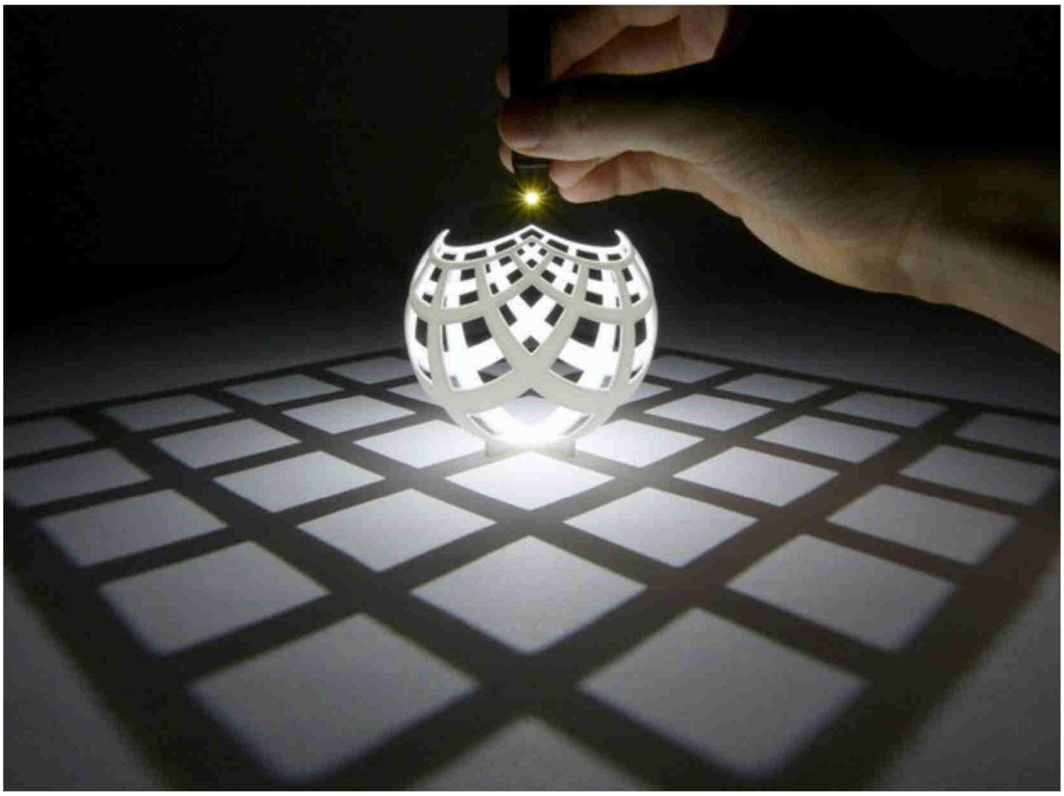
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 214 – Novembre 2016 – Anno Diciottesimo



Rudi Mathematici
Rivista fondata nell’altro millennio da
Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM212 ha diffuso 3130 copie e il 06/11/2016 per Google eravamo in 7570 pagine.

Henry Segerman (http://www.shapeways.com/shops/henryseg), certo. E chi altro, se no?

1. Radici

Tutte le grandi cose hanno piccoli inizi.
(Prometheus)

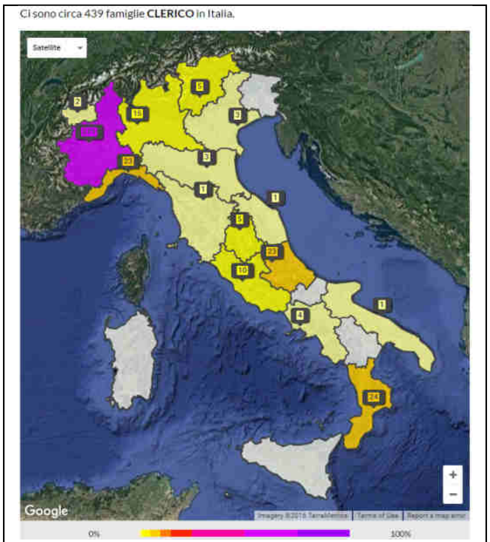
Se ho visto più lontano, è perché stavo sulle spalle di giganti.
(Isaac Newton)

Pianta alberi, che gioveranno in un altro tempo.
(Marco Porcio Catone)

Ogni re deriva da una stirpe di schiavi ed ogni schiavo ha dei re tra i suoi antenati.
(Platone)

Se vi chiedessero qual è il miglior investimento, cosa rispondereste [...]? Personalmente penso che la risposta giusta sia: probabilmente l'educazione. Il miglior investimento infatti è mettere i soldi nel cervello dei figli, nello sviluppo della loro intelligenza, della loro capacità di essere creativi, competenti, adatti al mondo nuovo che si sta aprendo.
(Piero Angela)

Se mai ci fosse qualcosa in cui abbiamo sempre creduto, questo è senz'alto la capacità umana di migliorare sé stessi, se non in modo diretto, almeno aiutando altri a farlo. Non per niente uno dei *fil rouge* che attraversano questi articoli è spesso proprio la caratteristica di ogni nostro personaggio di essere un grande innovatore o un grande educatore o una combinazione di entrambi.

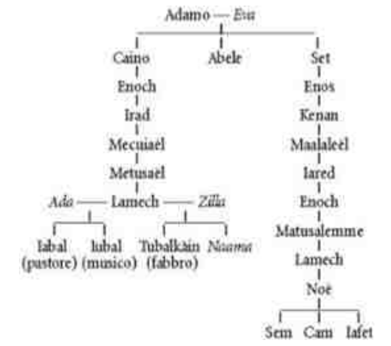


1 *La famiglia del Capo.*

Non c'è progresso senza cambiamento, ma non c'è crescita senza saper ricordare, comprendere e riutilizzare quello che si è già scoperto ed imparato. Se non bastasse l'impegno costante di ogni generazione nell'utilizzare al meglio il bagaglio di conoscenze ed esperienze accumulato e costruito da chi la ha preceduta, recentemente è tornata di moda la ricerca delle proprie origini, in un tentativo di riscoprire sé stessi. Fioriscono in rete numerosi siti che aiutano a ricostruire alberi genealogici, scoprire le origini di un determinato cognome. Nella figura vedete una prova che abbiamo fatto noi, con la quale si determina con sicurezza la piemontesità di un certo elemento del nostro gruppo.

Se qualche anno fa si desiderava trovare percentuali di sangue blu tra i propri antenati, ci si accontenterebbe oggi di sapere verso quale continente sono emigrati lontani zii, con l'idea di riscoprire pezzi di famiglia tramite facebook e ritrovarsi in grandi riunioni famigliari. Oppure scoprire che la nostra famiglia ha lunghe tradizioni di economisti, pensatori, produttori di olivi….

La verità è che un albero genealogico è, come ogni albero in sé, un simbolo di una certa solidità, forza. Un albero ha radici e foglie, e per quanto leggera e volatile una foglia possa sentirsi, prende coraggio nella continuità di tronco e rami.



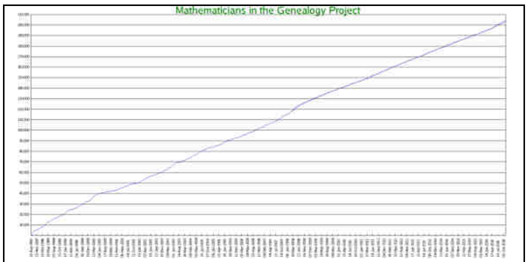
2 *Adamo, Eva e l'albero.*

Anche se all'inizio di ogni albero genealogico si dovrebbero trovare i soliti personaggi (Adamo ed Eva, chi se no?), nessuno può avere troppo desiderio di arrivare tanto lontano. Intanto perché ci sembra poco chiaro il modo piuttosto misterioso di riproduzione avendo solo nomi maschili, ma anche perché risalire dai peccatori originali non è poi tanto piacevole.

Basterebbe poter vedere al di là delle guerre, all'ottocento o i primi del novecento, quando l'umanità ha iniziato il boom di creatività che ancora oggi prosegue e fa di noi i discendenti di grandi inventori, esploratori, scienziati, letterati.

Ecco, se la nostra passione è la matematica, ci piacerebbe essere discendenti di un grande, grandissimo matematico.

Ma i matematici sono personaggi speciali, e – come si vede dalla citazione di Newton all'inizio – non credono solo nell'ereditarietà genetica, ma anche in quello che si impara, eredita, dai nostri mentori. Per questo motivo, ormai vent'anni fa, Harry Coonce inventò una forma di albero genealogico che dovrebbe collegare tutti i matematici di professione, in cui i precursori sono i relatori della tesi di dottorato di ognuno, e i discendenti sono – ovviamente – studenti la cui tesi di dottorato è stata curata. Grazie al web e tanta pazienza, in vent'anni di ricerche e pubblicità, il progetto è adesso molto noto.



3 *La crescita del progetto.*

Il Mathematical Genealogy Project[1] è ormai giunto a contenere più di duecentomila matematici. Guardando il grafico si notano picchi di crescita, di solito dovuti ad un colpo di fortuna: una università che trasforma i propri archivi in digitale e decide di contribuire in massa, i doppi link con Wikipedia e il più grande sito di storia della matematica[2]. Per il resto la maggior parte del lavoro è manuale, controllo di ogni proposta e correzione.

Però l'accesso ad archivi che risalgono alle prime esistenze di alcune università ha permesso oggi di creare bellissimi grafici e negli ultimi anni sono fiorite tesi di ricerca che hanno proprio analizzato il progetto sotto diversi aspetti, matematici e no.

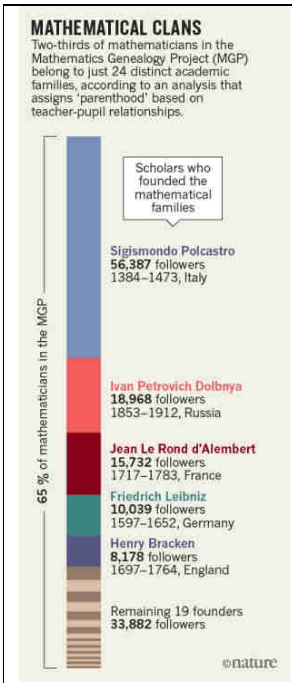
Recentemente tra i blog che frequentiamo se ne è parlato parecchio, e tutto è cominciato con un articolo su nature[3], che a sua volta si riferiva a molti dei risultati di una di queste tesi di ricerca. In breve, Floriana Gargiulo si è scaricata l'intero database, lo ha controllato e verificato, ed ha analizzato le "famiglie" matematiche, per scoprire che la maggior parte dei matematici è concentrata attorno a 24 grandi famiglie. Questa di per sé non è una grandissima scoperta: il metodo di crescita del database, come abbiamo detto, dipende dai contributi personali di tutti quelli che scrivono (con l'evidente desiderio di collegare il proprio nome a quello di Eulero o Newton) e da aggiunte di interi alberi di dati da specifiche università.

La parte che più ha divertito ed ha generato un'onda di commenti è stata la famiglia più grande e numerosa, quella che ha origine da… un fisico italiano.

[1] http://www.genealogy.ams.org/ che volente o nolente ha fornito parecchi dei dati e delle figure che seguono.

[2] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/ MacTutor History of Mathematics archive, University of St Andrews, chi altri? Senza di loro i nostri compleanni sarebbero molto più poveri.

[3] http://www.nature.com/news/majority-of-mathematicians-hail-from-just-24-scientific-families-1.20491, da cui i grafici che illustrano i risultati.



4 *Le famiglie.*

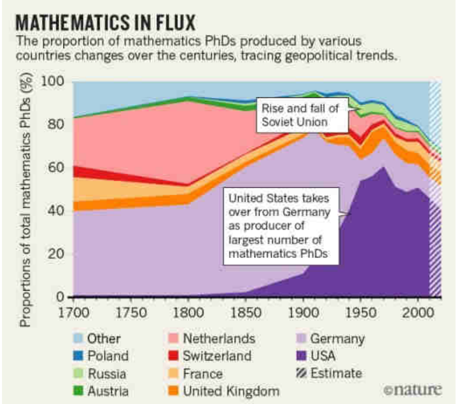
Secondo la grafica, infatti, Sigismondo Polcastro è l'antenato della famiglia più numerosa.

"Polcastro, chi era costui?" è la domanda che circolava nelle cronache scientifiche, e per quanto si trovi un bel resoconto della sua vita e di quasi tutta la sua famiglia sull'enciclopedia della Treccani online[4], il Nostro pare essere un emerito sconosciuto. Per carità, abbiamo costruito compleanni anche su molto meno, e l'intera famiglia Polcastro a Padova sembra avere promosso ogni forma di arte e prodotto politici e professori. Eppure il divertimento maggiore dei commentatori era che Sigismondo fosse un fisico, non un matematico, come se tra le diverse scienze ci fosse quella grande differenza: a quei tempi erano chiamate tutte "filosofie".

Ma fermiamoci un attimo, torniamo sul sito del MGP, giochiamo con il suo unico discendente: ebbene scopriamo che la sua tesi contiene un altro nome, Gaetano da Thiene. La triste scoperta è che lo stesso Gaetano viene ricordato nelle cronache come ottimo professore di Padova e zio dell'omonimo santo, ma non come capostipite della più grande famiglia di matematici. Questo perché nello studio della Gargiulo, quando gli ascendenti sono due, ne viene considerato solo uno. Un po' di sfortuna, ecco. Ma anche la fortuna di avere, tra i propri discendenti, un certo Carl Friedrich Gauss[5]… che probabilmente è quello che rende la famiglia enorme, avendo lui stesso più di novantamila discendenti (e chi non vorrebbe essere discendente di Gauss?).

L'università di Padova sembra essere stata vittima (o debitrice, a seconda di come la si voglia mettere) del protagonismo di un qualche matematico moderno, che ha aggiunto tutti i dati dei matematici a lui precedenti: 162 matematici, dove Pisa ne mostra 323, incluso il grande Galileo, che a sua volta ha più di tredicimila successori e fa parte dei discendenti di Nicolò Tartaglia.

Giusto per definire che cosa vuol dire un'università che inserisce tutti i loro record storici, basta fare una ricerca con l'università di Cambridge (3132), o Oxford (1372). In generale il nostro Harry ed il suo progetto sono americani, e selezionando tutti i record relativi agli Stati Uniti si giunge alla vertiginosa cifra di più di novantamila, non la metà, ma quasi.



5 *La produzione di dottori per Paese.*

A questo punto non stupisce per niente nemmeno la seconda conclusione della tesi: il numero di dottorandi provenienti dai diversi paesi a seconda dell'anno, che mostra come le diverse scuole europee si siano riversate in quella americana. Ovviamente la maggior parte dei matematici "moderni" inseriti sono automaticamente importati dalle numerose università americane che aderiscono al progetto. Le università italiane sono talmente poco rappresentate, malgrado grandi nomi che sono comparsi spesso in queste pagine e che stanno all'origine di grandi famiglie, da non apparire nemmeno nel grafico.

Malgrado tutto stupisce non poco che la prima famiglia sembri avere origini italiane, e la seconda russe. Eppure non dovrebbe, visto che della scuola russa ci è spesso capitato di parlare, soprattutto dell'università di Mosca (più di duemila record nel MGP, tra i circa quattromila russi) e San Pietroburgo (più di

[4] http://www.treccani.it/enciclopedia/sigismondo-polcastro_(Dizionario-Biografico)/

[5] RM147, "Rivoluzionari"

seicento). Lyapunov[6], Markov[7], Bolyai e Lobacevsky[8], Friedmann, Tamarkin, Smirnov[9], Kolmogorov[10], sono solo pochi degli esempi con cui abbiamo già giocato. E poi la Kovalevskaya[11] e la Jitomirskaya[12]. La meraviglia dello strumento è che si può andare avanti ed indietro nell'albero e continuare ad incontrare matematici noti in una grande rete, come Weierstrass[13] e Gauss. Le università russe avevano infatti una grande corrispondenza ed intense visite con quelle tedesca, malgrado non ne nascondessero critiche: del resto nei primi del Novecento l'intera università russa doveva essere rinnovata e ricreata.

Tra i nomi che appaiono (veramente) in cima alla famiglia russa dei matematici ce ne sono due in particolare: Dimitri Fedorovich Egorov e Nikolai Nikolaevich Luzin[14]. In realtà il secondo fu uno studente del primo, ma fu loro l'idea di raccogliere i migliori studenti in un gruppo di ricerca: molti dei nomi qui sopra ne furono parte o ne discendono. Ebbero vite difficili, in tempi burrascosi e rivoluzionari, ma verranno ricordati per sempre come i precursori della scuola matematica russa, per quanto le loro vite furono terminate proprio dalla propaganda politica in un modo o nell'altro. Nel 1917 Luzin divenne professore di matematica pura nell'università di Mosca, e cominciò a formare grandi menti e grandi formatori, come Aleksandrov e lo stesso Kolmogorov: tra loro c'era anche la giovane Nina Bari.


6 *Nina Karlovna Bari.*

Nina Karlovna Bari era nata il 19 novembre 1901 a Mosca. Crescere in piena rivoluzione aveva i suoi vantaggi: anche se le ragazze ricevevano un livello di insegnamento inferiore rispetto ai coetanei, le fu permesso di passare gli esami secondo lo standard maschile e grazie a questo proprio nel '18 – quando per la prima volta le porte dell'università russa si aprivano alle signorine – si iscrisse alla facoltà di matematica.

Il gruppo di ricercatori – incidentalmente chiamato "Luzitania" – era il luogo ideale per il fiorire di idee e studi, tutti gli studenti erano stimolati a studiare problemi estremamente complessi e invitati a viaggiare in Europa (Parigi, Göttingen…) per studiare altri metodi di analisi e ricerca.

Nina era geniale e si stava specializzando nella teoria delle funzioni, era riconosciuta nel suo ambiente molto prima di laurearsi, cosa che comunque fece nel 1921, con un anno di anticipo rispetto alla tabella di marcia, diventando la prima matematica russa, e poi la prima donna a far parte della società matematica russa. In quegli anni conobbe anche quello che divenne poi suo marito, Viktor Vladmirovich Nemytski, con il quale ebbe in comune anche l'amore per la matematica e l'insegnamento. Perché Luzin a questo punto si era ritirato a scrivere memorie e studi, e lei invece continuò a scrivere ricerche ed insegnare fino alla sua morte, nel luglio del '61.

---

6 RM077, "Tra Tatooine e Tebe".

7 RM125, "Reazioni a catena".

8 RM083, "Quintum Non Datur".

9 RM101, "La Compagnia del Ginnasio".

10 RM159, "Collegio Matematico numero 18".

11 RM144, "Pregiudizi".

12 RM197, "Matematica per amore".

13 RM057, "Geometria dell'Endecasillabo"

14 Entrambi nati a dicembre. No, non sono ancora loro i protagonisti di questo compleanno.

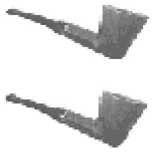
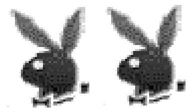
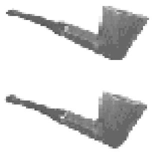
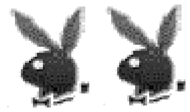
Ci sarebbe molto altro da dire di questa donna eccezionale, soprattutto perché il MGP ne riporta una quarantina di discendenti, ma la quantità di materiale da lei prodotto il fatto che a ventisette anni fu uno dei principali oratori al congresso internazionale della matematica del 1928 parlano da soli. Non erano anni in cui si trovavano molte donne nelle università europee.

7 *Medaglia del congresso di Bologna del 1928.*

In quasi ogni biografia della Bari si trovano accenni all'affetto / amore che la giovane aveva per il suo mentore Luzin. Certo Nikolai ebbe parecchie crisi durante la sua carriera, sia per la difficoltà di affrontare pura ricerca matematica dopo avere visto gli orrori della fame e della malnutrizione e la guerra, sia per la violenta critica politica negli anni della rivoluzione russa. Fu un personaggio controverso, forse, ma sicuramente creò una scuola, quella russa, praticamente solo scegliendo e motivando i migliori studenti di matematica di quegli anni. Che la sua morte, più di dieci anni dopo, possa aver provocato il suicidio di Nina, ci sembra alquanto improbabile. Si trattava di una donna piena di vita e di energia, che amava le gite in montagna e l'attività fisica, e ci pare molto più probabile che sia stato un banale incidente a farla cadere sotto un treno quel giorno di luglio del '61.

Quello che resta, a parte la brillante quantità di scritti, è una enorme generazione di matematici. Le radici forti e vigorose di un albero che si staglia molto più lontano di dove ha avuto origine.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
"Animatoreee!"			
Numeri Esteticamente Validi			

2.1 "Animatoreee!"

Beh, pochi di voi se la ricordano, questa, ma è stato il tormentone di un'intera estate (e autunno, quando ci siamo accorti che gli rompeva le scatole) per il meno giovane dei VAdLdRM.

Recentemente, abbiamo provato a rinverdire il tormentone, ma anziché l'usuale (all'epoca) faccia ingrugnita, abbiamo visto comparire un preoccupante ghigno satanico ("preoccupante" in quanto, evidentemente, avevamo perso una potentissima arma per far arrabbiare Alberto): dopo qualche giorno, il Nostro ha ceduto alle pressanti richieste di spiegazione.

A quanto pare, era stato invitato a una festa di bicompleanno (se si festeggia il noncompleanno, si potrà anche festeggiare il bicompleanno, no?), nel senso che si festeggiavano sia il ventiquattresimo compleanno di un suo amico che il decimo compleanno di un cugino del festeggiato alla riga precedente: il luogo era piuttosto spazioso, quindi non ci sono stati grossi problemi nell'organizzare due feste sostanzialmente segregate, e non era richiesto un grosso genio per individuare un "clandestino" $C \in F_2$ (insomma, un suppergiù decenne) che si avvicinasse pericolosamente alla sezione alcolica della F_1. Insomma, tutto procedeva per il meglio, sin quando non è intervenuto il solito adulto a proporre l'integrazione delle due feste: approfittando della presenza di un "Monopoli", Alberto si è immediatamente lanciato a proporre un gioco d'azzardo, con l'intenzione di scandalizzare l'adulto integratore.

"Allora, mi servono tre volontari... Ecco, bravi, voi tre andate benissimo. Se poi vi chiamaste anche Anna, Bruno e Carla sarebbe ancora meglio... No? Sicuramente uno scusabile errore dei vostri genitori. Bene, abbiamo qui la bellezza di cinque dadi perfettamente onesti e abbiamo provveduto a distribuire una congrua quantità di soldi del Monopoli ad A, B e C, i quali adesso provvederanno a puntarne dieci ciascuno per ogni partita: quindi, provvediamo a lanciare i dadi e ...c'è un decenne ragionevolmente ferrato in matematica, o quantomeno che abbia una calcolatrice caricata come app sullo smartphone? Bene, allora il baldo giovine provvederà a fare il prodotto dei valori dei dadi... No, non mi interessa quanto è venuto fuori; quello che mi interessa è se il valore ottenuto sia divisibile per dieci e/o per ventiquattro, visto che:

1. Se il valore è divisibile per 10 ma non per 24, Anna prende il piatto.
2. Se il valore è divisibile per 24 ma non per 10, Bruno prende il piatto.

3. Se il valore è divisibile sia per 24 che per 10, Carla prende il piatto.
4. Se il valore non è divisibile né per 10 né per 24, il piatto resta sul piatto.

Adesso, potreste provare a giocare qualche partita. Diciamo dieci, venti o anche di più, vista la velocità della nostra unità di calcolo... cinquanta? Va bene, ma non oltre, altrimenti si rischia di svalutare anche i soldi del monopoli. ...come dici, giovine? Se alla fine avanzano soldi sul piatto? Così mi piace, sempre pronto a studiare i casi particolari. Farai molta strada nella vita, almeno sin quando non ti acciuffano. Direi che in questo caso potreste lasciare il piatto al vostro Modesto Inventore di Intrattenimenti, dopo averli opportunamente cambiati in moneta sonante...”

Insomma, tra eloquio da imbonitore e capacità di spennare i polli, Alberto sembra abbia ereditato un notevole numero di geni dal padre.

...come vi aspettate finisca la partita?

2.2 Numeri Esteticamente Validi

Sapete che a Rudy non piacciono i problemi “da Olimpiadi”, nei quali trovare un’ambientazione è sostanzialmente impossibile: nel corso degli anni, però, ne sono capitati tre o quattro[15] che lo hanno colpito dal punto di vista estetico e che ha presentato: bene, con questo mese arriviamo a quattro (o cinque: vedi nota precedente[16]).

Bene, visto che il problema (secondo Rudy) è esteticamente valido, definiamo *Numero Esteticamente Valido* un numero di k cifre ($2 \leq h \leq 10$) senza *leading zero* composto da k cifre distinte e tale che il prodotto di due cifre consecutive compaia all’interno del numero. Ad esempio, 3412 è esteticamente valido, visto che 3*4=12, 4*1=4, 1*2=2 e tutti i risultati compaiono nel numero; 36184, invece, non è esteticamente valido, visto che 8*4=32 non compare da nessuna parte.

Adesso, chi ha inventato questo problema si poneva il quesito: ...ma per ogni valore di k, quali sono il più grande e il più piccolo Numero Esteticamente Valido?

E Rudy, per non essere da meno, si poneva una domanda della quale non ha soluzione (as usual): ma è possibile calcolare *quanti sono*, per un dato k, i Numeri Esteticamente Validi?

Evidentemente, alla domanda di Rudy va benissimo la risposta “Sì, per enumerazione (su una macchina *molto* svelta)”. Ma visto che tutte le volte che la pensava così lo avete sonoramente smentito (e Rudy è *contento* di essere smentito; non fateci citare Rex Stout per l’ennesima volta), se volete provarci...

Inutile aggiungere che *non* gli va bene la risposta “Sono al più 9.999.999.988, visto che uno non esteticamente valido lo hai citato tu”.

3. Bungee Jumpers

Esiste una sequenza $\{a_k\}$ di numeri reali o complessi tali che $|a_k|<1$, per cui:

$$|\sum a_k| < |\sum a_k^2| < |\sum a_k^3| < |\sum a_k^4| < |\sum a_k^5|?$$

La soluzione, a “Pagina 46”

4. Soluzioni e Note

Novembre.

Per quanto poco credibili siamo ormai quando parliamo di ritardi e di mole di lavoro, facciamo qui un commento-scusa, per il compleanno di questo mese, che ancora una volta non è compilato dal degno compleannista e per queste povere soluzioni e note, che non hanno praticamente note e non avrebbero soluzioni se non fosse per voi.

[15] Rudy è fermamente convinto *ad oggi* siano tre, visto che il quarto, presentato in modo “asettico”, qualche mese dopo ha trovato un’ambientazione piuttosto carina. No, non ha nessuna intenzione di andarli a cercare.

[16] Ho detto *precedente*!

Tutto qui, cominciamo la ballata. Questo mese il Q&D ha fatto appassionare tutti voi, trovate la soluzione nell'apposita sezione, mentre le vostre soluzioni seguono qui sotto.

4.1 [213]

4.1.1 L'uomo contro la macchina

Probabilità, accidenti. E non ho nemmeno messo le classiche tre birre nella valutazione, doppio e triplo accidenti (cit.). Vediamo il problema:

> *Stabilito un certo valore N (per esempio* 2016*) Al e Fred giocano. Ciascuno di loro genera tre numeri (*$a_1 \leq a_2 \leq a_3$ *quelli di Alberto,* $f_1 \leq f_2 \leq f_3$ *quelli di Fred) in modo tale che ciascuna delle due triplette dia come somma giustappunto N; quindi, vengono confrontati uno per uno i valori, in modo ordinato: (*a_1, f_1*), (*a_2, f_2*), (*a_3, f_3*). Vince (un punto) chi riesce ad avere due numeri strettamente maggiori dei corrispondenti numeri dell'avversario, e se questo non si verifica la partita è patta. A gioca "a caso", F cerca di ottimizzare la sua strategia, ma senza mai giocare la stessa terna due volte. Qual è la speranza matematica di punteggio, su* 100 *partite, per Fred?*

Indovinate la prima soluzione di chi è? Ma di ***Alberto R.***! Secondo me lo avreste riconosciuto anche senza presentazione, guardate che cosa scrive:

> In un gioco a conoscenza completa a mosse alterne esiste sempre una strategia vincente per l'uno o per l'altro o una strategia di pareggio per entrambi (Zermelo). Ma ciò è conseguenza dell'asimmetria dovuta al fatto che c'è chi fa la prima mossa e chi la seconda. Nel nostro caso le mosse sono contemporanee (come nella morra, sia quella cinese sia quella numerica) quindi non può esistere una strategia vincente per Fred perché, se esistesse, la stessa potrebbe essere usata anche da Alberto e vincerebbero entrambi, il che è impossibile visto che non stiamo parlando di una competizione elettorale.
>
> Ciò non toglie che non possa esistere una buona tattica. Io, al posto di Fred, giocherei, in un ordine qualunque, le seguenti 100 terne:
>
> (0, 1008, 1008) ; (0, 1007, 1009) ; (0, 1006, 1010) ; … ; (0, 909, 1107)
>
> Se Alberto gioca "a caso" vincerei spesso, ma quanto spesso è impossibile dirlo, mancando qualunque informazione circa il metodo con cui Alberto sceglie i sui numeri.
>
> Già m'immagino l'obiezione: «Non fare il sofista rompiscatole! Il testo del problema dice che "Fred decide di darsi delle regole per il gioco, cercando di ottimizzare le probabilità di vittoria" ma non attribuisce ad Alberto analoga intenzione né suggerisce per Alberto alcun particolare comportamento, quindi si sottintende che egli giochi, appunto, "a caso" e quando si sceglie un numero "a caso" in un certo intervallo si sottintende "senza preferenze" cioè un numero random con distribuzione di probabilità **uniforme** nell'intervallo, come succede quando si lancia un dado o si aziona la roulette o si estrae un numero dal sacchetto della tombola.»
>
> No, non è possibile e la dimostrazione è semplicissima: un noto teorema afferma che il valor medio della somma di più variabili aleatorie è uguale alla somma dei valori medi di ciascuna di esse, e ciò vale sempre, sia quando le variabili addende sono indipendenti sia quando sono comunque correlate. Se i tre numeri di Alberto, a_1, a_2, a_3, avessero distribuzione di probabilità uniforme nell'intervallo 0-2016, avrebbero ciascuno valor medio 1008 e la loro somma avrebbe valor medio 3024, mentre sappiamo che la somma vale sempre 2016.
>
> Qualunque metodo usi Alberto per scegliere i numeri a_1, a_2, a_3, almeno due di essi devono avere una distribuzione non uniforme che privilegi i numeri piccoli. Ciò può essere ottenuto in cento modi diversi, ad esempio:
>
> - Potrebbe scegliere a caso a_1 e a_2 nell'intervallo 0-2016, se la loro somma è minore di 2016 calcola a_3=2016–a_1–a_2, se è maggiore ricomincia da capo, oppure sostituisce solo il più grande, oppure lo dimezza, oppure… oppure…

- Potrebbe scegliere a_1 a_2 nell'intervallo 0-X con X<1008 poi trovare a_3 per differenza
- Potrebbe scegliere, con distribuzione di probabilità uniforme, due numeri x, y nell'intervallo 0-2016 poi considerare l'ampiezza dei tre pezzi in cui detto intervallo ne è suddiviso, cioè assumere (con $x<y$) $a_1 = x$, $a_2 = y - x$, $a_3 = 2016{-}y$. Questo metodo è particolarmente elegante perché a_1, a_2, a_3 avrebbero la stessa distribuzione di probabilità, cioè sarebbero tre istanze della stessa variabile aleatoria.

Se qualcuno avesse la pazienza e la capacità di calcolare il numero medio di vittorie di Fred per ciascuno dei casi suddetti troverebbe, ovviamente, risultati sempre diversi.

In definitiva credo che ci siano incontrovertibili argomenti per affermare che il problema è indeterminato.

La controversia potrebbe arrivare da qualcun altro, non certo dalla povera Alice che qui commenta. Andiamo avanti, e vediamo la versione – che parte dalla diversa assunzione, misteriosamente, che il problema sia determinato – di ***Emanuele***:

Anche questa volta, dopo aver deforestato mezza foresta amazzonica per cercare di venire a capo del quesito proposto, provo a sottoporvi le mie elucubrazioni per quanto riguarda il gioco tra Alberto e Fred.

Simboli:

n = intero (usato come pedice) € {1, 2, 3}

a_n = n-esimo numero scelto da Alberto

f_n = n-esimo numero scelto da Fred

$V_n = f_n > a_n$

$X_n = f_n = a_n$

$P_n = f_n < a_n$

\ divisione intera (torna la parte intera della divisione)

/ divisione normale (solo per distinguere i due simboli 8))

I paletti inseriti nella scelta dei tre numeri che compongono la terna fanno sì che:

1) La vittoria si può ottenere con V_1, V_2 o V_2, V_3 o V_1, V_3, quindi specularmente la sconfitta (con P_n)

2) Se almeno una delle tre coppie è uguale (X_n) allora la partita è patta in quanto o gli altri due sono uguali (cosa tra l'altro non sempre possibile) o differiscono, in ogni caso siamo di fronte ad una patta

Quindi compilando una tabellina delle probabilità, a meno di strafalcioni (in colonna il risultato dell'n-esimo confronto):

n	1	2	3	
1	X	X	X	
2	X	P	V	
3	X	V	P	
4	P	X	V	
5	V	X	P	
6	P	V	X	
7	V	P	X	
8	P	V	V	*
9	V	P	V	*
10	P	V	P	
11	P	P	V	
12	V	V	P	*
13	V	P	P	

Le righe con gli asterischi sono quelle che portano alla vittoria del giocatore di riferimento (in questo caso Fred).

Alla fine la probabilità di vittoria è 3/13, ed essendo la posta uguale ad un punto e nessuna posta negativa in caso di perdita, la speranza matematica di vittoria è di 3/13 = 0.23 a partita.

Ora immaginando che Alberto abbia generato delle triplette abbastanza casualmente, se fossi Alberto cercherei di tenermi basso con f_1 per poi giocarmela con f_2 e f_3.

Infatti, ponendo f_1, f_2, f_3 € N e $S = f_1 + f_2 + f_3$, si dimostra abbastanza agevolmente (non lo è stato per me, prova ne è la foresta di cui sopra) che

$0 \leq f_1 \leq S\backslash 3$, $f_2 \leq (S - f_1)\backslash 2$, $f_3 \leq S - ((S - f_1)\backslash 2)$

(penso che la vostra scelta di S = 2016 non sia casuale essendo divisibile per 6). Quindi tenendo f_1 molto basso possiamo generare f_2 ed f_3 entrambi abbastanza alti.

Siccome Fred si è imposto “solamente” di generare triplette sempre diverse, potrebbe tenere inizialmente $f_1 = 0$ e quindi ad ogni successiva giocata modificare i valori di f_2 e f_3 in modo tale che restino abbastanza elevati.

Se $f_1 = 0$ segue $0 \leq f_2 \leq S\backslash 2$ e $f_3 \leq S$ potrebbe partire dalla tripletta 0, $S\backslash 2$, $S\backslash 2$ e quindi per le successive i € {1.. m_0} utilizzare 0, $(S\backslash 2) - i$, $(S\backslash 2) + i$; dopo m_0 partite potrebbe cominciare ad aumentare f_1 di una unità e quindi iniziare ad utilizzare le triplette 1, $(S\backslash 2) - 1 - i$, $(S\backslash 2) + 1 + i$ per i € {1.. m_1}

Il numero di partite m_x per le quali usare lo stesso “starter” f_1 non dovrà essere troppo elevato, perché, oltre ai limiti imposti dalle regole, si rischia di tenere troppo basso il valore di f_2.

Spero di non avere scritto grandi panzane, ma ormai non riuscivo a dormire di notte pensando a Fred che attendeva trepidante i miei suggerimenti.

Come vedete anche ***Emanuele*** non è convintissimo… probabilmente (come al solito) ***Alberto R.*** aveva ragione. Ma non chiudiamo prima di avere la versione di ***Valter***:

Penso di essermi complicato la vita: probabilmente c’è un modo più semplice per affrontare il problema (confido nei solutori più scaltri come Alberto R).

Per partecipare provo ad esporre fino a che punto sono riuscito ad arrivare (non ho una soluzione puntuale alla richiesta del problema ma solo un ordine di grandezza riguardo alla “speranza matematica” e nemmeno troppo preciso).

Per cominciare un piccolo glossario per aiutarmi nell’esposizione:

N = valore concordato (per comodità assumo che sia = 0 MOD6 per evitare problemi con decimali e resti);

n_1, n_2, n_3 = i tre numeri.

Negli esempi uso N=36 per avere un caso prova abbastanza significativo ma non troppo grande.

Si nota immediatamente che se uno dei tre numeri è uguale al corrispondete si pareggia (se poi sono due i numeri uguali chiaramente lo sono tutti e tre).

Si può facilmente mostrare che: $n_1 \leq N/3$, $n_2 < N/2$, $N/3 \leq n_3 < N - 1$

Se metto in coordinate i possibili valori di n_1 e n_2 ottengo qualcosa del genere (spero in un allineamento decente dei caratteri):

```
           x         2
          xx         1
         xxxx        0
        xxxxx        9
       xxxxxxx       8
      xxxxxxxx       7
     xxxxxxxxxx      6
    xxxxxxxxxxx      5
   xxxxxxxxxxxxx     4
  xxxxxxxxxxxxxx     3
 xxxxxxxxxxxxxxxx    2
xxxxxxxxxxxxxxxxx    1
12345678901234567
```

L’esempio è per N=36, le “x” indicano le coppie di n_1 e n_2 ammessi ed n_3 si ottiene per sottrazione.

In ascissa ci sono i $(N/2 - 1)$ n_2 e in ordinata i $N/3$ n_1.

Il numero di “x” si può calcolare notando le caratteristiche dei 2 “triangoli” che compongono la figura:

$((N/3 + 1)*N/3)/2 = N^2/18 + N/6$ (per n_2 da 1 a $N/3$)

$(N/2 - N/3 - 1)*(N/2 - N/3) = N^2/36 - N/6$ (per n_2 da $N/3 + 1$ a $N - 1$).

Sommando e semplificando si ottiene: $N^2 / 12$.

Come controprova calcolo il numero di tutte le possibili triplette che danno come somma N indipendentemente dall'ordine dei loro 3 valori.

Notando che si possono ottenere tutte c.s.: $n_1 = N - 2$ abbinato alla coppia n_2, n_3 = 1,1, $N - 3$ alle due coppie 1,2 / 2,1, e così via … risulta che il numero di tutte le possibili triplette sia l'$(N - 2)$.esimo numero triangolare cioè $(N - 2) * (N - 1) / 2$.

Tale valore lo devo ottenere anche partendo da $(N^2 / 12)$ c.s.: $(N^2 / 12) * 6 - 5 - (3/2N + 6)$ cioè dal numero di triplette ordinate moltiplicato 6 per ottenere tutte le combinazioni dei 3 valori meno 5 per non contare 6 volte la tripletta con i tre valori uguali e meno la metà delle 3 triplette con due valori uguali per ogni N e meno 6 per non contare nuovamente 6 volte la tripletta con 3 valori uguali.

Calcolando e semplificando si ottiene proprio il valore ipotizzato.

Dallo schema si nota facilmente che, scelta una "x" (cioè una coppia n_1, n_2), i casi di pareggio si trovano tutti sulle linee: verticale, orizzontale e diagonale partendo da destra a salire, passanti per la "x".

Le tre linee dividono lo schema in 6 parti che, per comodità, aiutandomi con i simboli dei segni cardinali indico con: una a SO, una a NO, due a NE e due a SE (l'ho stiracchiata un po' ma mi viene utile per non complicare ulteriormente l'esposizione).

Le "x" a SO sono i casi contro cui la coppia n_1, n_2 scelta vince, poi, alternando casi di sconfitta e vittoria, si passa a NO, NE, NE, SE, SE. Ora si possono calcolare i casi di pareggio, vittoria, sconfitta, scelta una qualsiasi coppia n_1, n_2.

Non tedio con i calcoli, mi sono serviti per individuare le coppie che danno la maggiore probabilità di vittoria (ciò, per come la vedo, i valori più alti nel rapporto fra numero di vittorie e sconfitte).

Faccio solo notare che NO (perde) è = NE (vince) e NE (perde) è = SE (vince), quindi si tratta si massimizzare l'"area" SO (vince) rispetto a SE (perde).

Risulta che tali coppie si trovano sulla verticale dell'ascissa $N/3 + 1$ (13 nel caso di esempio) e a partire dall'ordinata più in alto ($N/3$) a scendere.

Ora, tenendo conto dei casi possibili (cioè dal numero di coppie di triplette che volta per volta i 2 contendenti potrebbero giocare) e dal fatto che l'avversario avrebbe un numero molto ridotto di combinazioni per cui potrebbe vincere direi che "Il Buono Vince Sempre (beh, quasi) …" e "la speranza matematica di punteggio, sulle 100 partite, per Fred" è molto vicina al 100 (di più non sono riuscito a fare, come detto confido negli altri solutori).

Allego alcuni casi che ho calcolato (se servissero, visto che li ho fatti e sperando nell'allineamento dei caratteri).

```
           v        2
          px        1
         xxxo       0
        vvvvx       9
       vvvvvxp      8
      vvvvvvxp      7
     vvvvvvvxpp     6
    vvvvvvvvxpp     5
   vvvvvvvvvxppp    4
  vvvvvvvvvvxppp    3
 vvvvvvvvvvvxpppp   2
vvvvvvvvvvvvxpppp   1

12345678901234567

10 - 13 - 13
------------
p :  1 +  0 + 20 = 21   NO NE SE
v :  1 +  0 + 72 = 73   NE SE SO (73/21=3,47)
perde:
11 - 11 - 14   p - v - p NO
.. - .. - ..   p - p - v NE
 1 - 14 - 21   v - p - p SE
vince:
12 - 12 - 12   p - v - v NE
.. - .. - ..   v - p - v SE
 1 - 12 - 23   v - v - p SO
```

```
           v       2
          xv       1
         ppxx      0
        xxxxo      9
       vvvvvxx     8 NORD + NORD
      vvvvvvxp     7
     vvvvvvvxpp    6
    vvvvvvvvxpp    5
   vvvvvvvvvxppp   4
  vvvvvvvvvvxppp   3
 vvvvvvvvvvvxpppp  2
vvvvvvvvvvvvxpppp  1

12345678901234567

9 - 13 - 14
-----------
p :  2 +  0 + 19 = 21    NO NE SE
v :  2 +  0 + 68 = 70    NO SE SO (70/21=3,33)
perde:
10 - 11 - 15   p - v - p NO
.. - .. - ..   p - p - v NE
 1 - 14 - 21   v - p - p SE
vince:
12 - 12 - 12   p - v - v NO
.. - .. - ..   v - p - v SE
 1 - 12 - 23   v - v - p SO

           v       2
          vv       1
         pxvx      0
        pppxx      9
       xxxxxox     8
      vvvvvvxx     7
     vvvvvvvxpx    6
    vvvvvvvvxpp    5
   vvvvvvvvvxppp   4
  vvvvvvvvvvxppp   3
 vvvvvvvvvvvxpppp  2
vvvvvvvvvvvvxpppp  1

12345678901234567

8 - 13 - 15
-----------
p:   4 +  0 + 17 = 21    NO NE SE
v :  4 +  0 + 63 = 67    NO SE SO (67/21=3,19)
perde:
10 - 10 - 16   p - v - p NO
.. - .. - ..   p - p - v NE
 1 - 14 - 21   v - p - p SE
vince:
12 - 12 - 12   p - v - v NO
.. - .. - ..   v - p - v SE
 1 - 12 - 23   v - v - p SO

           v       2
          vv       1
         xvvx      0
        ppxvx      9
       ppppxxp     8
      xxxxxxox     7
     vvvvvvvxxv    6
    vvvvvvvvxpx    5
   vvvvvvvvvxppx   4
  vvvvvvvvvvxppp   3
 vvvvvvvvvvvxpppp  2
vvvvvvvvvvvvxpppp  1

12345678901234567

7 - 13 - 16
-----------
p:   6 +  1 + 14 = 21  NO NE SE
v :  6 +  1 + 57 = 64  NO SE SO (64/21=3,047)
perde:
 9 - 10 - 17   p - v - p NO
 8 - 14 - 14   p - p - v NE
 1 - 14 - 21   v - p - p SE
vince:
12 - 12 - 12   p - v - v NO
 6 - 15 - 15   v - p - v SE
 1 - 12 - 23   v - v - p SO
```

```
            v        2
           vv        1
          vvvx       0
         pxvvx       9
        pppxvxp      8
       pppppxxp      7
      xxxxxxxxoxx    6
     vvvvvvvvxxv     5
    vvvvvvvvvxpxv    4
   vvvvvvvvvvxppx    3
  vvvvvvvvvvvxpppx   2
 vvvvvvvvvvvvxpppp   1

12345678901234567

6 - 13 - 17
-----------
p :  9 +  2 + 10 = 21  NO NE SE
v :  9 +  2 + 50 = 61  NO SE SO (61/21=2,90)
perde:
 9 -  9 - 18   p - v - p NO
 8 - 14 - 14   p - p - v NE
 1 - 14 - 21   v - p - p SE
vince:
12 - 12 - 12   p - v - v NO
 5 - 15 - 16   v - p - v SE
 1 - 12 - 23   v - v - p SO
```

Va beh, i casi non li abbiamo copiati tutti. Però questi rendono l'idea. Andiamo avanti e passiamo al secondo problema.

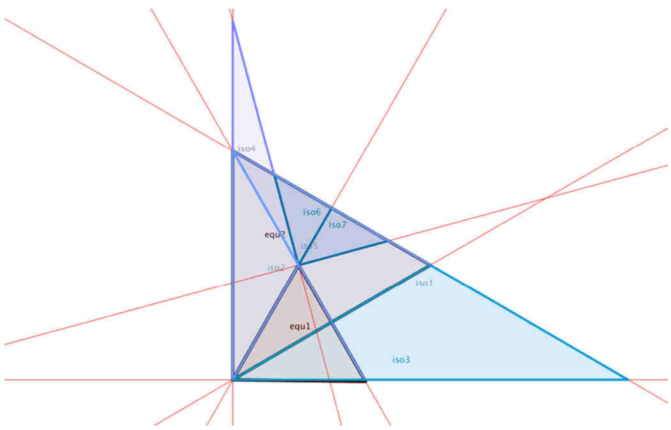
4.1.2 Un problema da trecento birre

Dal titolo sembrerebbe un problema attraente, più il fatto che include disegni, potrebbe essere interessante… vediamo:

> *Alberto, traccia otto rette, in modo tale che nessuna sia parallela ad una qualsiasi altra; vince tre birre per ogni triangolo equilatero e una birra per ogni triangolo isoscele; quante birre servono se riesce a massimizzare il numero di birre? Togliendo la limitazione delle otto linee, esiste una soluzione da* 300 *birre, ottima: quante linee occorrono?*

Malgrado sembrerebbe fattibile, poche soluzioni, anzi solo una, quella di ***Valter***:

> Non sono riuscito a fare molto. Fornisco quel poco; con 8 rette sono arrivato a 2 triangoli equilateri e 7 isosceli per un totale di 13 birre.
>
> Per le trecento birre non sono riuscito ad immaginare nulla.
>
> Forse c'è un qualche schema in quello da 8 rette che può essere generalizzato. Se fosse così, siccome non lo vedo, è possibile che si possa fare di meglio della mia proposta anche perché non ho una dimostrazione che sia la configurazione ottimale.
>
> L'unica cosa che mi viene da pensare per le trecento birre è di duplicare quanto fatto per le 8 ruotando di 15° p.e. sul vertice comune dei 2 triangoli equilateri e sovrapporre analizzando quanto si ottiene (si arriverebbe così a 16 rette).
>
> Fornisco l'immagine; ho chiamato i due triangoli equilateri "equ1" e "equ2" e quelli isosceli da "iso1" a "iso7":



Per capirci, riguardo alle trecento birre la mia ipotesi, ma è solo un abbozzo, è lavorare su 5 lati di un dodecagono per ottenere qualcosa del tipo dell'immagine che ho trovato in rete (eliminando opportunamente le rette parallele): http://en.academic.ru/pictures/enwiki/50/24-cell_t0_F4.svg.

Ci fermiamo qui. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

In un paese dal bicameralismo talmente perfetto che possiamo decidere noi per ogni parlamentare se diventerà Deputato o Senatore, ogni parlamentare ha al più tre oppositori per principio. Provate che è possibile dividere il corpo parlamentare in due camere tali che nessuno abbia più di un oppositore per principio nella camera nella quale siede.

Nota: per "oppositore per principio" intendiamo qualcuno che, appena scopre come voterete, vota in modo inverso, indipendentemente dalla bontà o meno ella legge proposta.

Formiamo le due camere in modo arbitrario, e sia E il numero totale delle coppie di oppositori per principio. Se esiste un parlamentare in una camera con almeno due oppositori per principio (contato quindi due volte in E), trasferitelo nell'altra camera, dove ne avrà al più uno: questo decresce E di due, con il possibile aumento di uno (se l'eventuale terzo oppositore per principio del nostro parlamentare è nella camera di arrivo); quindi, ad ognuno dei nostri spostamenti E diminuisce almeno di uno.

Procedendo in questo modo, arriveremo ad una situazione in cui E non può essere ulteriormente decrementato (deve essere non negativo): questo significa che in quella configurazione ogni parlamentare ha al più un oppositore per principio nella propria camera.

6. Pagina 46

Affrontiamo il problema per passi.

Se la catena di diseguaglianze è limitata a ***due*** termini, ossia è nella forma:

$$|\sum a_k| < |\sum a_k^2|,$$

una soluzione ovvia potrebbe essere $a_1 = r$, $a_2 = -r$, con $0 < r < 1$, $r \in R$; in questo caso, il primo termine sarebbe pari a zero mentre il secondo sarebbe maggiore di zero.

Se poniamo la soluzione nella forma $\{r\cdot 1;\ r(-1)\}$ e notiamo che 1 e –1 sono le due radici quadrate dell'unità, questo può darci un indizio per le soluzioni successive.

Verifichiamo se le radici cubiche dell'unità soddisfano la catena delle disuguaglianze con ***tre*** termini. Le radici cubiche dell'unità sono 1; ω ; ω^2, con:

$$\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

e, essendo le soluzioni di $x^3 - 1 = 0$, è anche $1 + \omega + \omega^2 = 0$; inoltre, dovendo essere $\omega^3 = 1$, la somma dei quadrati vale:

$$1 + \omega^2 + \omega^4 = 1 + \omega^2 + \omega = 0.$$

Il fatto però che $|\sum a_k| = |\sum a_k^2| = 0$ indica che la sequenza $\{r;\ r\omega;\ r\omega^2\}$ non soddisfa la richiesta data nel problema; se però uniamo a questa sequenza anche la coppia $\{r;\ -r;\ r;\ r\omega;\ r\omega^2\}$, abbiamo:

$$|\sum a_k| = |r - r + r(1 + \omega + \omega^2)| = 0$$

$$|\sum a_k^2| = |r^2 + r^2 + r^2(1 + \omega^2 + \omega^4)| = |2r^2 + r \cdot 0| = 2r^2$$

$$|\sum a_k^3| = |\ r^3 - r^3 + r^3(1 + \omega^3 + \omega^6)| = |0 + 3r^3| = 3r^3$$

Quindi, una scelta di r tale che $2/3 < r < 1$ rende $2r^2 < 3r^3$ e $|a_k| = r < 1$ per qualsiasi valore di k.

Proseguendo su questa strada, verifichiamo se la soluzione per la catena di quattro diseguaglianze sia soddisfatta da una sequenza di nove termini costruita secondo la medesima logica.

Considerato che le radici quarte dell'unità sono $\{1; -1; i; -i\}$, la sequenza diviene:

$$\{r, -r, r, r\,\omega, r\,\omega^2, r, -r, ri, -ri\}.$$

Quindi:

$$|\textstyle\sum a_k| = 0$$
$$|\textstyle\sum a_k^2| = |r^2 + r^2 + r^2(1 + \omega^2 + \omega^4) + r^2(1 - 1 - i + i)| = 2r^2$$
$$|\textstyle\sum a_k^3| = |r^3 - r^3 + r^3(1 + \omega^3 + \omega^6) + r^3(1 - 1 - i + i)| = 3r^3$$
$$|\textstyle\sum a_k^4| = |r^4 + r^4 + r^4(1 + \omega^4 + \omega^8) + r^4(1 + 1 + 1 + 1)| = 6r^4.$$

En passant, notiamo che $1 + \omega^4 + \omega^8 = 0$.

Resta da verificare se sia possibile scegliere r in modo tale che $|r|<1$ e $0<2r^2<3r^3<6r^4$.

Diventa quindi possibile congetturare che aggiungendo a questa soluzione r volte le radici quinte dell'unità, si risolva il problema.

Per semplificare la notazione, notiamo che le radici n-esime dell'unità possono essere indicate come:

$$1; \omega_n; \omega_n^2; \omega_n^3; \ldots; \omega_n^{n-1}$$

dove

$$\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

Quindi, $\omega_n^n = 1$ e la somma delle loro m-esime potenze è la serie geometrica di n termini:

$$1 + \omega_n^m + \omega_n^{2m} + \ldots + \omega_n^{(n-1)m} = \frac{1-\left(\omega_n^m\right)^n}{1-\omega_n^m} = \frac{1-\left(\omega_n^n\right)^m}{1-\omega_n^m} = \frac{1-1}{1-\omega_n^m} = \frac{0}{1-\omega_n^m}.$$

Ossia la somma delle m-esime potenze vale zero a meno che sia anche $1 - \omega_n^m = 0$, nel qual caso è indeterminata: ma l'unico caso in cui questo si verifica è quando m è un multiplo di n:

$$1-\omega_n^{nt} = 1-\left(\omega_n^n\right)^t = 1-1 = 0.$$

Per tutti gli altri m (ossia quando m è congruo a 1, 2, ..., n–1 modulo n), abbiamo:

$$1 + \omega_n^m + \omega_n^{2m} + \ldots + \omega_n^{(n-1)m} = 0.$$

Quindi il contributo della somma $|\sum a_k^m|$ data dai termini associati all'n-esima radice dell'unità vale:

$$\left|\sum_{s=0}^{n-1}\left(r\,\omega_n^s\right)^m\right| = r^m \cdot 0 = 0$$

tranne nel caso di m multiplo di n, nel qual caso vale $r^m \cdot n$.

Quindi, non resta che verificare la sequenza di 14 termini formata da r moltiplicato per le radici quadrate, cubiche, quarte e quinte dell'unità. Ma essendo la somma delle m-esime potenze delle radici quinti pari a zero per m = 1, 2, 3, 4, l'unica volta in cui le radici quinte contribuiscono in un qualche modo alle somme in questione è per m=5; similmente, il solo contributo delle radici quarte è per m=4, delle radici terze per m=3 e nessuna radice contribuisce per m=1. Ma le radici quadrate forniscono un contributo per m=2 e m=4. Con lo stesso metodo di cui sopra possiamo allora ottenere:

$$|\textstyle\sum a_k| = 0$$
$$|\textstyle\sum a_k^2| = 2r^2$$
$$|\textstyle\sum a_k^3| = 3r^3$$
$$|\textstyle\sum a_k^4| = 6r^4$$

$$|\sum a_k^5| = 5r^5$$

Quindi, a prima vista, non resta che scegliere r tale che $6r^4 < 5r^5$, ossia $6/5 < r$: *ma questo va contro la nostra condizione* $r < 1$.

Consideriamo però che la radice quinta non entra in gioco sin quando non abbiamo m=5, e quindi l'unico effetto che abbiamo includendo una seconda copia dei termini che sono associati con la radice quinta è di raddoppiare il valore di $|\sum a_k^5|$ portandolo a $10r^5$: in questo caso, quindi, la nostra condizione diviene $6r^4 < 10r^5$, il che significa $3/5 < r$.

Ricordando che deve essere $2/3 < r$ per garantire che $2r^2 < 3r^3$, abbiamo una sequenza di 19 termini contenente una ulteriore copia dei cinque termini associati con le radici quinte dell'unità, risolve il nostro problema per la catena di cinque diseguaglianze purché sia rispettata la condizione $2/3 < r < 1$.

Notiamo che nello stesso modo possiamo estendere la catena di diseguaglianze ad un qualsiasi numero di elementi prendendo tante copie quante se ne rendano necessarie dei termini associati ai vari insiemi di radici n-esime.

7. Paraphernalia Mathematica

Ma secondo voi, quante probabilità ci sono he una cosa si riveli semplice se l'ha scoperta un tizio che di cognome fa *Odds*? Ecco, appunto. Per fortuna, le cose sono state semplificate da *Krawczyk* (pun intended).

7.1 Spirolatere

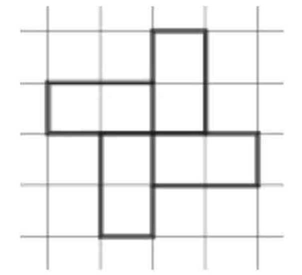
No, dico, trovatemi un altro modo per tradurre s*pirolaterals*. Considerato che ci sono delle *spirali* (e sin qui ci siamo), che richiedono degli spostamenti *laterali* (e sin quando non arriva un laureato in giurisprudenza ce la caviamo) ma quando l'inglese pretende anche di far girare il tutto su un *lattice* (che sarebbe un reticolo), o andate su *spireticolaterali*, che se lo dite due volte avete finito il tempo della conferenza, o lasciate perdere.

Ecco, noi abbiamo lasciato perdere talmente tanto che ci eravamo dimenticati dell'esistenza di questi articoli: il rimettere in ordine la biblioteca cartacea ha fatto sì che non solo li ritrovassimo, ma che ci accorgessimo anche che ne aveva parlato Martin Gardner[17].

Partiamo da una definizione non formale, nel senso che ne disegniamo una; procuratevi un foglio di carta a quadretti e scegliete un punto dalle parti del centro.

1. Ruotate di 90° in senso orario e tracciate una linea di *un* quadretto.
2. Ruotate di 90° in senso orario e tracciate una linea di *due* quadretti.
3. Ruotate di 90° in senso orario e tracciate una linea i *tre* quadretti.
4. Ripetete i passi (1), (2), (3) per *quattro* volte.

Se nessuno di noi si è sbagliato, dovreste ritrovarvi al punto di partenza con un grazioso disegnino come quello qui a fianco sul foglio *[E se la prima istruzione vi è sembrata balorda, ricordatevi che Rudy da giovane faceva il programmatore, e giochini del genere erano all'ordine del giorno].*



8 *Questo si chiama "3_{90}".*

In didascalia trovate il nome, che è noto come ***notazione di Odds***. Speriamo non rappresenti un problema ad essere interpretato: a pedice l'angolo del quale ruotate (in gradi), mentre la base (nel nostro caso, sarebbe il "3": si chiama proprio così, anche se le confusioni sono all'ordine del giorno) è il numero di linee che tracciate prima di ricominciare.

Adesso, tracciate le spirolatere da 1_{90} a 10_{90}. No, non ve le mettiamo in figura. Non è un grande sforzo, su. Dovreste esservi accorti che:

Base:	Rotazioni totali di un modulo	Copie per chiudere
1	90°	4
2	180°	2
3	270°	4
4	360°	(Mai)
5	450°	4
6	540°	2
7	630°	4
8	720°	(Mai)
9	810°	4
10	900°	2

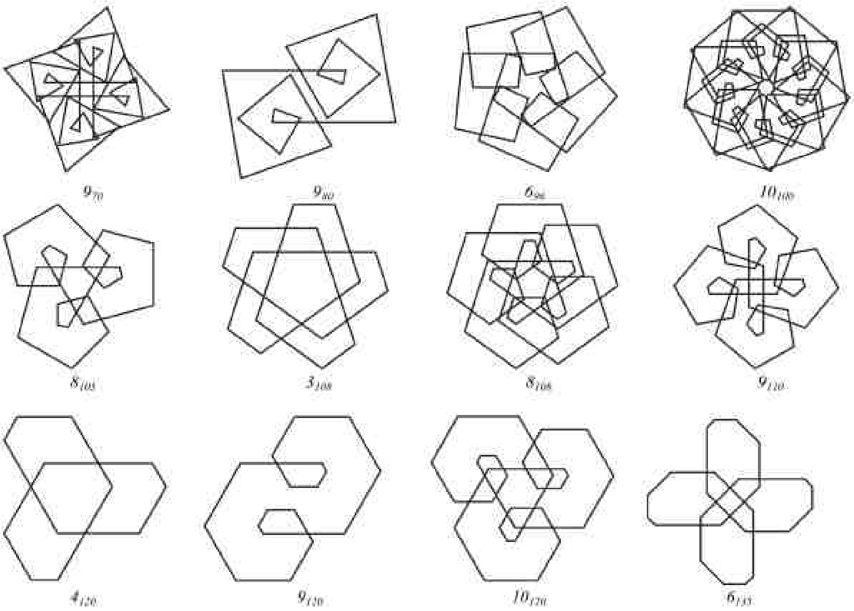
[17] Nel capitolo 17 di *Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments*, dove il Nostro riduce il nome a *Worm Paths* (in realtà questi sono un caso particolare di spirolatere, quindi non ci fidiamo a utilizzarlo); l'articolo non ci risulta pubblicato su SciAm o su LeScienze, ma se ci smentite va benissimo: comunque, potremmo sempre tradurvelo noi e pubblicarlo qui (non sarebbe la prima volta che MG "ci scrive un articolo": basta chiedere). Per ora, comunque, non ne parliamo, preferendo seguire quell'ammasso di consonanti impazzite citato nell'introduzione.

Con l'eccezione dei casi 4 e 8, la chiusura della spirolatera avviene quando avete fatto un numero intero di angoli a 360°: le due eccezioni sono proprio i casi nei quali vi basta *una sola spirolatera* per arrivare a un multiplo di 360°.

Odds a questo punto avanzò una supposizione: che qualsiasi angolo che fosse un divisore esatto di 180° generasse una spirolatera: per testare (via forza bruta) questa congettura, fu utilizzato un programma[18] che verificasse il comportamento di tutte le "aspiranti spirolatere" con base pari a $180/n$ ($n = 2, \ldots, 30$) con base da 1 a 10 e numero di ripetizione pari a 10.

Se fate un po' di conti, vi viene fuori che avete 290 spirolatere, delle quali 143 dovrebbero chiudersi secondo la Congettura di Odds. *Nomen Omen*, 10 di queste non si chiudevano.

A questo punto, definite le principali *subroutines*[19], non restava altro che conquistare il necessario tempo macchina; un altro programma (supponiamo, durante il week-end) si è preoccupato di esplorare le 1800 aspiranti spirolatere costruite da al più 10 ripetizioni con un numero di segmenti tra 1 e 10. Di queste, ci si aspettava che 561 fossero "chiuse secondo Odds", ma di queste, 113 proprio si rifiutavano; delle restanti 448, ve ne presentiamo una selezione dalla quale, secondo noi, potreste prendere alcune interessanti idee per dei sottopiatti o dei centrini.



Carini, vero? Bene, potreste generare gli altri, sempre con GeoGebra.

Non ci risulta che Odds ("and that's quite Odd") abbia svolto ulteriori indagini in questa direzione; forse perché si è posto una domanda che ben pochi si sono posti.

...ma chi l'ha detto, che dobbiamo girare sempre dalla stessa parte?

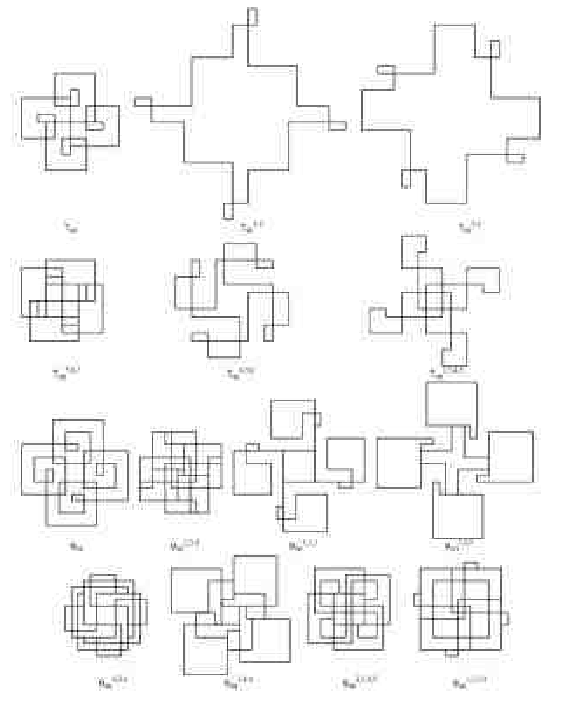
Se volete la nostra opinione, se la sono posta in pochi in quanto si trattava di inventarsi una notazione, ma il Nostro (con, come uniche conseguenze, il suicidio di qualche tipografo) ce l'ha fatta.

L'idea di Odds è stata quella di utilizzare una notazione del tipo $A_b^{c,\, d,\, e}$: in una spirolatera di lunghezza $\boldsymbol{A}$, nella quale ogni curva è di $\boldsymbol{b}$ gradi, sono tutte in senso orario tranne la c-esima, la d-esima e la e-esima. Un po' brutale, una grossa seccatura per i tipografi, ma compatta e significativa. E ha anche trovato il nome, per questi nuovi aggeggi: indipendentemente dall'ordine delle svolte "dall'altra parte", si chiamano "alternate".

[18] Stiamo parlando dei primi anni Settanta: impresa non esattamente elementare. Se qualcuno vuole sbizzarrirsi con GeoGebra, grazie.

[19] Sì, FORTRAN. Problemi? *So, sue me*.

Cosa si può dire, su queste nuove spirolatere? Beh, tanto per cominciare, che sono meno del previsto. Per un dato valore dell'ordine ***A***, potete creare 2^A spirolatere, ma metà di queste sono riflessioni speculari delle restanti; quindi, le spirolatere "effettivamente diverse" sono 2^{A-1}. Il che è bene, perché ne restano comunque un mucchio: una minima variazione negli apici vi sconvolge completamente il disegno; ciò nonostante, anche qui qualcuna "chiude" *[Potrebbe essere interessante calcolare quale sia la "densità di chiusura delle spirolatere alternate", confrontata con quelle classiche… No, non abbiamo trovato il dato da nessuna parte.].* Ve ne presentiamo qualcuna nella figura di fianco *[A margine, diteci una cosa. Siamo noi che ci siamo fatti una fisima, o qualcuna ha l'aria vagamente nazista? No, perché a noi qualcuna pare proprio.].*



9 *Qualche alternata.*

Ora, io e Doc abbiamo il ricordo di una collega di università che per la tesi lavorava con il programma "Tarta" (che in inglese è noto come "Turtle"): è abbastanza evidente che un oggetto del genere funziona(va) (oh, Sandra, esiste ancora?) decisamente bene per fare giochini con le spirolatere: e infatti ***Abelson*** (et alia) ha scritto un articolo dal titolo *Turtle Geometry* (MIT Press, 1968) nel quale mostra come ricavare (testuali parole) "spirolatere chiuse completamente inattese" per enumerazione: purtroppo, il metodo non permette di predire *quando* una spirolatera chiude.

Dai, adesso giocateci un po' voi. Se mostrate entusiasmo (e ci fornite qualche dato), potremmo anche prendere in considerazione l'ipotesi di una seconda puntata. Ecco, potreste anche scriverla voi, giacché ci siete...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms