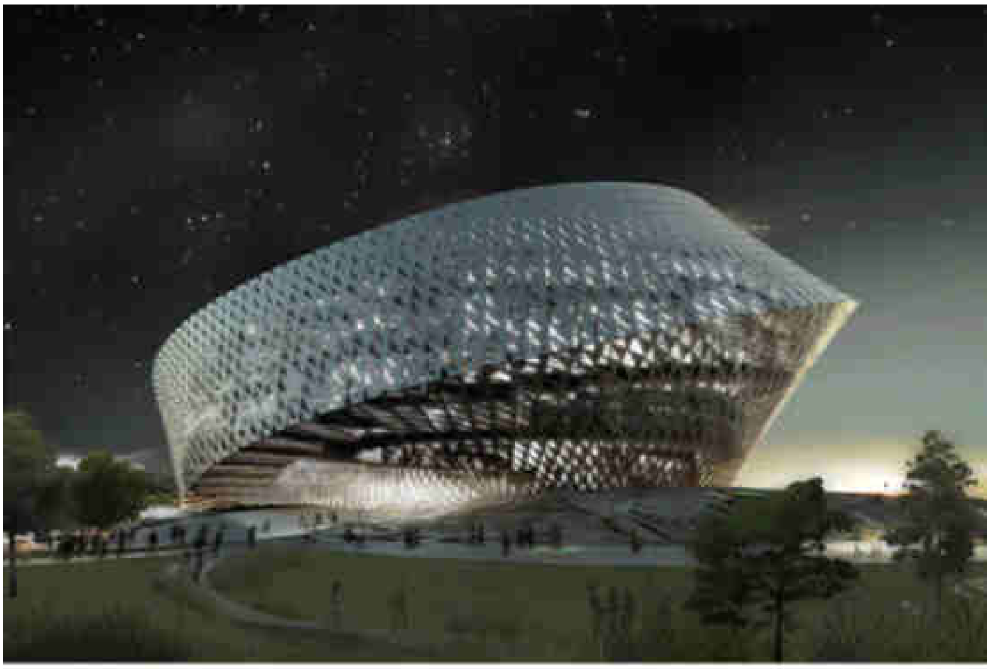
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 222 – Luglio 2017 – Anno Diciannovesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM220 ha diffuso 3'196 copie e il 23/07/2017 per Google eravamo in 41'000 pagine.

Ci dichiariamo colpevoli: abbiamo, nel tempo, perso quasi tutti i dati relativi all'oggetto riprodotto in copertina, del quale ricordiamo solo tre cose: (1) Sì, è a forma di Nastro di Möbius. (2) È una biblioteca. (3) È in Kazakhistan. Se qualcuno passa da quelle parti, ci fornisce qualche notizia?

1. Lancia omeopatica

"Una medesma lingua pria mi morse,
sì che mi tinse l'una e l'altra guancia,
e poi la medicina mi riporse;
così od'io che solea far la lancia
d'Achille e del suo padre esser cagione
prima di trista e poi di buona mancia."
(Dante Alighieri, Divina Commedia.
Inferno, XXXI, versi 1-6)

Nei cinema abbondano i supereroi.

Uomini ragno e torce volanti, ciechi invincibili e donne invisibili, uomini lupo e mutanti di tutti i tipi. Si potrebbe pensare che questo dipenda da un certo grado di crisi del cinema, o quantomeno di un sensibile cambio, anzi di un preciso abbassamento, dell'età media degli spettatori, ma ne dubitiamo. Le ragioni potranno essere molte e diversissime, ma resta il fatto che la stragrande maggioranza dei supereroi che infestano gli schermi cinematografici hanno visto la luce molto tempo fa, sulla carta dei fumetti: si fa quasi fatica a trovarne di più giovani di mezzo secolo, e questo dovrebbe bastare a dimostrare che la voglia di eccezionalità non è certo un evento recente.

Quello di cui è continuo il bisogno, fin dalla notte dei tempi, è di storie e di meraviglia. Sono due ingredienti distinti, ma vanno così spesso insieme che è facile confonderli. "Papà, raccontami una storia" è una delle primissime frasi di senso compiuto che i cuccioli d'uomo imparano a pronunciare; e già loro, i bambini, richiedono storie complicate, distanti dall'esperienza quotidiana. Ci vogliono maghi, fate, orchi e animali parlanti; e sì che sono ancora così piccoli che fanno esperienze nuove e insolite ogni giorno.

Gli adulti, poi, non sono affatto da meno. Certo, i gusti si affinano, le richieste implicite agli autori di storie diventano più selettive, ma rimangono forti le esigenze di storia e di meraviglia. Anche senza eroi che sanno volare o bacchette magiche, il protagonista deve essere in qualche modo eccezionale, fosse anche solo "eccezionale nella sua ordinarietà". L'esperienza che il fruitore della storia deve in ogni caso essere nuova, e per ottenere la meraviglia della novità, il lettore è disposto a fare una concessione cruciale, vitale; un dono senza prezzo nei confronti del narratore: la sospensione dell'incredulità.

1 *Sospensione (avanzata) dell'incredulità*

D'accordo, concede il lettore; sia pure, consente lo spettatore: vuoi raccontarmi cosa potrebbe succedere se esistesse un uomo invulnerabile, e allora farò finta di non sapere che gli uomini invulnerabili non esistono. Raccontami pure di pistoleri che colpiscono sempre una moneta a cento passi di distanza, farò finta di non sapere che le pistole dell'Ottocento erano inaffidabili già attorno ai dieci metri. Vuoi raccontarmi d'un viaggio nell'oltretomba, verrò con te, anche se nell'oltretomba non credo affatto, figuriamoci se sono disposto a credere proprio a quello che immagini tu.

La sospensione dell'incredulità consente avventure meravigliose: a ben vedere, consente l'esistenza stessa della letteratura, e forse della cultura intera, e quindi della civiltà. È importante lasciar raccontare chi crea e immagina mondi al di fuori dell'esperienza, è necessario tacere fino alla fine della storia, per saper leggere fino in fondo il racconto, estrarne il significato e il messaggio, quando c'è. Poi, ma solo poi, è lecito e giusto tornare al mondo reale: non si aspetterà davvero un treno al binario 9 e ¾ della King's Cross Station a Londra, ma si potrà sorridere con consapevolezza e soddisfazione mentre si passa davanti ai binari 9 e 10[1].

Nell'antichità, le narrazioni e la meraviglia sono così prepotenti che arrivano ben prima della cronaca e della storiografia. Del resto, che bisogno c'è di distinguerle, se l'obiettivo è quello di intrattenere? Quando nasce l'esigenza della precisione, della veridicità? I cantori come Omero vogliono informare o intrattenere i loro augusti anfitrioni? L'ira e l'eccezionale valore d'Achille esaltano il pubblico, e se per farlo è opportuno disegnarlo come l'invulnerabile figlio d'una dea, che sia pure. Si racconti dell'astuzia di Odisseo, si moltiplichino le sue avventure, se necessario, perché forse un solo colpo di genio non basterà ad esaltarlo a dovere, alle orecchie di chi ascolta. Si chiamino a raccolta gli dei in forma umana a darsele di santa ragione sotto le mura di Troia, se questo rende la trama più appassionante.

L'evidente impossibilità di molti episodi implica forse l'impossibilità totale, integrale della storia? E perché mai? Saranno stati in tanti a cercar di dissuadere Schliemann, convinti che molte impossibilità implicassero totale impossibilità: ma il tedesco non si è lasciato convincere, è partito, e ha trovato Troia.

La necessità dell'aderenza alla realtà non esiste, nella letteratura; ma certo ancor meno è obbligatorio che ogni elemento di narrazione sia immaginario. Per fortuna degli autori (e, tutto sommato, dei lettori), è lecito dosare realtà e fantasia secondo i gusti, le tradizioni, le tendenze. Saranno poi proprio loro, i lettori, a decidere – una volta cessato il temporaneo privilegio concesso della sospensione dell'incredulità – cosa trattenere del racconto, e in quale categoria annoverare il ricordo.

Ben venga allora l'immagine della misteriosa lancia di Peleo, poi giunta per diritto di successione ereditaria nelle mani di Achille, che ferisce al primo colpo e guarisce al secondo. Dante la ricorda per spiegare al lettore che la sua guida, Virgilio, lo aveva prima severamente ripreso per essersi troppo soffermato a seguire una lite volgare, ma poi lo aveva perdonato, visto il pentimento sincero provato dal poeta. La stessa arma, la lingua di Virgilio, aveva prima ferito e poi guarito, e l'Alighieri si perita di ricordarlo richiamando i magici poteri della lancia di Achille.

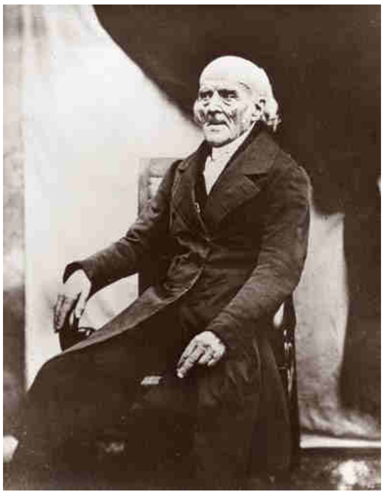
Scegliere le metafore più evocative è mestiere dei poeti, e nessuno sarà tanto folle da richiedere loro una piena congruenza scientifica nei loro versi. Ciò non di meno, è ben lecito dare del folle a chi cercasse di curare il taglio che si è fatto in cucina tagliando le cipolle ripassando la lama del coltello sulla ferita. E non solo perché un coltello da cucina difficilmente possederà le proprietà taumaturgiche della lancia del Pelide (che, peraltro, avrebbe funzionato solo nel 50% dei casi, nell'opportuno turno di parità), ma proprio per l'evidente cretineria insita nell'azione. Eppure.

Eppure, c'è chi ha davvero eletto la proprietà della lancia di Achille a presidio medico chirurgico: anzi, di più; lo ha elevato a principio fondamentale e fondante di una completa disciplina medica.

L'omeopatia nasce un po' più di due secoli fa, nel 1806, dalla penna e dalla mente di Samuel Hahnemann. L'uomo è tedesco, la parola è greca, il motto è latino: *similia similibus curantur*. In estrema sintesi, una riedizione della lancia di Achille: le cose simili si curano con i simili, dice il motto, e il neologismo (per il 1806) basato sul greco ribatte lo stesso principio. Non si può negare che, almeno per quanto riguarda il successo di pubblico, l'idea non abbia fatto breccia: se ne parla ancora, e fin troppo, più di duecento anni dopo. È anche vero che se ne parla tanto forse anche perché è indubbiamente presente un elevato grado di confusione: sono moltissimi coloro che ritengono l'omeopatia una pratica curativa centrata sull'idilliaco concetto di "naturale", senza nessuna consapevolezza del supposto potere taumaturgico dei "simili"; molti altri ritengono che si tratti sostanzialmente di un modo acculturato per il più popolare modo di dire "curatevi

[1] Poi, naturalmente, bisogna fare i conti dell'impatto che la narrazione di finzione ha sulla realtà: a King's Cross il binario 9 e ¾ non esisteva certo, prima della pubblicazione di Harry Potter: ma adesso, naturalmente, c'è. Resta comunque difficile prenderci un treno.

con le erbe". Non è così, e va almeno riconosciuto all'omeopatia di aver sempre onestamente mantenuto nel proprio nome il principio informatore di base: il simile cura il simile. È una perseveranza ammirevole, soprattutto perché pare istintivamente una grossa sciocchezza, fin dall'inizio: implica il dover curare le scottature con il fuoco, le infreddature con il freddo, per non parlare del fatto che, a dar fede al principio, bisognerebbe curare le intossicazioni fornendo al malato un'altra bella dose di ciò che lo ha intossicato, e forse occorrerebbe davvero sanare le ferite da taglio con altri tagli, almeno in linea di principio. Come può aver avuto successo una pratica del genere?



2 *Samuel Hahnemann*

Sembra che ad Hahnemann l'idea sia venuta mentre sperimentava il chinino, allora utilizzato per curare la malaria; assumendolo senza avere la malattia, accusò dei sintomi che a suo parere era proprio quelli della malaria[2]. Concluse quindi, con una sorta di logica retroattiva e speculare, che il farmaco che cura una malattia in una persona malata è anche la sostanza che produce la stessa malattia in una persona sana; di conseguenza, è sufficiente risalire alla causa che ha provocato la malattia e fare in modo di farla nuovamente interagire col malato, in modo che il simile possa curare il simile. La lancia di Achille, né più né meno.

3 *Mary Everest Boole*

Qualche guaio, l'omeopatia, l'ha prodotto quasi subito. Da cultori della matematica non possiamo non ricordare lo strano modo di trapassare di George Boole[3]: nel 1864 fu sorpreso da un temporale mentre andava all'università: si infradiciò da capo a piedi, ma testardamente decise di tenere lezione senza cambiarsi d'abito. Così si prese il proverbiale febbrone da cavallo e forse anche la polmonite. Chissà, forse sarebbe morto comunque, ma è difficile pensare che il modo di curarlo che scelse sua moglie gli possa aver giovato: fedele seguace del principio che il simile cura il simile, continuò a tirare secchi d'acqua addosso al povero Boole per tutto il tempo, nella speranza di eliminare i guai indotti dal temporale.

Chissà, forse è per incidenti come questi che, poco a poco, l'omeopatia ha sviluppato un altro dei suoi principi più caratteristici, ovvero quello delle dosi infinitesimali di principi attivi. Se le innumerevoli secchiate d'acqua di Mrs. Boole fossero state ridimensionate seguendo il più moderno principio delle proverbiali "dosi omeopatiche", sarebbero state verosimilmente trasformate in un paio di colpi d'aspersorio, o forse anche meno. Dubitiamo del loro possibile effetto terapeutico, ma conveniamo che non avrebbero creati soverchi danni.

[2] È noto l'effetto "placebo", di cui peraltro si parla più avanti anche in questo articolo. Meno noto è il complementare effetto "nocebo", che descrive il caso in cui individui che continuano ad assumere sostanze che ritengono essere dannose finiscono per sviluppare i sintomi della malattia che paventano, anche se le suddette sostanza, in realtà, non hanno alcuna relazione con la patologia temuta. Pare lecito ipotizzare una diagnosi di questo tipo, per quanto è accaduto a Hahnemann in questo caso…

[3] Ne parliamo in "Di tutto, di più", RM094, Novembre 2006. La storia è oggettivamente complessa, perché la signora Boole (peraltro era una matematica, a dimostrazione di come razionale e irrazionale possano benissimo convivere) si chiamava Mary Everest, nipote di quel George Everest che dà il nome alla montagna più alta del mondo. Insieme a George fabbrica ben cinque figlie, praticamente tutte "notevoli" per qualche aspetto della loro vita.

Peccato però che questo "non provocare danni" nel singolo caso clinico si trasformi in una dirompente escalation per i seguaci della dottrina omeopatica, che partono dall'assenza del danno e poi proseguono nella loro intenzione di promuovere l'omeopatia a pratica non solo non dannosa, ma naturale, quindi efficace, e infine meritevole di finire nei costi della sanità pubblica. A chi fa notare che diluire il supposto "principio attivo" del farmaco in soluzioni 1:1000 (o anche più), e poi continuare con ulteriori e innumerevoli diluizioni nello stesso rapporto garantisce matematicamente che non si ritroverà alla fine neppure un singolo atomo del medicamento nella maggior parte delle confezioni messe in vendita, si ribadisce con la geniale asserzione che "l'acqua si ricorda" comunque di essere stata, a suo tempo, a contatto con il principio attivo. E qualsiasi contestazione ulteriore viene tacitata con la risposta cruciale e definitiva, con quel "con me ha funzionato" che non ammette repliche.

È davvero sorprendente notare come non riescano a far presa osservazioni che, prima ancora che scientifiche, dovrebbero essere solo di buon senso. Hahnemann sbagliava nel riconoscere i sintomi della malaria come indotti dal chinino: le sue asserzioni furono ovviamente verificate, ma nessuna persona sana sottoposta a trattamento a base di chinino manifestò i sintomi della malaria; con ogni probabilità, se si vuole escludere l'effetto nocebo, quello che Hahnemann osservò fu una sua reazione allergica al farmaco.

Però il principio generale del "simile che cura il simile" aveva avuto, poco prima dell'invenzione dell'omeopatia, una conferma prodigiosa: abbastanza curiosamente, lo aveva avuto per una sperimentazione medica che, a differenza dell'omeopatia, adesso è sottoposta a critiche feroci da molti. Un'altra differenza notevole è che questa pratica medica, a differenza dell'omeopatia, funziona.

4 *La prima vaccinazione di Jenner, secondo James Phipps*

Edward Jenner sperimenta il primo vaccino dieci anni esatti prima della teorizzazione dell'omeopatia da parte di Hahnemann, nel 1796. Parte da un'osservazione che era nota fin dall'antichità, visto che se ne hanno tracce in documenti greci che narrano delle pestilenze durante le infinite guerre tra Sparta e Atene; e cioè che chi viene colto da una malattia infettiva e riesce a sopravvivere, generalmente risulta poi immune alle successive epidemie della malattia stessa. Certo era difficile immaginarsi il modo di poter sfruttare questa conoscenza, anche essendo convinti della sua validità: Jenner ci riuscì osservando che il vaiolo bovino era malattia assai simile al vaiolo umano, pur essendo assai meno pernicioso; quindi constatando che i mungitori delle vacche solitamente erano immuni al vaiolo; e infine concludendo – con non poco coraggio – che i mungitori in questione erano immuni al vaiolo umano perché avevano di fatto già preso e superato il vaiolo bovino che non aveva provocato loro grandi danni, e in compenso li aveva resi invulnerabili dal vaiolo tout-court. Così, prese il coraggio a due mani, estrasse del siero da una pustola di vaiolo di vacca (che il vaccino si chiami così non è certo un caso) e lo iniettò su un bimbo, che fu praticamente l'unico a non ammalarsi di vaiolo nei suoi paraggi.

È quasi impossibile non rimanere sorpresi dalle somiglianze degli albori della vaccinazione e dell'omeopatia: il periodo storico, quasi coincidente; il principio di curare una malattia con qualche forma della malattia medesima; e poi (ma per l'omeopatia solo in seguito) l'attenzione a utilizzare solo una forma "blanda", come dire una "dose minore" della malattia a scopi terapeutici. Non conosciamo la storia della medicina abbastanza da poter asserire con certezza che il successo della pratica della vaccinazione di Jenner abbia influenzato i parti teorici di Hahnemann, ma confessiamo che resteremmo stupiti piuttosto del contrario.

Più importanti delle identità, però, in questo caso sono le differenze. La medicina non è una scienza esatta, e probabilmente sia Hahnemann sia Jenner si sono lanciati in sperimentazioni senza avere una chiara idea di come avrebbero potuto essere giustificate le loro idee. Resta il fatto che l'idea di Hahnemann è rimasta priva di qualsiasi giustificazione successiva, e anzi si è visto come perfino la sua prima diagnosi sugli effetti del chinino fosse errata. Il meccanismo alla base dell'idea di Jenner è invece stato ampiamente compreso: le malattie infettive sono portate da microrganismi che riescono a ridurre allo stremo, e spesso alla morte, la persona attaccata, perché il sistema immunitario non riconosce in tempo l'elemento infettante e non è, per così dire, sufficientemente "istruito" su quali contromisure intraprendere. Il vaccino serve proprio a questo: inoculato nell'organismo in forma blanda, dà al sistema immunitario il tempo di reagire, e di riconoscere e combattere gli invasori; e soprattutto, di imparare come farlo, anche nel caso in cui un ceppo più virulento dovesse in futuro riprovare l'attacco. Buffo notare come, in fondo, la ragione alla base del funzionamento dei vaccini sia esattamente la stessa, seppur perfettamente complementare, dell'imperativo terapeutico che ricorda che non bisogna interrompere prima della fine un ciclo di antibiotici: se non si stroncano fino all'ultimo gli ospiti indesiderati, i sopravvissuti, per quanto pochi, risulteranno poi in un certo senso "vaccinati", ovvero resistenti a quel tipo di antibiotici, e pertanto assai più pericolosi[4].

Resta sempre in piedi, però, l'obiezione definitiva: con me l'omeopatia ha funzionato, continuerà a dire chi lo ha già detto qualche riga sopra. E c'è poco da fare: come obiettare a una tale asserzione? A un'esperienza diretta?

A prima vista, la via più efficace sembra quella della dialettica dura e pura, quella che insiste sul fatto che no, non è possibile che abbia funzionato, perché quella medicina omeopatica era solo acqua, e non necessariamente fresca, neppure: o solo zucchero, pagato a un prezzo al chilo spaventosamente più alto di quello che si trova al supermercato. Ma questo di solito non serve a superare il solidissimo bastione finale del "con me ha funzionato". Quindi, è meglio dire subito la verità, per quanto scomoda possa sembrare ad una mente scientifica: e la verità è che sì, d'accordo, probabilmente è vero, è proprio così, con te ha funzionato. E non solo con te, anche con parecchi altri.

Certo, subito dopo bisognerà però chiarire, mettersi d'accordo sui termini, concordare al meglio su cosa sia un "farmaco" e cosa sia "una cosa che funziona". Lo abbiamo già anticipato, no? La medicina è tutt'altro che una scienza esatta: in matematica e fisica basta un solo controesempio a invalidare una teoria, ma la medicina è estremamente più complessa. Tanto per cominciare, è noto che il solo fatto di sentirsi curati ha un effetto positivo sui pazienti; se si prende un campione di malati e se ne lascia metà senza cure, mentre all'altra metà si somministra un farmaco finto (il "placebo": è latino, e si potrebbe grosso modo tradurre con "sarò gradito"), tra la metà che viene curata si registrano molte più guarigioni che nell'altra[5].

[4] Tra l'altro, non si riesce davvero a capire come si possa essere magari convinti dell'efficacia dei vaccini e della necessità di completare un ciclo di antibiotici e allo stesso tempo negare l'evidente relazione di questi meccanismi con i principi dell'evoluzione darwiniana.

[5] Ci permettiamo di inserire un aneddoto, per quanto regionale e dialettale. Anni fa venne ricoverato all'ospedale civile di Terni un anziano contadino che era vissuto quasi sempre da solo, in un casolare sui monti, e che non aveva mai avuto la ventura d'essere ricoverato. Non sappiamo quale problema lo avesse costretto al ricovero, ma ovviamente venne messo a letto, lasciato a riposo, con le infermiere che regolarmente passavano a vedere le sue condizioni generali e a prendere la temperatura. Poco tempo dopo, durante il giro di visita, il primario lo interrogò con un generico e affettuoso "*Beh, come va, oggi?*", al che l'anziano soddisfatto rispose: "*Beh, dottò, da quanno me mettono quillu zippittu me sento tanto mejo…*" ["zippittu" è dialettale per il diminutivo di "zeppo", insomma vale "bastoncino": si riferiva ovviamente al termometro].

5 *Doppio cieco*

Questo metodo è detto "cieco", sul calco dell'inglese "blind", che sarebbe forse stato meglio tradurre con "all'insaputa", perché ovviamente il paziente non sa di essere stato curato con dell'acqua fresca. Di solito, per verificare l'efficacia di un nuovo farmaco, si procede proprio in un modo simile: si prende un campione di pazienti, e li si divide in due gruppi, in ogni gruppo si fa poi una ulteriore suddivisione, lasciandone metà senza alcun tipo di farmaco. Le altre metà vengono invece curate una con il "placebo", l'altra con il nuovo farmaco. Per quanto detto prima, inevitabilmente le due metà "curate" registreranno più guarigioni delle due metà "non curate", ma mettendole a confronto una con l'altra si può capire se il nuovo farmaco ha una reale efficacia: basta che abbia registrato un numero di guarigioni sensibilmente superiore a quelle avute nel gruppo "placebo".

Siccome non solo i pazienti, ma anche i medici sono uomini soggetti a pregiudizi, il "cieco" sopra descritto è di solito raddoppiato nel metodo "doppio cieco": in questo caso non solo i pazienti non sanno se stanno per essere curati con delle pilloline di zucchero anziché col farmaco in sperimentazione, ma persino i medici non sanno se stanno somministrando ai loro pazienti un farmaco vero o un placebo. Devono solo registrare gli effetti: i dati saranno poi analizzati da terze parti. Naturalmente, se l'effetto del candidato nuovo farmaco non dà risultati superiori a quelli che dà un normale placebo, non sarà certo riconosciuto come farmaco ufficiale; se invece supera l'esame, dovrà essere sottoposto ad altre decine di controlli di varia natura prima che se ne autorizzi la commercializzazione.

Resta il fatto, davvero quasi magico, che alcune persone risulteranno effettivamente "guarite" da quell'ipotetico medicamento, per quanto scientificamente inefficace, al pari un placebo. Quindi non è strano, anzi è del tutto normale, che alcuni si trovino bene con delle pratiche mediche non scientifiche. Dovrebbe però essere chiaro che, se queste pratiche non superano la prova del doppio cieco (e nessuna delle "medicine alternative" l'ha mai superata), hanno la stessa efficacia terapeutica, dal punto di vista statistico, di un composto a base di acqua distillata (che è, per ammissione degli stessi cultori dell'omeopatia, l'ingrediente quasi esclusivo dei loro "farmaci"), o a base di fichi secchi, o di frullato di margherite. Qualcuno guarirebbe anche con queste "medicine". Ci sarebbe comunque qualcuno che potrebbe alzarsi e dire, onestamente convinto e senza proferir menzogna: "con me ha funzionato".

6 *Lance non lanciate*

Il dibattito sulle medicine alternative, al pari di quello sull'obbligatorietà delle vaccinazioni, è certo fuori tema per un giornalino che ha come intento quello di raccontare un po' di matematica divertente, e indubbiamente troppo vasta e complessa per essere rinchiusa in poche osservazioni di carattere piattamente generale, centrate quasi esclusivamente sui fondamenti; è però comunque sconcertante come gran parte delle liti che si ritrovano sui media e soprattutto in rete sembrano essere portate avanti da persone che – a giudicare dalle affermazioni che si leggono – sembrano ignorare perfino i fondamenti, appunto, il minimo indispensabile di quel sostrato scientifico imprescindibile che dovrebbe essere reso obbligatorio a chiunque abbia intenzione di fare dichiarazioni pubbliche. Ma il potere (alternativamente) taumaturgico della lancia di Achille rischia di portarci troppo lontano, e forse vale la pena di lasciare i superpoteri della mitologia, rimuovere la sospensione dell'incredulità concessa all'inizio di questa storia, e ancorarsi alle parti più oggettive e tangibili: più che sui poteri d'una lancia mitica, forse è più semplice concentrarsi sulla perdurante efficacia delle lance reali.

È difficile considerare appieno il terribile potere devastante di una lancia, in tempi in cui le armi più devastanti sono congegni complessi come gli aerei da caccia, le portaerei e gli ordigni nucleari. Eppure, con ogni probabilità, l'invenzione della lancia può aver rappresentato un vero e proprio salto quantistico nella ricerca di armi letali: un salto anche inevitabile, probabilmente, visto che quasi tutte le culture primitive l'hanno fatto in maniera indipendente. Per quanto semplice, la lancia sembra essere un perfetto esempio di quelle situazioni olistiche in cui unendo più elementi si ottiene una quantità di vantaggi superiore alla somma dei vantaggi dei singoli addendi. La lancia sembra essere semplicemente l'unione dei due strumenti offensivi più semplici e intuitivi: il bastone e la selce tagliente e appuntita. Dotati di una certa capacità offensiva già di per sé, il bastone e la selce diventano improvvisamente letali se uniti insieme: consentono di ferire restando ad una certa distanza (quella del bastone, appunto) da chi si intende colpire; la selce diventa improvvisamente più maneggevole, perché il bastone fa da manico; il bastone diventa estremamente più efficace, quando usato come arma. Soprattutto, come la nostra lingua si perita di ricordarci nel nome stesso, l'unione dei due oggetti diventa un'arma a distanza, a lunga distanza, perché può essere lanciata lontano con una buona precisione: vola verso il bersaglio con maggiore esattezza, coprendo una maggiore distanza e fornendo un potere offensivo molto maggiore di quanto riescono a fare il bastone e il sasso da soli.

Tra l'altro, è possibile che la lancia sia anche l'arma che abbia avuto la storia più lunga e il maggior numero di varianti: dal primo bastone appuntito, magari lanciato con l'aiuto di un propulsore, fino alle alabarde più complicate, passando attraverso tutte le varianti possibili, che si distinguevano naturalmente in funzione dell'uso principale, con la cruciale distinzione tra i *giavellotti*, destinati ad essere lanciati, e le *picche*, con funzione principalmente di arma di contrasto della fanteria rispetto alle cavallerie. Si trovano così il *pilum* dei legionari romani, ingegnosamente progettato per piegarsi dopo aver colpito lo scudo dei nemici, le *sarisse* lunghe e lunghissime[6] delle falangi macedoni, le terribili falariche iberiche che a Sagunto ferirono Annibale, le lunghe lance da carica dei cavalieri medievali, rese famose dalle giostre e dai tornei, e centinaia d'altre varianti. Non tramontano neppure con l'avvento delle armi da fuoco: le cavallerie militari – che per contrappasso hanno avuto per lungo tempo proprio nelle lance dei picchieri i loro ostacoli maggiori – useranno le lance fino alla loro effettiva scomparsa, tra la Prima e la Seconda Guerra Mondiale.

Un attrezzo così lungamente e ampiamente diffuso non può non lasciare tracce anche nei nomi propri dei popoli con lunga tradizione guerriera: il latino (e italiano) Quirino deriva probabilmente da "*curis*", che significa proprio "lancia", o "asta"; e il termine "asta" si ritrova ovviamente anche in Astolfo, che probabilmente univa sia il significato guerriero di "lancia" con quello altrettanto aggressivo di "lupo".

L'etimologia di molti nomi è spesso oscura, o quantomeno incerta, in alcuni casi, è complicata da fatto che lo stesso oggetto è chiamato con suoni radicalmente diversi in lingue diverse: i tedeschi chiamano la loro patria "Deutschland", e ne hanno ovviamente pieno diritto; ma molti popoli diversi chiamano quel loro paese "Germania", sul calco del nome latino. Non è chiaro per quale ragione Giulio Cesare e compagni usassero questo termine: o meglio, è certo che lo usassero per indicare la terra delle tribù dei Germani, ma

[6] Anche sette metri: c'è da chiedersi come fosse possibile tenerle in posizione…

ovviamente questo non fa che spostare di un passo indietro la ricerca etimologica. L'ipotesi più probabile è quella che fa discendere il termine da "gair", che significa "vicino", quasi a ribadire che si trattava di popoli vicini ai domini romani, ancora non conquistati. Non ci risulta che nessuno abbia mai proposto come possibile radice etimologica il lemma "ger", che significa invece esplicitamente "lancia". Di certo questa radice, se anche non fosse il seme della parola "Germania", in quella terra ha certo generato moltissimi nomi bellicosi: Ruggero, che significa qualcosa del tipo "lancia gloriosa"; Gervaso, "lancia potente"; e naturalmente Gherardo o Gerardo, che significa esplicitamente "abile con la lancia".

Il nome Gerardo è certo quello ancora più diffuso, tra quelli ritrovati essere affini alle lance, specialmente nei paesi anglosassoni, dove le varianti linguistiche sono molte e non mancano neppure i diminutivi: in Germania è ben diffuso il nomignolo Gerd, che altro non è che il diminutivo e vezzeggiativo di Gerhard. Diminutivo che al grande pubblico italiano è divenuto probabilmente noto soprattutto nell'estate del 1970, ma senza trasmettere affatto la connotazione vezzeggiativa: durante la celeberrima partita di semifinale dei campionati mondiali di calcio in Messico, Gerd Müller era l'attaccante più pericoloso della nazionale tedesca, e verosimilmente diventò l'uomo più odiato d'Italia, almeno per lo spazio di due ore, visto che realizzò entrambi i gol che la Germania mise a segno nei celebratissimi tempi supplementari della "partita del secolo".

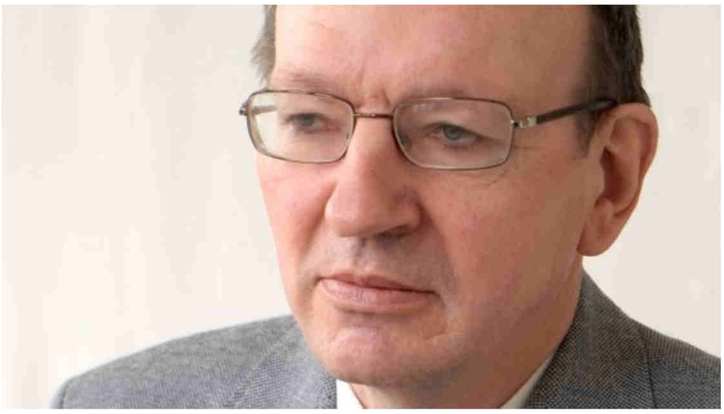
In ogni caso, non è che uno si aspetti di incontrare troppi "Gerd" sfogliando elenchi multinazionali e poliglotti: è un diminutivo, usato come tale forse solo in lingua tedesca, di un nome che non è certo tra i più diffusi in assoluto. Per questo non può non risultare almeno un po' sorprendente registrare, tra gli scienziati di rilievo nati nel mese di Luglio, non uno ma bensì due Gerd, ben ravvicinati anche dal punto di vista temporale.


7 *Gerd Binnig*

Gerd Binnig nasce il 20 Luglio 1947 a Francoforte sul Meno, città extra-circondariale nell'Assia, in Germania. Gerd Faltings nasce il 28 Luglio 1954 a Gelsenkirchen, nel land della Renania Settentrionale-Vestfalia, sempre in Germania. Accomunati dalla nazione d'origine e dal nome di battesimo, sono separati temporalmente da sette anni quasi esatti.

Nel gioco di ricercare identità e differenze, queste ultime sono certo bene messe in evidenza dalla scelta del campo di interesse e ricerca: Binnig è a tutti gli effetti un fisico, e per di più un fisico sperimentale, cosa che lo pone ad una certa distanza professionale dai fisici teorici e soprattutto dai matematici; per contro, Faltings è indubbiamente un matematico, e a ben vedere neanche un matematico particolarmente attratto dalle applicazioni della sua amata disciplina teorica. In compenso, sia il fisico sia il matematico hanno in comune la soddisfazione di aver vinto entrambi i maggiori riconoscimenti riservati alle loro professioni: e quasi a voler essere certi che questa identità si notasse facilmente, li hanno vinti nello stesso anno, il 1986.

Forse però è meglio indagare ancora un po' sulle differenze – o per meglio dire le distanze – tra i due "abili con la lancia". Come si è accennato, è indubbio che il confine tra matematica e fisica è tutt'altro che ben definito, in molte zone di studio. Fino a non troppo tempo fa, la distinzione non esisteva neppure; Newton e i suoi contemporanei semplicemente non avrebbero saputo rispondere ad una domanda diretta che li esortasse a qualificarsi come "fisici" o matematici"; avrebbero risposto serenamente "filosofi naturali", riservando all'interlocutore uno sguardo perplesso e indagatore. Le cose sono certo cambiate, ma anche oggi un fisico strettamente teorico può mostrare caratteristiche assai più vicine ai matematici (soprattutto a quelli specializzati nella teoria che usa nei suoi calcoli) che ad altri fisici che indagano su fenomeni diversi: per contro, esistono fior di matematici che si dedicano con impegno esclusivo solo alla matematica applicata, rifuggendo per quanto possibile dalla purezza della teoria e disponendosi coraggiosamente a far incastrare i loro calcoli con le bizzarrie del mondo reale; quasi volessero rifiutarsi di immergersi nell'iperuranio della ricerca matematica accademica, a meno che non riescano a intravedere, magari da lontano, una qualche possibile applicazione.



8 *Gerd Faltings*

Ci sono pertanto tutte le premesse affinché il Gerd fisico e il Gerd matematico possano incontrarsi e collaborare, ma in realtà la distanza tra i loro interessi è oggettivamente abissale. Binnig dedica la sua ricerca a qualcosa di tangibile, cerca di demolire le frontiere che limitano i sensi umani all'indagine diretta: nel 1978 entra nel laboratori di ricerca dell'IBM a Zurigo, e insieme a Heinrich Rohrer e altri comincia subito a lavorare al "Microscopio a Effetto Tunnel"[7], ovvero a quello strumento che consente di osservare gli atomi, finalmente, dopo un paio di secoli che di questi oggettini si faceva un gran parlare senza riuscire a vederli. Il Premio Nobel per la Fisica gli arriva non troppo tempo dopo, e lo condivide proprio con Rohrer e con Ernst Ruska, ben più anziano di entrambi, che finalmente vede coronato il suo merito di aver realizzato il primo Microscopio Elettronico nel 1933.

Faltings, dal canto suo, dedica i suoi studi a campi della matematica quanto mai lontani dalle retine umane. A questo Gerd piace la geometria algebrica, che è forse la disciplina più difficile da "visualizzare": e se è lecito dubitare di quest'affermazione, magari osservando che la Teoria dei Numeri è forse, per propria natura, virtualmente impossibile da "visualizzare", si può facilmente pacificare la nascente polemica ricordando che Faltings ha usato la Geometrica Algebrica proprio per dimostrare un bel numero di congetture della Teoria dei Numeri. In particolare è proprio per la dimostrazione della Congettura di Mordell (che ormai si chiama Teorema di Faltings) che l'Unione Matematica Internazionale gli conferisce la Medaglia Fields nel 1986. Il Teorema di Faltings fornisce dei risultati in merito al numero di soluzioni di un'equazione diofantea[8], e se questo fa venire alla mente qualche strana reminiscenza di relazione con l'Ultimo Teorema di Fermat è solo perché la relazione, a tutti gli effetti, c'è: Andrew Wiles[9], nella

[7] STM, Scanning Tunneling Microscope

[8] O "diofantina". Non riusciremo mai a deciderci su quale sia il termine più corretto…

[9] Certo, certo, abbiamo parlato anche di lui, e non troppo tempo fa: in "Matematica per gioco", RM207, Aprile 2016.

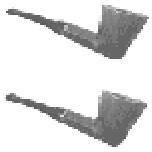
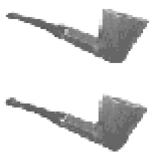
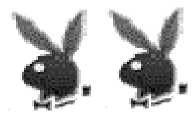
sua storica dimostrazione, fa uso del Teorema di Faltings, e in un certo senso di Faltings stesso; nella frenetica ricerca della soluzione dell'errore che aveva macchiato il suo primo tentativo di dimostrazione dell'UTF, è a Faltings che Wiles si rivolge alla fine, chiedendogli un parere sulla "correzione" che aveva trovato e stava per pubblicare.

Gerd Faltings ha continuato e continua ad esplorare il suo mondo popolato da gruppi e coomologie, automorfismi e varietà di Shimura. Gerd Binnig ha continuato e continua ad inventare microscopi: nel 1985 costruisce il primo Microscopio a Forza Atomica[10], meno potente di quello ad effetto tunnel ma prezioso per l'indagine biologica, per le sue caratteristiche ottiche e la minor complessità d'esercizio; il premio Kavli per le Nanoscienze del 2016 è stato suo appannaggio.

E naturalmente, entrambi hanno fatto e fanno una vita da scienziati, vivendo un po' in Europa e un po' in America, insegnando chi a Stanford e chi a Princeton, chi nei laboratori delle grandi industrie, chi al Max Planck Institute. Entrambi seguendo i sentieri molteplici e incrociati della più grande tra le avventure umane, la scienza: quella che non richiede mai, davvero mai, di sospendere il senso d'incredulità, e alimenta continuamente il senso di meraviglia.

[10] AFM, Atomic Force Microscope

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Bel problema, brutta soluzione			
Il tempo della musica			

2.1 Bel problema, brutta soluzione

...motivo per il quale lo consideriamo difficile.

Dal punto di vista dell'ambientazione, non ci sono problemi: il *Campo dei Chinotti* giace abbandonato da ormai più di un anno, con scarsissime possibilità di riattivazione[11], e quindi il ruolo si rivela adattissimo a spericolate sperimentazioni aiuoliche.

Nella fattispecie, intendiamo tracciare tre cerchi di raggio unitario in modo tale che si incontrino tutti e tre in un punto; unilateralmente, abbiamo deciso che piantumeremo solo l'insieme A dei punti appartenenti ad almeno due cerchi. Volendo, come al solito, lavorare il meno possibile, vorremmo sapere *quanto vale* l'area minima di A e, possibilmente, costruirla anche.

Come al solito, il problema potrà essere clamorosamente falso, ma la premessa è (anzi, sono: "le premesse". Anche quella del gomito di Rudy) vera: abbiamo una soluzione (una sola), ma brutta e, siccome il problema ci pare interessante da riciclare altrove, ci interessava (farvi) esplorare la possibilità che esistessero soluzioni più belle della nostra.

Con calma, eh, che tanto adesso piove.

2.2 Il tempo della musica

Bel titolo, vero? Peccato che non c'entri nulla. Beh, quasi. Dovete stabilire quanto dura la musica (in battute: se volete far i pignoli e siete felici possessori di un metronomo, t=90).

Insomma, avete $n/2$ coppie (n pari, caso mai non ve ne foste accorti), e si sono messi tutti in cerchio in modo tale che ogni persona è diametralmente opposta al proprio partner; ad ogni battuta del metronomo, due persone adiacenti si scambiano di posto secondo i vostri ordini (trasmessi e compresi dagli interessati in tempo zero): "scopo del ballo" è far scambiare di posto a tutti i partner (insomma, Ugo deve andare al posto di Elena, che è all'altro capo del cerchio, e viceversa). Oh, le persone che si scambiano sono solo due e vicine di posto, tutti gli altri stanno fermi. Il (vostro) problema è che lo scambio deve essere completato esattamente per la fine della musica, e dovete quindi determinare di quante battute debba essere composta la canzone. E siccome si faranno vari balli di

[11] Soddisfiamo la vostra curiosità: Secondo voi, cosa può succedere ad un mancino che non gioca a tennis? Bravi, proprio quello. Gomito del Tennista, braccio destro. Quello che si usa per tirare la corda.

questo tipo nella serata (con diversi valori di *n*), sarebbe carino trovare una formula generale.

Non sappiamo se quella che segue è un'espansione, ma potreste provarci: dove abbiamo trovato questo problema, avevano trovato un paio di metodi che richiedevano lo stesso numero di battute; gli autori non erano sicuri, ma erano convinti che il numero trovato fosse il minimo. Potreste provare a dimostrarlo per la vostra soluzione...

3. Bungee Jumpers

Sia A l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ che non contengono due interi consecutivi: ad esempio, se $N = \{1, 2, 3, 4\}$ si ha:

$$A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}.$$

All'interno di ogni sottoinsieme, moltiplichiamo gli elementi del sottoinsieme tra di loro. Nel nostro esempio, otteniamo:

$$P = \{1, 2, 3, 4, 3, 4, 8\}.$$

Eleviamo al quadrato ogni elemento del nuovo insieme e sommiamo tra di loro i valori ottenuti:

$$Q = \{1, 4, 9, 16, 9, 16, 64\}$$

$$T = 1 + 4 + 9 + 16 + 9 + 16 + 64 = 119.$$

Si noti che $119 = 5! - 1$. Provare che, per qualsiasi n, $T = (n+1)! - 1$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Luglio, ancora per poco. Troppe cose da raccontare, troppo poco tempo, dovrete affidarvi alla newsletter per le novità. Qui passiamo subito alle soluzioni.

4.1 [220]

4.1.1 Numeri (ma anche parole) incrociati

Questo mese il Capo era particolarmente preso da cruciverba e vi chiedeva di disegnare uno schema di parole crociate:

> *Lo schema non necessariamente quadrato che dovete disegnare deve contenere meno caselle nere che caselle bianche e, per un dato n (≥ 2), deve poter ospitare, tra verticali e orizzontali:*
>
> *Una parola di lunghezza n.*
>
> *Due parole di lunghezza n–*1.
>
> *Tre parole di lunghezza n–*2.
>
> … … …
>
> *n parole di lunghezza* 1.
>
> *"k parole di lunghezza j" significa "k e solo k parole di lunghezza j". È sempre possibile?*

Dopo tanto tempo ci ha scritto ***RM²***:

> Ti mando una mia soluzione banale per *n*=2, alla luce della quale è meglio andare a cercare soluzioni per *n*>2 altrimenti non ci si diverte.

Un cruciverba per l'estate (n = 2)

1	2

Orizzontali

1. Sigla di una nota rivista di matematica ricreativa (2 lettere)

Verticali

1. Ja specchiata nel Volga (1 lettera)
2. Morse due tratti (1 lettera)

Beh, ovviamente siamo commossi, ma la domanda non ha ancora ricevuto risposta, quindi procediamo con ***tentatre***:

Indico con

n : la lunghezza della parola massima

B : il numero di caselle bianche

N : il numero di caselle nere

L : la lunghezza totale di tutte le parole

(p,q) : gruppo di p parole tutte di lunghezza q

X, Y : base e altezza del cruciverba, con $X \geq Y$.

Valgono le

[1] $L = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}$

- cioè $L = 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, \ldots$

- i gruppi di parole sono $(1,n), (2,n-1), (3,n-2), \ldots, (n,1)$ da cui

$$L = \sum_{k=1}^{n} k \cdot (n+1-k) = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

[2] $\boxed{B = L/2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{12}}$

- le parole orizzontali occupano tutte le caselle bianche B, e così le verticali → $2B = L$

- ne segue che per ogni casella bianca passano sempre due parole

- nb. <u>non si ammettono parole di una lettera isolate</u> (che andrebbero contate due volte)

[3] per $\boxed{n = 1, 5, 9, 13, \ldots = 1 + 4k}$ <u>non esiste soluzione</u>

- l’espressione [2] deve essere intera, ma non lo è per questi valori

[4] <u>per ogni n pari esiste un cruciverba</u>

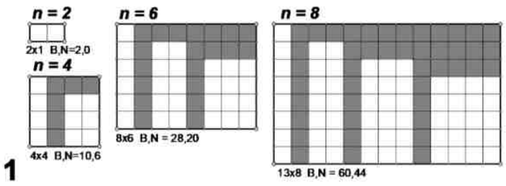
- accoppiando gli n gruppi (il primo con l’ultimo, ecc.) si hanno le parole $(p,q), (q,p)$ che si possono collocare (in orizzontale e verticale) in un rettangolo $p \times q$; il numero di gruppi è pari e tutte le parole stanno in $n/2$ rettangoli

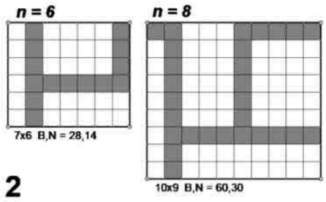
- il semplice accostamento dei rettangoli come in fig. 1, il tutto racchiuso in un rettangolo $X \times Y$ colmato di caselle nere fornisce un cruciverba corretto (anche se strano)

- dal rettangolo e da [2] si ricavano X, Y, B e $N = X \cdot Y - B$, da cui

$B-N=2B-X\cdot Y=\dfrac{(n-2)^3+20n+8}{24}>0$ che rispetta (ampiamente) la condizione $B>N$.

In fig. 1 i casi $n=2,4,6,8$.

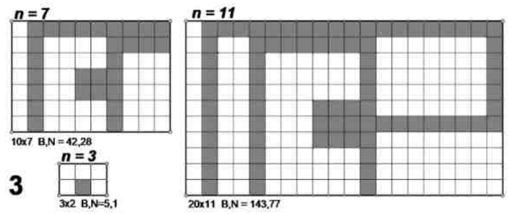




Le caselle nere si possono ridurre, per n grande, disponendo i rettangoli in altro modo come in fig. 2.

[5] per ogni n dispari - esclusi i casi [3] - esiste un cruciverba

In fig. 3 una soluzione per $n=3,7,11$.



I dispari ammessi sono $n=3,7,11,...=3+4k$; per ognuno è dispari anche il numero di gruppi, e i gruppi centrali $(2,2),(4,4),(6,6),...$ non si possono ridurre a quadrato (il quadrato $p\times p$ equivale al gruppo $(2p,p)$). In tutte le soluzioni esiste però una forma C che risolve il problema.

Per ogni n, C è formato da 5 quadrati di lato $s=(n+1)/4$ e assorbe i gruppi $(s,3s),(2s,2s),(3s,s)$; i restanti gruppi, in numero pari, compongono dei rettangoli. P.es. in $n=7$ la C comprende i gruppi $(2,6),(4,4),(6,2)$ e assorbe sia il gruppo centrale $(4,4)$ che il rettangolo 2×6.

Anche in questo caso la condizione $B>N$ è sempre rispettata.

Possono ovviamente esistere altri cruciverba con le caselle bianche disposte diversamente – p.es. la C si trasforma in S – e in modo più "normale". Trovare gli schemi minimi e magari quadrati è un'altra questione (anche se penso che gli schemi a rettangoli, magari riordinati, siano la base per quelli minimi, e i quadrati si possono ottenere da questi aggiungendo caselle nere).

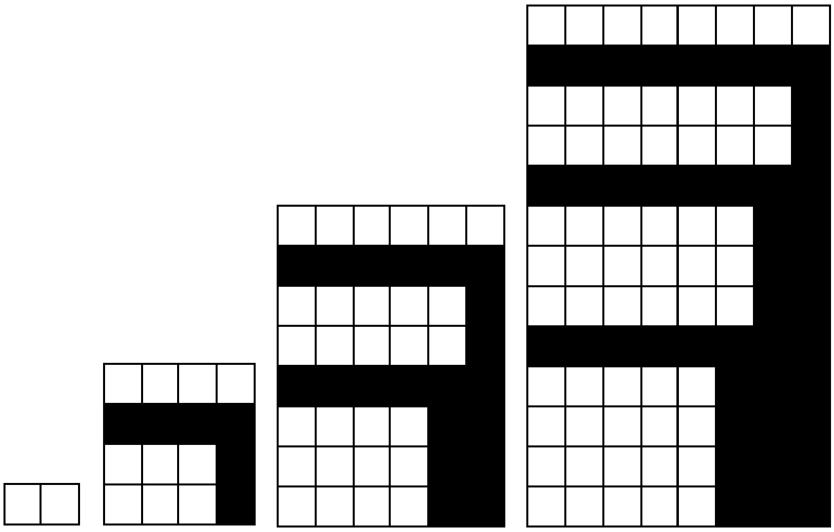
Che ne dite? Ancora? Va bene, vediamo la versione di ***Valter***:

Propongo la mia soluzione sintetizzando molto (la calura estiva rende pigri …).

Assumo che le parole di lunghezza 1 non siano isolate (altrimenti si avrebbe la stessa parola contata due volte).

Nel caso di n pari mi pare che sia sempre possibile costruire lo schema di parole crociate.

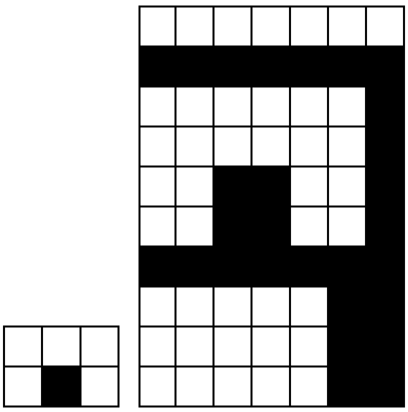
Propongo alcuni casi da cui si può dedurre lo schema generale (si dovrebbe ricavare la dimostrazione per la *regoletta delle nere in numero minore delle bianche*):



Sempre che l'estetica enigmistica ammetta questo tipo di parole crociate (d'altronde se si ammettono parole di lunghezza 1 …).

Per di n dispari distinguo fra:
- $n \equiv 3$ MOD4
- $n \equiv 1$ MOD4

Anche per $n \equiv 3$ MOD4 propongo 2 casi da cui si può dedurre lo schema generale:



Per $n \equiv 1$ MOD4 mi pare che non sia possibile costruire uno schema di parole crociate.
Provo a dimostrarlo velocemente.

Da qui in poi chiamo:
- "S" la somma totale delle lunghezze di tutte le parole sia verticali che orizzontali
- "S_x" la somma di caratteri di tutte le parole di stessa lunghezza "x" (per come sono stati definiti tali gruppi di parole vale: $(n - x + 1)*x$).

Chiamo x_n, …, x_1 il numero di parole orizzontali di lunghezza rispettivamente: n, …, 1. Deve essere:

$$n*x_n + (n-1)*x_{(n-1)} + \ldots + 1*x_1 = n*(1-x_n) + (n-1)*(1-x_{(n-1)}) + \ldots + 1*(n - x_1)$$

(il numero di caselle bianche è identico calcolate usando le parole orizzontali o verticali).

Raccogliendo: $2*(n*x_n + \ldots + 1*x_1) = n*1 + \ldots + 1*n$; quindi S è un numero pari (in qualsiasi schema di parole crociare S è pari essendo somma di 2 numeri uguali).

Per $n \equiv 1$ MOD4 S, sarebbe dispari che, per quanto detto, non è possibile; spiego:
- le parole del gruppo in posizione "centrale" sono in numero e di lunghezza dispari (quindi lo è anche S_x; p.e., per $n = 5$, il gruppo "centrale" ha x=3 da cui S_3=3^2=9)

- gli altri gruppi di parole con stessa lunghezza si accoppiano a due a due come S_x (quindi ogni coppia ha somma pari; p.e., per n = 9, 3 parole lunghe 7 e 7 lunghe 3).

Spero di non aver perso pezzi… ma siamo di corsa e dobbiamo andare avanti. Ancora la versione di ***Emanuele***:

B = numero di caselle bianche
N = numero di caselle Nere
m = "ordine" dello schema, cioè quel numero che determina quante e quanto lunghe debbano essere le parole
R = numero di righe dello schema finale
C = numero di colonne dello schema finale
Sappiamo che $N < B$ ed essendo $N+B$ l'area dello schema si deduce che $N+B=R*C$.
Il numero totale di caselle bianche può essere calcolato con una forma chiusa (mamma mia quanto mi piace atteggiarmi da matematico), notando semplicemente che:

$$B = 1*m + 2*(m-1) + 3*(m-2) + \ldots + (m-2)*3 + (m-1)*2 + m*1$$

se analizziamo ogni addendo esso è composto da 2 fattori la cui somma è sempre m+1 quindi chiamando i e j i due fattori possiamo scrivere:

$i+j = m+1$

$j = m+1-i$

Dopo l'espansione che allego:

$$B=\sum_{i=1}^{m} i*j$$
$$j=m+1-i$$
$$B=\sum_{i=1}^{m} i(m+1-i)$$
$$\sum_{i=1}^{m} mi+m-i^2$$
$$\sum_{i=1}^{m} i(m+1)-i^2$$
$$(m+1)\sum_{i=1}^{m} i-\sum_{i=1}^{m} i^2$$
$$(m+1)\frac{m(m+1)}{2}-\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$
$$\frac{3m(m+1)^2-m(m+1)(2m+1)}{6}$$
$$\frac{m(m+1)(3m+3-2m-1)}{6}$$
$$quindi:$$
$$B=\frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

$B = m*(m+1)*(m+2)/6$
Possiamo scrivere:
(1) $B+N=R*C$ (Somma caselle Bianche e Nere = Righe per colonne)
Essendovi una parola lunga m, lo schema non potrà avere un numero di colonne o righe inferiore a tale valore. Quindi poniamo, senza perdere in genericità, supporre che siano le colonne che debbano essere almeno m (immagino di mettere la parola lunga m sulla prima riga orizzontale) quindi:

(2) $C >= m$
nel contempo ci siamo imposti che:
$N < B$
quindi possiamo scrivere (riferendoci alla (1))
$R*C > 2*B$
$R*C > 2*m*(m+1)*(m+2)/6$
$R*C > m*(m+1)*(m+2)/3$
essendo $R*C = B+N$:
$B+N > m*(m+1)*(m+2)/3$
$N > (m*(m+1)*(m+2)/3) – B$
$N > (m*(m+1)*(m+2)/3) – (m*(m+1)*(m+2)/6)$
$N > (2*m*(m+1)*(m+2) – m*(m+1)*(m+2))/6$
$N > m*(m+1)*(m+2)/6$
essendo $B > N$, dobbiamo avere a maggior ragione:
$B > m*(m+1)*(m+2)/6$
ma B è proprio uguale al membro di destra, quindi non può essere strettamente maggiore di se stesso, concluderei che lo schema da costruire, così proposto non sarà mai fattibile.

E con questo passiamo al secondo problema.

4.1.2 Altro schema!

Il secondo problema mancava di ambientazione e continuava ad ispirarsi al mondo di Bartezzaghi:

> *Avete una scacchiera N×N, e uno zero per ogni casa; avete anche un altro quadrato, questa volta di lato* $(N – 1)×(N – 1)$*: se volete coprire un numero intero di case, il vostro quadrato andrà appoggiato in un angolo della scacchiera. Ogni volta che appoggiate il quadrato, per ogni singola casella coperta si aggiunge* 1 *o si toglie* 1 *secondo una regola a vostra scelta; indi, sollevate il quadrato e lo posate in un altro angolo della scacchiera a vostra scelta, e ricominciate con un'altra regola. Il vostro scopo è di ottenere (non necessariamente in ordine) sulla scacchiera tutti i valori da* 1 *a* N^2*. Si può? Se sì, per quali valori di N? Se no, perché?*

Senza por tempo in mezzo, vi passiamo la soluzione di ***trentatre***:

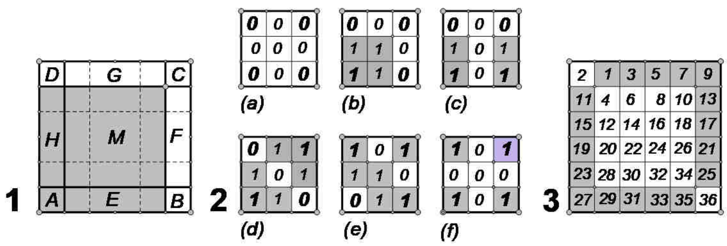
Nelle scacchiera $N \times N$ indico (fig. 1)

A, B, C, D: le quattro caselle ai vertici – E, F, G, H : le zone del bordo – M : la zona centrale

Q_A, Q_B, Q_C, Q_D : i quadrati di lato $(N-1)$ appoggiati ai vertici rispettivi, con –1 opp. +1 in ogni casella

n_A, n_B, n_C, n_D : il numero di questi quadrati

$f(n) = 0/1$: la funzione parità (0/1 se l'intero n è pari/dispari).



Valgono le

* dato N il n° di caselle nelle diverse zone è

[1] 1 in A,B,C,D ; $(N-2)$ in E,F,G,H ; $(N-2)^2$ in M

* la zona M è coperta da tutti quadrati Q_A, Q_B, Q_C, Q_D (in fig.1 Q_A è in grigio), E è coperta dai Q_A, Q_B ecc.

* in una zona coperta da n quadrati Q, le caselle hanno solo i valori compresi in $[-n,+n]$ <u>con la parità di n</u>

- infatti il primo Q produce –1 oppure +1, e ogni altro Q aggiunge o toglie 1 cambiando la parità

p.es. se i Q sono 3 i valori sono $(-3,-1,+1,+3)$, se sono 4 $(-4,-2,0,+2,+4)$

* la parità delle caselle dipende solo da quella dei numeri n_A, n_B, n_C, n_D cioè dai quattro valori 0/1

[2] $p_A = f(n_A),\ p_B = f(n_B),\ p_C = f(n_C),\ p_D = f(n_D)$

* la parità di ogni zona (e di tutte le sue caselle) si può rappresentare con le forme ridotte di fig. 2; le sei forme sono (salvo rotazioni e ribaltamenti) <u>tutte i possibili casi</u> di valori p_A, p_B, p_C, p_D nei 4 vertici

* nelle altre 5 caselle i valori 0/1 (in bianco e grigio) si calcolano dai precedenti

p.es. E è coperta da Q_A, Q_B e il suo valore è $p_A + p_B$

M è coperta da Q_A, Q_B, Q_C, Q_D e il valore è $p_A + p_B + p_B + p_C$

nb. si applica la <u>somma booleana</u> (che vale per i valori di parità) cioè $0+0=1+1=0$, $0+1=1+0=1$

[3] con una serie di quadrati Q è possibile assegnare <u>a ogni casella un qualsiasi valore</u>

- infatti <u>una coppia</u> di Q può annullarsi completamente (con valori opposti +1 e –1) in tutte le caselle salvo una sola dove può (con valori concordi) aggiungere o togliere 2

* da ognuna delle forme di fig. 2, dato N e con i valori [1] si possono calcolare i numeri m_0, m_1 di caselle pari e dispari di tutta la scacchiera, con $m_0 + m_1 = N^2$, e quindi la differenza fra dispari e pari cioè $\Delta = m_1 - m_0 = N^2 - 2m_0$

* tralasciando (a) che dà solo valori pari e non può essere una soluzione, si ha

[4] $\Delta(b) = N^2 - 4N + 2$, $\Delta(c) = -N^2 + 4N - 4$, $\Delta(d) = -N^2 + 8N - 12$
$\Delta(e) = -N^2 + 4N - 6$, $\Delta(f) = -N^2 + 8$

p.es. in (b) : $m_0 = 3 + 2(N-2) = 2N - 1 \rightarrow \Delta(b) = N^2 - 4N + 2$

* per $N = 2$ la soluzione è ovvia; ogni Q corrisponde a una sola casella e con 10 quadrati Q (1+2+3+4 nei vertici) si hanno i valori $[1,2,3,4]$

* per $N = 8$ e superiori <u>non esiste soluzione</u>

- infatti la zona M contiene più numeri pari (o dispari) di quelli richiesti in $[1,2,\dots N^2]$

p.es. $N = 8$, in M ci sono $(8-2)^2 = 36$ caselle di uguale parità, in $[1,2,\dots 8^2]$ ce ne sono 32

* la differenza Δ (fra dispari e pari) in $[1,2,\dots N^2]$ può essere solo $\Delta = 0$ (N pari) o $\Delta = 1$ (N dispari); applicando le [4] ai casi $N = 3,4,5,6,7$ <u>l'unico caso possibile</u> (che fornisce 0 o 1) è $N = 6$ con lo schema (d) cioè $\Delta(d) = -6^2 + 8 \cdot 6 - 12 = 0$.

In definitiva <u>le uniche soluzioni possibili sono $N = 2$ e $N = 6$</u>.

* la scacchiera 6x6 si ottiene ponendo un Q nei vertici 1, e coppie di Q con il procedimento [3] fino al risultato. In fig. 3 una soluzione indicativa con i valori $[1,2,\ldots 6^2]$ collocati secondo (*d*).

Sfruttando [3] tutti i valori pari si possono permutare fra loro, e così i dispari. Si hanno quindi – incluse rotazioni e simmetrie – $(18!)^2$; 4×10^{31} disposizioni diverse dei 36 numeri.

Il minimo numero di Q necessari per una soluzione 6x6 è 38 (ma in fig. 3 ne occorrono 2 di più).

Per non scordare che esistono stili diversi nel risolvere i problemi, ci sembra importante mostrarvi anche la soluzione di ***Valter***:

Osservando MOD2 i numeri in scacchiera, risulta indifferente aggiungere o togliere un 1 (1 ≡ –1 MOD2 quindi sommando 1 oppure –1 ottengo lo stesso risultato modulo 2). Deduco, quindi, che dove appoggio il quadrato (N–1)x(N–1) i numeri passano da pari a dispari e viceversa.

Inizialmente il quadrato NxN ha uno zero in ogni casa, quindi ha tutti numeri pari.

Numero da destra a sinistra e dall'alto verso il basso righe e colonne per avere le coordinate di ogni casa.

Le case con entrambe le 2 coordinate comprese fra 2 e N–1 sono sempre coperte comunque appoggi. (il quadrato centrale con tali coordinate ha, quindi, tutti numeri ≡ MOD2).

Al termine di tutti gli appoggi, perciò, tale quadrato avrà o tutti numeri pari o tutti dispari.

Propongo una strategia per ottenere tutti i valori da 1 a N^2 (e cerco di dimostrare che permette di ottenere sempre tutti gli X^2 per qualsiasi quadrato). Ottengo i primi 4 X^2 partendo da N appoggiando a partire dalle case nell'ordine: (1, 1), (1, 2), (2, 1) e (2, 2). Si può fare agevolmente; un modo potrebbe essere:

- appoggio N^2 volte con angolo superiore sinistro del quadrato (N–1)x(N–1) nella casa (1, 1) sommando 1

- in base al numero presente nella casa (1, 2) appoggio/sottraggo quanto basta per ottenere $(N-1)^2$

- stesso discorso per le altre due case.

Per quanto detto schematizzo MOD2 la situazione finale in scacchiera per N pari

(discorso analogo si può fare in caso di N dispari).

Indico con P se il numero è pari altrimenti con D:

P	D	D	D	D	D	D	D	D	D
P	D	D	D	D	D	D	D	D	D
P	D	D	D	D	D	D	D	D	D
P	D	D	D	D	D	D	D	D	D
P	D	D	D	D	D	D	D	D	D
P	D	D	D	D	D	D	D	D	D
P	D	D	D	D	D	D	D	D	D
P	D	D	D	D	D	D	D	D	D
P	D	D	D	D	D	D	D	D	D
P	D	D	D	D	D	D	D	D	D

Per capirci: quando p.e. ho finito con la cella (1, 2) non vario più la riga 1 quindi rimane tutta a "D" (idem per la cella (2, 1) e la colonna 1; poi con (2, 2) finisco lasciando tutto sino alla cella (N, N) a "D"). Si può quindi notare che in 2 righe/colonne di contorno ci sono P/D sufficienti per tutti gli altri X^2.

Faccio un esempio che dovrebbe spiegare in metodo:

- in (1, 3) che è "D" decido di ottenere 7^2

- indico con A il numero di appoggi totali su tale cella
- essendo A "D" se sottraggo 49 ottengo un numero pari (A ha avuto sicuramente un numero di appoggi > 49 per quanto detto)
- per (A – 49)/2 + 49 volte sommo 1 e per le restanti (A – 49)/2 sommo –1.

E con questo siamo arrivati al fondo, sperando che abbiate gradito l'alternanza di ***trentatre*** e ***Valter***, e soprattutto che anche altri siano ispirati e ci scrivano. Grazie a tutti e alla prossima!

5. Quick & Dirty

In un ipercubo n-dimensionale di lato k state giocando a *Kia* (o a *Kiletto,* ma il termine non ci piace), che sarebbe la versione della *Tria* o del *Filetto* in cui anziché "tre in fila" dovete metterne k. Quante sono le *Kie* possibili?

> *Sono* $[(k+2)^n - k^n]/2$. *Per capire come viene ricavata la formula, si consideri un caso specifico tridimensionale, ad esempio un cubo* $8\times8\times8$.
>
> *Lo si circondi di un "guscio" dello spessore di un cubetto (ottenendo un cubo* $10\times10\times10$*), e si immagini ogni "Ottia" prolungata nel guscio: ognuna di esse termina in due cubi (contrapposti) del guscio, e ogni cubetto del guscio appartiene ad una e una sola Ottia. Quindi ogni Ottia corrisponde ad un'unica coppia di cubetti del guscio, e il numero delle Ottie è la metà del numero di cubetti del guscio, e quindi* $(10^3 - 8^3)/2$. *Generalizzando il ragionamento e considerando che il lato dell'ipercubo "con guscio" è sempre di due (iper)cubetti maggiore dell'originale, si ottiene la soluzione per le Kie.*

6. Pagina 46

Il tutto si dimostra facilmente per induzione.

Il caso n=1 è banale: A = P = S = {1}; T = 1 = 2! – 1. Supponiamo l'affermazione valida per $n = 1, 2, 3, \ldots, k-1$ e consideriamo il caso N = {1, 2, 3, …, k}.

Un sottoinsieme di A o contiene o non contiene l'intero k: quelli che non lo contengono, sono anche sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, \ldots, k-1\}$, per i quali il teorema si considera dimostrato e per i quali si ha $T_1 = k! - 1$.

Ora, dalla condizione di non consecutività, un sottoinsieme di A contenente k è composto o dal solo intero k o da k in combinazione con un accettabile sottoinsieme (non vuoto) di $\{1, 2, 3, \ldots, k-2\}$.

Per $\{1, 2, 3, \ldots, k-2\}$ la premessa dell'induzione ci fornisce un risultato pari a $(k-1)! - 1$, e se k viene aggiunto ad ognuno dei sottoinsiemi compatibili con le premesse, la moltiplicazione, elevazione al quadrato e somma ci poterà ad un risultato aumentato di k^2. In sostanza, la somma parziale dovuta ai sottoinsiemi che contengono k in combinazione con un sottoinsieme non vuoto di $\{1, 2, 3, \ldots, k-2\}$ è:

$$k^2\,[(k-1)! - 1] = k\,k! - k^2.$$

Se ricordiamo il k^2 (contributo del sottoinsieme avente solo k come elemento), vediamo che i sottoinsiemi contenenti k forniscono un contributo pari a:

$$T_2 = (k\,k! - k^2) + k^2 = k\,k!.$$

Il totale risulta quindi essere:

$$T = T_1 + T_2 = k! - 1 + k\,k! = (k+1)k! - 1 = (k+1)! - 1.$$

Da cui segue la tesi.

7. Paraphernalia Mathematica

Nel caso vi chiediate quando la finiamo con 'sta roba, abbiamo tre brutte notizie:

1. Stiamo scopiazzando da una serie di articoli
2. Gli articoli sono nove
3. Siamo all'inizio del terzo.

In pratica, prima della fine rischiamo di avere come numero di capitolo qualche oggetto del contendere.

7.1 La legge dei numeri VERAMENTE grandi [3] – Saper leggere e (soprattutto) scrivere.

Dopo i mostri che abbiamo visto nelle puntate precedenti, risulta abbastanza chiaro che se vogliamo andare oltre dobbiamo inventarci una qualche forma di notazione: a meno di usare un'intera pagina (e un microscopio), anche la *Power Tower* mostra la sua incapacità nell'esprimere numeri decisamente grandi.

Un'idea simpatica passa per la definizione di nuovi operatori: in realtà l'abbiamo già vista in un paio di casi particolari (i numeri di Graham e il Moser alla fine della puntata precedente), ma esiste un procedimento "formale" interessante. Mettiamo qui la risposta alla domanda che tutti quanti vi farete: sì, si può espandere. Lo faremo, tranquilli.

L'idea è di stabilire una "gerarchia" di operazioni, partendo da quelle semplici, inventandosi una notazione generalizzata, definendole in modi "simili" e poi procedere alla generalizzazione; ma forse, è più semplice se facciamo uno schemino.

Operazione	Rappr.	Def. Assoluta	Definizione Induttiva
Addizione	$a+b$ $a①b$		Successore di $a+(b-1)$ Successore di $(a-1)+b$
Moltiplicazione	$a*b$ $a②b$	$a+a+\ldots+a$	$a+(a\cdot(b-1))$ $(a\cdot(b-1))+a$
Esponenziazione	a^b a^b $a\uparrow b$ $a③b$	$a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$	$a\cdot(a^{(b-1)})$ $(a^{(b-1)})\cdot a$
Tetrazione	a^^b $a\uparrow\uparrow b$ $a④b$	a^(a^(a^(…^a))	a^($a④(b-1)$)

(Nome dell'ultimo inventato: *tetration, hyper-4*, come preferite).

E se vi viene da continuare, fate pure, noi ci arriviamo tra un po'.

Cominciamo con i problemi, poi passiamo al divertimento: qui, il problema consiste nel definire le "inverse" di livello 4, in particolare il *tetralogaritmo* la *radice tetrica* (anche qui, appena inventati, e ne siamo fieri, soprattutto della seconda); questi sono particolarmente utili se volete calcolare (ad esempio) 2④2.5, o pigreco tetrato e (nel senso di base dei logaritmi naturali). Ci limitiamo a dire che le definizioni sono insoddisfacenti e sorvoliamo, che esistono cose più interessanti: se interessa, basta chiedere.

Adesso, tutti starete pensando a come fare un passo avanti; beh, ***Constantin Rubtsov*** ha invece provato a fare un passo *indietro*: l'addizione è una "scorciatoia" del contare, giusto? Bene, allora definiamo:

$$a⓪b = \mathrm{MAX}(a, b) + 1$$

Il che, quando avete finito di ridere, vi porterà probabilmente ad un'illuminazione su cosa significhi *sistema formale* (oh, giusto per completezza: se $a=b$, $a⓪b=a+2$. Ci sarebbero un altro paio di definizioni se uno dei due vale meno infinito, ma ci sembrano pretestuose); notate che la cosa è molto coerente, visto che la funzione definisce il "successore", che è la funzione che abbiamo utilizzato per definire l'addizione.

...abbiamo dei problemi a definire i logaritmi, da queste parti, ma sul "tetrafattoriale" in realtà si gioca a chi la spara più grossa: al momento, sembra in vantaggio ***Pickover***, che si è anche inventato il simbolo (lui lo ha chiamato "superfattoriale", e il simbolo è – con *molta* fantasia – un segno di fattoriale con una "S" sopra):

$$n\$ = n!④n! = n!\hat{}(n!\hat{}(n!\hat{}(\ldots)))$$

Dove il simbolo "$n!\hat{}$" è ripetuto $n!$ Volte.

...espansioni, dicevamo. Beh, non dovrebbe essere difficile: sorvoliamo sul nome, che potete tranquillamente inventarvi da soli:

Rappresentazione	Def. Assoluta	Def. Induttiva
a^^^b $a\uparrow\uparrow\uparrow b$ a⑤b	a④(a④(...④a))	a④(a⑤($b-1$))
a^^^^b $a\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow b$ a⑥b	a⑤(a⑤(...⑤a))	a⑤(a⑥($b-1$))

...e avanti così

Anche qui, *Bowers* ha deciso di inventarsi qualche nome: cominciamo da quelli piccoli.

Basandosi sull'assonanza con il *googol* e il *googolplex*, ha definito:

1 giggol = 10④100

1 giggolplex = 10④(10④100)

Non sazio, ha definito il *trisetto* (*trisept*) come 7(7)7 (sì, dovrebbe essere un cerchio: al prossimo passaggio capite perché non lo è), il *tridecale* (triecal), 10(10)10 (più chiaro, adesso?) e il "*boogol"* (sempre per assonanza), che vale 10(100)10.

Il sospetto, a questo punto, è più di un sospetto.

Ma se un operatore diadico mostra uno schema, perché non lo trasformiamo in un operatore triadico?

Bravi ragazzi, sono fiero di voi. Non ne siamo sicuri (i nostri testi sono piuttosto reticenti in merito), ma pare anche questo sia colpa di Bowers.

Non lo mettiamo come formula per evitare guai, ma la logica è suppergiù questa:

Funzione	Definizione	Condizione
H(a, n, b) =	$1+b$	$n=0$
	$a+b$	$n=1$
	$a*b$	$n=2$
	a^b	$n=3$
	a^H(a, n, $b-1$)	$n=4$
	H(a, $n-1$, H(a, n, $b-1$))	$n>4$
	a	$n>1$, $b=1$

O, se preferite le cose più stringate:

Funzione	Definizione	Condizione
H(a, n, b) =	$1+b$	$n=0$
	a	$n=1$, $b=0$
	a	$n>1$, $b=1$
	H(a, $n-1$, H(a, n, $b-1$))	$n>0$

Il che semplifica notevolmente le cose, visto che se mettete, in notazione di Knuth, a("n" frecce)b, avete esattamente lo stesso risultato: potremmo inventarci le categorie dei funzionalisti (Bower, posto che sia lui) e dei notazionisti (Knuth), preparare i popcorn e guardarli "discutere", ma abbiamo cose più interessanti da raccontare.

...ma perché sosteniamo che sia stato Bower ad inventare questa notazione? Semplice: ha inventato una serie di regole sospettosamente imparentate con tutto questo, e qui siamo sicuri sia stato lui. Quello che si è inventato, è una notazione ***vettoriale*** delle funzioni, che noi racchiudiamo tra parentesi quadre. Attenzione che la (4), anche se sembra uno scherzo, diventerà importante più tardi.

1. Se il vettore ha uno o due elementi, sommateli: $[a] = a$, $[a, b] = a + b$.
2. Se la regola (1) non si applica e ci sono degli "1" in coda, rimuoveteli: $[a, b, 1] = [a, b] = a + b$, $[a, 1, 1] = a$.
3. Se le regole precedenti non si applicano e la seconda componente è un "1", tenete solo il primo elemento: $[a, 1, n] = a$.
4. Non esiste *(per ora)* una regola 4.
5. Se nessuna delle regole precedenti si applica, sostituite $[a, b, n]$ con $[a, [a, b–1, n], n – 1]$, e ricominciate da capo.

Il sospetto che il mandante sia sempre Bower nasce dal fatto che le regole sono (con la sola eccezione del caso n=0) perfettamente identiche alle definizioni della nostra funzione H, se prescindiamo dall'ordine degli operatori.

Ecco, adesso noi porgiamo le più profonde scuse a Knuth, ma non abbiamo la minima intenzione di stare a disegnar freccioline per il resto del fine settimana: diamo per scontata la sua notazione, anche perché è piuttosto semplice e intuitiva; in chiusura, ci limitiamo a dare un metodo (parziale, quindi insoddisfacente) per decidere quale numero è più grosso:

Quando confrontate $H(a, b, c)$ con $H(x, y, z)$:

1. Se a=x=1, i due numeri sono uguali.
2. Se a=1 e x>1, allora $H(x, y, z)$ è maggiore.
3. Se x=1 e a>1, allora $H(a, b, c)$ è maggiore.
4. Se a=c=x=z=2, i due numeri sono uguali.
5. Se y>b, allora $H(x, y, z)$ è maggiore.
6. Se b>y, allora $H(a, b, c)$ è maggiore.
7. Se b e y sono uguali, e se a>2, x>2, allora $H(a, b, c)$ è maggiore se c>z, o $H(x, y, z)$ è maggiore se z>c.

Il che, è molto insoddisfacente. Lascia fuori, se ci passate il termine, un *mucchio* di numeri...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms