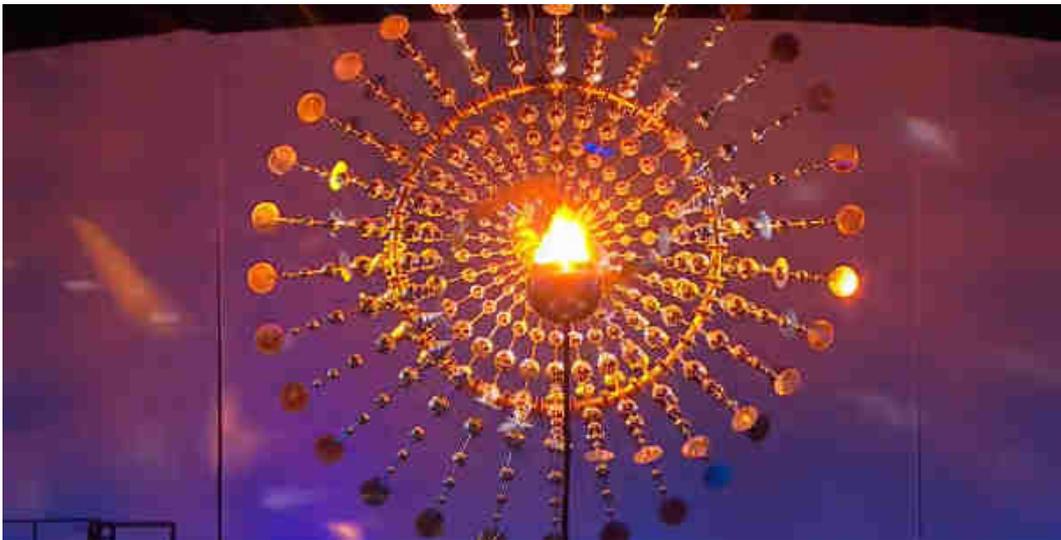




# *Rudi Mathematici*

*Rivista fondata nell'altro millennio*

Numero 213 – Ottobre 2016 – Anno Diciottesimo



<b>1. Meno di niente</b> .....	<b>3</b>
<b>2. Problemi</b> .....	<b>7</b>
2.1 L'uomo contro la macchina.....	7
2.2 Un problema da trecento birre.....	7
<b>3. Bungee Jumpers</b> .....	<b>8</b>
<b>4. Soluzioni e Note</b> .....	<b>8</b>
4.1 [212].....	9
4.1.1 I "Giochi di Rudy".....	9
4.1.2 Un problema dal mondo fuori di qui.....	11
<b>5. Quick &amp; Dirty</b> .....	<b>23</b>
<b>6. Pagina 46</b> .....	<b>24</b>
<b>7. Paraphernalia Mathematica</b> .....	<b>25</b>
7.1 Giocare a carte con i pastori tedeschi.....	25



	<b>Rudi Mathematici</b> Rivista fondata nell'altro millennio da <i>Rudy d'Alembert</i> (A.d.S., G.C., B.S) <a href="mailto:rudy.dalembert@rudimathematici.com">rudy.dalembert@rudimathematici.com</a>
	<i>Piotr Rezierovic Silverbrahms</i> (Doc) <a href="mailto:piotr.silverbrahms@rudimathematici.com">piotr.silverbrahms@rudimathematici.com</a> <i>Alice Riddle</i> (Treccia) <a href="mailto:alice.riddle@rudimathematici.com">alice.riddle@rudimathematici.com</a>
<a href="http://www.rudimathematici.com">www.rudimathematici.com</a>	
RM212 ha diffuso 3'130 copie e il 09/10/2016 per  eravamo in 8'200 pagine.	
Tutto quanto pubblicato dalla rivista è soggetto al diritto d'autore e in base a tale diritto <i>concediamo il permesso di libera pubblicazione e ridistribuzione</i> alle condizioni indicate alla pagina <a href="#">diraut.html</a> del sito. In particolare, tutto quanto pubblicato sulla rivista è scritto compiendo ogni ragionevole sforzo per dare le informazioni corrette; tuttavia queste informazioni non vengono fornite con alcuna garanzia legale e quindi la loro ripubblicazione da parte vostra è sotto la vostra responsabilità. La pubblicazione delle informazioni da parte vostra costituisce accettazione di questa condizione.	

A luglio siamo riusciti ad uscire prima che iniziassero, ad agosto c'era la bellissima foto che ci aveva mandato Simona, e a settembre ci si è messa la Marvel, ma adesso possiamo chiedervelo: trattavasi di carenza di sonno, o lo schema è davvero quello di due anelli di Möbius a 90°?



L'esportazione del processo di vinificazione nel nuovo mondo, anzi nei nuovi mondi, è dovuta più a motivi religiosi che di mera degustazione: le missioni cattoliche che portavano il loro verbo nel mondo avevano bisogno del vino per poter celebrare l'eucarestia; importarlo in zone tanto lontane dall'Europa avrebbe avuto costi proibitivi, ma per fortuna la coltivazione della vite risultò possibile in molte delle regioni raggiunte; al punto che oggigiorno i maggiori produttori di vino del mondo si trovano in posti come la California o il Sud Africa, per non parlare dell'Australia.

Ma tradizione e consumo sono due cose diverse. Al giorno d'oggi si possono acquistare diverse qualità di vino in ogni paese del mondo, ma soltanto in poche nazioni non ci si siede a tavola senza una bottiglia di vino. Se le origini di una particolarmente prestigiosa rivista di matematica creativa sono fortemente legate al Piemonte, non stupirà che le sue pagine contengano celebrazioni e anche solo semplici menzioni di ottimi vini<sup>3</sup>. Ma il motivo per cui ne parliamo in questa sede è per mostrare come le buone cose non solo sono contagiose, ma diventano in fretta anche familiari, scontate, essenziali. L'economia di paesi in cui l'uva, fino a pochi secoli fa, non esisteva nemmeno, è oggi basata sulla produzione enologica. E qualche migliaio di anni dopo l'invenzione della tecnica di produzione, il mondo ha elaborato mille modi raffinati di consumarlo e di utilizzarlo per la cucina di pietanze. Potremo pensare ad un'esistenza priva di spumanti, aperitivi, ambrati accompagnamenti dei nostri piatti?

E come faremmo a sopravvivere senza altri oggetti che diamo completamente per scontati, come le cifre? 1, 2, 3,... sono ormai talmente ben radicate nella nostra mente, pur essendo solo entità simboliche, che quasi non riusciamo ad immaginare che siano solo uno dei modi possibili per scrivere i numeri. È come se fossero lì da sempre, come se ci fossero sempre state. Ecco, volendo scrivere duecentotredici, ne selezioniamo automaticamente tre (2, 1 e 3) e le giustapponiamo in modo che il 2 rappresenti due centinaia, l'1 una singola decina e il 3 tre unità. Semplicissimo; anzi, naturale. Eppure ci sono voluti secoli ai nostri antenati – che pure consumavano copiose quantità di vino e sapevano ben calcolare come pagarlo e quanti litri potessero essere prodotti nei vigneti tra i margini delle loro ben squadrate pezze di terreno – per arrivare a scrivere i numeri come facciamo noi.

1	I	11	XI	21	XXI	31	XXXI	41	XL
2	II	12	XII	22	XXII	32	XXXII	42	XLII
3	III	13	XIII	23	XXIII	33	XXXIII	43	XLIII
4	IV	14	XIV	24	XXIV	34	XXXIV	44	XLIV
5	V	15	XV	25	XXV	35	XXXV	45	XLV
6	VI	16	XVI	26	XXVI	36	XXXVI	46	XLVI
7	VII	17	XVII	27	XXVII	37	XXXVII	47	XLVII
8	VIII	18	XVIII	28	XXVIII	38	XXXVIII	48	XLVIII
9	IX	19	XIX	29	XXIX	39	XXXIX	49	XLIX
10	X	20	XX	30	XXX	40	XL	50	L
51	LI	61	LXI	71	LXXI	81	LXXXI	91	XC
52	LII	62	LXII	72	LXXII	82	LXXXII	92	XCII
53	LIII	63	LXIII	73	LXXIII	83	LXXXIII	93	XCIII
54	LIV	64	LXIV	74	LXXIV	84	LXXXIV	94	XCIV
55	LV	65	LXV	75	LXXV	85	LXXXV	95	XCV
56	LVI	66	LXVI	76	LXXVI	86	LXXXVI	96	XCVI
57	LVII	67	LXVII	77	LXXVII	87	LXXXVII	97	XCVII
58	LVIII	68	LXVIII	78	LXXVIII	88	LXXXVIII	98	XCVIII
59	LIX	69	LXIX	79	LXXIX	89	LXXXIX	99	XCIX
60	LX	70	LXX	80	LXXX	90	XC	100	C

2 *Qualche numero romano.*

I numeri romani, per esempio, sono un bell'esempio del problema di "dare un nome ai numeri" senza tenere in considerazione il fatto che i numeri, anche solo quelli naturali, sono infiniti. Non è solo la forma di scrittura a generare problemi (scrivere 1999 vuol dire vergare MCMXCIX, con indubbio spreco di caratteri), ma sono soprattutto le complicazioni indotte nel calcolo di operazioni anche semplici come l'addizione, che nel nostro ormai familiare sistema posizionale sono risolte facilmente allineando i numeri e sommando una cifra per volta.

Al pari dei Romani, anche i Greci non avevano un sistema di scrittura dei numeri così avanzato, e addirittura avevano ereditato un meraviglioso metodo grafico con numeri in base sessanta (sessagesimale) dai Babilonesi, che conteneva un numero esagerato di simboli (beh, sì: sessanta) e non era basato sulla posizione: se la cifra doveva rappresentare le decine (o meglio, le "sessantine") anziché le unità, era semplicemente scritta più grossa. Ma non dovremmo essere troppo critici con i Babilonesi; dopotutto noi perseveriamo illogicamente a dividere i giorni in ventiquattr'ore, le ore in sessanta minuti, per non parlare di misure come libbre, once, pollici e piedi, che sono ancora in uso.

<sup>3</sup> Dobbiamo però ammettere che il vino che ha ispirato questo articolo non è piemontese, e nemmeno italiano: una bottiglia di meraviglioso secco e fruttato malvasia istriano ha raggiunto Zurigo intatta, per non resistere poi tanto a lungo. Resta però il fatto che su RM si è spesso parlato di Roero Arneis e di Carema, e la lista dei vini da ordinare spesso presente nei problemi del Capo tradisce immancabilmente le sue origini.

Ma provate a sommare (non parliamo poi di moltiplicare o dividere) MCMXCIX a XVII senza farvi venire il mal di testa, se ne siete capaci.

Le cifre sono una grande invenzione, ed il metodo posizionale è incredibilmente utile e pratico. Quasi da non crederci che sia in uso in Italia praticamente solo grazie alla creazione della partita doppia<sup>4</sup>, insomma per far quadrare in fretta i conti; e che non sia noto da nemmeno un intero millennio. Il più famoso, ma certo non l'unico, ad aver portato letteralmente a casa da un viaggio in oriente il moderno modo di calcolare fu proprio Fibonacci<sup>5</sup>, che nel 1202 nel suo *Liber Abaci* descrive i numeri arabi come il miglior strumento di computo in cui si fosse imbattuto. E non si limita a spiegare come funzionano, comincia immediatamente a giocare, come avremmo fatto noi.

Quelle che noi chiamiamo cifre arabe sono in realtà derivate dalle cifre indiane. Dopo aver compulsato numerosi articoli e libri<sup>6</sup> sulla nascita della notazione posizionale ci sembra che solo un dato sia certo: gli uomini hanno imparato e disimparato ad usare questa forma parecchie volte nella loro storia. Ed il simbolo più complicato e più semplice di tutti, lo zero, il niente, ha una storia ancora più complicata.

Anche i Maya, che hanno sviluppato la loro cultura in modo completamente separato e indipendente da tutti gli altri, avevano una loro forma di zero posizionale, che a quanto pare prendeva forme strane: a volte facce, a volte figure o persino fiori. Ma è difficile dare troppa importanza a una cultura secondo il calendario della quale il mondo è già finito.

Comunque, che si sia trattato di un segno di separazione o di un simbolo più o meno variabile, l'idea della notazione che usiamo oggi per scrivere i numeri la dobbiamo alla cultura indiana, la cui storia è persa purtroppo nei secoli. Anche se i Greci non amavano dare molto credito agli indiani, uno dei più noti matematici arabi (973-1048), Al-Biruni<sup>7</sup>, non aveva alcun dubbio: *“Quello che noi [gli Arabi] usiamo per indicare i numeri è una selezione delle figure indiane migliori e più regolari.”*

A seconda delle ricerche si trovano diverse date per l'origine delle scienze matematiche in India: purtroppo la maggior parte dei documenti di accompagnamento è andata perduta ed oggi si trovano solo le traduzioni dei trattati originali, scritti da matematici successivi. Eppure, sfogliando i primi nomi nella cronologia del sito del St.Andrews, tra i primi matematici noti appaiono parecchi nomi indiani, la cui vita è completamente ignota, ma le cui opere sono rimaste, tradotte o commentate.

Certo occorre una buona flessibilità nel confrontare questi personaggi con i matematici di oggi: i primi scienziati noti erano poco più che scribi che registravano regole matematiche a scopi pratici o religiosi. Si trovano sia calcoli complicati per ottenere le forme perfette degli altari che venivano usati per le diverse funzioni, sia le prime approssimazioni del valore di  $\pi$  greco. I nomi di questi personaggi del culto Veldas che appaiono nella lista della nostra maggiore fonte di storia della matematica sono Baudhayana (circa 800 a.C.), Manava (circa 750 a.C.), Apastamba (circa 600 a.C.), e Katyayana (circa 200 a.C.): scrivevano documenti chiamati *Salbasutra*, composizioni di diversi “*sutra*”, brevi aforismi relativi ad un particolare tema<sup>8</sup>. In questo caso si trattava di problemi classici, quali il calcolo di superfici equivalenti e le approssimazioni di numeri irrazionali come la radice di due. È spesso impossibile distinguere se fossero consci della differenza tra

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
-	=	≡	+	h	4	7	5	7	
Brahmi numerals around 1st century A.D.									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
-	=	≡	4	h	5	7	5	3	
Gupta numerals around 4th century A.D.									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
Nagari numerals around 11th century A.D.									

3 *Evoluzione delle cifre indiane.*

<sup>4</sup> Della partita doppia parla il Capo in un bel Paraphernalia in RM106.

<sup>5</sup> Leonardo Pisano, detto il Fibonacci, circa 1175-1235, creatore degli omonimi numeri, il prezzemolo matematico presente in natura.

<sup>6</sup> Abbiamo ritrovato un bel testo in biblioteca: “Zero”, di Robert Kaplan, ed Rizzoli 1999, 325p.

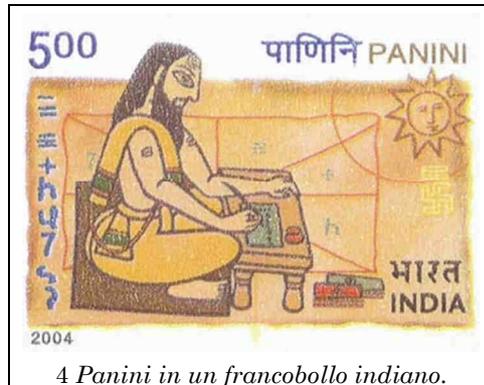
<sup>7</sup> A lui è dedicato il compleanno di RM164 “Isole e Laghi”.

<sup>8</sup> Sì certo: anche il Kamasutra è una raccolta di “sutra”, e l'argomento ben preciso che tratta è l'amore.

l'approssimazione e il numero esatto, ma in alcuni testi si trovano calcoli di terne pitagoriche e parecchie espressioni alternative di quello che noi conosciamo come il teorema di Pitagora<sup>9</sup>.

Lo scienziato che compare a questo punto nella lista dei protoscienziati indiani è Panini<sup>10</sup>; di lui si sa pochissimo, si pensa sia vissuto circa nel 500 a.C., ma non esistono né prove né controprove. L'opera fondamentale che ci ha lasciato è il *Astadhyayi*, in otto capitoli, che fornisce un'analisi dettagliata della grammatica sanscrita e ne spiega le regole e il funzionamento.

Ebbene sì, il protagonista di questo compleanno<sup>11</sup> è uno studioso di linguistica, che più di duemila anni fa aveva analizzato il suo



4 Panini in un francobollo indiano.



5 Un testo in sanscrito.

linguaggio; nel farlo, secondo alcuni esperti, ha posto le basi dell'intera filosofia analitica indiana: *“Il potenziale [del sanscrito] per uso scientifico è stato notevolmente migliorato a seguito della sistematizzazione approfondita della sua grammatica fatta da Panini. (...) Sulla base di poco meno di 4000 sutra [regole espresse in aforismi], ha costruito praticamente l'intera struttura della lingua sanscrita, la cui 'forma' in generale non è praticamente cambiata nei successivi duemila anni. (...) Una conseguenza indiretta degli sforzi di Panini per aumentare la facilità linguistica del sanscrito divenne presto evidente nel carattere della letteratura scientifica e matematica. Questo può essere messo in evidenza confrontando la grammatica del sanscrito con la geometria di*

*Euclide; un confronto particolarmente opportuno perché, mentre nell'antica Grecia la matematica è stata generata dalla filosofia, in India essa fu (...) il prodotto di sviluppi linguistici.”*<sup>12</sup>.

Anche se non è certo di poter attribuire a Panini la creazione della notazione alla base della numerazione araba usata oggi, si trovano parecchie similitudini tra l'analisi del linguaggio di Panini e la moderna teoria dei linguaggi di programmazione di Backus (1959): con duemila e cinquecento anni di differenza, una percezione ancora attuale e puntuale. I critici moderni che scoprono i testi indiani dell'epoca tendono a restare affascinati e stupiti dalla chiarezza e dalla scientificità del metodo di questo grande grammatico.

Ci piace pensare che Panini sia veramente esistito, e che sia veramente stato il precursore della matematica indiana e moderna; e siamo pronti a scommettere che il nostro abbia scritto la maggior parte dei suoi *sutra* sorseggiando un buon vino.

<sup>9</sup> Pitagora, protagonista di “In principio era il Numero”, RM102, vissuto intorno al 500 aC, un contemporaneo.  
<sup>10</sup> No, non diciamolo neppure per scherzo, d'accordo? Nessuna relazione con il noto produttore di album di figurine dei calciatori.  
<sup>11</sup> A questo punto è ben chiaro che l'estensore di questo pezzo non è il titolare usuale della rubrica, che ha accampato scuse fatiscenti per sfuggire al suo compito istituzionale. Perdonatelo, se potete: il Doc torna (forse) il mese prossimo.  
<sup>12</sup> Traduzione nostra di una citazione di Joseph, dal St. Andrews, biografia di Panini.

## 2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
L'uomo contro la macchina			
Un problema da trecento birre			

### 2.1 L'uomo contro la macchina.

Tranquilli: anche se Rudy si è rimesso a leggere fantascienza degli anni d'oro, non abbiamo intenzione di mettervi in un'arena a combattere contro un robot affettatutto. Molto semplicemente, quando Rudy ha chiesto ad Alberto e Fred di fare qualche prova, Alberto ha pigramente programmato un foglio di calcolo e generato una paccata di triplette dicendo all'altro VAdLdRM: "Toh, gioca nella *sandbox* e stai buono". Quindi, Fred se la sta cantando, suonando e giocando (onestamente) da per sé.

L'idea era di stabilire un certo valore  $N$  e, con indubbia fantasia, i Nostri Eroi si sono accordati sul valore 2016 (come vedrete dal seguito, il valore non è di capitale importanza: l'importante è mettersi d'accordo, e che sia "grossino"). Poi, comincia il gioco.

Ciascuno di loro genera tre numeri ( $a_1 \leq a_2 \leq a_3$  quelli di Alberto,  $f_1 \leq f_2 \leq f_3$  quelli di Fred) in modo tale che ciascuna delle due triplette dia come somma giustappunto  $N$ ; quindi, vengono confrontati uno per uno i valori, in modo ordinato:  $(a_1, f_1)$ ,  $(a_2, f_2)$ ,  $(a_3, f_3)$ . Vince (un punto) chi riesce ad avere due numeri strettamente maggiori dei corrispondenti numeri dell'avversario, e se questo non si verifica la partita è patta: vengono giocate un centinaio di partite di questo tipo.

Visto il grande entusiasmo mostrato dal fratello, Fred decide di darsi delle regole per il gioco, cercando di ottimizzare le probabilità di vittoria (nel senso che tende ad evitare le asinate), ma imponendosi come regola di non giocare mai due volte la stessa terna di interi.

Vi chiediamo di dimostrare che, come in ogni romanzo di fantascienza dell'epoca, Il Buono Vince Sempre (beh, quasi): qual è la *speranza matematica* di punteggio, sulle 100 partite, per Fred?

### 2.2 Un problema da trecento birre

No, non nella valutazione di Treccia: anche se... No, sto dicendo troppo. Cambiamo discorso.

Se vi chiedete come mai in due problemi di seguito compaiono i VAdLdRM, la cosa è presto detta: entrambi hanno superato, nel mese di settembre e a un giorno di distanza

uno dall'altro, un esame nelle rispettive facoltà<sup>13</sup>, quindi adesso hanno un mucchio di tempo da dedicare all'augusto genitore.

Siccome nessuna delle due facoltà richiede abilità pittoriche (a meno che Alberto decida di scrivere uno di quei costosissimi libri di anatomia con un mucchio di disegni disgustosi... ma mi sa che il disegnatore ci guadagna poco), mentre pensavano a cosa fare nel pomeriggio hanno cominciato a tracciare righe su un foglio, e a Rudy è venuto in mente un simpatico problema.

“Alberto, traccia otto rette, in modo tale che nessuna sia parallela ad una qualsiasi altra; vinci tre birre per ogni triangolo *ragionevolmente equilatero* e una birra per ogni triangolo *ragionevolmente isoscele*; quante birre porto?”

Due righe di spiegazione: “ragionevolmente” in quanto si sta lavorando a mano libera, poi faremo i conti e verificheremo che (usando un righello e determinando gli incroci con precisione) i triangoli siano effettivamente equilateri e isosceli; considerate anche che, come dicevamo nella nota precedente, i VAdLdRM sono ampiamente maggiorenni e apprezzatori della buona birra (non del buon vino, ma *nobody's perfect*), quindi tendono a ottimizzare il risultato.

Aduso alle generalizzazioni e alle esagerazioni, mentre ci stavamo godendo le birre, Fred ha iniziato con Rudy il seguente dialogo:

“Togliendo la limitazione delle otto linee, credo di aver trovato una soluzione da ‘trecento birre’...”

“Puoi sognartelo, che la paghi. O rateizziamo senza interessi in almeno un anno”.

“No, tranquillo. Ma sono sicuro che la soluzione sia *ottima*, e mi potrei accontentare di un numero di birre pari al numero di linee che ho utilizzato”

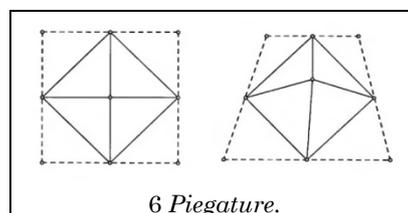
Non è carino, il frugoletto? Ecco, se stavolta non risolvete il problema, potrei anche essere contento...

### 3. Bungee Jumpers

In un quadrato, come indicato nella prima parte della figura, i quattro angoli possono essere piegati in modo tale da non sovrapporsi o lasciare lacune e incontrarsi in un punto.

Come si vede dalla seconda parte della figura, la cosa è possibile anche per altri quadrilateri.

Determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinché un quadrilatero ammetta questa piegatura.



La soluzione, a “Pagina 46”

### 4. Soluzioni e Note

Ottobre.

In ritardo come al solito, in affanno come al solito, ma siamo sempre qui. Tra i motivi del nuovo ritardo c'è un non-tanto-nuovo progetto del trio, che ci tiene impegnati giorno e notte da qualche mese. Non preoccupatevi, presto saprete di che cosa si tratta, lo sapete benissimo che non sopravviviamo senza farci pubblicità da soli.

Qualcosa che non vi abbiamo rammentato da qualche mese: Archimede, una delle riviste italiane di matematica più rinomate (<http://riviste.mondadorieducation.it/archimede/>, non stavamo parlando di noi, per una volta) è quest'anno completamente nuovo e rivisto, in versione interattiva. Contiene anche un articolo nostro, ma il resto lo salva completamente da questa pecca imperdonabile: non perdetevi il trimestrale, se potete, e se vi piace scrivere di matematica, scrivete e contribuite!

<sup>13</sup> Un attimo di paterna commozione, scusate: la prima volta che il più anziano di loro è comparso su queste pagine, faceva prima elementare. E ancora adesso non me l'ha perdonata.

Come ogni anno il nostro **Adam** ci ricorda la versione annuale del MathsJam (<http://www.mathsjam.com/conference/>), quest'anno avverrà il weekend del 12 e 13 novembre. La partecipazione italiana è sempre un po' scarsa, purtroppo, ma saremmo orgogliosi di avere altri inviati speciali: se ci andate fateci sapere!

E adesso basta, vi lasciamo alle vostre soluzioni.

## 4.1 [212]

### 4.1.1 I “Giochi di Rudy”

Un bel gioco geometrico per far divertire i nostri lettori! Finalmente! Eccolo:

*Quanti tagli sono necessari e sufficienti per ridurre a cubetti unitari un parallelepipedo  $A \times B \times C$ , fermo restando che potete risistemare come vi pare i blocchi dopo ogni taglio?*

Finalmente una proposta di Rudy che piace anche all'estensore delle Soluzioni & Note... Vediamo di partire subito con una bella soluzione di **Gianluigi & Friend**:

... premesso che non conosco né la dimostrazione di Gardner né abbastanza matematica per arrivarci in maniera astratta, con un collega (più tenace di me) ci siamo messi a testare diversi scenari su parallelepipedi di dimensioni  $A \times B \times C$ .

La prima soluzione trovata da entrambi è stata  $(A+B+C) - 3$ , ma poi abbiamo considerato che i tagli possono essere ottimizzati dimezzando una dimensione e accostando le due metà.

In sostanza la soluzione potrebbe essere

$$\text{ceil}(\log_2(A)) + \text{ceil}(\log_2(B)) + \text{ceil}(\log_2(C))$$

ovvero la somma dell'intero uguale o immediatamente superiore al logaritmo in base 2 di ciascuna dimensione.

un esempio:

$$\text{ceil}(\log_2(5)) + \text{ceil}(\log_2(4)) + \text{ceil}(\log_2(11)) = 3 + 2 + 4 = 9$$

taglio 0.  $5 \times 4 \times 11$

taglio 1.  $4 \times 4 \times 11 + 1 \times 4 \times 11$

taglio 2.  $2(2 \times 4 \times 11) + 1 \times 4 \times 11$

taglio 3.  $5(1 \times 4 \times 11)$

taglio 4.  $10(1 \times 2 \times 11)$

taglio 5.  $20(1 \times 1 \times 11)$

taglio 6.  $20(1 \times 1 \times 8) + 20(1 \times 1 \times 3)$

taglio 7.  $40(1 \times 1 \times 4) + 20(1 \times 1 \times 2) + 20(1 \times 1 \times 1)$

taglio 8.  $80(1 \times 1 \times 2) + 60(1 \times 1 \times 1)$

taglio 9.  $220(1 \times 1 \times 1)$

Che ne dite? Regge?

Noi non ci esprimiamo mai, lo sapete, e troviamo più interessante confrontare vari approcci allo stesso problema, come quello di **Emanuele**:

Mi sono impegnato a cercare di risolvere l'indovinello dei tagli dei parallelepipedi.

Ho pensato di procedere con un metodo che penso di non dire una bestemmia indicandolo come “dicotomico”. Vi scrivo fin da adesso che non sono in grado di dimostrarvi se è il miglior metodo, ma a me sembra comunque ottimale.

Simboli usati:

$A$  larghezza (Asse  $X$ )

$B$  Altezza (Asse  $Y$ )

$C$  profondità (Asse  $Z$ )

$n$  Contatore che parte da 1

$N \bmod m =$  resto della divisione intera  $N/m$

$\text{INT}(N/m) =$  divisione

Già da adesso vi scrivo che la procedura non dovrà essere applicata per dimensioni unitarie.

Ecco i passi che farei:

1) Eseguiamo un taglio orizzontale (parallelo al piano  $Z, X$ ) lungo tutto il parallelepipedo all'altezza  $(B+(B \bmod 2))/2$  (equivalente a  $\text{INT}(B/2) + (B \bmod 2)$ ), dividendo il parallelepipedo in due gruppi (sopra e sotto il taglio) composti da parallelepipedi che si differenzieranno al più di una unità in altezza.

2) Sposto i parallelepipedi, posti al di sopra del taglio che possono avere altezza inferiore (caso  $B$  sia dispari) a fianco di quelli al di sotto del taglio, traslandoli orizzontalmente e allineando il tutto.

3) In questo momento avrò due parallelepipedi (a loro volta composti dai parallelepipedi dei tagli precedenti se non sono alla prima iterazione) di cui uno potrebbe essere più alto di una unità. Ora Se  $(B+(B \bmod 2))/2 = 1$  ho terminato il miei tagli per questa dimensione altrimenti sostituisco a  $B$  il valore  $(B+(B \bmod 2))/2$  e torno al passo 1)

4) Al termine ho un parallelepipedone composto da tanti parallelepipedi aventi altezza unitaria, e le altre dimensioni invariate.

5) Ora posso iniziare i tagli "dicotomici" sulla dimensione  $C$  (Asse  $Z$ ), ma questa volta invece di fare una traslazione dei vari pezzi ottenuti a destra o sinistra per allineare tutto, dovrò impilare le varie "meta"

ottenute dai tagli dicotomici eseguiti verticalmente e parallelamente all'asse  $X, Y$ . La procedura da usare sarà la stessa (1-4) sostituendo a  $B$  il valore di  $C$  ed eseguendo gli impilamenti al posto delle traslazioni.

6) Ora abbiamo ottenuto un parallelepipedone che assomiglia ad una parete con profondità unitaria.

7) Possiamo procedere con i tagli dicotomici la dimensione  $X$  nella stessa maniera in cui si è proceduto sinora, allineando dopo ogni taglio i vari pezzi sull'asse  $z$  alla fine avremo ottenuto una parete lungo l'asse  $Z$  tutta composta da cubetti

Ho cercato di analizzare un po' le cose in modo da capire la bontà del mio metodo: se non facessimo alcuna ottimizzazione i tagli necessari (massimo numero di tagli) per un Parallelepipedo  $AxBxC$  sarebbe  $= A + B + C - 3$ . Se la dimensione che sto attaccando fosse una potenza  $p$  di 2 (giusto per non avere tra i piedi i resti), ponendo  $B = 2^p$  avrei che taglio 1 da un parallelepipedo alto  $B$  ne ottengo 2 alti  $B/2 = 2^{(p-1)}$ ; taglio 2 da un parallelepipedo alto  $2^{(p-1)}$  ne ottengo 2 alti  $2^{(p-1)}/2 = 2^{(p-2)}$ ; ...; taglio  $n$  da un parallelepipedo alto  $2^{(p-n-1)}$  ne ottengo 2 alti  $2^{(p-n-1)}/2 = 2^{(p-n)} = 1$  (fine tagli)  $\Rightarrow p - n = 1 \Rightarrow n = p$  quindi siccome  $B = 2^p \Leftrightarrow n = \text{Log}_2(B)$ . Applicando per ogni dimensione questo ragionamento il numero di tagli necessari  $n$  con il mio metodo sono circa (scusate ma la matematica discreta per me è abbastanza ostica)  $\text{Log}_2(A) + \text{Log}_2(B) + \text{Log}_2(C) = \text{Log}_2(AxBxC)$

Quindi (sempre per rendermi le cose semplici 8)) se avessimo un parallelepipedo  $8x4x16$  abbiamo una ottimizzazione da 25 a 9 Direi che è una buona ottimizzazione e a occhio più grande sarà il parallelepipedo iniziale più sarà il vantaggio ottenuto.

Nella speranza di essere stato chiaro e di non aver fatto grossi (ma anche piccoli) strafalcioni vi saluto.

PS: L'invito a non scrivere suggerimenti a Rudi su cosa fare dei cubetti è un chiaro invito a farlo, ma essendo io un bastian contrario di natura non suggerirò nulla.

Caro **Emanuele**, secondo te non glielo abbiamo già detto, a Rudy, che cosa deve farne? Per chi ci prendi? Prima di passare al secondo problema, la soluzione di **Valter**:

Propongo una strategia e poi provo a giustificarla.

Per ciascuno dei suoi tre lati calcolo l'intero immediatamente minore al loro logaritmo in base 2.

La somma dei tre valori ottenuti a mio avviso potrebbe essere il numero di tagli necessari e sufficienti per ridurlo a cubetti unitari.

Parto da un lato (che non sia già unitario ovviamente) e taglio nel rettangolo che forma con uno degli altri due alla lunghezza di 2 elevato al suo logaritmo calcolato come sopra.

Sovrappongo i due parallelogrammi ottenuti facendo combaciare ad un estremo l'altro lato (chiaramente se la lunghezza del lato scelto non è una potenza di 2 uno dei due parallelogrammi sarà più stretto dell'altro sul lato tagliato quando li sovrappongo).

Proseguo in questo modo a tagliare ogni volta riducendo di uno la potenza per cui elevo 2 sino ad ottenere parallelogrammi di lunghezza unitaria sul lato scelto.

Ricompongo il parallelogrammo originario e applico la stessa strategia agli altri 2 lati.

Non essendoci modo più efficiente, per ogni lato, di giungere alla dimensione unitaria ma dovendola ottenere, per quanto richiesto, mi pare che questi siano il numero di tagli "necessari e sufficienti" (qualche dubbio come al solito ...).

Ho analizzato qualche caso concreto per verifica.

Un cubo  $2 \times 2 \times 2$  andrebbe tagliato alla lunghezza di 1 (cioè 2 elevato a 0) su ogni lato ed è immediato notare che 3 sono i tagli "necessari e sufficienti".

Il uno cubo  $3 \times 3 \times 3$  andrebbe tagliato alla lunghezza 2 su ogni lato per poi sovrapporre e quindi tagliare alla lunghezza 1.

Per questo caso non ho trovato in rete la "bellissima dimostrazione di minimo di Martin Gardner" ma potrebbe essere qualcosa del tipo: siccome il cubo centrale deve essere tagliato su tutte le sue 6 facce ed un unico taglio non ne può sezionare più di una a meno di 6 tagli non si può giungere ed il metodo richiede proprio tale numero di tagli.?

C'è da dire che per questi due cubi non servirebbe nemmeno sovrapporre i parallelogrammi ma tagliare direttamente sui tre lati.

Diverso il caso di un cubo  $4 \times 4 \times 4$ : taglio a lunghezza 2 su ciascun lato poi sovrappongo e taglio a lunghezza 1 e con 6 tagli ottengo i cubetti unitari.

Per un parallelogrammo di  $3 \times 5 \times 7$  se il metodo che propongo funziona servirebbero  $2+3+3 = 8$  tagli (spero di non aver "cannato" completamente).

Mi dà un po' da pensare il fatto che un parallelogrammo (o parallelogramma?) di  $3 \times 4 \times 5$  che ha volume inferiore al cubo  $4 \times 4 \times 4$  (con la somma dei tre lati però uguale) ne richieda più tagli (cioè 7).

Non ho trovato modo di ridurne il numero di tagli: ho provato a ricomporlo in un cubo  $4 \times 4 \times 4$  a cui manca un parallelogrammo di  $4 \times 1 \times 1$  tagliandone uno di  $4 \times 3 \times 1$  ma anche avendo già un taglio fatto dopo averlo ricomposto non mi viene modo di tagliare il resto del cubo con 5 tagli per averne un totale di almeno solo 6.

Rileggendo tutte le versioni si direbbe che i metodi siano tutti molto simili... Andiamo avanti.

#### 4.1.2 Un problema dal mondo fuori di qui

Accorciato e senza troppi fronzoli, il testo del problema logistico del Capo:

*Un dipartimento ha una presenza molto diffusa sul territorio del nord Italia, anche se più della metà dei dipendenti si trova in una determinata città; una volta l'anno, si organizza una riunione plenaria alla quale partecipano tutti. La posizione del posto del ritrovo si vorrebbe determinare in modo tale che le trasferte (pagate un tot a chilometro, in linea d'aria, ma solo se uscite dalla città) costino il meno possibile al dipartimento. Esiste una soluzione generale? Sotto quali condizioni?*

Attenzione, che questo è un problema serio, e quasi tutti se ne sono accorti. Vediamo la prima soluzione di **Alberto R.**:

*“più della metà dei dipendenti si trova in una determinata città”.* Questa piccola precisazione (che quasi mi era sfuggita) rende semplicissimo il problema. Sia  $C_0$  questa città e  $C_1, C_2, C_3...$  le altre e siano  $N_0, N_1, N_2, N_3...$  i dipendenti che vi operano, con  $N_0$  maggiore della somma degli altri  $N_i$ .

Se anziché fare il meeting in  $C_0$  (come il buon senso suggerisce) lo facciamo in qualunque altro punto  $P$  distante  $\delta_0$  da  $C_0$ , le distanze dalle altre città “diminuiscono” di  $\delta_i$  (“diminuzione” che, per qualche città, può anche essere negativa, cioè un aumento). Sarà comunque, per qualunque  $i$ ,  $\delta_i \leq \delta_0$  perché la differenza tra due lati di un triangolo, cioè  $\delta_i = \text{vecchia distanza} - \text{nuova distanza}$ , non può superare il terzo lato  $\delta_0$ . In definitiva perdiamo  $N_0 \delta_0$  e guadagniamo la sommatoria di  $N_i \delta_i$  che è certamente minore.

Se generalizziamo togliendo la suddetta precisazione il problema diventa molto difficile, ma molto interessante, anche per applicazioni pratiche. Si tratta di trovare il “viciniore” di un insieme di “masse”  $M_i$  da lui distanti  $\delta_i$  cioè quel punto che minimizza la sommatoria  $M_i \cdot \delta_i$ , in altre parole quel polo che minimizza il momento statico polare delle masse (qualunque significato si dia alla parola “masse”).

La soluzione potrebbe essere controintuitiva. Immaginiamo tre paesi A, B, C con lo stesso numero di abitanti che devono costruire il nuovo ospedale in comune. Certamente i sindaci rassicureranno i loro cittadini che l’ospedale sarà costruito “in posizione baricentrica” onde rendere minimo il totale dei loro spostamenti. Si sbagliano: Il baricentro e il viciniore non coincidono. Addirittura il viciniore potrebbe, sorprendentemente, non essere all’interno del triangolo: se, ad esempio, il triangolo è isoscele con  $CA=CB$  e sufficientemente schiacciato (base AB maggiore della relativa altezza moltiplicata per 2 rad(3)), il viciniore coincide col vertice C.

Bene. La parola “controintuitiva” ben si attaglia alla maggioranza delle questioni proposte... e adesso vediamo ai dubbi di **Valter**:

Spero di aver interpretato giusto ... .

Mi pare che esista una soluzione generale e che questa consista nel fare la riunione in un albergo della città più “popolata” da dipendenti (se la precondizione è: “più della metà dei dipendenti si trova in una determinata città”).

Provo a spiegarmi (cercando di non essere troppo “telegrafico”) ... .

La somma delle distanze fra il baricentro e l’abitazione di due dipendenti, di cui uno abita nella città più “popolata”, è minore o uguale alla distanza fra le loro abitazioni (vedi legge sulla lunghezza dei lati di un triangolo).

La distanza è inoltre uguale solo nel caso in cui la retta che unisce le due abitazioni passa per il baricentro.

Quindi anche la somma di tutte le distanze dal baricentro alle abitazioni dei dipendenti che non vivono nella città più “popolata” e dello stesso numero di dipendenti che vi vivono (questi ultimi sono “più della metà”) è sicuramente maggiore o uguale della somma delle distanze fra la città più “popolata” e le città di ciascuno dei dipendenti che non vi abita.

I dipendenti rimasti nella città più “popolata”, dopo che ho abbinato alcuni di essi con quelli delle altre città (ne sono rimasti data la premessa che sono “più della metà”), non costano al dipartimento per la regola: “pagate un tot a chilometro, in linea d’aria, ma solo se uscite dalla città” se sceglie di fare la riunione nella città più “popolata”.

La somma delle distanze dalla città più “popolata” con le abitazioni dei dipendenti che non vi abitano è il costo che deve affrontare il dipartimento se la sceglie come sede della riunione planetaria.

Quindi, per quanto detto, il costo che deve affrontare il dipartimento, se sceglie come sede della riunione la città più “popolata”, dovrebbe essere comunque minore al costo che affronterebbe se scegliesse il baricentro (anche nel caso limite in cui tutte le abitazioni si trovassero sulla stessa retta passante per il baricentro e la città più “popolata”, scegliendo il baricentro, al dipartimento verrebbero a costare in più i dipendenti della città più “popolata” che eccedono come numero quelli che non vi vivono).

Direi che anche in questo caso i nostri lettori sono d'accordo. Concludiamo con un bel trattatello di **BR1**:

Bello il problema del Baricentro; quasi quasi vi avrei aggiunto una *Birra/Pipa/Coniglietto* in più... Cominciamo col dire che tutta la faccenda *non* si svolge sulla sferica Terra, bensì a Flatlandia; già ragionando in due dimensioni ci sono le complicazioni che vedremo sotto, figuriamoci se si fossero dovute considerare le geodetiche sferiche...

Il caso più semplice concepibile (dopo quello del *self-made-man* che è auto-localizzato nel proprio Baricentro e non ha bisogno di spostarsi...) è quello di due sole persone  $P_1$  e  $P_2$  che, distanti  $D > 0$ , debbano incontrarsi:

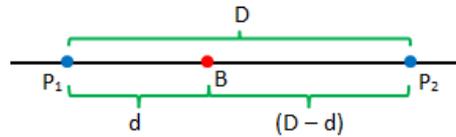


Figura 1: Il tête-à-tête

Pare abbastanza ovvio che il Baricentro  $B$  possa essere posizionato su uno qualsiasi dei punti della linea congiungente  $P_1$ - $P_2$  ( $P_1$  e  $P_2$  inclusi): la *distanza totale* percorsa sarà comunque  $D_T = d + (D - d) = D$ . Questo caso è comunque interessante perché mostra come la posizione del Baricentro possa non essere univoca, e che quindi bisogna prepararsi a dover affrontare situazioni *strane*.

Come caso successivo in termini di complessità consideriamo quello *monodimensionale*, in cui i partecipanti siano genericamente  $N$ , *tutti allineati*; per approfondirlo, introduciamo un asse orientato con origine arbitraria  $O$ , su cui disporre tutti i punti di partenza dei partecipanti:

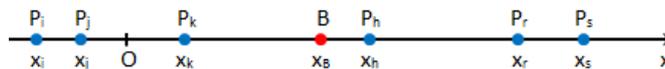


Figura 2: Linelandia

Si può scrivere in questo caso, per la *distanza totale*:

$$1) D_T(x_B) = \sum_{K=1}^N |x_B - x_K|$$

È chiaro che se ponessimo  $B$  a casaccio un milione di Km a destra dell'ultimo punto più a destra,  $D_T$  varrebbe all'incirca  $N$  milioni di Km. E che, ponendo  $B$  da qualche parte all'interno del gruppo di punti  $P_k$ ,  $D_T$  avrebbe un valore limitato, comunque positivo; tutto ciò dimostra che la funzione 1) deve avere almeno un minimo al variare di  $x_b$ . Per trovare questo minimo, valutiamo la derivata della 1), eguagliandola a 0:

$$2) \frac{d}{dx_B} D_T(x_B) = \frac{d}{dx_B} \sum_{K=1}^N |x_B - x_K| = \sum_{K=1}^N \frac{d}{dx_B} |x_B - x_K| = \sum_{K=1}^N \text{Sgn}(x_B - x_K) = 0$$

La funzione **Sgn** assume valore 1 quando il Baricentro si trova alla destra di un dato punto  $P_K$ , invece  $-1$  quando è alla sua sinistra, e poi 0 quando  $P_K$  e  $B$  coincidono. Se  $N$  è pari, per  $B$  sono allora *ottime* tutte le posizioni comprese fra i due  $P_K$  di posto  $N/2$  ed  $N/2 + 1$ , così come capitava nel caso di due soli

partecipanti<sup>14</sup>. Se invece N è dispari, la posizione di B coinciderà con quella del punto di posto centrale; quindi la soluzione può essere espressa nel complesso come segue:

$$3) \begin{cases} N \text{ pari} \rightarrow \forall x_B \in ]x_{N/2}, x_{N/2+1}[ \\ N \text{ dispari} \rightarrow x_B = x_{\lfloor N/2 \rfloor + 1} \end{cases}$$

La cosa interessante che viene fuori dalle 3) è che la *distanza* dei vari punti periferici non ha alcuna influenza sulla posizione del Baricentro: è solo necessario che la *quantità* di punti a sinistra ed a destra di esso sia identica. Potremmo quindi avere una situazione tipo questa che segue:

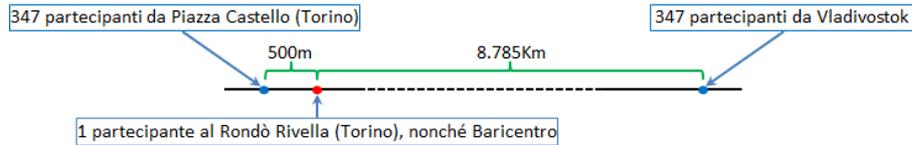


Figura 3: Un meeting intercontinentale unidimensionale

In questo esempio<sup>15</sup>, per minimizzare i costi il meeting andrebbe tenuto nell'ufficio dell'unico risiedente al Rondò Rivella. E il Baricentro non si sposterebbe di un millimetro se un qualsivoglia numero di siberiani si spostasse oltre, casomai su Encelado<sup>16</sup>. Poi, se per caso due dei partecipanti di Piazza Castello decidessero di defezionare, ecco che di colpo la posizione del Baricentro schizzerebbe istantaneamente in Siberia: ciò a dire che le soluzioni di questo quesito sono fortemente *instabili*, in certi casi basta modificare appena un po' le condizioni iniziali ed il risultato cambia radicalmente...

Un'altra considerazione che si può fare è che, una volta trovato il Baricentro, si possono aggiungere (o sottrarre) a piacimento *coppie* di partecipanti piazzati sui lati opposti di quello, senza alterarne la posizione. Ancora, nella posizione del Baricentro si possono aggiungere quanti partecipanti si desidera, ed ancora nulla muterà...



Passiamo adesso al caso generale, con gli N punti P<sub>k</sub> comunque distribuiti sul territorio di Flatlandia, e mostrati qui sotto in blu in Figura 4, come esempio:

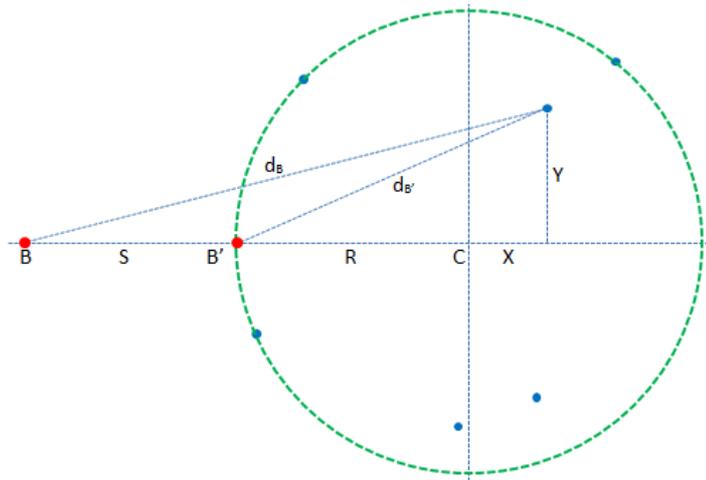


Figura 4: Sei P<sub>k</sub> a casaccio, contornati

<sup>14</sup> In realtà non è esattamente "così come capitava nel caso di due soli partecipanti"; adesso il Baricentro non può coincidere con uno dei due punti che delimitano l'intervallo. Con "due soli partecipanti", invece sì.

<sup>15</sup> Sempre su Flatlandia, sia ben chiaro: se non lo sapevate, anche lì vi sono una Torino e una Vladivostok, e distano guarda caso quanto sulla Terra...

<sup>16</sup> Ancora, dovrebbe esser ben noto che il sistema planetario cui appartiene Flatlandia contiene un satellite che porta questo nome, e che di tanto in tanto viene a trovarsi allineato con Torino e Vladivostok...

Cominciamo con qualche considerazione che potrà apparire banale, ma che è bene fissare sin dall'inizio.

Comunque siano posizionati gli  $N$  punti, anche lontanissimi fra loro ma con distanze reciproche finite, è sempre possibile racchiuderli all'interno di una circonferenza sufficientemente grande; consideriamo ora la più piccola possibile di tali circonferenze, di raggio  $R$  e mostrata in verde nella figura precedente: questa tocca almeno due dei punti  $P_K$ , tre nei casi di distribuzioni più o meno arbitrarie dei punti stessi (come capita in Figura 4), o anche più di tre nei casi di collocazioni particolari dei punti.

Adesso, supponiamo per un momento che il punto rosso  $B$  in Figura 4, *esterno* alla circonferenza suddetta e distante  $S$  da essa, sia il Baricentro *candidato* di cui stiamo cercando la posizione; possiamo sempre tracciare la retta su cui giacciono  $B$  ed il centro  $C$  della circonferenza, e calcolare la distanza fra  $B$  ed uno arbitrario degli  $N$  punti come segue:

$$4) d_B = \sqrt{(S + R + X)^2 + Y^2}$$

Consideriamo poi il punto  $B'$  che si trova all'intersezione fra la circonferenza e la retta congiungente  $B$  e  $C$ ; la distanza di esso dallo stesso punto  $P_K$  sarà:

$$5) d_{B'} = \sqrt{(R + X)^2 + Y^2}$$

Ora, è evidente come sia sempre  $d_{B'} < d_B$ , e ciò vale *per ciascuno* degli  $N$  punti  $P_K$ ; allora a maggior ragione per la *somma* delle distanze del Baricentro dai punti  $P_K$ . Quindi il punto  $B'$  è comunque un *candidato migliore* di  $B$  per diventare il nostro Baricentro... Quindi un punto *esterno* alla circonferenza sopra definita *non può* essere il Baricentro, si può sempre far di meglio...

Ciò non vuol dire affatto che si sia già trovato il Baricentro per il *caso generale*; possiamo però adesso fissare alcuni criteri generali:

1. Il Baricentro  $B$  si trova *sempre* all'interno (o meglio, *non all'esterno*) della *circonferenza minima* in grado di contenere tutti i punti  $P_K$  da cui provengono i partecipanti al meeting
2. Poiché tutti i punti *all'esterno* della *circonferenza minima* forniscono sicuramente *prestazioni peggiori* di quelli *non all'esterno*, esiste *sempre* almeno *un* Baricentro. Come visto sopra nei casi monodimensionali, possono esistere infinite soluzioni (come dalla prima delle 3); e, come si vedrà in seguito, se almeno tre dei punti  $P_K$  non sono collineari, la soluzione sarà unica
3. Le relazioni 4) e 5) valgono ancora se la circonferenza che attornia tutti i punti  $P_K$  non è quella *minima*; se ne può scegliere comunque una qualsiasi *più grande*, di circonferenza, che comprenda sempre tutti i punti  $P_K$  (ed eventualmente ne *tocchi* qualcuno). Il Baricentro  $B$  sarà quindi *non esterno* a *qualsiasi* circonferenza in grado di circondare le postazioni da cui provengono tutti i partecipanti al meeting
4. Come estensione del punto 3 qui sopra, la circonferenza racchiudente i punti  $P_K$  può avere raggio al limite infinito, trasformandosi in una retta. Si può quindi dire che il Baricentro debba giacere in una posizione tale che non possa esistere nessuna retta tale da *separare* il Baricentro stesso da tutti i punti  $P_K$ . La parte sinistra della Figura 5 qui sotto, riferita alla stessa distribuzione di punti  $P_K$  di Figura 4, mostra che neanche il punto  $B'$  di cui sopra (pur essendo un *candidato migliore* di  $B$ ) può essere il Baricentro;  $B''$  invece sì

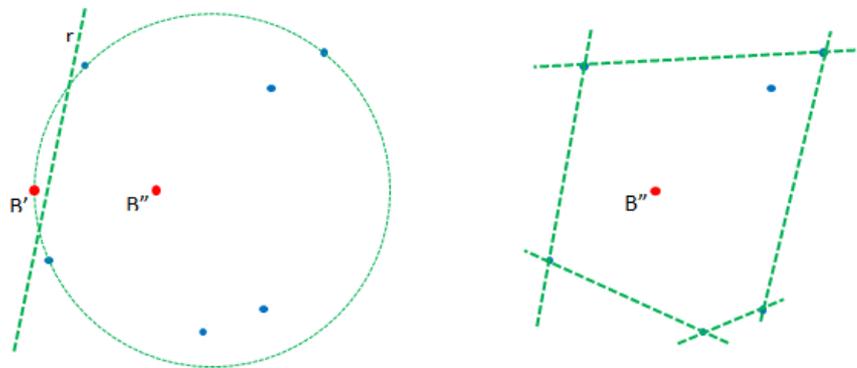


Figura 5: Rette separatrici

5. Come ulteriore estensione, disponendo più rette attorno ai punti  $P_K$  in modo da racchiuderli (seppur toccandoli), si può dire che il Baricentro è *non esterno* al minimo poligono che circonda tutti i punti  $P_K$ , così come nella parte destra della Figura 5.



Ciò premesso, veniamo a qualche caloletto; introduciamo un sistema di assi cartesiani di riferimento, con origine ed orientamento qualsiasi; ciò che conta in pratica è solo la posizione *reciproca* dei vari punti  $P_K$ :

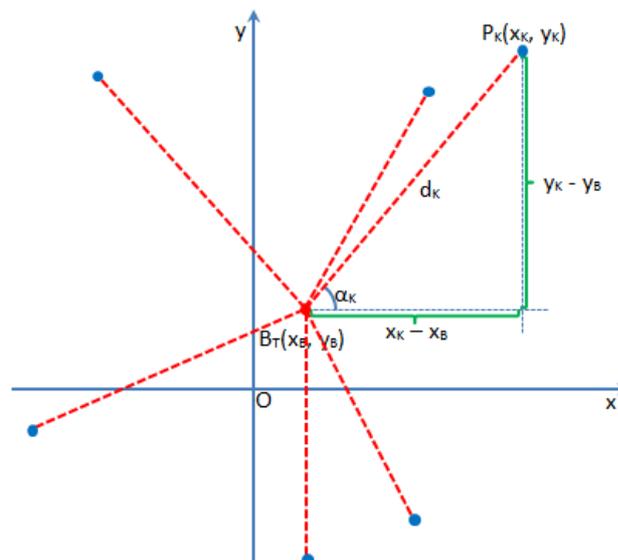


Figura 6: Il caso generale

Nella figura qui sopra, si è piazzato un Baricentro *di tentativo*  $B_T$  *ad occhio* in una posizione *ragionevole*, cioè grossomodo nel mezzo della distribuzione di punti  $P_K$ ; ciò giusto per impostare i calcoli.

Col sistema di riferimento scelto, la distanza totale  $D_T$  da minimizzare è data da:

$$6) D_T(x_B, y_B) = \sum_{K=1}^N d_K = \sum_{K=1}^N \sqrt{(x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2}$$

Il nostro *bersaglio*, sono le coordinate incognite  $(x_B, y_B)$  del Baricentro; i valori  $(x_B, y_B)$  che producono il minimo (o *i minimi*) della 6) possono essere trovati imponendo che sia:

$$7) \nabla D_T(x_B, y_B) = 0$$

Cioè, in forma più esplicita (ed affibbiando un *nome* alle due derivate parziali):

$$8) \begin{cases} D'_{TX}(x_B, y_B) \equiv \frac{\partial}{\partial x_B} \sum_{K=1}^N \sqrt{(x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2} = 0 \\ D'_{TY}(x_B, y_B) \equiv \frac{\partial}{\partial y_B} \sum_{K=1}^N \sqrt{(x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2} = 0 \end{cases}$$

Con un paio di passaggi si ottiene:

$$9) \begin{cases} D'_{TX}(x_B, y_B) = - \sum_{K=1}^N \frac{x_K - x_B}{\sqrt{(x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2}} = 0 \\ D'_{TY}(x_B, y_B) = - \sum_{K=1}^N \frac{y_K - y_B}{\sqrt{(x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2}} = 0 \end{cases}$$

Sviluppando le 9), si potrebbe in astratto risalire ai valori delle due incognite ( $x_B$ ,  $y_B$ ) e quindi alla posizione del generico Baricentro B; ma già nel caso  $N = 3$  spuntano fuori polinomi del 12° grado... Si escluderà quindi la possibilità pratica di risolvere il problema in forma chiusa, cioè di pervenire ad una soluzione generica ed omnicomprensiva del tipo:

$$10) \begin{cases} x_B = f_x(x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_N) \\ y_B = f_y(x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_N) \end{cases}$$

Ripartendo dalle 9), e ricordando la Figura 6, si ha:

$$11) \begin{cases} \sum_{K=1}^N \frac{x_K - x_B}{\sqrt{(x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2}} = \sum_{K=1}^N \frac{x_K - x_B}{d_K} = \sum_{K=1}^N \cos(\alpha_K) = 0 \\ \sum_{K=1}^N \frac{y_K - y_B}{\sqrt{(x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2}} = \sum_{K=1}^N \frac{y_K - y_B}{d_K} = \sum_{K=1}^N \sin(\alpha_K) = 0 \end{cases}$$

Adesso, le due ultime espressioni si possono compendiare in una sola come segue, definendo la quantità complessa  $S_V$ :

$$12) S_V \equiv \sum_{K=1}^N \cos(\alpha_K) + j \sum_{K=1}^N \sin(\alpha_K)$$

Quindi le 11) diventano:

$$13) S_V = \sum_{K=1}^N [\cos(\alpha_K) + j \sin(\alpha_K)] = \sum_{K=1}^N e^{j\alpha_K} = 0$$

La 13) sembra *fantastica!* Ci dice che il Baricentro B è quel punto per cui  $S_V$ , *somma dei versori* che rappresentano le congiungenti B –  $P_K$  nel piano complesso, è nulla. Ciò si verifica se:

$$14) \sum_{K=1}^N \alpha_K = M \cdot 2\pi$$

dove M è un qualsiasi intero opportuno; cioè tutto va bene se la somma vettoriale dei *versori* ritorna nel punto d'origine. Proviamo ad applicare ciò all'esempio di Figura 6:

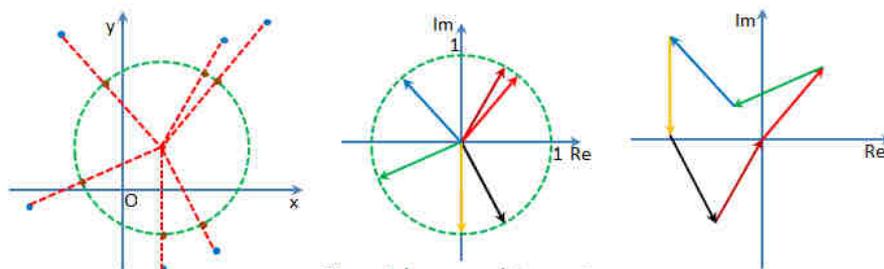


Figura 7: la somma dei versori

Da sinistra verso destra qui sopra in Figura 7: si traccia un cerchio qualsiasi attorno al Baricentro, si identificano i *versori* e si trasportano sul piano complesso, quindi li si somma vettorialmente in un ordine arbitrario; *guarda caso*, nell'esempio in esame il Baricentro era proprio quello giusto, e si ha in questo caso  $M = 1...$

A questo punto, si può cominciare a fare qualche considerazione:

1. Noto che sia il Baricentro, i punti  $P_K$  possono essere spostati a qualsiasi distanza da esso, da infinitesima a infinita, lungo le proprie congiungenti, senza alterare la posizione del Baricentro stesso; questa è l'estensione bidimensionale dell'effetto *Encelado* visto sopra nel caso monodimensionale
2. Tutti i poligoni regolari (nonché qualsiasi loro deformazione come da punto precedente) hanno Baricentro nel loro centro, visto che i *versori* formano una raggiera simmetrica attorno ad esso
3. Fissato che sia stato il Baricentro  $B$  per una qualsiasi configurazione di punti  $P_K$ , questo resta inalterato aggiungendo insiemi di punti che abbiano lo stesso Baricentro, ad esempio coppie di punti giacenti da parti opposte su una qualsiasi retta passante per  $B$

Bello, neh? *Esteticamente* la 13) è straordinariamente semplice ed elegante, e come vedremo sotto permette di definire una procedura operativa che consente di trovare il Baricentro qualunque sia l'insieme dei punti  $P_K$ ; *peccato* però che nella descrizione sopra riportata vi sia un *errore stratosferico*... Infatti, in una vastissima moltitudine di casi concreti, *può non esistere un punto  $B$  che annulli contemporaneamente entrambe le 11), e quindi la 13)*... ☹

Il problema risiede nei primi termini delle 11): se il Baricentro coincide con uno qualsiasi dei punti  $P_K$ , i corrispondenti addendi delle sommatorie assumono la forma indeterminata  $0/0$  e tutto il resto della trattazione crolla; il versore corrispondente a quel punto risulta infatti indefinito...



Prima di esaminare i casi di coincidenza del Baricentro con uno dei punti  $P_K$ , vediamo come può esserne trovata la posizione quando ciò non si verifica. È possibile definire un algoritmo iterativo convergente che permette di calcolare numericamente, con la precisione desiderata, le coordinate di  $B$ ; qui di seguito viene esposto un metodo basato sulla 13), e sulle relative considerazioni fatte sopra.

Supponiamo di scegliere un Baricentro *di tentativo*  $B_{T0}$ , posizionato all'interno di un cerchio che circoscrive il *minimo poligono racchiudente* definito più sopra; ad esempio, il centro di tale cerchio di raggio  $R$ . Per questo punto  $B_{T0}$ , calcoliamo la somma vettoriale degli  $N$  versori; realisticamente, questa somma sarà non nulla, e ci ritroveremo in una situazione rappresentabile come nella parte sinistra della Figura 8 qui sotto:

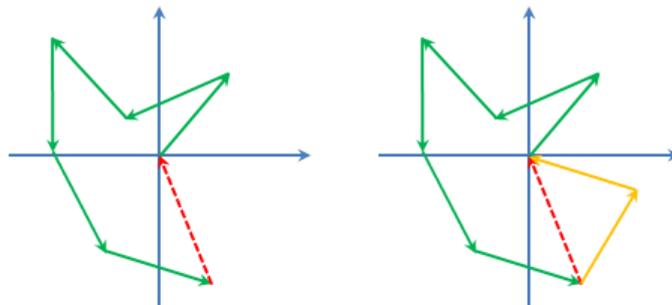


Figura 8: Caccia al Baricentro

Se avessimo beccato il Baricentro al primo colpo, la sequenza di vettori si richiuderebbe nell'origine del grafico; manca però il vettore rosso mostrato in figura per chiudere il cerchio...

Se fosse consentito dalle regole del quesito (oppure *barando...*), potremmo aggiungere alla configurazione di punti  $P_K$  altri due<sup>17</sup> *punti supplementari* caratterizzati dai vettori in arancio mostrati nella parte destra della Figura 8, ed il Baricentro diventerebbe proprio il  $B_{T0}$  selezionato un po' a casaccio... Questo non si può fare, ma si può dire che *se questi due punti ci fossero*, comporrebbero il vettore rosso che *attrarrebbe* la posizione del Baricentro *vero* proprio in  $B_{T0}$ ; i due *punti supplementari* in realtà non esistono, ma possiamo immaginarli come due *punti fantasma* che tendono a *respingere* il Baricentro *di tentativo*  $B_{T0}$  più o meno verso la posizione effettiva del *vero* B.

E allora proviamo a spostare il Baricentro *di tentativo* verso una nuova posizione  $B_{T1}$ , scelta muovendosi con verso diametralmente opposto a quello del vettore rosso; ma di quanto? Il vettore rosso (o meglio, il suo opposto) indica in che direzione spostare  $B_{T0}$ , ma *non* l'entità dello spostamento necessario (valgono le considerazioni fatte sopra sulle distanze dei punti periferici che, variate a piacimento lungo la direzione dei propri vettori, lasciano inalterato il Baricentro; e quindi i vettori stessi non contengono informazioni sulle distanze, ma solo sulle direzioni).

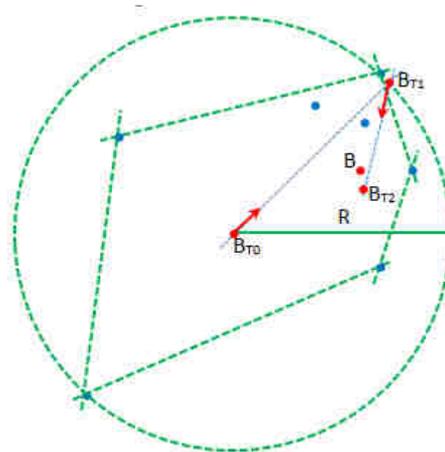


Figura 9: La convergenza al Baricentro

Vediamo un po' come fare: consideriamo l'esempio (con  $N = 7$ ) della Figura 9, dove si vedono il cerchio circoscritto di raggio  $R$  (calcolabile), il primo Baricentro *di tentativo*  $B_{T0}$ , ed il Baricentro *vero*<sup>18</sup> B; eseguita la procedura di cui sopra per trovare l'opposto del vettore rosso, spostiamo il primo Baricentro *di tentativo*  $B_{T0}$  lungo quella direzione, di una distanza  $R$ , in  $B_{T1}$ . A questo punto ricalcoliamo il vettore, e spostiamo di nuovo il Baricentro *di tentativo*, ma stavolta di una distanza inferiore, ad esempio  $R/2$ , in  $B_{T2}$ ... E via così di seguito, riducendo progressivamente l'entità dello spostamento...

Facendo eseguire la procedura di cui sopra ad un programmino *ad hoc*, ed interrompendo il calcolo quando l'ennesimo spostamento diventa minore di un  $\epsilon$  a scelta, si arriva alle coordinate del Baricentro, con una tolleranza inferiore ad  $\epsilon$ ...

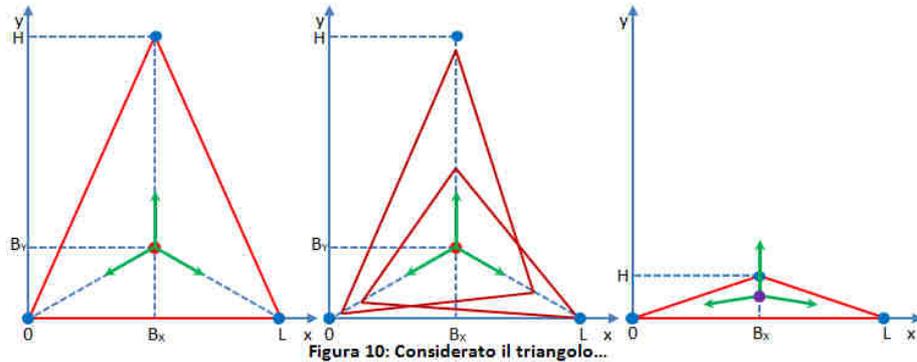
<sup>17</sup> I *punti supplementari* necessari sono due se il modulo del vettore rosso è compreso nell'intervallo  $]0, 2]$ ; ma nulla cambia nella sostanza se questo modulo è di valore maggiore, basta aggiungere il numero adeguato di *punti supplementari*.

<sup>18</sup> Si garantisce che la posizione cosiddetta *vera* di B è, nei limiti grafici di Microsoft™ Word™, la posizione corretta del Baricentro...

La procedura di cui sopra<sup>19</sup> produce risultati eccellenti, verificati empiricamente con una precisione dell'ordine di  $10^{-16}$  in vari casi in cui è possibile valutare analiticamente la posizione esatta del Baricentro; ma, come anticipato sopra, tutto ciò si inceppa in qualche modo in molti (non tutti) i casi in cui il Baricentro coincida con uno dei punti  $P_K$ ...



Per affrontare i casi di coincidenza  $B / P_K$ , consideriamo una configurazione estremamente semplice, almeno in apparenza: tre punti disposti ai vertici di un *triangolo isoscele*, come nella Figura 10 qui sotto:



Il triangolo isoscele è completamente caratterizzato dalla sua base di lunghezza  $L$  e dall'altezza  $H$ ; nel caso di sinistra della figura, possiamo agevolmente piazzare l'univoco trittico di versori posti a  $120^\circ$  l'uno dall'altro (e quindi a somma vettoriale nulla), in modo che puntino ciascuno verso un vertice del triangolo. Qui siamo ancora in un caso di *non-coincidenza*  $B / P_K$ ; i tre versori a somma vettoriale nulla *esistono*, la 13) vale ancora, e con qualche piccolo calcolo si può ottenere che:

$$15) \begin{cases} B_x = \frac{L}{2} \\ B_y = L \frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

Che l'ascissa del Baricentro sia posta a metà della base, si deduce da *evidenti ragioni di simmetria*<sup>20</sup>; e l'ordinata si ottiene facilmente come altezza del triangolo di base  $L$  ed angolo *in alto* pari appunto a  $120^\circ$ . Come già visto, possiamo spostare a piacimento i vertici del triangolo lungo i prolungamenti dei tre versori, come nel caso dei triangoli marroncini al centro in figura, ed il Baricentro resterà invariato, inchiodato nella stessa posizione fornita dalle 15)...

Ma cosa succede quando l'ordinata  $H$  del vertice *in alto* del triangolo scende al di sotto del valore (finora fisso) dato dalla seconda delle 15)? Dove *finisce* il Baricentro? Se il Baricentro fosse interno al triangolo, come per il punto violetto della parte destra della figura, i due versori diretti verso gli estremi della base del triangolo sarebbero costretti a *divaricarsi*, assumendo un angolo fra essi superiore a  $120^\circ$ ; il terzo, diretto verso l'alto, *non potrebbe mai annullarne la somma vettoriale*. Ciò vuol dire che la 13) cessa di essere consistente: ciò capita, come visto, *quando il Baricentro coincide con uno dei punti  $P_K$* . Quindi, per le solite *evidenti ragioni di simmetria*, il Baricentro viene a trovarsi nel vertice in alto del triangolo...

Se allora immaginiamo di far scorrere verticalmente dall'alto verso il basso il vertice superiore del nostro triangolo isoscele (partendo dalla parte sinistra della

<sup>19</sup> A parte qualche dettaglio inessenziale non approfondito qui, come ad esempio il *tasso ottimale di riduzione* dello spostamento dei vari Baricentri *di tentativo*...

<sup>20</sup> Si rammenta che, a partire da RM113, la frase "*evidenti ragione di simmetria*"<sup>TM</sup> è trademark (graditissimo ai tre Rudi...) di proprietà di Val316...

Figura 10), il Baricentro resta incollato alla posizione data dalle 15), fin quando questo vertice raggiunge l'ordinata critica data dalla seconda delle 15); da quel punto in poi, il vertice *assorbe* il Baricentro, e lo trascina con sé verso il basso...

Tutto ciò è generalmente vero non solo per i triangoli isosceli, ma per *qualsiasi* triangolo; capita *sempre* ogni qualvolta uno degli angoli supera 120°, e di conseguenza non è più possibile costruire il terzetto di versori a somma vettoriale nulla.

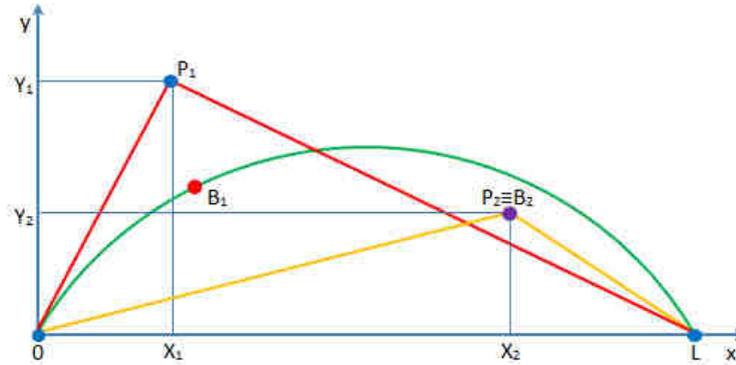


Figura 11: L'area di assorbimento per un triangolo generico

La Figura 11 qui sopra mostra in verde *il luogo dei punti* per i quali l'angolo *in alto* del triangolo è esattamente 120°; si tratta di un arco di circonferenza, e la parte di interesse ha equazione<sup>21</sup>:

$$16) \begin{cases} y = \frac{L}{2\sqrt{3}} \left[ \sqrt{12 \frac{Lx - x^2}{L^2} + 1} - 1 \right] \\ x \in [0, L] \end{cases}$$

Possiamo chiamare la parte di piano sottesa da quest'arco *area di assorbimento*; se il vertice *in alto* del triangolo si trova *al di sopra* di tale area – come nel caso del triangolo rosso, di vertice P<sub>1</sub> – il Baricentro B<sub>1</sub> sarà distinto da tale punto, e sarà collocato sul confine dell'*area di assorbimento*. Se invece il vertice si trova all'interno (o sul confine) dell'*area di assorbimento*, il Baricentro sarà *assorbito* dal vertice stesso, come nel caso del triangolo arancio di vertice e Baricentro B<sub>2</sub> ≡ P<sub>2</sub> in Figura 11.

Per un qualsiasi triangolo con vertice *in alto* di coordinate P(X, Y), al di sopra dell'*area di assorbimento*, l'ascissa del Baricentro B è data poi da:

$$17) X_B = \frac{L}{2\sqrt{3}} \frac{X^2\sqrt{3} + Y^2\sqrt{3} + 4XY + LX\sqrt{3} + LY}{X^2 + Y^2 - LX + LY\sqrt{3} + L^2}$$

mentre l'ordinata Y<sub>B</sub> si ricava sostituendo il valore ottenuto dalla 17) per X<sub>B</sub> nella 16).



E con i casi di *ménage à trois* pare che siamo a posto; si è capito che in generale esistono due *categorie* di soluzioni: quelle in cui il Baricentro è *autonomo* – e tutti i partecipanti al meeting devono spostarsi verso di esso per minimizzare la distanza complessiva percorsa – e quelle in cui uno dei partecipanti impone la propria posizione per la localizzazione del meeting.

Cosa capita se i partecipanti sono quattro? Se le posizioni di partenza sono disposte ai vertici di un qualsiasi quadrilatero *convesso*, la soluzione è semplicissima: il Baricentro B si trova nel punto d'incontro delle diagonali del poligono, come in Figura 12 qui di seguito:

<sup>21</sup> Risparmio da qui in poi i calcoli di dettaglio, lasciati alla cura dell'*attento lettore*...

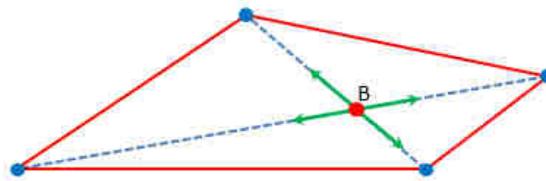


Figura 12: Un generico quadrilatero convesso

Il Baricentro si troverà proprio all'incrocio delle diagonali poiché i quattro vettori che partono da quel punto giacciono come coppie opposte sulle diagonali stesse, e quindi si annullano vettorialmente a vicenda; la 13) sarà quindi sempre rispettata.

Se invece il quadrilatero *non* è convesso, la faccenda è più complicata; si tratta in pratica del caso in cui tre dei partecipanti sono posizionati ai vertici di un triangolo, mentre il quarto parte da un punto interno (o meglio, *non esterno*) del triangolo formato dai primi tre. In questo caso non ho risposte definitive, ma solo la *convinzione empirica* che tutta la superficie del triangolo suddetto costituisca un'area di assorbimento per questo caso particolare. Cioè che, *qualunque* sia la posizione del quarto partecipante all'interno del triangolo, il Baricentro coincida con questa posizione, come qui sotto in Figura 13:

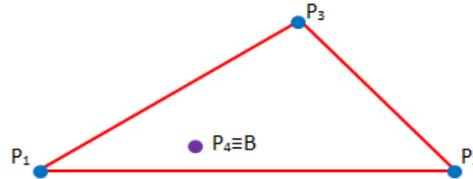


Figura 13: Quattro partecipanti, non disposti su un quadrilatero convesso



La *convinzione empirica* di cui sopra deriva dal fatto che l'algoritmo iterativo descritto in precedenza per i casi in cui il Baricentro non coincide con nessuno dei punti  $P_k$ , funziona abbastanza bene anche quando  $B \equiv P_k$  per un qualche valore di  $K$ ; con qualche ritocco procedurale<sup>22</sup>, quell'algoritmo ritrova la posizione teorica del Baricentro per una serie di casi noti, per cui ho maturato la suddetta *convinzione*.

Se la *convinzione* fosse fondata, e tanto per giocherellare un po' col caso  $N = 5$ , la configurazione con *quattro* partecipanti *fissi* posti ai vertici di un quadrato – più un *quinto* *vagante* all'interno del quadrato stesso – dovrebbe probabilmente avere come *area di assorbimento* quella contornata in verde nella Figura 14 qui sotto:

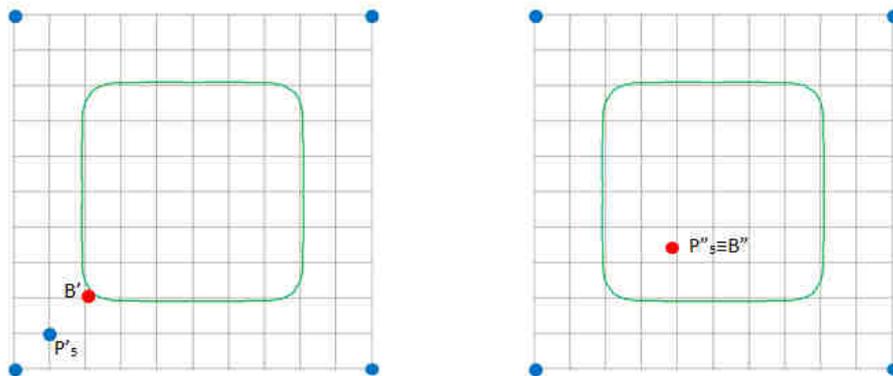


Figura 14: Il quinto punto

Le simulazioni qui sopra (semmai fossero più o meno corrette) mostrano che se il *quinto* partecipante è posto all'esterno dell'*area di assorbimento* (parte sinistra

<sup>22</sup> Ma purtroppo non più con la stessa tolleranza minore di un  $\epsilon$  arbitrario... Ci sarebbe qualche idea per migliorarlo, ma ottobre incombe...

della Figura 14), il Baricentro è distinto dalla posizione di partenza di quel partecipante. Se invece è all'interno, come a destra nella stessa Figura, costui *assorbe* a sé il Baricentro.



Resterebbero parecchie faccende da discutere; ad esempio, il fatto che il Baricentro è *unico* se i punti  $P_K$  non sono tutti collineari. Ne avrei una proposta di dimostrazione, ma non mi sembra il caso di dilungarmi oltre.

Poi, sarebbe interessante narrare l'analisi dettagliata delle 8), che risultano monotone non decrescenti come dalla seguente estemporanea Figura 15:

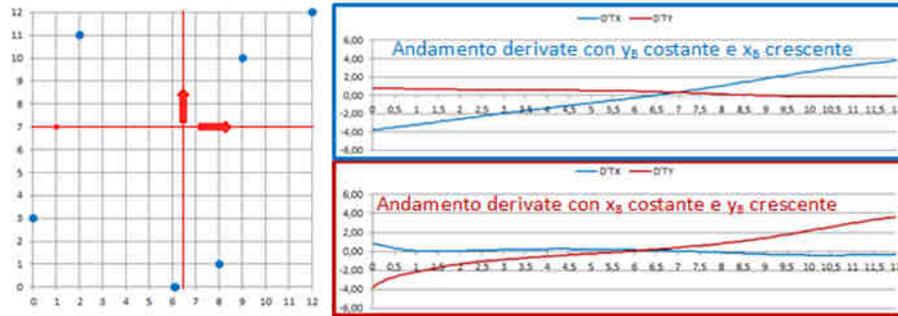


Figura 15: Le 8), in un caso specifico

Oppure ancora il fatto che se, nell'evolvere delle 8), si attraversano *precisamente* uno o più dei punti  $P_K$ , ed allora si producono *salti di fase* nei vettori e conseguenti *gradini* esattamente pari a 2 unità nell'andamento...



Figura 16: Le 8), saltelli...

In attesa dei quesiti di RM213, direi che può bastare...

A direi il vero per noi non è mai abbastanza. Ma siamo arrivati alla fine, e quindi ci fermiamo qui. Alla prossima!

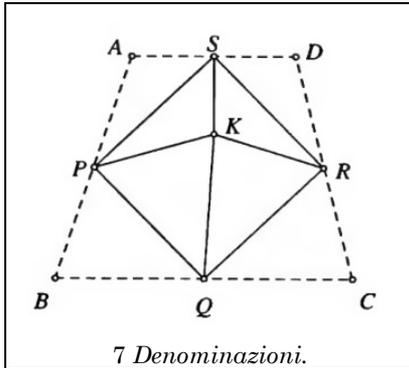
## 5. Quick & Dirty

*Ce lo tenevamo per i momenti di magra, ma visti i tempi è meglio se ci sbrighiamo: rischia di diventare obsoleto.*

In un paese dal bicameralismo talmente perfetto che possiamo decidere noi per ogni parlamentare se diventerà Deputato o Senatore, ogni parlamentare ha al più tre oppositori per principio. Provate che è possibile dividere il corpo parlamentare in due camere tali che nessuno abbia più di un oppositore per principio nella camera nella quale siede.

*Nota: per "oppositore per principio" intendiamo qualcuno che, appena scopre come voterete, vota in modo inverso, indipendentemente dalla bontà o meno della legge proposta.*

## 6. Pagina 46



Consideriamo un generico quadrilatero per il quale sussista la proprietà, denominato come in figura: piegando A lungo PS, B lungo PQ, C lungo QR e D lungo RS, tutti i vertici vengono portati in K senza sovrapposizioni o lacune.

Questo significa che K è la riflessione di A secondo PS e di B secondo PQ.

In queste riflessioni, sia AP che BP sono portate su PK, e quindi deve essere  $AP=BP$ , e quindi P deve essere il punto medio di AB.

Nello stesso modo, Q, R, S devono essere i punti medi

degli altri lati.

Ora, A e la sua riflessione K devono essere alla stessa distanza da PS: ma se consideriamo il triangolo ABD, visto che P e S sono i punti medi dei rispettivi lati, allora PS è a metà strada tra A e BD, e quindi K deve giacere su BD.

Inoltre, siccome K è l'immagine di A secondo PS, AK è perpendicolare a PS, e siccome PS è parallelo a BD nel triangolo ABD, segue che K deve essere il piede dell'altezza da A in ABD.

Per ottenere la piegatura richiesta, quindi, K deve essere il piede delle altezze da A, B, C, D nei rispettivi triangoli: segue quindi che la condizione necessaria è che le due diagonali del quadrilatero siano perpendicolari tra loro.

Si vede facilmente che la condizione è anche sufficiente: se le diagonali sono perpendicolari, il loro punto di intersezione K è il piede dell'altezza da A nel triangolo ABD, dell'altezza da B in ABC, e così via: riflettendo A secondo la linea mediana PS, che è parallela alla diagonale BD e biseca AK, questo arriverà in K, e così per gli altri punti; essendo la somma degli angoli interni di un quadrilatero pari all'angolo giro, non ci saranno né sovrapposizioni né lacune.



## 7. Paraphernalia Mathematica

### 7.1 Giocare a carte con i pastori tedeschi

Facile battuta animalisticamente scorretta: dategliela vinta, che è meglio.

Due Tre premesse all'introduzione: tanto per cominciare, la storia è vera; secondariamente, visto che questo non è uno *Zugzwang!*, non ci addentriamo tanto nell'aspetto ludico, ma solo in quello matematico, quindi le regole se volete ve le andiamo a cercare: infine, potrebbe scapparci un secondo articolo, ma come al solito non promettiamo niente. Ma adesso passiamo all'introduzione.

**Marsh Jean Falco** stava studiando se l'epilessia nei pastori tedeschi possa essere ereditaria: aveva raccolto i dati derivati dalle analisi genetiche su dei fogli utilizzando, al posto dei dati, dei simboli e, mentre stava spiegando a dei veterinari come funzionavano, si è accorta che poteva essere divertente costruire un gioco basato sulle associazioni dei simboli. Era nato **SET**.

E adesso, proviamo a smontarlo un po'.

Il gioco si basa su un mazzo di carte nel quale sono presenti tutte le variazioni possibili di **Colore**, indicati come rosso, viola e verde; **Numero**, indicati come uno, due e tre; **Forma**, indicati come Pavesino<sup>23</sup>, Rombo e Tilde; **Ombreggiatura**, indicati come pieno, mezzotono e bianco.

Tranquilli, praticamente non li useremo mai; comunque, definiamo queste come le **Caratteristiche** (originale, se preferite: *Features*) di una carta.

Non dovrebbe essere un problema calcolare quanto è grande il mazzo: quattro caratteristiche, tre variazioni per ogni caratteristica, avete:

$$3^4 = 81$$

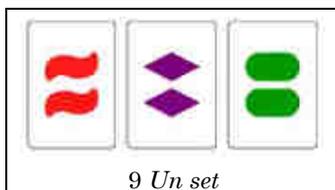
carte presenti nel mazzo: forse non facilissimo da mescolare ma, almeno per un bambino, rappresentano un universo che riesce ad essere fisicamente di grosse dimensioni (a che età avete imparato a contare fino a ottantuno?) ma intellettualmente maneggevole, il che nei giochi è cosa buona e giusta.

Già, il gioco. Toccherebbe alle regole.

Come dicevamo, ci limitiamo ad accennare le parti interessanti al punto di vista dell'analisi: lo scopo del gioco è riuscire a formare un *insieme* (che in inglese sarebbe un *set*, da cui, il nome del gioco) in cui ognuna delle quattro caratteristiche, prese una per volta, siano o tutte uguali o tutte diverse in ogni carta.

Colore			
Numero			
Forma			
Ombreggiatura			

8 L'equazione caratteristica?



La spiegazione non è chiarissima, ma ce la caviamo con un esempio facile: le tre carte che vedete nella figura a fianco formano un *set* in quanto hanno stessa ombreggiatura (piena), stesso numero (due), diversi colori e diversa forma. Tutto più chiaro, adesso?

Le regole del gioco prevedono che si girino *dodici* carte e si cerchi di organizzare dei *set*, rimuovendo poi le carte<sup>24</sup>.

<sup>23</sup> OK, l'originale dà "Ovale". Ma se trovate un oviparo in grado di fare un uovo del genere, vi garantiamo il Premio Frankenstein.

<sup>24</sup> Quando dicevamo che non saremmo stati chiari con le regole del gioco, pensavamo esattamente a questo punto: non è chiaro se, potendo una carta appartenere a due diversi *set*, sia permesso contare "due punti" o si debba decidere in quale *set* includerla in funzione di oscuri ragionamenti personali. Non abbiamo giocato

Cominciamo, come amava dire il Gherzi, ad *arzigolare* su questi primi concetti.

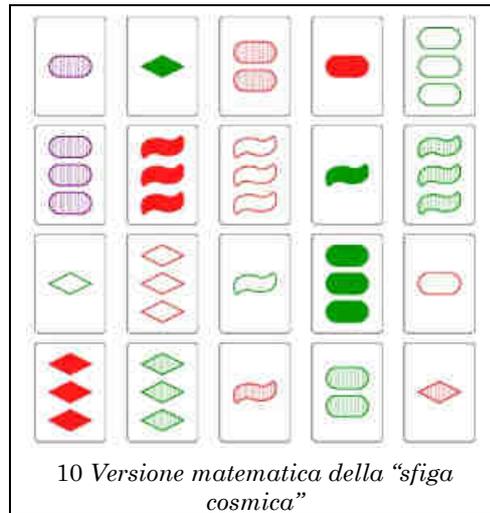
Tanto per cominciare, è abbastanza evidente che, date due qualsiasi carte, esiste una e solo un'altra carta nel mazzo in grado di formare *set* con lei; da questo, si deriva che avendo dodici carte potreste ritrovarvi con nessun *set* organizzabile: in questo caso, le regole prevedono che vengano messe sul tavolo altre tre carte; se siete in una giornata particolarmente sfortunata (ancora nessun *set* con quindici carte), potete tirarne altre tre, e avanti così.

Sappiamo che a questo punto il vostro entusiasmo è tale che non sareste in grado di trovare un *set* neppure con l'intero mazzo sul tavolo. Da un punto di vista logico, comunque, salgono alla mente due domande:

1. Quante carte dobbiamo girare, per essere sicuri di avere almeno un *set*?
2. Quali sono le probabilità di non avere un *set* nelle dodici carte iniziali?

Se vi mettete d'impegno (leggasi barate contro di voi, l'etica matematica lo concede, a fini di studio), potete costruire un blocco di venti carte senza *set*: ne vedete un esempio nella figura a fianco.

Però, se cercate di aggiungere una ventunesima carta, comunque vi ritrovate con un *set*: sembra proprio che questo sia il limite<sup>25</sup>. A margine, notiamo che la didascalia dell'immagine non è scelta a caso: facendo i conti, viene fuori che potete avere una mano "set-free" da venti carte con (circa) la probabilità di 1 su dieci trilioni ( $1/10^{13}$ ).



Ora, siccome questo articolo sta venendo lungo, togliamo qualche disegno e mettiamo un po' di matematica: nel senso che cerchiamo un modo più "matematico" per rappresentare i *set*. Il modo più semplice consiste nell'utilizzare il **campo delle classi di resto** modulo 3, ossia  $F_3 = \{0, 1, 2\}$ ; per semplificare la notazione nel seguito, durante le operazioni ometteremo il pedice "modulo tre", dandolo per sottinteso; quindi, preparatevi ad una serie di espressioni del tipo  $2 + 2 = 1$ ,  $4 \cdot 2 = 2$  o, cosa che ci ha sempre colpito,  $2 = -1$ .

Poi, definiamo qualche variabile in  $F_3$ : con  $x_1$  indichiamo il colore (0=rosso, 1=verde, 2=porpora), con  $x_2$  la forma (0=pavesino, 1=tilde, 2=rombo) e avanti in questo modo: mettendo assieme quattro di questi oggetti descriviamo completamente una carta, il che significa, se vogliamo usare i paroloni, che SET è **isometrico a  $F_3^4$** , e ogni carta è un vettore quadridimensionale  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \in F_3^4$  nel quale possiamo cominciare a far di conto.

Per prima cosa, esiste una bellissima definizione di *set*, in questo spazio (attenzione che la somma è *vettoriale*):

Le carte  $\{c_1, c_2, c_3\} \in F_3^4$  formano un *set* se e solo se  $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ .

Dai corsi di geometria analitica, ricordiamo che tre punti sono *collineari* se esiste un  $\lambda$  per cui  $c_1 - c_2 = \lambda(c_2 - c_1)$ : siccome nel nostro spazio sono possibili solo tre valori<sup>26</sup>, ossia  $\lambda = \{0,$

nessuna partita, ma "a naso" ci sembra più divertente la prima forma della regola. Se decidete di fare degli esperimenti, fateci sapere.

<sup>25</sup> (Mica tanto) Curiosamente, la cosa è stata scoperta prima dell'invenzione del gioco: si parla infatti del 1971, con **Michele Pellegrino**, che ha descritto la cosa nell'articolo "Sul massimo ordine delle calotte in  $S_{4,3}$ ", *Matematiche*, Vol. 25, pagg 149-157, 1970. E per una volta che l'articolo era in italiano, non riusciamo a leggerlo (si trova su *ResearchGate*, ma a quanto pare i *Rudi Mathematici* non sono considerati neanche "independent researchers". Visto che, nell'ottica di internet, i "ricercatori indipendenti" sono quelli che cercano le scie chimiche e i nanochips rettiliani, quasi quasi mi offendo).

<sup>26</sup> Il bello di questi campi è che le variabili possono assumere solo valori *interi*.

1, 2}, allora ogni linea in  $F_3^4$  è formata da tre punti. Inversamente, se abbiamo tre punti nel nostro spazio, essi giacciono su una linea se  $c_1 - c_2 = 2(c_3 - c_1) = 2c_3 - 2c_1 = -c_3 - 2c_1$ , il che è equivalente alla condizione enunciata poco sopra.

Quindi, *i set corrispondono alle rette di  $F_3^4$* . E scusate se è poco.

La nostra domanda diventa, quindi: quanti punti in un sottoinsieme del nostro spazio garantiscono l'esistenza di una linea nel sottoinsieme?

Affrontiamo la cosa al contrario e partiamo da dimensioni un po' più trattabili, ad esempio trattiamo  $F_3^d$  per valori "piccoli" di  $d$  e, riprendendo il titolo dell'articolo di Pellegrino, definiamo *d-calotta* un sottoinsieme del nostro spazio che *non contenga linee*. Inoltre, una *d-calotta* è detta *massimale* se è della massima dimensione (no, non in quel senso: nell'altro) possibile e il numero dei punti al suo interno si indica con  $m$ .

Il caso  $d=1$  è abbastanza semplice: l'intero nostro spazio è una retta formata tre punti<sup>27</sup>, quindi la 1-calotta massimale è formata da due punti, quindi  $m=2$ .

Il caso  $d=2$  non è molto più complesso: lo spazio è formato da nove punti posti in quadrato  $3 \times 3$ ; se prendete, ad esempio, i quattro punti in basso a sinistra vi accorgete che non potete aggiungere nessun altro punto dell'insieme senza definire una retta: volendo essere formali, andrebbe dimostrato (e la cosa si fa, non è eccessivamente complicata, ma lunga, noiosa e richiede il Principio della Piccionaia su tutte le rette dello spazio) che unire il punto in alto a destra dello schema definisce una retta, ma qui sorvoliamo e diamo per definito che  $m=4$ .

Con  $d=3$  cominciamo ad andare sul difficile, in quanto dobbiamo cominciare a considerare le *famiglie di piani* (ciascuno dei quali contiene otto rette) e lavorare su questi; comunque, si arriva alla conclusione che qui  $m=9$ .

Se state pensando che  $m = d^2$  significa che non solo leggete in modo disattento, ma non guardate neanche le figure: poco sopra, abbiamo dato uno schema di 20 carte che è evidentemente una 4-calotta, il che significa che per  $d=4$  debba essere quantomeno  $d > 19$ . E in effetti, ragionando di iperpiani (discreti: suppergiù, nove punti per ogni iperpiano) si verifica che per  $d=4$  si ha  $m=20$  ossia che potete avere una mano di 20 carte senza neanche un set, ma nel momento stesso nel quale aggiungete una carta avrete comunque un set. Se preferite la formulazione più matematica (che è quella che aveva dato Pellegrino), *la 4-calotta massimale ha dimensione 20*.

Un certo vanBrink si è preso la briga di verificare, generando tutte le  $\binom{81}{21} = 13636219405675528192$  mani di 21 carte possibili e facendo verificare a un computer che effettivamente ognuna avesse al suo interno un set: non sappiamo se onorare di più la testardaggine (visto che non si fida della dimostrazione) o la fiducia (visto che si fida della propria abilità di programmatore) di vanBrink, che sostiene di aver ottenuto questo risultato nel 1997<sup>28</sup>.

Anche perché qui abbiamo uno spreco di macchinario mica da poco: ci ha pensato, a spiegare come stanno le cose, il buon Donald Knuth.

In effetti, il metodo utilizzato da vanBrink ignora il fatto che tutti gli attributi delle carte possono essere permutati tra di loro: questo significa che ci sono  $3!^4 \cdot 4! = 31'104$  simmetrie! (no, quello non è un fattoriale) E questo è solo il primo passo: lavorando con le trasformazioni affini (che portano linee in linee, quindi se un insieme contiene un set conterrà un set anche dopo la trasformazione) si arriva a trovare un gruppo di simmetrie con  $(81 - 8) \cdot (81 - 3) \cdot (81 - 9) \cdot (81 - 27) \cdot 81 = 1'965'150'720$  elementi, il che semplifica molto le cose<sup>29</sup>.

<sup>27</sup> Vorremmo stressare il concetto che quei tre punti *sono* la retta, non si limitano ad appartenervi; questo in funzione di quanto detto alla nota precedente.

<sup>28</sup> Nota per i *geek*: su un Pentium 90 MHz, con una settimana di lavoro. Non si hanno notizie sul linguaggio di programmazione utilizzato.

<sup>29</sup> Sempre per i *geek*, su un laptop a 2.7GHz, il programma di Knuth arriva allo stesso risultato di vanBrink in tre minuti.

Sempre giocherellando con il gruppo delle simmetrie, si arriva a vedere che esistono 2 284 535 476 080 insiemi di 12 carte senza un set, il che fa circa il 3% delle possibili mani, quindi bisogna essere piuttosto sfortunati per centrarne una: pensate, piuttosto, che non avete occhio per trovare i set, e fatevi aiutare dal nipotino.

Sicuramente tutti, ora, vi state ponendo la faticosa domanda “ma quante sono, a meno di permutazioni sui simboli, le ‘mani della sfiga cosmica?’” Beh, se l’abbiamo chiamata così, un motivo c’è: una sola.

*Rudy d’Alembert*

*Alice Riddle*

*Piotr R. Silverbrahms*