, 2] = 27$$

$$[3, 2, 2, 2] = 3<27>3$$

Notare che per l'ultimo abbiamo dovuto usare la "prima" notazione di Bowers, che come numero da scrivere veniva "grossino".

Ma "quanto" sono grandi, questi numeri? ***Charles Bird*** nel 2006 è riuscito a dimostrare che, se $a>2$, $b>1$, $c>0$, $d>1$, allora:

$$[a, b, c, d] > a \to a \to a \to \ldots \to (b-1) \to (c-1)$$

dove, in *Notazione di Conway a catena di frecce*, abbiamo d ricorrenze del termine a ad inizio catena.

Insomma, un robusto lavoro di compattazione.

Logicamente, a questo punto potete cominciare a giochicchiare per il *Sevagram*[11] mettendo funzioni di Ackerman e Moser da tutte le parti nel vettore di Bowers, ma in questo caso vi perdereste il meglio.

Infatti, il Nostro ha ripreso le regole che abbiamo dato prima e le ha "leggermente" modificate: le prime tre restano invariate, ma

4. Se nessuna delle regole 1, 2 e 3 è applicabile e la terza componente vale 1: Definiamo le variabili a, b, **S**, d e **R** in modo tale che il vettore di origine sia esprimibile come [a, b, **S**, 1, d, **R**], dove a e b sono i primi due elementi del vettore, **S** è un vettore[12] di uno o più 1; d è il primo elemento maggiore di 1 e **R** è la parte restante del vettore: sia ora **S'** un vettore composto di termini pari ad a della stessa lunghezza del vettore **S**: il vettore originario viene espresso allora come [a, a, **S'**, [a, b–1, **S**, 1, d, **R**], d–1, **R**].
5. Se nessuna delle regole 1, 2, 3 e 4 è applicabile, il termine [a, b, c, d, **R**] diventa, per sostituzione del secondo elemento, [a, [a, b–1, c, **R**], c–1, **R**]

Siamo abbastanza sicuri di aver fatto un po' di errori formali nella scrittura dei vari vettori, ma questo nasce dal fatto che abbiamo optato per una notazione secondo noi più chiara: tutti i caratteri che noi abbiamo indicato in grassetto, Bowers li indica utilizzando la notazione vettoriale (minuscola, per di più...). Insomma, non è semplicissimo, e i calcoli "in discesa", qui, sono lunghetti.

Quello che si nota, una volta superate le difficoltà della notazione di Bowers, è che le funzioni sono sempre definite in modo *ricorsivo*: trovate una funzione, ci giocate un po' sin quando il numero dei simboli (tipo $f(f(f(f(2))))$, per intenderci) comincia a diventare eccessivo, e a questo punto definite una nuova funzione, con la quale ricominciate da capo a far di conto... e avanti in questo modo. Se notate, è esattamente quanto abbiamo fatto sinora, e la cosa è particolarmente evidente nel simbolo di Bowers: definizione dei vettori a uno e due elementi, poi il terzo elemento inizia a definire una "sequenza" di applicazioni di una data operazione, il quarto elemento aggiunge un modo per accorciare la notazione, e poi inseriamo al fondo stringhe di lunghezza arbitraria... Insomma, siamo sempre allo stesso punto: quando non ce la facciamo più con un metodo, cerchiamo una forma abbreviata per scriverlo. Il che è esattamente quanto ha fatto un nostro antenato quando si è accorto che piuttosto che scrivere a+a+a+a+a era più semplice scrivere a*5.

Proviamo a fare un passo avanti.

Visto che definire le funzioni in realtà non è altro che un'operazione, definendo un metodo standard per definire le nuove funzioni, potremo *astrarre il processo di definizione delle funzioni*, e definire una (nuova) funzione basata sul processo di definizione funzionale.

In sostanza, questo diventa un secondo livello di astrazione: esattamente come l'aritmetica è un'*astrazione algoritmica del contare*, la definizione delle funzioni diventa un'*astrazione algoritmica della meccanica dell'aritmetica*. Il processo che definisce automaticamente le funzioni è allora un'*astrazione* di questo livello.

Poco chiaro? Bene, scendiamo dal vertiginoso toboga numerologico e ripartiamo dalle basi.

L'idea è di avere una grammatica **G** costituita da **S** (finito) simboli e da una serie di regole ben definite che spieghino come si possano costruire delle *parole*[13]: una grammatica che dovreste conoscere ha, come simboli, l'insieme (S=15):

{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , + , * , ^ , (,)}

[11] Vi ricordiamo che, tra le altre cose, in sanscrito sta anche per "il cortile della fattoria".

[12] Lo indichiamo con parentesi quadre, ma quando "andate a scriverlo" nel vettore originario le togliete, evidentemente. Altrimenti, vale 1.

[13] Il testo che stiamo seguendo usa *strings*, ma ci pare di ricordare dalle nostre letture di Chomsky che in italiano lo si sia sempre tradotto con *parole*. Poi, se volete usare *stringhe*, amici come prima.

E una serie di regole quali ad esempio “aprite tante parentesi quante ne chiudete” o “ogni volta che in una parola compaiono due o più operatori, mettete delle parentesi” (questo, anche se ci allunga le parole, ci permette di risolvere quei fastidiosissimi problemi di precedenza in un colpo solo).

Adesso, facciamo un po’ di conti.

Con la nostra grammatica **G**, per ogni intero N esiste un insieme di numeri E_N che può essere specificato attraverso la combinazione di N simboli della nostra grammatica utilizzando correttamente le regole che ci siamo dati; l’insieme è finito e ha al più S^N elementi[14], visto che queste sono le combinazioni di N elementi da un insieme: siccome l’insieme E_N ha un numero finito di elementi, questo avrà un massimo, che chiamiamo $m(N)$.

Adesso, definiamo $m(N)$ come una nuova funzione (attenzione: *non fa parte di* **G**) in grado di fornirci questo massimo valore per un dato N nella grammatica **G**: questa funzione ha l’interessante caratteristica di *crescere almeno alla stessa velocità di qualsiasi funzione in G*: la prudenza matematica impone di dire “almeno alla stessa velocità” in quanto se le funzioni che generano il massimo valore (passateci il termine) “sono simili”, allora la velocità è proprio quella. Esempio? Esempio.

$$m(3) = 9\text{^}9$$

$$m(7) = 9\text{^}(9\text{^}9)$$

$$m(11) = 9\text{^}(9\text{^}(9\text{^}9))$$

A questo punto, dovreste riconoscere un nostro vecchio amico, la “quartificazione” (indicata tra parentesi quadre, per non confonderci): se N = 4X+3, per X numero naturale, $m(\mathrm{N}) = m(4\mathrm{X}+3) = 9[4](\mathrm{X}+2)$.

Adesso, una domanda facile (vi ho anche dato un aiutino): [4] è una regola di **G**? Spero abbiate risposto “no”, almeno per il fatto che le parentesi quadre non appartengono al dizionario (sì, l’aiutino era quello).

A questo punto, inventandoci un simbolo un po’ meno balordo per l’operazione (ad esempio, “*a*”), posiamo scrivere quanto sopra come:

$$m(N) = 9a(\mathrm{X}+2)$$

E, con gli opportuni adattamenti, inserirla come parola in una grammatica **G’**. Dovreste aver capito il trucco: in **G’** posso costruire una funzione *m*’ per cui:

$$m'(3) = 9a9$$

$$m'(7) = 9a(9a9)$$

$$m'(11) = 9a(9a(9a9))$$

e quindi costruire l’ “operazione più veloce”, eccetera, eccetera, eccetera...

Insomma, le cose, vedendole “da fuori”, sembrano un po’ più semplici di come apparivano prima.

Forse non la prossima volta, ma prima o poi arrivano i castori.

Rudy d’Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[14] Se non vi è chiaro “al più”, pensate al fatto che ogni parentesi aperta ve ne “costa” sicuramente un’altra chiusa; o al fatto che 2+2 = 2*2, quindi avete due parole per esprimere lo stesso concetto.