Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 217 – Febbraio 2017 – Anno Diciannovesimo

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM216 ha diffuso 3'170 copie e il 12/02/2017 per Google eravamo in 8'180 pagine.

"...e, alla fine della strada, c'è la trattoria "da Möbius". La pasta la fanno loro! E la carne è molto buona". La pasta l'ha inventata ***Steve Kass***, ma la prima foto è sulla strada per *Chateau d'Alembert* (altrimenti noto come il Luogo del Divano Quantistico), mentre la terza (è proprio fatta così, non è "piegata") è comparsa nel piatto di Rudy qualche sera fa. Si sta ancora chiedendo come l'abbia tagliata il macellaio.

1. Avatar del secolo

"Ci troviamo nella posizione usuale degli scienziati, quella in cui dobbiamo accontentarci di miglioramenti frammentari. Possiamo rendere molte cose un po' più chiare, ma non possiamo rendere davvero chiaro alcunché."

Siamo nel bel mezzo della seconda metà della seconda decade del ventunesimo secolo.

Di per sé, non si può certo dire che si tratti di un evento eccezionale: il tempo ha questa strana abitudine di continuare a passare, e lo fa con una regolarità e costanza sorprendenti. L'aritmetica gli fornisce servizievolmente sempre dei numeri nuovi per battezzare i suoi anni, e non sembra esserci nessuna ragione di sorprendersi.

Ciò nonostante ci sono degli aspetti, nei numeri scritti sui calendari in corso, che lasciano adito a considerazioni che portano un certo senso di meraviglia, almeno in alcune persone[1]. E la meraviglia può essere ben compresa con salti lunghi una decina di lustri appena, e con l'aiuto di un paio di materie che sembrano avere pochissimo in comune.

In pieni Anni Sessanta del Novecento, la fantascienza viveva una sorta di età dell'oro. Tecnicamente, gli esperti di fantascienza sono soliti chiamare "Età dell'Oro della fantascienza" un periodo precedente, quello che grosso modo va da 1938 alla fine della seconda guerra mondiale: ed è effettivamente questo il periodo in cui la SF, la "science fiction", si afferma come genere, arriva al grande pubblico, vede il proliferare di innumerevoli riviste e genera una gran quantità di autori che segneranno per sempre la storia della fantascienza. Le opere più celebri di Isaac Asimov, Ray Bradbury, Fredric Brown, Arthur Clarke, Robert Heinlein, Clifford Simak, Theodore Sturgeon, Jack Vance, appartengono tutte a questo periodo[2]. Ma questa è l'Età dell'Oro propriamente detta, quella veicolata soprattutto dalla carta stampata, ed era carta principalmente di riviste, prima ancora che di libri. Quella a cui facciamo riferimento adesso è invece la fantascienza visuale, quella che abita soprattutto i film e i telefilm.

Ai giorni nostri la fantascienza cinematografica è un genere solido, consolidato, con una vasta quantità di sottogeneri. Si fa persino fatica a capire quali prodotti possano effettivamente essere lecitamente etichettati con il marchio SF[3]; tutti i supereroi dei fumetti della Marvel e della DC Comics hanno avuto l'onore di essere promossi al grande schermo dagli studios di Hollywood, ma non è automatico il loro inserimento teorico nel computo dei film fantascientifici. A dirla tutta, persino la saga di Star Wars, che ha certo maggior diritto all'inserimento nel catalogo della SF di quanto ne possano rivendicare Silver Surfer o il Doctor Strange, è forse più vicina, come struttura e contenuti, ai protocolli del genere fantasy che a quelli della fantascienza.

[1] Segnatamente a quelle che, come chi scrive, non possono più dirsi in "verde età"…

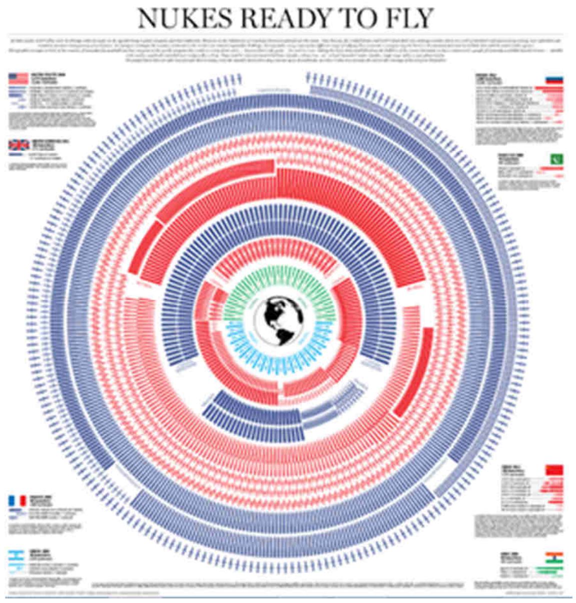
[2] E, da vecchi cultori del genere, siamo imbarazzati a tralasciarne altrettanti, se non di più: Anderson, Bester, Blish, Clement, Sprague de Camp, Del Rey, Kornbluth, Leiber, Oliver, Pohl, Van Vogt, Williamson, Wyndham… e se non parliamo di altri mostri sacri come H.G. Wells o Campbell, è solo perché sono precedenti al periodo indicato: e meno che mai dimentichiamo i sommi Robert Sheckley e Philip K. Dick, che invece sono successivi. Poi, certo… è arrivato Douglas Noel Adams e ha semplicemente rivoluzionato il genere, oltre che portare il primato in Europa.

[3] Va riconosciuto che già settant'anni fa gli esperti tendevano quantomeno a distinguere tra "SF" ("vera" fantascienza) e "sci-fi", fantascienza di bassa qualità con poco o nullo contenuto scientifico.

1 *Un grande classico, uno dei pochi più famosi come film che come libro*

C'è però stato un periodo in cui i film di fantascienza si mettevano in gioco, sbilanciandosi in previsioni: o, quantomeno, così poteva sembrare a prima vista, dato che l'anno in cui si sarebbero dovute svolgere le vicende narrate era esplicitamente dichiarato, e molto spesso direttamente nel titolo. Due grandi romanzi classici della fantascienza come "1984" di Orwell e "2001 Odissea nello spazio" di Clarke, del resto, avevano fatto lo stesso già quando uscirono in libreria, e non potevano certo non conservare il titolo quando si sono trasformati in film; ma molti altri non hanno esitato a seguire l'esempio. Se "Star Trek" ha aggirato il problema tramite l'artificio della "data astrale" che non ci è dato esattamente sapere come si innesti nel nostro banale calendario gregoriano, "Ritorno al Futuro" è ormai tragicamente coniugabile solo al passato, perché tutti e tre i tempi della saga (sempre nei dintorni del 21 ottobre, ma degli anni 1955, 1985 e 2015) sono ormai stati consegnati alla storia. La serie tv "Spazio 1999", piena di signori e signore in lucenti tute futuristiche, raccontava cose che avrebbero dovuto già essere accadute nel passato millennio; e anche se c'è tecnicamente ancora qualche margine temporale, è assai improbabile che fra due anni Los Angeles corrisponderà a quella descritta in "Blade Runner".

È del tutto evidente che il compito – se mai ne esiste uno – della fantascienza non è certo quello di prevedere il futuro, ma tutt'al più quello di svolgere un esercizio di elaborazione narrativa partendo da alcune premesse riconoscibili nella scienza del presente. Non a caso una delle maggiori riviste del genere ha scelto come nome "If", e si è guardata bene dal chiamarsi "When". E se oggi il bilancio delle previsioni che hanno colto nel segno risulta tragicamente in rosso, significa che le premesse su cui gli autori hanno lavorato mezzo secolo fa erano profondamente sbagliate. I temi classici di quel periodo non erano in fondo molti: astronavi, viaggi nel tempo, rapporti con gli alieni, robot, apocalisse nucleare e cronache del dopo-bomba. È quasi con sorpresa che si constata, oggi, come quei temi che apparivano allora di valenza universale fossero invece per la maggior parte strettamente legati alle cronache (e alle paure) del tempo. Astronavi e robot cantano il progresso di un mondo industriale che sembra in costante e trionfale incremento, senza nessun vincolo economico e meno che mai ambientale. Il viaggio nel tempo e le velocità ultraluminali sono argomenti propri della Teoria della Relatività, che pur essendo ancora oggi uno dei cardini più solidi della fisica, è proprio in quei tempi che si configura come un mantra nell'accezione popolare: si sa che funziona, che è difficile comprenderla, e proprio per questo diventa giusto e affascinante provare a narrarla; nessun'altra teoria scientifica ha fornito così tanto lavoro agli sceneggiatori. E le invasioni aliene, le guerre nello spazio o su una Terra desertificata dai marziani o dagli uomini stessi, altro non sono che un riflesso della paura che la Guerra Fredda potesse trasformarsi, prima o poi, in una tragedia rovente.



2 *L'arsenale nucleare oggi. Vale la pena andarsi a guardare l'immagine in dettaglio qui: http://i.imgur.com/s8vaVY4.gif*

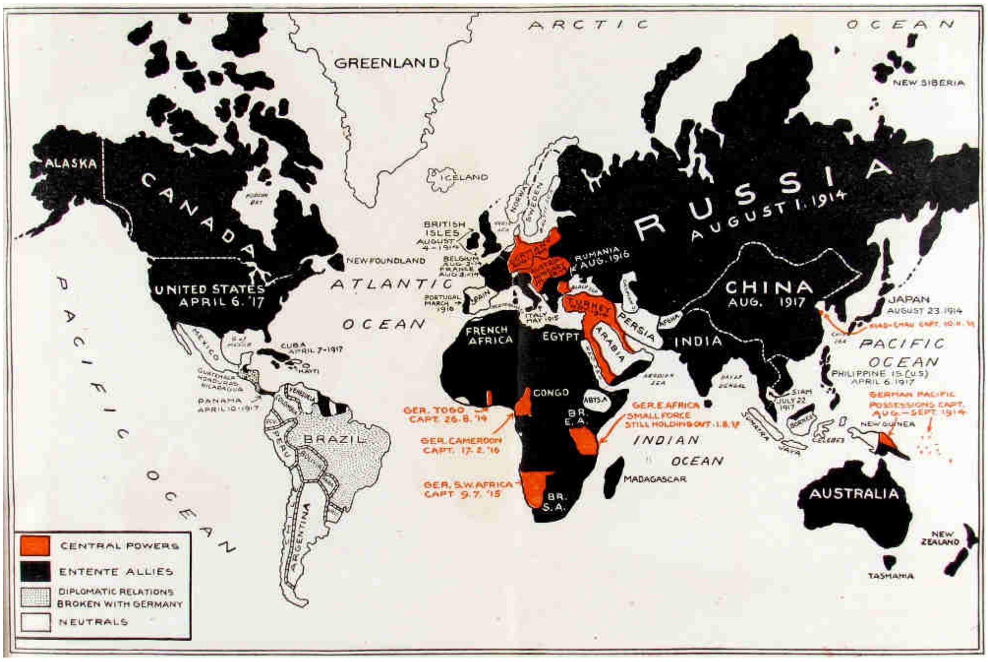
Premesse cambiate abbastanza radicalmente: forse anche in maniera troppo frettolosa. Non c'era dodicenne, a quei tempi, che non volesse viaggiare più veloce della luce; ma nel contempo, ogni adolescente era ragionevolmente consapevole che gli arsenali del mondo traboccavano di ordigni creati apposta per distruggere al meglio buona parte del pianeta. Quegli ordigni ci sono ancora, ma non fanno più paura: e quest'assenza di timore non è automaticamente da annoverare tra i sintomi di una moderna saggezza. In compenso, quei dodicenni aprivano la bocca per lo stupore quando sentivano che da qualche parte c'erano scontri di religione: "possibile che irlandesi e inglesi si sparino addosso per questioni di cristianesimo cattolico o protestante?", si chiedevano increduli. "Davvero India e Pakistan si guardano in cagnesco perché adorano divinità diverse, anche adesso che siamo arrivati sulla Luna? Adesso che dobbiamo costruire le macchine che ci porteranno fuori dal Sistema Solare?"

Per contro, gli adolescenti di oggi probabilmente pensano che buona parte dei problemi del mondo siano naturali conseguenze di differenze culturali, soprattutto religiose. Forse addirittura si sorprendono, fanno fatica a capire eventuali conflitti tra correligionari.

Altre premesse, invece, non sono quasi state prese in considerazione dalla fantascienza di allora; c'era certo la visione delle macchine da calcolo, e la previsione che sarebbero diventate sempre più grandi e più potenti: e dotate di una potenza non solo elaborativa, ma anche creativa, e con capacità di giudizio. Ma la fantasia degli scrittori si limitava in genere a farle crescere in dimensione e capacità, lasciandole comunque ineluttabilmente sole con loro stesse. Non ci si aspettava che un computer dialogasse con un altro computer, e in genere si interfacciava quasi esclusivamente con un personaggio che incarnava splendidamente una delle professioni più ambite dagli amanti del futuro: il Programmatore. L'idea di una crescita esponenziale delle connessioni tra computer anche minuscoli, unita alla possibilità di interazione con essi di personale niente affatto specializzato, come il bambino delle elementari, la pensionata dell'Arkansas o l'impiegato del catasto di Rawalpindi, non è mai stata seriamente presa in considerazione: eppure è stato il più evidente dei colpi di scena del "futuro", e noi siamo ormai abituati a chiamarlo Internet.

Il secondo dopoguerra era già un futuro, peraltro, dal punto di vista degli esseri umani che abitavano il pianeta cento anni fa, nel bel mezzo della seconda metà della seconda decade del ventesimo secolo. Un futuro ancora meno immaginabile, a ben vedere; se hanno ragione gli storici che sono ormai propensi a leggere i due grandi conflitti mondiali del ventesimo secolo come due fasi di un solo grande evento bellico durato trent'anni, dal 1914 al 1945, come devono essersi sentiti un secolo fa coloro che, quasi senza preavviso, si sono ritrovati nel giro di pochi mesi da una situazione di placida calma (almeno per l'uomo comune dell'Occidente) dentro ad uno sconvolgimento fatto di fango e disperazione, che avrebbe cancellato – e per sempre – il mondo che credevano eterno, e che era l'unico in cui immaginavano di poter vivere?

Il mondo del 1917 si trovava in una terribile strettoia della storia; i morti nelle trincee erano solo uno dei sintomi di uno stravolgimento di enormi dimensioni e di lunghissima durata. Nei secoli precedenti le potenze europee avevano colonizzato e sfruttato il mondo intero, e si erano organizzate all'interno con un equilibrio gerarchico che, seppur apparentemente stabile perché vecchio di secoli, era già più fragile di quanto fosse lecito aspettarsi. Nel giro di meno di un secolo, le stesse potenze si distruggeranno a vicenda, poi dovranno fronteggiare sconvolgimenti sociali e rivoluzionari interni, e infine – ai giorni nostri, ormai – dovranno fare i conti con la parte del pianeta che da quattro secoli si sente violentata dall'Occidente.



3 *Il mondo cent'anni fa. Schieramenti neri o rossi a parte, tutti i continenti sono virtualmente dominati da europei o discendenti di europei.*

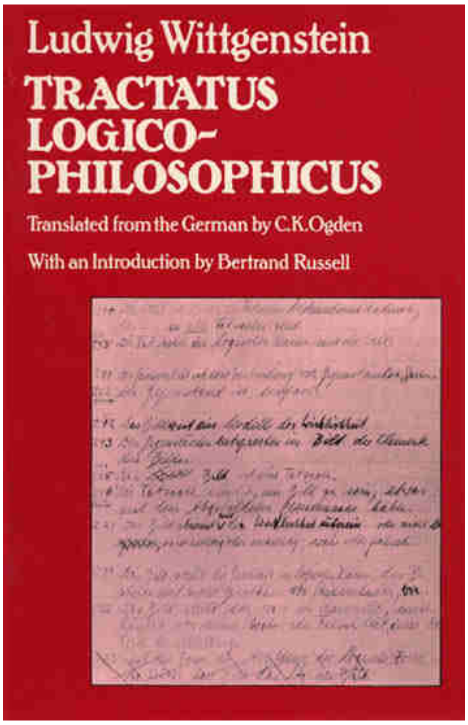
Non potevano immaginarlo, gli esseri umani di inizio Novecento. Ed è difficile immaginare per noi quali dovessero essere gli interessi, le preoccupazioni, le visioni del mondo di quelle persone. Un piccolo indizio di quanta distanza possa esserci tra l'umanità di oggi e quella di allora potrebbe forse essere estratto dalla storia della scienza. Forse è solo una combinazione, una convergenza figlia del caso più che dalle ragioni storiche, ma resta il fatto che l'inizio del Novecento è un periodo in cui i maggiori sforzi intellettuali scientifici sembrano diretti soprattutto alla ricerca teorica dei fondamenti, alla critica razionale delle basi di ogni disciplina figlia della filosofia naturale: proprio quella ricerca che oggi, un secolo dopo, sembra invece quasi del tutto dormiente. È possibile che la distanza di interessi dipenda semplicemente dall'evasione dei temi da un'agenda ideale: era necessaria una revisione dei fondamenti, è stata fatta, e si procede oltre. Ma potrebbe anche darsi il caso che la speculazione teorica sia lecita, praticabile, affascinante solo in periodi storici ancora privi del senso dell'urgenza. Gli Anni Sessanta del Novecento e il mezzo secolo che ne è seguito sembrano votati ad indagini complesse, varie, diffuse: in qualche modo, in un approccio scientifico che è soprattutto tecnologico, non speculativo. Prima che la Grande Guerra cambiasse definitivamente la faccia del pianeta, i fisici teorici rivoluzionavano la fisica classica, i matematici demolivano i fondamenti della logica e della loro scienza stessa, e i filosofi cercavano di mettere insieme i pezzi del giocattolo positivista rotto, peraltro senza troppo successo.

Uno dei luoghi più rappresentativi del fervore intellettuale di inizio secolo è il Wiener Kreis, il Circolo di Vienna[4]: e il destino sia della città, sia del circolo ben riepilogano il

[4] Ci è già capitato di parlare del Circolo di Vienna in altri due compleanni, e non a caso parlando entrambe le volte di logici rivoluzionari: Kurt Gödel ("*Assolutamente e completamente determinato*", RM089, Aprile 2006), che demolisce l'idea di completezza, e Alfred Tarski ("*La, tutta la, nient'altro che la*", RM096, Gennaio 2007), che demolisce il concetto di verità.

declino del mondo in cui si sviluppano. Vienna nel 1914 è una delle grandi capitali imperiali del mondo, ma si ritroverà in breve ad convivere con un passato ben più grandioso del ruolo che l'Austria avrà nel resto del XX e nel XXI secolo; e quel Circolo che raccoglie un gran numero dei maggiori intelletti dell'epoca scompare rapidamente e brutalmente quando il suo fondatore, Moritz Schlick, viene assassinato dai nazisti.

Il Wiener Kreis ha una sorta di "nucleo interno" e una vasta "periferia", dal punto di vista dei componenti. I nucleo interno annovera nomi come Rudolf Carnap, Philipp Frank, Kurt Gödel, Hans Hahn, Olga Hahn-Neurath, Karl Menger, Moritz Schlick, Friedrich Waismann, Edgar Zilsel. La periferia, ovvero l'insieme di intellettuali che pur non essendo fisicamente presenti alle riunioni del Circolo mantengono contatti assidui con i componenti, vede tra gli altri Karl Popper, Willard Van Orman Quine, Alfred Tarski, Olga Taussky-Todd[5] e Oskar Morgenstern.



4 *Il "Tractatus" di Wittgenstein*

Il nome più famoso, tra i collaboratori esterni del Circolo, è però probabilmente quello di Ludwig Wittgenstein. All'età di trentadue anni, nel 1921, Wittgenstein pubblica quella che resterà di fatto la sua sola opera: il "*Tractatus Logico-Philosophicus*". Il nome richiama e omaggia l'opera fondamentale di Baruch Spinoza, il Tractatus Theologico-Politicus, e si compone appena di una settantina di pagine. Nonostante la brevità, è certamente uno dei testi filosofici più importanti del ventesimo secolo, anche se sulla sua interpretazione non si può dire che ci sia piena consonanza di opinioni.

È certo un testo di logica: Wittgenstein è un estimatore di Gottlob Frege, ha letto con avidità i *Principia Mathematica* di Bertrand Russell[6] e Alfred North Whitehead, e nel suo libro traspare continuamente l'interesse per il linguaggio, e non solo per il linguaggio matematico. La stessa struttura del libro, organizzata in proposizioni successive, palesa almeno l'intenzione di indagare filosoficamente la logica del linguaggio, partendo da assiomi che ricordano quelli matematici. Nonostante la complessità (e in molti casi l'ermeticità) dell'opera, le sue sette "asserzioni principali" che governano tutto il testo sono spesso ricordate anche al di fuori del mondo degli specialisti, dalla prima ("*Il mondo è tutto ciò che accade*") fino alla settima e ultima, che è citata spessissimo, e assai frequentemente fuori contesto, o con intenti decisamente traslati: "*Su ciò di cui non si è in grado di parlare, si deve tacere*".

Il Tractatus ha un impatto forte e deciso sul mondo intellettuale, ed è un impatto trasversale. Logici, linguisti, filosofi, matematici ne sono influenzati, e ne propongono diverse interpretazioni. Il nome di Wittgenstein diventa celebre e viene citato anche ben al di fuori dell'Austria, e influenza molti giovani interessati alla logica. Ma, a ulteriore dimostrazione del fatto che la critica dei fondamenti era un tema assai caro agli intellettuali dell'epoca e non il morboso interesse di un singolo, può essere opportuno ricordare che gli stessi temi, seppur con minore intensità e pregnanza, furono affrontati da un matematico ancora più giovane di Wittgenstein, al quale il destino non lasciò neppure il tempo di raggiungere la piena maturità intellettuale, e che pure era già abbastanza brillante da far parte anche lui della "periferia" del Circolo di Vienna.

[5] Parliamo di lei in "*Alieni*", RM139, Agosto 2010.

[6] Di Russell (e un po' di Frege) parliamo in uno dei primi compleanni di RM: "Nemesi", Maggio 2003, RM053.


5 *Frank Ramsey (versione ufficiale)*

Frank Plumpton Ramsey nasce a Cambridge il 22 febbraio 1903. Già la città di nascita palesa in un certo senso le sue origini familiari: è improbabile nascere a Cambridge se non si è appartenenti all'ambiente accademico inglese, e infatti suo padre Arthur è il preside del Magdalene College.

Ha solo dodici anni quando entra al Winchester College, da cui uscirà cinque anni dopo con una borsa di studio per uno dei college più prestigiosi dell'università, il Trinity.

Dal 1920 studia matematica, e con risultati brillanti: il suo nome è tra i migliori laureati del 1923. Dopo un breve viaggio a Vienna, rientra a Cambridge nel 1924, e qui viene eletto "fellow" del King's College: la cosa è tutt'altro che normale, e non solo per l'età di Frank, che ha appena ventun anni, ma anche e soprattutto per il prestigio del King's, che evitava con rigore quasi assoluto di nominare "fellow" chi non fosse stato uno studente del college.

Corre l'anno 1926 quando Frank, già sposato da un anno, diventa "Direttore degli Studi di Matematica" al King's College, e si fa subito notare come docente appassionato e straordinariamente brillante. Del resto, nell'anno precedente ha già pubblicato *The Foundations of Mathematics*, un libro di grande successo che ha la chiara intenzione di proseguire il percorso iniziato dai *Principia* di Russell e Whitehead. A costo di sembrare ripetitivi, è comunque opportuno ricordare che Frank Ramsey all'epoca ha appena ventitré anni. Il suo testo avanza ipotesi consistenti su come risolvere i paradossi di Russell, e in generale disamina ed esplora le dipendenze della matematica dalla logica.

Nel 1928 di anni ne ha venticinque, ed in quest'anno che legge in pubblico, durante una riunione della Società Matematica di Londra, la sua memoria intitolata "*Su un problema di logica formale*", un'opera[7] così significativa da dare il via ad una intera nuova sezione della matematica: contiene in nuce una teoria che discende da una nuova visione del calcolo combinatorio, quella che oggi viene infatti chiamata "Teoria di Ramsey". Abbastanza curiosamente, la nuova disciplina combinatoria non è l'oggetto principale della memoria di Ramsey, quanto uno strumento per affrontare il problema di logica formale enunciato nel titolo. Ancora oggi si riconosce che la Teoria di Ramsey fornisce eccellenti vie di approccio al calcolo combinatorio, dopo aver letteralmente rivoluzionato la Teoria dei Grafi e aver semplificato un gran numero di dimostrazioni che in precedenza risultavano oltremodo complesse.

Ciò non di meno, il teorema che porta il suo nome, ideato per risolvere un caso speciale di un problema di decisione che rimane comunque indecidibile nel caso generale, è stato successivamente inglobato in un teorema più diretto e di maggior potenza; cosa che ha fatto dire impietosamente a qualcuno che "*la duratura fama di Ramsey nella matematica si basa su un teorema di cui non c'era bisogno e che è stato dimostrato nel tentativo di provare qualcosa che adesso sappiamo essere impossibile".* Una sintesi un po' crudele, soprattutto considerando che l'approccio di Ramsey è ancora fertile e studiato quasi un secolo dopo.

[7] La pubblicazione ufficiale avverrà due anni dopo, nel 1930.

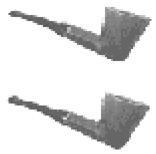
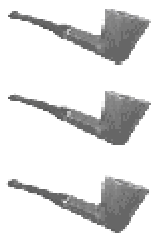
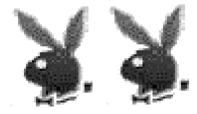
Frank, ad un'età che al giorno d'oggi è considerata appena un prolungamento dell'adolescenza, è già un accademico a tutto tondo: pur essendo interessato soprattutto ai fondamenti della matematica e alla logica, non disdegna di analizzare la sezione della matematica che ha più diretto contatto con le ambasce degli esseri umani, l'economia. È appena ventitreenne quando, in "*Verità e Probabilità*", attacca alcuni aspetti dell'opera del suo amico John Maynard Keynes, uno dei maggiori economisti di tutti i tempi.


6 *Frank Ramsey (versione privata)*

Ma in fondo il desiderio ultimo e definitivo di Frank Ramsey è probabilmente quello di essere considerato un filosofo; si è detto della sua partecipazione al Wiener Kreis, nonché degli studi paralleli a quelli più celebri e completi di Ludwig Wittgenstein; e c'è davvero da chiedersi che cosa avrebbe potuto fare negli anni della giovane maturità, quelli che sono solitamente i più produttivi. C'è da chiederselo perché Frank Plumpton Ramsey non arriva neppure a celebrare il suo ventisettesimo compleanno: muore il 19 gennaio 1930, per le conseguenze di un'operazione che si era resa necessaria dopo una crisi di itterizia.

La sua breve vita sembra quasi una sintesi, una sorta di avatar del secolo stesso in cui ha vissuto: quel Novecento che era iniziato sotto le migliori premesse, e così rapidamente fu proiettato nella maggiore tragedia della storia.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Applicazione scaramantica			
L'ufficio disorganizzativo del convegno			

2.1 Applicazione scaramantica

Rudy sta scrivendo queste righe in clamoroso (per lui) ritardo: basti dire, per darvi qualche indizio, che questa sera va a festeggiare al ristorante cinese l'inizio dell'Anno del Gallo[8]. Che per lui (e per tutti quelli che quest'anno festeggiano un genetliaco multiplo di dodici) non dovrebbe essere propriamente una meraviglia: infatti, un anno "della bestia" uguale a quella dell'anno in cui siete nati, porta male.

Fortunatamente, il Feng Shui ci fornisce un rimedio: è sufficiente volgere le spalle al Signore dei Cicli[9], il quale fa il giro dei Segni in dodici anni. Conti alla mano, Rudy quest'anno per evitare i guai dovrebbe guardare a Est. La sua scrivania in ufficio guarda da quella parte (quindi da quella parte tutto bene, secondo i cinesi), ma quella di casa dove stende queste note guarda a Sud, e Ciò Non è Bene (Ovest sarebbe peggio, ma non si può avere tutto nella vita); se succedono guai, prendetevela con il Signore dei Cicli. E, anche senza sapere quale sia il segno del vostro anno, dovreste poter calcolare verso dove guardare negli anni critici (no, forse vi manca un dato... Senso orario. Contenti?).

Comunque, questa introduzione, anche se vera (nel senso che non se l'è inventata Rudy dopo aver caricato la pipa con cose che il Monopolio non vuole, l'abbiamo trovata in giro), non c'entra assolutamente nulla con il problema, se non per un fondo di superstizione che pervade entrambi (ma se riuscite a inventarvi un problema ragionevolmente complicato con questi dati, pubblicheremo: verso l'estate – conoscendovi, non necessariamente *questa* – e con il vostro nome nel titolo).

Nell'anno passato, nel periodo deputato al tiro con l'arco, abbiamo presentato un mucchio di problemi relativi al tiro con l'arco e l'arco di Rudy non ha mai visto la luce (e non ha tirato al buio. Spiritosi.); quest'anno, proviamo a presentare un problema legato al tiro con l'arco in un periodo palesemente non deputato al medesimo, nella speranza che in questo modo nel periodo giusto si riesca a tirare.

[8] La cosa è diventata tradizione da quando impegniamo il capodanno locale con alcuni amici che mal sopportano il ristorante cinese: prima, era il capodanno "locale" ad essere festeggiato al "cinese".

[9] Traduciamo in questo modo "Lord of the Ages": se avete una traduzione migliore, tenetevela per voi. Non crediamo già all'astrologia autoctona (che, tra l'altro, era caldea, quindi autoctona un piffero), figurarsi a quella cinese. Però il fatto che ci sia la possibilità di schivare l'oliva è già più simpatica: che si tratti di "spiritualismo dialettico"?

Come sicuramente saprete, Doc è più robusto di Rudy (i maligni dicono "soprattutto nel giro-vita"): da cui potreste dedurre che il libbraggio (sarebbe lo sforzo che dovete fare per tirare la corda con una freccia di lunghezza standard) del suo arco è ben maggiore di quello di Rudy, e quindi le sue frecce vanno più lontano.

Quando si prova a "vedere quanto va lontano", di solito si sottostimano brutalmente le proprie capacità: quindi, per fare questa prova, Doc si è posto ai piedi di una collina di pendenza uniforme, ha alzato l'arco in modo tale da mandare la freccia il più lontano possibile sul fianco della collina e l'ha scoccata alla velocità di 54 metri al secondo verso la cima. La freccia ha "centrato la collina" ad una distanza di 207,5 metri dal punto di tiro.

Adesso, quello che vorremmo sapere è quanta ginnastica farà Doc per recuperare la freccia, ovvero quale sia la pendenza della collina.

2.2 L'ufficio disorganizzativo del convegno

Per dirla con Dirac, "c'è un numero dispari di errori nel calendario".

Nel senso che abbiamo trovato un'altra data farlocca, ma non vi diremo quale: con la logica del Grande Fratello (o della Grande Sorella, visto che il calendario e buona parte del sito li cura Alice), faremo sparire zitti zitti la versione errata sostituendola con la corrige (OK, non si dice così, ma avete capito). Adesso non lamentatevi della nostra disorganizzazione, che nel mondo (ir)reale si è visto di peggio.

Anni fa, ad un convegno di storia della matematica, sei conferenzieri avevano preparato le rispettive conferenze su alcuni matematici e il nome del matematico (quello oggetto della conferenza) spiccava sul cartellino identificativo dei Nostri: peccato che *Chantal de l'Entropie*, la sconclusionata ma simpatica segretaria del convegno, avesse mescolato i cartellini in modo tale che nessuno avesse sul bavero l'oggetto della propria conferenza.

Il tizio che avrebbe dovuto parlare di Abel ha chiesto al conferenziere che portava il cartellino di Boole: "Sei tu che parli di Carroll?"

"No; perché me lo chiedi? Il tuo cartellino non indica 'Carroll'. Ma chi parla di Carroll dovrebbe scambiare il proprio cartellino con chi parla di Field per fare in modo che uno di loro porti il cartellino corretto. E, posto che ti interessi, io non parlerò di Dudeney"

"Certo che la segretaria ha complicato le cose per bene... A quanto pare, per nessuna coppia di conferenzieri è possibile dire 'Scambiamoci i badge, così entrambi avremo quello giusto'!"

"Almeno, possiamo dividerci in due gruppi in modo tale che i cartellini debbano essere scambiati solo all'interno del gruppo. Non solo, ma a quanto vedo chi parla di Abel è in un gruppo mentre chi parla di Erdős è nell'altro".

Chantal sarà simpatica e sconclusionata, ma è anche molto pragmatica: "Se ho dato i cartellini in quel modo, ci sarà stata una ragione, anche se adesso non la ricordo. Quindi, voi salite sul palco nell'ordine *di cartellini* Abel, Boole, Carroll, Dudeney, Erdős, Field. Poi, parlate pure di quel che vi pare, tanto io non so distinguere un logaritmo da un ditirambo".

In che ordine si sono svolti gli interventi?

3. Bungee Jumpers

Sono definiti sul piano N (pari) segmenti di lunghezza unitaria, con orientazioni casuali ma distinte tra loro.

Dimostrare che è sempre possibile traslarli in modo tale da formare una spezzata per cui la distanza tra le due estremità è minore di $\pi/2$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Febbraio, e le solite cose da dire come ogni anno:

- È il compleanno di RM.
- Per festeggiare prendiamo noi il Carnevale della Matematica di San Valentino, correte a mettervi un segno sul calendario, e se bloggate, scriveteci.

Poi… tante altre cose, ma – che ci crediate o no – siamo in ritardo. Così passiamo alle cose importanti, ovvero le vostre soluzioni.

4.1 [216]

4.1.1 Fred's Flying Magic Wands

Non so se lo avete notato, ma come noi invecchiamo (non i nostri personaggi, ovviamente, che essendo virtuali sono sempre trentenni nel pieno delle loro forze) il Capo si addolcisce nel descrivere le varie avventure de Validi Assistenti di Laboratorio di RM. In questa, uno dei nostri eroi è musicista: il concerto è però in un posto particolare.

> *I tre altoparlanti omnidirezionali sono posti ai vertici di un triangolo equilatero, ma uno dei tre emette a una potenza quattro volte quella degli altri due.*
>
> *All'inizio concerto il pubblico si posiziona al centro del triangolo, per poi vagare per il prato alla ricerca dei punti nei quali il segnale di ciascuno degli altoparlanti avesse la stessa potenza. Trovate i punti nei quali verranno a radunarsi gli spettatori.*

Non vi passiamo anche l'espansione: consisteva nell'avere un fattore diverso da 4 rispetto agli altri altoparlanti. La prima soluzione è di ***Alberto R.***:

> Tre altoparlanti sono disposti ai vertici di un triangolo equilatero A B C di lato unitario ed hanno la potenza $Wa = k \cdot Wb = k \cdot Wc$
>
> Il punto 'equifonico' P si trova, per motivi di simmetria, sull'asse del segmento BC ed è interno al triangolo per $k < 3$, sul lato BC per $k = 3$, esterno al triangolo per $k > 3$. La posizione di P è data da:
>
> PA = 1/rad(3) per $k = 1$ (P è al centro del triangolo)
>
> PA = [rad(3) – rad((4–k)/k)]k/2(k–1) per $1 \neq k \leq 4$
>
> In particolare PA = 2/rad(3) per k=4 (massima distanza)
>
> P non esiste per $k > 4$.

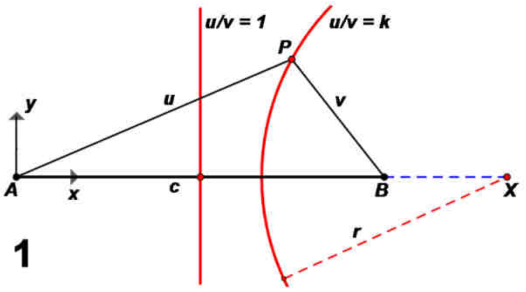
Veloce e convinta, e comprende la soluzione dell'espansione. Valter scrive:

> Mi pare che per simmetria il punto scelto dal pubblico debba trovarsi sulla retta contenente l'altezza del triangolo che parte dal vertice dove è piazzato il "trombone" "drogato".
> Siccome la sua distanza, per ricevere la stessa potenza, deve essere maggiore di quella dagli altri due direi che si debba cercare il punto in direzione del lato opposto a tale vertice.
> Detto ciò cerco di risolvere con una equazione nella quale l'incognita è la distanza dal vertice assumendo che il triangolo abbia lati di lunghezza 1 e che la potenza richiesta valga ugualmente 1 (non si dovrebbe perdere in generalità).
> Tenendo conto di Pitagora e delle "usuali leggi della fisica" riguardo il livello di potenza rispetto alla distanza mi pare che l'equazione possa essere:
>
> $$4 / x^2 = 1 / ((3^{1/2}) / 2 - x)^2 + 1/4)$$
>
> (impongo che il livello di potenza ricevuto dal primo trombone eguagli quella degli altri 2). Ottengo $x = 2/3^{1/2}$; essendo l'altezza $3^{1/2}/2$ si esce sotto la base di $1/3^{1/2}$.

Stesso risultato! È una cosa sempre affascinante. Vediamo un altro approccio, quello di ***trentatre***, perché non solo ha generalizzato il rapporto, ma anche il triangolo:

Generalizzo il problema a un triangolo generico di vertici A,B,C e lati a, b, c per un valore qualsiasi delle potenze sonore nei vertici. Se le *potenze* nei vertici sono $(m_A{}^2, m_B{}^2, m_C{}^2)$, il punto P cercato (in cui il *segnale* ha uguale intensità) deve avere *distanze* dai vertici proporzionali a (m_A, m_B, m_C). Se le m sono (1, 1, 1) il punto P è il circocentro O, equidistante dai vertici, che si trova disegnando l'asse del lato c (il luogo dei punti equidistanti da A e B) e ripetendo per gli altri lati; O è l'incrocio dei tre assi, e quindi basta tracciarne due. Cerchiamo P con lo stesso procedimento.

Per il lato AB, occorre trovare P per cui le distanze PA e PB sono nel rapporto $k = m_A / m_B$.



Con (x,y) coordinate di P centrate in A si ha (fig. 1)

$\sqrt{x^2 + y^2} = k\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ da cui

[1] $x^2 + y^2 + \frac{k^2}{k^2 - 1}(c^2 - 2cx) = 0$

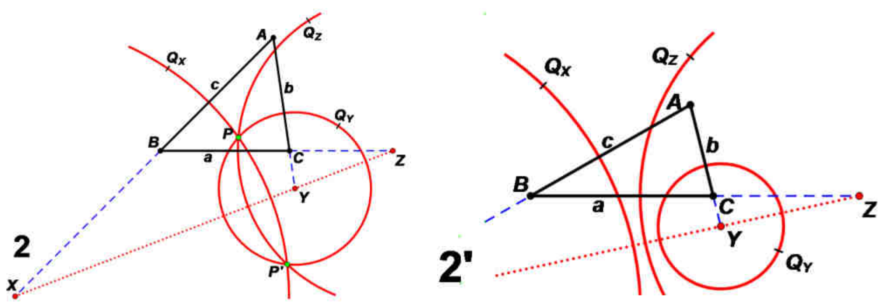
Il luogo di P è quindi <u>un cerchio</u> di raggio r centrato in X con

[2] $BX = \frac{c}{k^2 - 1}$, $r = \frac{c\,k}{k^2 - 1} = k\,BX$

- assumiamo $BX, r > 0$ e quindi $k = m_A / m_B > 1$; il centro X è sulla retta AB nel verso $A \rightarrow B$
- per $k = 1$ il cerchio degenera nell'asse del lato c

(la fig. 1 è disegnata con $k = m_A / m_B = 2$).

In fig. 2 un triangolo generico con m arbitrarie (m_A, m_B, m_C)



- ordiniamo i vertici in modo che $m_A \geq m_B \geq m_C$
- definiamo $k_{AB} = m_A / m_B$, $k_{AC} = m_A / m_C$, $k_{BC} = m_B / m_C$ da cui

[3] $k_{AC} = k_{AB} \cdot k_{BC}$

- le equazioni sono omogenee nelle m e si può assumere $m_C = 1$
- dalle [2] si hanno le posizioni dei centri e i raggi

[4] $BX = \dfrac{c}{{k_{AB}}^2 - 1}, CY = \dfrac{b}{{k_{AC}}^2 - 1}, CZ = \dfrac{a}{{k_{BC}}^2 - 1}$

[5] $r_X = k_{AB}\, BX$, $r_Y = k_{BC}\, CY$, $r_Z = k_{BC}\, CZ$

- con i valori scelti per le k questi valori sono positivi, i centri X, Y, Z dei cerchi sono nel verso $A \to B, A \to C, B \to C$ e i cerchi Q_X , Q_Y , Q_Z sono disposti come in fig. 2.

I punti P sono le intersezioni, se esistono, comuni ai cerchi; dalla figura si vede che

a) ogni P è la intersezione dei tre cerchi (quindi basta disegnarne due)

- è la stessa proprietà di O e degli altri *punti principali* del triangolo

b) i centri X, Y, Z sono allineati.

Infatti se d_A, d_B, d_C sono le distanze di P dai vertici, allora $d_A / d_B = k_{AB} \to P \in Q_X$, $d_B / d_C = k_{BC} \to P \in Q_Z$ e da [3] si ha $d_A / d_C = k_{AB} \cdot k_{BC} = k_{AC} \to P \in Q_Y$

- cioè se P è su due cerchi è anche sul terzo, e vale a)

- i tre cerchi hanno in comune solo i P, quindi i centri sono allineati, e vale b).

Se le m sono tutte uguali, i P coincidono con O; i cerchi sono la forma che assumono gli assi, e i P sono le posizioni che assume O, per effetto degli m diversi fra di loro.

I punti P esistono se vale la seguente condizione fra i lati e le m (la formula, che si può ricavare da $r_X + r_Y \geq XY$, è semplice ma la dimostrazione è complicata, e non la scrivo)

[6] $b\,m_B + c\,m_C \geq a\,m_A$ con i tre casi

i) se vale > i cerchi si incrociano in due P distinti

ii) se vale = i cerchi sono tangenti e i due P coincidono

iii) se vale < i cerchi sono separati e non esiste nessun P

- in fig. 2, dove $(m_A, m_B, m_C) = (2, 3/2, 1)$, vale i); in fig. 2', ottenuta dalla prima spostando A, vale iii).

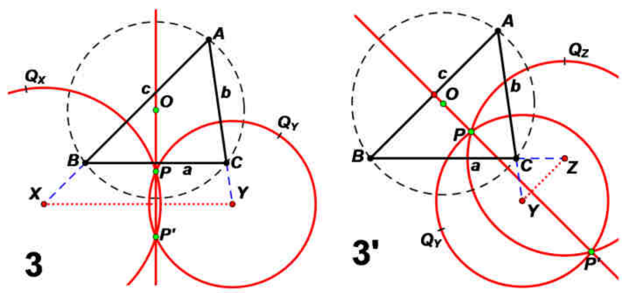
Poiché le distanze BX, CY, CZ e i raggi sono positivi, la retta XZ è esterna al triangolo e quindi solo uno dei P può essere interno al triangolo.

Se due degli m sono uguali si hanno due casi: $(m,1,1)$ e $(m,m,1)$.

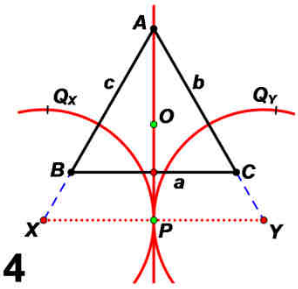
Uno dei cerchi degenera in un asse (l'asse di a nel primo caso, l'asse di c nell'altro).

La [6] diventa rispettivamente $b + c \geq a\,m$ e $b\,m + c \geq a\,m$.

In fig. 3 e 3' i due casi dove le m sono $(2,1,1)$ e $(2,2,1)$.



Nel quesito del problema le m sono $(2,1,1)$ e il triangolo è equilatero; la [6] diventa $b + c \geq 2a \to 2 = 2$; i cerchi sono quindi tangenti ed esiste un solo P esterno al triangolo, simmetrico di O rispetto a lato a (fig. 4). Con i lati unitari le distanze sono $PA = 2/\sqrt{3}$, $PB = PC = 1/\sqrt{3}$.



4

Incredibile, nevvero? Non vi fermate qua, c'è altro da leggere.

4.1.2 Lo facciamo facile

Il titolo non ha niente a che fare con il problema (tanto per cambiare) ma piuttosto con quello che il Capo vuole farvi immaginare che vi dirà in un secondo tempo. Tranquillizzatevi, non ne può più dalla voglia di raccontarvi il resto della storia, a tempo debito arriverà. Vediamo il problema "fatto facile":

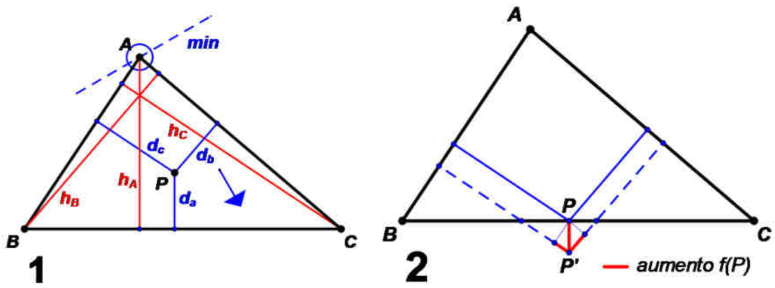
> *Abbiamo a disposizione tre linee che, non essendo nessuna di loro parallela ad un'altra, formano un ampio triangolo qualsiasi; trovate il luogo dei punti per cui la somma delle distanze dalle tre linee è minima.*

Cominciamo questa volta con quello che ci ha scritto ***Valter***:

> Se le tre rette fossero parallele il luogo dei punti dovrebbe essere la retta delle tre compresa fra le altre due (la somma delle tre distanza sarebbe la distanza fra le due rette esterne in quanto, trovandosi i punti sulla terza retta, la distanza da questa risulterebbe zero).
>
> Se inclino una delle tre rette, lasciando le altre due parallele, per ragioni analoghe il luogo dei punti diventa il segmento della retta inclinata compreso fra le due parallele.
>
> Se infine inclino una delle due rette parallele restanti ottengo il triangolo e il luogo dei punti "collassa" nel punto di incontro di due rette cioè in un vertice del triangolo.
>
> Essendo tre i vertici il punto cercato dovrebbe essere quello opposto al lato più lungo.
>
> La somma delle tre distanze si ridurrebbe all'altezza del triangolo riferita al lato più lungo (quindi la più corta delle tre) essendo la distanza dalle altre due rette uguale a zero.
>
> Ho ripensato e verificato in altri modi la mia ipotesi per capire se stavo sbagliando.
>
> Con geogebra ho costruito la struttura per poi muovere in vari modi i punti e verificare le lunghezze ma non sono riuscito a confutare l'ipotesi.
>
> Alcune farneticazioni (grosse) poi mi hanno confrontato sull'ipotesi.
>
> Si verifica facilmente per un discorso su ipotenusa e cateti che le tre altezze sono di lunghezza inferiore ai rispettivi due lati opposti e quindi l'altezza di lunghezza minore è anche più corta di qualsiasi lato del triangolo.
>
> La media delle lunghezze delle tre altezze è chiaramente maggiore (o al più uguale se lo sono le altezze) dell'altezza minore.
>
> Se sposto il mio punto dal vertice individuato lungo uno dei lati ottengo una somma di distanze (sono due in quanto quella sul lato in cui mi trovo è zero) che è maggiore dell'altezza da cui parto (diminuisco proporzionalmente tale altezza ma cresce proporzionalmente un'altezza che ne è maggiore).

> Considerando un punto interno al triangolo traccio i tre segmenti paralleli ai lati ottenendo tre triangoli simili a quello iniziale (e che proporzionalmente sommati ne sono maggiori in quanto si sovrappongono al suo interno).
>
> Le tre distanze in questo caso sono anche, se prese a due a due, le distanze a partire da un punto sui rispettivi tre lati dei tre triangoli simili interni.
>
> Si dovrebbe avere, quindi, una somma che è superiore alla media dei dei tre lati del triangolo maggiore che è a sua volta superiore all'altezza che ho ipotizzato come soluzione.
>
> Questa volta le ho sparate proprio grosse, vedete voi cosa farne … (non mi offendo se buttate via il tutto).
>
> Tanto per spararle proprio tutte: chiaramente in un triangolo equilatero i punti sono tre e in uno isoscele possono essere due.

Ma quando mai? Buttare via? E perché? Se non arrivano parecchie soluzioni non possiamo confrontarle. E poi anche lo stile è importante. La seguente la riconoscete anche se vi diciamo al fondo di chi è:

> Le rette a, b, c formano con le intersezioni A, B, C un triangolo *T*. Per un ogni punto P interno a T la somma delle distanze dai lati è data dalla funzione $f(P) = d_a + d_b + d_c$ (v. fig. 1); si ha
>
> - i segmenti d_a, d_b, d_c sono paralleli alle altezze del triangolo
>
> - il gradiente ***g*** di $f(P)$ è la somma di tre vettori unitari paralleli alle d ed è un vettore costante in tutto T
>
> - il valore di $f(P)$ nei vertici A, B, C è uguale all'altezza h_A, h_B, h_C corrispondente
>
> - spostando *P* su una retta, $f(P)$ varia linearmente con lo spostamento.
>
> Trovare ***g*** graficamente (la freccia in figura) è semplice; dalle curve di livello di $f(P)$ – le linee rette ortogonali a ***g*** – si vede che il minimo si ha con $P \equiv A$.
>
> Ma tutto questo non è necessario; poiché $f(P)$ nei vertici è dato dalle altezze, e varia linearmente lungo i lati, il vertice cercato è quello con altezza minore; e quindi (per $h_A : h_B : h_C = 1/a : 1/b : 1/c$) è il vertice opposto al lato maggiore , cioè quello con l'angolo maggiore.
>
> Occorre ancora verificare che il *P* minimo non sia esterno a T ; ma mettendo *P* su un lato e spostandolo verso l'esterno in *P'*, $f(P)$ può solo aumentare ed è quindi sempre maggiore che all'interno di *T* (fig. 2).
>
> 
>
>
> Nei seguenti casi particolari il luogo dei *P* minimi diventa
>
> - *T* isoscele con base *BC* minore degli altri lati : tutto il lato minore *BC*
>
> - *T* equilatero : tutto il perimetro di *T*.

Visto? Avete riconosciuto ***trentatre***, senza problemi, come avreste immediatamente riconosciuto anche ***Alberto R.*** qui sotto:

> Si cerca il luogo dei punti P per i quali è minima la somma delle distanze da tre rette del piano scelte a caso.

Le tre rette formano il triangolo di lati L_1, L_2, L_3 e di area A.

Se congiungiamo il punto P (ovviamente interno al triangolo) con i vertici otteniamo tre triangoli di aree A_1, A_2, A_3 le cui altezze relative ai lati L_1, L_2, L_3 sono le distanze di P dalle tre rette e valgono $2 \cdot A_1/L_1$, $2 \cdot A_2/L_2$, $2 \cdot A_3/L_3$

Trascurando il fattore 2 dobbiamo trovare P tale che

$$A_1/L_1 + A_2/L_2 + A_3/L_3 = \text{minimo}$$

Dove L_1, L_2, L_3 sono fissi mentre A_1, A_2, A_3 possono variare sotto la condizione che sia $A_1 + A_2 + A_3 = A = \text{costante}$

Evidentemente la condizione di minimo è soddisfatta se la quantità A anziché essere comunque suddivisa in tre pezzi a costituire i tre numeratori delle tre frazioni, è tutta concentrata a formare il numeratore della frazione (o delle frazioni) che ha il denominatore più grande. Ciò tradotto in termini geometrici significa che:

- Se il triangolo è scaleno ($L_1<L_2<L_3$) oppure isoscele “tracagnotto” ($L_1=L_2<L_3$) L’unico punto P che soddisfa la condizione di minimo è il vertice opposto al lato maggiore L_3
- Se il triangolo è isoscele “snello” ($L_1<L_2=L_3$) soddisfano la condizione di minimo tutti i punti del lato minore L_1
- Se il triangolo è equilatero ($L_1=L_2=L_3$) tutti i punti interni al triangolo (contorno compreso) soddisfano la condizione di minimo.

Avete visto come i nostri solutori “classici” hanno affrontato il problema. Vediamo ora la versione di ***Emanuele***, che ha perso qualche notte a pensarci e a pensare di non pensarci:

Ho cercato di risolvere la questione da voi posta riguardo il luogo dei punti in cui la somma delle loro distanze da tre linee non parallele che incrociandosi formino un triangolo. Nonostante lo spettro del pubblico ludibrio vi espongo le mie ricerche. Mi sento in dovere di distinguere le mie intenzioni da ciò che realmente sono riuscito a fare. Le mie intenzioni al fine di risolvere il problema sono/erano:

1) Trovare una funzione $S(x, y)$ che esprima la sommatoria delle distanze del punto (x, y)
2) Cercare il luogo dei punti tramite lo studio di tale funzione usando le derivate A dire il vero non so bene se stia cercando di usare pennoni per uccidere mosche ma l’idea mi sembra buona.

Ora quello che sono riuscito a fare:

La distanza di un punto da una retta qualsiasi corrisponde alla lunghezza del segmento perpendicolare alla retta che unisce tale punto alla retta. Quindi si tratta di esprimere tale lunghezza in base alle sole coordinate x, y, supponendo nota la formula che esprime la retta.

retta $R(x) = y = ax+b$

perpendicolare $RP(x) = y = -x/a + h$

punto esterno alla retta $P(X,Y)$

$P(X,Y)$ appartiene a $RP(x)$ quindi posso scrivere $Y = -X/a +h$ e risolvere per h => $h = Y + X/a$ => $RP(x) = y = -x/a + (Y+X/a)$ Ora si tratta di trovare il punto di incontro $I(W, Z)$ tra $R(x)$ e $RP(x)$, con il sistema lineare:

(1) $Z = aW+b$

(2) $Z = -W/a+(Y+X/a)$

Eseguo (1)–(2) => $0 = aW+b+W/a-Y-X/a$

$W(a+1/a) = X/a+Y-b$ => $W = ((X+aY-ab)/a)*(a/(a^2+1))$ => $W = (X+aY-ab)/(a^2+1)$

=> $Z = a((X+aY-ab)/(a^2+1))+b = (aX+a^2Y-a^2b+a^2b+b)/(a^2+1)$

=> $Z = (aX+a^2Y+b)/(a^2+1)$

La distanza tra P e I si trova applicando il teorema di Pitagora:

> d = Sqrt($(X–W)^2 + (Z–Y)^2$)
>
> sostituendo a W e Z le espressioni appena calcolate in funzione di X e Y e riscrivendo in minuscolo le due variabili abbiamo:
>
> $d(x, y)$ = sqrt($(x–((x+ay–ab)/(a^2+1)))^2 + (y–((ax+a^2y+b)/(a^2+1)))^2$)
>
> $d(x, y)$ = sqrt($((a^2x+x–x–aY+ab)/(a^2+1))^2 + ((ya^2+y–aX–a^2Y–b)/(a^2+1))^2$)
>
> $d(x, y)$ = sqrt($((a^2x–ay+ab)/(a^2+1))^2 + ((–ax+y–b)/(a^2+1))^2$)
>
> $d(x, y)$ = sqrt($((a(ax–y+b)/(a^2+1))^2 + ((–1)(ax–y+b)/(a^2+1))^2$)
>
> $d(x, y)$ = sqrt($(a^2((ax–y+b)/(a^2+1))^2 + ((ax–y+b)/(a^2+1))^2$)
>
> $d(x, y)$ = sqrt($((ax–y+b)^2/(a^2+1)^2 * (a^2 + 1)$)
>
> $d(x, y)$ = sqrt($((ax–y+b)^2/(a^2+1)$)
>
> e finalmente:
>
> $d(x, y) = |(ax–y+b)|$/sqrt(a^2+1)
>
> Le | | indicano la funzione modulo in quanto la radice estratta deve essere positiva trattandosi di distanze. Ora $d(x, y)$ esprime la distanza tra il punto e la retta in funzione delle coordinate (x, y) del punto, avendo a che fare con tre retta dovremmo sommare tre volte questa $d(x, y)$ utilizzando i coefficienti delle tre rette i quali verranno indicati utilizzando le successive lettere dell'alfabeto:
>
> S$(x, y) = |(ax–y+b)|$/sqrt(a^2+1) + $|(cx–y+d)|$/sqrt(c^2+1) + $|(ex–y+f)|$/sqrt(e^2+1)
>
> Ogni uno dei tre fattori che compongono S(x, y) identificano nello spazio una superficie "piegata" a V lungo una retta disegnata sul piano con zeta = 0. A dire il vero era lecito aspettarselo (ma per me le cose non sono mai così banali) in quanto la distanza di un punto da una retta, decresce all'"avvicinarsi" del punto ad essa fino a divenire 0 e poi superatala la distanza ricrescerà nuovamente, il modulo fa il suo dovere.
>
> Ora la domanda è qual è il minimo della funzione S(x, y) ?
>
> Qui entra in gioco ciò che mi ero proposto ... studiare la funzione con le derivate ... ma purtroppo le mie conoscenze sono scarse per quando riguarda la derivazione su funzioni a due variabili (ora un po' meno) ... così mi sono studiato un po' il metodo delle derivate parziali, derivate seconde e la corrispondente matrice Hessiana, ma quest'ultima mi risulta nulla (guardando la superficie "piegata" si capisce il perché) e quindi non sono riuscito a proseguire con i miei intenti.
>
> Quindi ho cercato altre vie per così dire più "rustiche", cioè ho cerato di immaginare dove S(x, y) possa avere il suo punto di minimo.
>
> Una prima risposta che ritengo corretta (anche se non sono in grado di fornire una dimostrazione) è che tale punto debba trovarsi all'interno del triangolo disegnato dalle tre rette iniziali.
>
> Purtroppo non riesco a proseguire nell'indagine, anche se ho il sospetto che il punto in cui la somma è minima sia quello in cui le tre distanze sono uguali, cioè il punto x, y dove le tre "falde" interne si incrociano ad una determinata altezza in z.

Sia chiaro che la pubblicazione di queste soluzioni non ha niente a che vedere con il pubblico ludibrio, ma piuttosto con l'interesse nel seguire il ragionamento. Lo stesso ***Emanuele*** ci ha poi mandato un addendum:

> (…) Quindi di seguito scriverò il risultato delle ulteriori mie ricerche in merito alla somma dei tre segmenti dal punto pedale di un triangolo qualsiasi (naturalmente le conclusioni fatte nella mail precedente erano sbagliate).
>
> La somma:
>
> S$(x, y) = |(ax–y+b)|$/sqrt(a^2+1) + $|(cx–y+d)|$/sqrt(c^2+1) + $|(ex–y+f)|$/sqrt(e^2+1)
>
> è composta di tre termini mai negativi, ogni termine si azzera qualora il punto pedale risieda su una delle rette che intersecandosi formano il triangolo (maledetto).

Va da sé che se il punto non risiede su nessuna di esse la somma non sarà sicuramente un minimo della funzione S(x, y).

Posso annullare al massimo due dei termini alla volta, ponendo il punto pedale in corrispondenza di uno dei tre vertici del triangolo, in tal modo otterrò che la S(x, y) corrisponderà ad una delle tre altezze del triangolo, dovendo scegliere, quindi prenderò come vertice, quello appartenente all'altezza minore (ammesso che le tre altezze siano differenti), quindi posso asserire che quello è il valore minimo raggiungibile dalla $s(x, y)$.

Ora la questione è quali altri punti della funzione raggiungono quel valore ?

Nel caso di triangoli equilateri, per esempio, avrò che ve ne sono sicuramente almeno 3 corrispondenti ai vertici del triangolo.

Se al posto della somma usiamo il prodotto delle distanze direi che è ovvio che il minimo che raggiungerà la funzione sarà zero in corrispondenza dei punti perimetrici del triangolo.

Non sono stato rigoroso nella dimostrazione di quanto detto, ma penso che i ragionamenti siano abbastanza corretti.

Che ne dite voi? Noi troviamo bellissima la ricerca dei massimi e minimi su una superficie. Grazie a tutti e alla prossima!

5. Quick & Dirty

Trovate tutte le soluzioni intere dell'equazione $x^3 + 2\, y^3 = 4\, z^3$.

6. Pagina 46

Con riferimento ad un piano cartesiano Oxy, come primo passo trasliamo tutti i segmenti in modo tale che l'estremo avente ordinata minore coincida con l'origine: in questo modo, definiamo un insieme di segmenti OP_k per cui l'estremo P_k si trova sul semicerchio unitario nel semipiano $y \geq 0$.

Rinumeriamo i segmenti secondo l'ordine crescente degli angoli xOP_k crescenti, tra 0 e π.

Formiamo adesso la catena come somma vettoriale:

$$\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} P_{2m-1}O + OP_{2m}$$

Per la legge della somma vettoriale, questa è equivalente alla somma dei vettori $Q_{m-1}\, Q_m = P_{2m-1}\, P_{2m}$, per cui Q_0 è in P_1, Q_1 in Q_2 e avanti in questo modo sino a $P_{N/2-1}\, P_{N/2} = P_{N-1}\, P_N$.

La distanza tra gli estremi Q_0 e $Q_{N/2}$ della catena è maggiorata dalla lunghezza della catena medesima, che è a sua volta maggiorata dalle somme degli archi sottesi dalle corde $P_{2m-1}\, P_{2m}$, che formano una parte della semicirconferenza del cerchio unitario, la quale ha lunghezza π.

Se la somma di questi archi è $s \leq \pi\ 2$, l'enunciato è soddisfatto. Se, inversamente, la somma degli archi risulta maggiore, sia P_0 il simmetrico di P_N rispetto a O. La somma degli archi:

$$\sum_{m=1}^{N/2} P_{2m-2}P_{2m-1}$$

è la differenza tra il semicerchio P_1P_N e s. Possiamo costruire la spezzata $M_0M_{N/2}$ lungo i punti $M_0 = P_0$, $M_1 = P_1$, … , $M_{m-1}\, M_m = P_{2m-1}\, P_{2m}$, sino al termine della catena. La spezzata $M_0\, M_{N/2}$ è la somma vettoriale:

$$\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} P_{2m-2}O + O\,P_{2m-1}$$
,

ottenuta collegando tra di loro gli *N* segmenti dati, in quanto $P_0O = O\,P_{N/2}$: la sua lunghezza è maggiorata dalla somma degli archi $\pi - s < \pi/2$, che è maggiorante della distanza tra gli estremi della spezzata.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Debout, les damnés de la Terre...

...Debout! les forçats de la faim!
La raison tonne en son cratère,
C'est l'éruption de la fin.

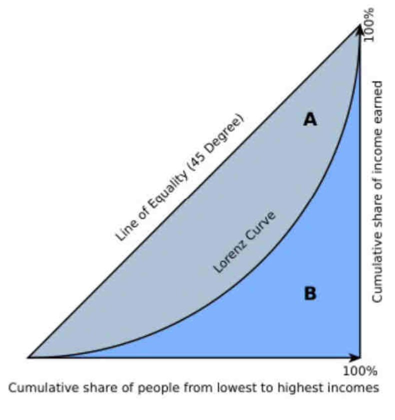
Du passé faisons table rase,
Foule esclave, debout! debout!
Le monde va changer de base:
Nous ne sommes rien, soyons tout!

C'est la lutte finale;
Groupons-nous et demain,
L'Internationale
Sera le genre humain.
Eugene POTTIER[10]

Sì, parliamo di soldi. O meglio, di chi ne ha molti e di chi ne ha pochi.

Una misura abituale della ricchezza delle nazioni è data, di solito, dal P.I.L. pro capite: si prende il prodotto interno lordo totale, si divide per la popolazione, *et voila*. Come si è accorta un mucchio di gente sin dall'antichità, però, la cosa non ha molto senso: infatti, in questo modo si perde di vista quali siano le effettive entrate di ognuno; se buona parte della popolazione vive nell'indigenza e pochi guadagnano cifre enormi, il valor medio può dare una valutazione di relativo benessere generale.

Un metodo per descrivere un po' più correttamente la situazione lo ha trovato ***Lorenz*** (Max, non Konrad: su, siate seri). La sua idea è stata di utilizzare un grafico: non basato sulle cifre "reali", ma sulle percentuali. Come qualsiasi testo di statistica recita, "quando si usano le percentuali si perde la dimensione del campione", ma si guadagna in confrontabilità: e questo era esattamente quello che cercava Lorenz.



7 *Lorenz.*

Idealmente, la situazione dovrebbe essere quella illustrata in figura *[as usual, rubata a Wikipedia]*: una qualche funzione, continua e *non decrescente*[11], descrive la ricchezza (o gli stipendi, o il P.I.L., o gli introiti, comunque, in termini percentuali sulle ordinate) della popolazione (asse delle ascisse),

[10] Versione italiana di Franco FORTINI:

Noi siamo gli ultimi del mondo.
Ma questo mondo non ci avrà.
Noi lo distruggeremo a fondo.
Spezzeremo la società.

Nelle fabbriche il capitale
come macchine ci usò.
Nelle scuole la morale
di chi comanda ci insegnò.

Questa voce che sale
questa luce che va
è l'Internazionale
futura umanità.

[11] I casi in cui la funzione possa avere degli intervalli in cui decresce sono quelli che tengono conto del *debito di una classe*: secondo chi scrive la cosa non è corretta, quindi li ignoreremo.

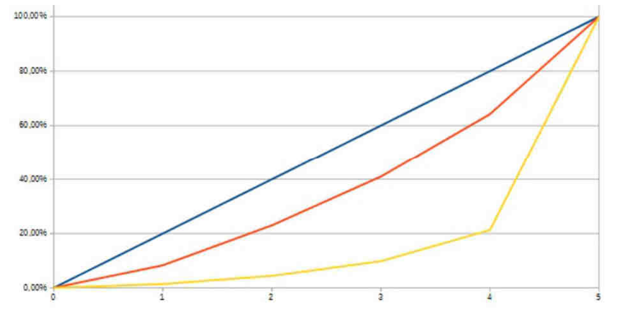
sempre in termini percentuali.

Perché "idealmente"? Per il semplice motivo che la realtà, in questo caso, non è una funzione continua, e sarebbe inutile avere una rappresentazione "strettamente fedele": di solito, ci si limita a rappresentare i *percentili* (ossia abbiamo cento divisioni sulle ascisse, per ciascuna delle quali misuriamo le ordinate) o, in prima approssimazione, i *quartili* (si divide la popolazione in quattro gruppi e via andare) e, in casi estremi, i *decili* (la popolazione viene divisa in dieci parti con lo stesso numero di elementi in ciascuna); usiamo il termine "casi estremi" in quanto la F.A.O definisce "povertà" il *primo decile* di questa distribuzione; il che ci pare un interessante e generoso sforzo per attribuire un significato standard a quanto, nei diversi luoghi, ha un significato clamorosamente diverso.

Nel disegno compare anche una linea (a 45° rispetto agli assi): qualsiasi distribuzione della ricchezza voi consideriate (sempre fatte salve le situazioni di debito di classe), si troverà comunque al di sotto di questa linea, sulla quale ogni x% della popolazione guadagna esattamente x% della ricchezza, per qualsiasi x: ossia, ci troviamo sulla linea dell'*uguaglianza assoluta*[12].

Quindi, per una popolazione di n abitanti, individuata la serie y_i, per i da 1 a n, per prima cosa si ordina la serie in modo non decrescente, poi si tracciano i punti:

$$(F_i, L_i) = \left(\frac{i}{n}, \frac{\sum_{j=1}^{i} y_j}{\sum_{j=1}^{n} y_j} \right)$$



8 *Qualche curva semplificata.*

Il che, anche se il denominatore non è difficile da calcolare (è il P.I.L totale, o la ricchezza totale… insomma, il mucchio dei soldi) ed è costante, rappresenta un insieme di dati non esattamente facile da maneggiare, visto che si tratta di un insieme di coordinate pari agli abitanti del paese considerato: per questo motivo, di solito si usano i quartili o, per una serie di ragioni nate dall'idea di avere un numero dispari di divisioni (ad esempio, la possibilità di poter definire sempre una *classe media*), i *quintili*: nel disegno, vedete le curve di Lorenz (versione "semplice") di Danimarca (in rosso) e Namibia (in giallo) che, da quanto siamo riusciti ad appurare sono rispettivamente la nazione "messa meglio" e quella "messa peggio": la linea azzurra è la linea della perfetta uguaglianza.

Se non vi siete accorti di nulla, potete tranquillamente fermarvi qui.

In effetti, nel paragrafo qui sopra abbiamo fatto passare un paio di concetti tutt'altro che immediati, sfruttando il fatto che stiamo lavorando sui casi estremi: se supponiamo un paese per cui, ad esempio, la curva di Lorenz sia nei primi tre quintili al di sopra della curva danese, per il quarto quintile al di sotto e poi arrivi al punto (1, 1), come situeremmo questo paese rispetto alla Danimarca? Avremmo la popolazione a basso reddito "più contenta dei danesi equivalenti", una classe media che si lamenta in quanto

[12] Non chiamatelo "comunismo": nel comunismo, se il vostro incarico è fare il giro dei verdurieri in centro siete i fieri possessori di una scattante *smart*, mentre se il sottoscritto zappa la terra deve accontentarsi di un fetente SUV. Ecco, questa non è uguaglianza totale, mi dicono. Seguirà dibattito.

si sta estinguendo e un piccolo gruppo che guadagna un mucchio di soldi[13]: insomma, vorremmo riuscire a sintetizzare la situazione e, possibilmente, ottenere un sistema di ordinamento delle nazioni.

La soluzione l'ha trovata ***Corrado Gini***[14]: il cosiddetto *indice di Gini* non è altro che la differenza tra la curva di perfetta uguaglianza e la curva di Lorenz: in pratica, è la misura (percentuale) dell'area del triangolo di perfetta uguaglianza lasciata "scoperta": 0%, quindi, rappresenta la perfetta uguaglianza. Al crescere dell'indice, la diseguaglianza aumenta, sino a raggiungere il massimo valore possibile, per una popolazione di N persone: $G = 1 - 1/N$. In questo caso, tutta la popolazione è a reddito zero, e solo uno incamera tutto[15].

Come caso immediatamente più complesso, consideriamo una divisione in due classi: la classe "dei poveri", composta dal x% della popolazione, che si divide equamente (al suo interno) y% del reddito, mentre la classe "dei ricchi" si divide equamente (come sopra) il restante: l'indice di Gini, in questo caso, diventa $G = y - x$ (stiamo lavorando con percentuali, quindi non state a farmi i pignoli dimensionali); la cosa interessante qui è che se andate a "scavare nella statistica" inserendo nel calcolo più classi (e quindi ottenendo una curva di Lorenz che non sia solo una spezzata formata da due segmenti, ma da molti di più), questa passa sempre per il punto che "divide in due classi", e quindi *l'indice di Gini sarà sempre maggiore di $y - x$*, ossia al considerare più cassi la diseguaglianza aumenta: sarà per questo, che secondo alcuni si sta cercando di distruggere la classe media?

Avete pagato le tasse?

Nel senso che, se parliamo di reddito, di indici di Gini in realtà ne possiamo calcolare due: quello *prima* di aver pagato le tasse e quello *dopo* aver pagato le tasse: questo può scombussolarvi abbastanza le cose, visto che i valori medi di prelievo fiscali sono estremamente variabili: limitandoci ai soli paesi industrializzati, nel 2009 l'indice di Gini prima delle tasse viaggiava tra il 34% della Corea del Sud al 53% di un paese che, se state leggendo queste note, dovreste quantomeno conoscerne la lingua; se invece andiamo a vedere l'indice misurato dopo le tasse, andiamo tra il 28% della Danimarca[16] e il 48% del Messico.

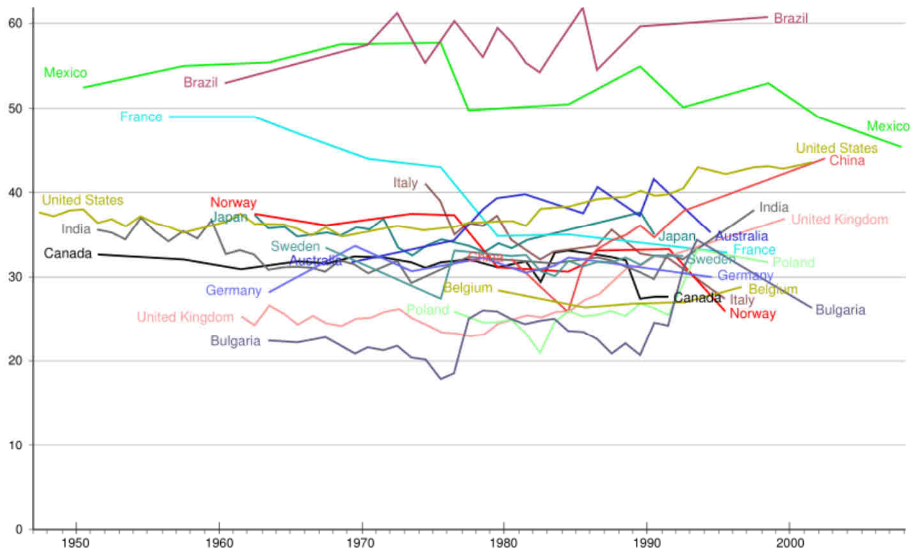
Evidentemente, l'indice di Gini cambia nel tempo, e siamo sicuri che non vedete l'ora di esaminare qualche serie storica; anche qui, fortunatamente, Wikipedia ci aiuta e ci fornisce l'indice per alcuni paesi: liberissimi di scatenare la vostra insana passione per la macroeconomia politica e cercare di capire "per quale motivo quel paese si è comportato così": anche se non dovrebbero portare a nulla (a parte forse la rottura di qualche amicizia), le discussioni si prospettano interessanti.

[13] Stiamo esagerando la cosa (le differenze sono di alcuni decimali nelle percentuali) ma, ad esempio, l'Ungheria è in una situazione del genere.

[14] Del quale non ci risulta sia ancora stato steso il compleanno: essendo nato a maggio, comunque, si direbbe ci sia il tempo per rimediare.

[15] Se, da bravi utopisti, pensate che questo caso porti immediatamente alla rivoluzione, vi ricordiamo che Carletto (Marx) definiva la classe a "zero reddito" il *lumpenproletariat* ("i *lumpen*", in italiano... Beh, no. Nei libri è tradotto come "sottoproletariato", ma nel '68 si diceva così) e sosteneva che in realtà svolgeva un ruolo controrivoluzionario. Come traccia del motivo, vi bastino i due ruoli "ladro" e "evasore totale": secondo lo stato, sono a reddito zero, e essere considerati tali a loro va benissimo. Quindi, non vogliono cambiare lo *status quo*.

[16] Certo che poi inventano l'*hygge* (abbiamo scoperto ieri di cosa si tratta, e ne siamo fieri).



Adesso, per vedere se avete capito tutto, un problemino: calcolare l'indice di Gini della popolazione di seguito descritta

[…] da li conti che se fanno
seconno le statistiche d'adesso
risurta che te tocca un pollo all'anno:
e, se nun entra nelle spese tue,
t'entra ne la statistica lo stesso
perché c'è un antro che ne magna due.

Trilussa, "La statistica"

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms