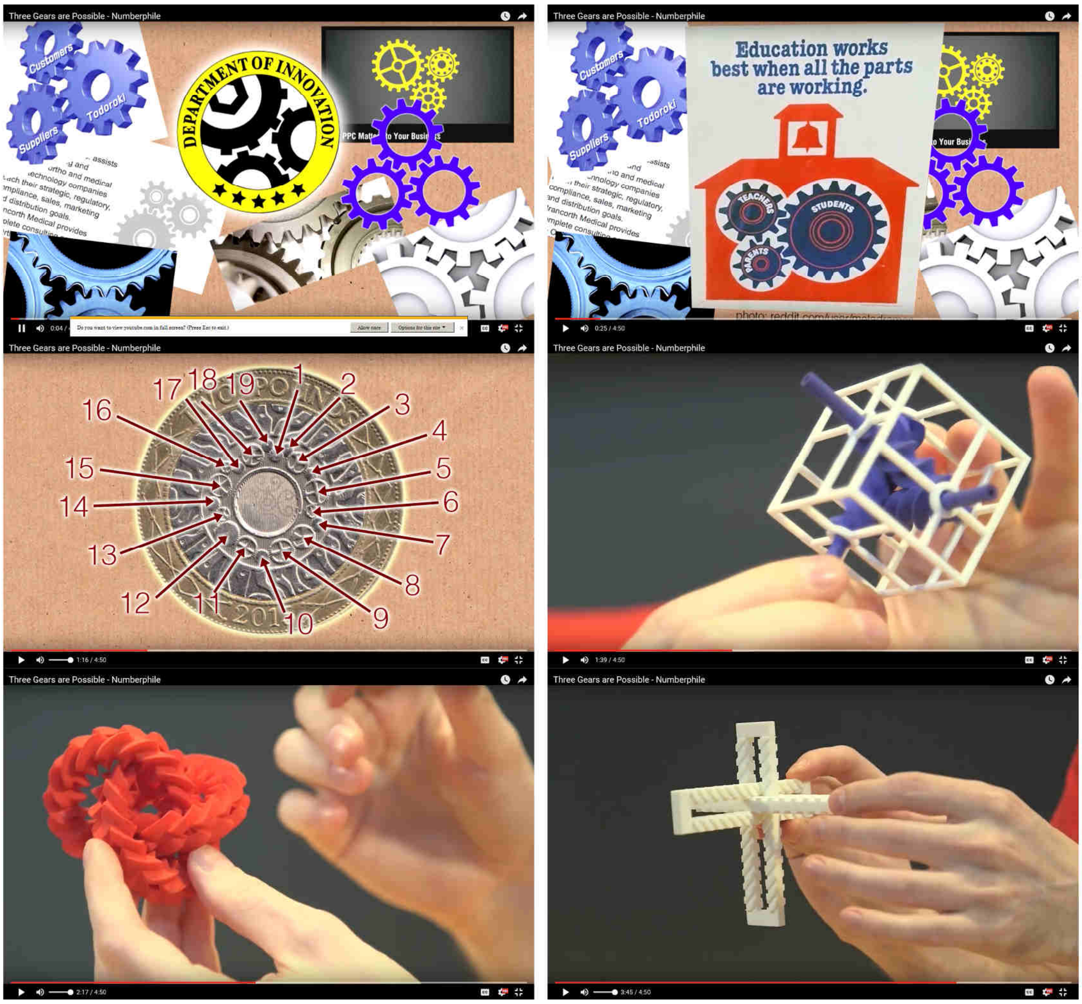
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 210 – Luglio 2016 – Anno Diciottesimo



1. Misura per Misurina ... 3

2. Problemi ... 11

2.1 Candele bidimensionali ... 11
2.2 Un problema dal dentista ... 12

3. Bungee Jumpers ... 12

4. Soluzioni e Note ... 12

4.1 [208] ... 13
4.1.1 Un problema di quelli "belli" [2] ... 13
4.2 [209] ... 13
4.2.1 Quick&Dirty ... 13
4.2.2 Almeno con la fantasia… ... 14
4.2.3 ...e leggere i PM? ... 17

5. Quick & Dirty ... 18

6. Pagina 46 ... 18

7. Paraphernalia Mathematica ... 20

7.1 Attacco all'alba (ma anche no) ... 20

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM209 ha diffuso 3'107 copie e il 02/06/2016 per Google eravamo in 8'870 pagine.

Scusate collage di immagini e printscreen da filmino, ma vale la pena. Come tutti dovreste sapere, un "cerchio" con tre o con un numero dispari di ingranaggi non gira, anche se ne compare uno su una moneta di un famoso paese extracomunitario. Ma qualcuno ha scoperto che, se andate nelle tre dimensioni, con tre ingranaggi avete un mucchio di modi per far girare le cose. Trovate il filmino completo a https://youtu.be/5Mf0JpTI_gg: lo ha fatto ***Henry Segerman***, che dovreste conoscere da un vecchio Summer Contest; e, se guardate tutto il film, scoprite anche che ha l'aria simpatica.

1. Misura per Misurina

"Sciolta ormai l'ultima neve
su un tappeto d'erba nuova
con un passo lieve nell'aurora
Misurina camminava
sopra ad una rupe si fermava
ogni dì alla stessa ora
nella calma del mattino
il silenzio era velluto
un arcobaleno di pensieri
lei gettava giù nel vuoto
e qualcuno la spiava muto
il suo nome era Sorapis
Sorapis che viveva solo lassù
tra abeti e genziane blu
nessun sorriso ebbe mai
e Misurina che era tutto per lui
un giorno scivolò giù
la vide con gli occhi suoi
Misurina riposava
tra il ginepro e i rododendri
si affacciava il sole dalle nubi
sopra i suoi capelli biondi
ed un alito di vento andava
a sfiorare lei
per lasciarla poi
tra le braccia di Sorapis
Sorapis chiuse gli occhi e il capo inchinò
e giorno e notte aspettò
finché di pietra non fu
e con le lacrime che scesero giù
un verde lago formò
tra abeti e genziane blu"

(C.Baglioni, "Il Lago di Misurina", 1975)

La canzone posta a mo' di citazione in apertura ci mette un po' in imbarazzo. Imbarazzo dovuto al fatto che – lo confessiamo – non l'abbiamo mai sentita; eppure l'artista che l'ha scritta (e presumibilmente cantata) è certo uno dei cantautori più famosi dell'italica penisola, come dimostra il fatto che è ancora in attività più di quarant'anni dopo la data di pubblicazione della canzone medesima; né possiamo chiamare a discolpa la giovane età (due terzi della redazione erano ampiamente in grado di consumare musica, in quel periodo).

Ci sembra che restino pertanto due sole possibilità in grado di argomentare le causa di nostra cotanta ignoranza: la prima, che i suddetti due terzi della redazione non fossero al tempo particolarmente attenti alla produzione musicale italiana[1]; la seconda, che la canzone in questione non fosse poi troppo memorabile; o, naturalmente, entrambe le cose insieme. Ci permettiamo però di propendere per la seconda ipotesi, se non altro perché "Il Lago di Misurina" era contenuta nell'album "Sabato Pomeriggio", che pare essere stato il 33 giri più venduto dell'anno in Italia.

[1] Probabilmente persi dietro a "Fame" di David Bowie, a "Wish You Were Here" dei Pink Floyd o a "Minstrel in the Gallery" dei Jethro Tull… o ad altri innumerevoli musicisti anglofoni, che nel 1975 strimpellavano queste canzonette.

1 *Lago di Misurina*

La ragione della citazione in testa ad un articolo che, almeno teoricamente, dovrebbe parlare di matematica, sta nel fatto che si vorrebbe effettivamente introdurre quel sito ameno delle Dolomiti bellunesi, nel bel mezzo del Cadore. Non che le Dolomiti abbiano bisogno di pubblicità o altro tipo di benevolenza da parte nostra: a riconoscerle come zona di particolare e superba bellezza ci ha già pensato l'Unesco, annoverandole tra i Patrimoni Naturali dell'Umanità; in più hanno anche la rara fortuna di avere un nome proprio che è al tempo stesso molto bello e d'origine scientifica: il termine deriva infatti dalla *dolomia*, la particolare roccia di cui sono composte. La *dolomia* (roccia) è composta prevalentemente dal *dolomite* (minerale) che è di fatto del carbonato doppio di calcio e magnesio[2]: e i bei nomi sia della roccia sia del minerale arrivano direttamente da Déodat de Dolomieu, il geologo francese che per primo li studiò. A voler essere pignoli, si potrebbe continuare a risalire le radici etimologiche, se non altro perché il nome del casato di Deodat discende da un luogo, il villaggio Dolomieu, in cui la sua famiglia regnava col titolo di marchese. È insomma il villaggio a dare, in ultima analisi, il nome alle Dolomiti, ed è abbastanza curioso notare che a battezzare lo splendido insieme delle Alpi Orientali sia un paesino alpino delle Alpi Occidentali: Dolomieu si trova nella regione dell'Isère, non troppo distante da Grenoble, in piene Alpi Cozie.

Per quanto gradevole, il nome "Dolomiti" ha un gran bel concorrente con l'altro termine con cui sono conosciute: i "Monti Pallidi". Seppur in maniera più esplicitamente poetica, anche questo nome discende dalle caratteristiche della roccia che domina su quelle montagne: la dolomia è chiara, quando è colpita dalla piena luce del sole; ma è all'alba e al tramonto che si verifica lo spettacolo cromatico che rende le Dolomiti celebri in tutto il mondo. Si tratta del fenomeno detto "enrosadira[3]", che colora di rosa – ma arriva fino a tonalità di violetto – le pareti rocciose di quelle montagne. Eventi naturali di particolare bellezza generano inevitabilmente delle poetiche leggende, quando non direttamente delle evocative denominazioni, e va riconosciuto alla lingua tedesca, solitamente tacciata di scarsa musicalità, di vincere un round con l'italiano, in merito al colore delle Dolomiti: il bel gruppo montano del Catinaccio, in Val di Fassa, ha nella nostra lingua un nome non particolarmente entusiasmante, se non altro per quella desinenza apparentemente dispregiativa in "accio". In tedesco, il gruppo è invece chiamato "Rosengarten", ovvero "giardino di rose", ed è al colore dei fiori per eccellenza che il mito vuole si debba l'effetto cromatico delle Dolomiti; esistono infatti almeno due versioni della leggenda di Re Laurino, che sul Catinaccio coltivava un giardino di rose così bello da colorare tutta la

[2] Se vi piacciono le formule chimiche, eccola qua, la dolomite: $MgCa(CO_3)_2$

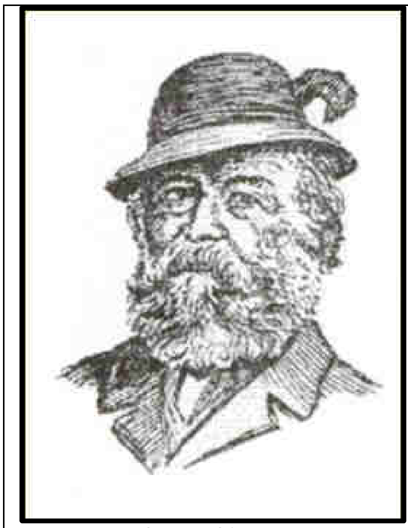
[3] Significa semplicemente "l'atto di diventare rosa", ma in lingua ladina.

montagna. Le versioni, come sempre nelle leggende, differiscono alquanto in molti dettagli: in un caso Laurino è un re di un popolo di nani che possiede arti magiche in grado di farlo diventare invisibile o particolarmente forte, nell'altro un saggio e buon sovrano di un alacre popolo di nani minatori; in un caso, è particolarmente affezionato a sua figlia Ladina, nell'altro, si innamora perdutamente d'una principessa di un regno vicino, Similde. Entrambe le leggende convergono però su alcuni elementi fondamentali, ovvero che il povero Laurino si ritrova ad un certo punto circondato da nemici che gli strappano l'amata (figlia o fidanzata), perché il suo regno montano viene rivelato ai nemici proprio dal roseo colore del suo giardino. Disperato e infuriato, Laurino lancia il suo anatema contro il "rosengarten", impetrando che il giardino non sia mai più visibile "né di giorno, né di notte", ma nella fretta della maledizione Laurino scorda i due momenti di confine tra il giorno e la notte, ovvero l'alba e il tramonto: ed è per questa sua dimenticanza che il rosa del suo giardino tornerebbe visibile, in quei soli momenti, sulle rocce delle Dolomiti.

2 *Il Catinaccio o Rosengarten*

Tornando a Misurina, la leggenda sull'origine del lago è altrettanto multiforme, e quella riportata dalla canzone è una sorta di breve riassunto delle diverse versioni: i punti consolidati, comuni a tutte le narrazioni, vedono Misurina come una fanciulla e Sorapiss come un uomo destinato a diventare montagna (non per niente, il monte Sorapiss è uno dei massicci più notevoli della zona); Sorapiss ama Misurina (in alcuni casi come figlia, in altri come fidanzata) e quando la giovane annega nel lago Sorapiss, ormai diventato montagna, la piange attraverso i ruscelli che scendono dalle sue pendici, e che donano allo specchio d'acqua un magico riflesso luminescente.

Luogo di bellezza e di leggende, l'insieme delle Dolomiti ha sempre avuto un particolare potere d'attrazione: quando, nel diciannovesimo secolo, cominciò a prender piede tra la gioventù europea l'esotico sport dell'alpinismo, le vette rocciose che si coloravano di rosa erano tra le mete più ambite degli sportivi. Ogni nuova moda genera nuove professioni, ed è in questo periodo che, nei dintorni di Misurina, diventa famosa una delle prime "guide alpine", Santo Siorpaes. Di lui si narra che abbia scalato più di cento vette superiori ai tremila metri di altezza, molte delle quali come primo scalatore assoluto. Viene ingaggiato dai più famosi alpinisti europei, come l'inglese Francis Fox Tuckett e l'austriaco Paul Grohmann; ed è curioso notare oggi, a centocinquant'anni di distanza, che il rapporto tra alpinisti europei e le guide del luogo non doveva poi essere troppo diverso da quello che si instaurò, nel Novecento, tra gli stessi alpinisti europei e gli *sherpa* dell'Himalaya.


3 *Santo Siorpaes*

Certo è che Santo Siorpaes diventa una leggenda della montagna, e come tutte le leggende che si rispettino, produce anche una ricca dinastia. Almeno due dei suoi tre figli maschi, Pietro e Giovanni, seguiranno le orme del padre, diventando alpinisti di vaglia: soprattutto Giovanni si caratterizzerà per la conquista di almeno una ventina di vette inviolate, buona parte delle quali appartenenti al gruppo dei Cadini di Misurina che, com'è facile intuire, sovrasta il celebre lago.

Molte delle "torri", le cime rocciose, del gruppo dei Cadini di Misurina restarono inviolate fino al 31 Agosto 1896, quando i fratelli Pietro e Giovanni Siorpaes guidarono una spedizione alpinistica composta dai membri di una nobile famiglia ungherese: famiglia e spedizione caratterizzate dalla presenza di due avventurose fanciulle, Ilona e Rolanda, e del loro padre, il barone Loránd, accompagnati dalla loro guida alpina e amico Johann Innerkofler.

Il barone Loránd viene dalla lontana Ungheria: ma forse è bene ricordare che nel 1896 si trova ben al dentro dei suoi patri confini, poiché sia il Cadore sia l'Ungheria fanno parte del grande Impero Austro-Ungarico. Figlio di József, notissimo poeta, scrittore e politico di Budapest che raggiunse più d'una volta la carica di Ministro del Regno d'Ungheria, anche il barone Loránd fa del suo meglio per passare alla storia: se a Budapest è possibile trovare, sulle rive del Danubio, una bella piazza e statua che celebrano l'augusto genitore, il nome dell'alpinista Loránd e delle sue ardite figliole è impresso in granito sulla seconda cima dei Cadini di Misurina, che porta infatti il nome della famiglia. Senza contare che, cima dolomitica a parte, Loránd si era già fatto conoscere assai bene in ambito scientifico, visto che sarà stato pure barone per nascita e alpinista per passione, ma che era soprattutto un fisico per professione.

Il barone Loránd Eötvös de Vásárosnamény, più noto semplicemente col nome di Loránd Eötvös, nasce a Budapest il 27 Luglio 1848, nell'anno più rivoluzionario della storia. Anche l'Ungheria sente i venti rivoluzionari, tant'è che al momento della nascita di Loránd, il suo celebre papà József è ministro dell'educazione nel governo rivoluzionario; avrà però dei disaccordi con Lajos Kossuth, il capo della rivoluzione ungherese, al punto da andarsene a Monaco di Baviera fino al 1851.


4 *Loránd Eötvös*

Barone o rivoluzionario, certo è che Loránd ha la fortuna di nascere in una famiglia agiata e con una grande tradizione culturale alle spalle. Il primo educatore a cui fu affidato da bambino era Gusztáv Keleti, uno dei più famosi pittori del suo tempo, e sotto la sua tutela il piccolo Eötvös cresce e mostra subito una spiccata predisposizione per il disegno, le arti e la poesia. Figlio di uomo politico, ci si aspetta da lui che segua le orme paterne, ed è naturale immaginare che si dedichi a studi di giurisprudenza: e infatti Loránd si adegua alle volontà familiari, iscrivendosi alla facoltà di Legge dell'Università di Budapest[4], ottenendo anche la laurea.

Laurea che però, se anche non fu presa controvoglia, evidentemente non rispondeva pienamente agli interessi di Loránd, se il giovane rampollo ungherese decide di prendere delle lezioni private di matematica. C'è di buono che papà József, venuta a sapere la cosa, anziché arrabbiarsi come alcuni genitori autorevoli e autoritari avrebbero potuto fare, chiede ad un professore di mineralogia di formare il figliolo in ambito scientifico: e questi si ritrova in breve a girare per laboratori di chimica e a giostrarsi con formule e diagrammi. Presto decide che la scienza gli interessa assai di più della legge; subito dopo la laurea in giurisprudenza, che ottiene nel 1867, Eötvös si dirige a Heidelberg, dove trova insegnanti del calibro di Kirchhoff, Helmholtz e Bunsen; si concede il lusso di studiare un po' anche a Königsberg, salvo poi tornare a Heidelberg dove ottiene il dottorato nel 1870; a ventidue anni d'età, l'avvocato Loránd Eötvös è ormai uno scienziato a tutti gli effetti.

È anche costretto a diventare adulto: papà József muore l'anno successivo, proprio quando Loránd rientra a Budapest e ottiene il titolo di "privatdozent"; nel 1872 diventerà anche professore ordinario all'Università di Budapest, e nel frattempo ha ereditato il titolo nobiliare paterno, che lo fa ammettere di diritto alla Camera Alta del parlamento ungherese. Nel giro di pochi anni prenderà in moglie Gizella Horváth, aristocratica e affascinante fanciulla dell'alta società ungherese, che darà alla luce le intrepide alpiniste Ilona e Rolanda.

La carriera accademica di Eötvös si sviluppa in quegli ultimi anni del diciannovesimo secolo che sono davvero cruciali per la fisica: per quanto occorrerà attendere fino agli albori del Novecento per veder nascere le grandiose rivoluzioni concettuali della relatività e della Meccanica Quantistica, è in questi anni che grandi teorie si consolidano (basti pensare alla fantastica sistemazione dell'Elettromagnetismo e della Termodinamica fatta da Maxwell), ed è soprattutto in questi anni che nei laboratori si susseguono esperimenti di importanza che si rivelerà capitale per gli sviluppi successivi. Michelson e Morley eseguono il loro celeberrimo esperimento, cruciale per caduta del concetto di etere e viatico per l'ipotesi einsteiniana della costanza della velocità della luce nel 1887; Gustav Kirchhoff introduce nel 1862 il concetto e il termine di "corpo nero", che darà modo a Planck di formulare il concetto di quanto di energia nel 1900; e molti, molti altri esperimenti meno celebri, ma non meno importanti, confluiscono in questi anni nell'effervescente torrente scientifico della fisica classica.

Lóránd Eötvös è un fisico da laboratorio. Per quanto la sua cattedra fosse di fisica teorica, già dal 1874 comincia ad arricchire il suo programma didattico con esperimenti, e nel 1878 la cosa venne ufficializzata con la nomina a professore di fisica sperimentale. Il fisico sperimentale è un soggetto che, a torto, viene comunemente considerato meno "geniale" del fisico teorico: in realtà, se un teorico possiede senza dubbio una particolare visione del mondo e, in alcuni casi, riesce a dare una radicale svolta filosofica al modo di porsi verso il mondo, il concetto di "colpo di genio" è forse più adatto ai fisici sperimentali. Sono gli sperimentali che hanno il compito (e il privilegio) di riuscire a capire le complesse architetture teoriche e ad estrarne una diretta corrispondenza col mondo reale: sono i traduttori, o meglio ancora i costruttori di ponti, tra la pura teorica matematica e la solida materia universale di cui siamo composti. Progettare un esperimento, immaginare una soluzione reale, costruibile in laboratorio, e soprattutto misurabile, al fine di testare una teoria richiede un'intelligenza profonda e duplice: non solo la comprensione delle formule, ma anche la rara capacità di trasformarle in ingranaggi, circuiti, sistemi complessi ma tangibili in grado di essere toccati e usati.

[4] Tecnicamente, di tratta ancora dell'Università di Pest; Eötvös entra all'università nel 1865, ma è solo nel 1872 che le città di Buda e Pest decidono di non considerare il Danubio un ostacolo insormontabile, unendosi e dando vita a Budapest.

Eötvös, lo scalatore dilettante che dà il nome ad una torre nei pressi di Misurina, è uno splendido discepolo della Misura, l'azione cruciale che mette in relazione strettissima fisica e matematica. Per i primi dieci anni di carriera, fino al 1886, dedica il suo ingegno e la sua capacità di progettare strumenti ed esperimenti per determinare la costante della tensione superficiale. Sarà così in grado di enunciare la "Legge di Eötvös", che stabilisce che il coefficiente di temperatura dell'energia della superficie molecolare è indipendente dalla natura dei liquidi. Poi, dal 1886, si dedicherà all'esperimento che più caratterizza la sua vita scientifica.

Una delle distinzioni più difficili da assorbire, per uno studente di fisica, è probabilmente quella tra "massa inerziale" e "massa gravitazionale". Una buona ragione della difficoltà nell'assorbire la distinzione è che, di fatto, tale distinzione non esiste: la massa inerziale e quella gravitazionale coincidono, e tutto sommato è diventata buona norma quella di tralasciare del tutto gli attributi e limitarsi a parlare di "massa". Ciò non di meno, il concetto di "massa" è curioso soprattutto perché uno dei pochi concetti fondamentali (in senso stretto, non derivati da altre grandezze) che non è puramente assiomatico, istintivo: i suoi confratelli spazio e tempo (per quanto assai subdoli anch'essi, non appena si prova a definirli con precisione e con gli occhi di un fisico del XXI secolo) hanno almeno una lettura immediata, istintiva già nelle teste dei bambini piccoli. La massa è più ambigua: innanzitutto per l'inevitabile confusione iniziale con il concetto di "peso". Il peso è una forza, e come tale una grandezza derivata e definita come "massa per accelerazione" ovvero come qualcosa che contiene al suo interno sia la massa, sia il tempo. Però un sasso "pesa", prima ancora che "essere massivo"; e spostarlo è faticoso perché è "pesante", non perché è dotato di grande massa.

Di solito, schiere di insegnanti devono necessariamente convincere legioni di studenti a fare un viaggio spaziale, almeno con la mente, per riuscire a spiegare la differenza tra massa e peso: si prende (mentalmente) un bel mattone da un chilo e lo si trasporta sulla Luna; si fa ricordare che – come ben dimostravano Armostrong, Aldrin e seguaci – sul nostro satellite le cose pesano molto meno, e voilà, guardate: il mattone è sempre lo stesso, ha sempre la stessa "quantità di materia", nessuno lo ha toccato, durante l'immaginario viaggio a bordo dell'Apollo 11: però ecco, quassù non pesa più un chilo, ma assai di meno: non raggiunge neppure i due etti. Chiaro adesso, fanciulli, che massa e peso sono cose diverse?

Anche pensando che il metodo didattico dia i suoi frutti (e certo li dà… un sacco di ragazzini che da piccoli confondevano massa e peso adesso sono brillantemente in grado di spiegare al colto e all'inclita perché il Bosone di Higgs sia così fondamentale nel Modello Standard, tirando in ballo proprio la massa), va riconosciuto che molti mal di pancia da "rifiuto della fisica" nascono probabilmente proprio da questa apparente pignoleria dei fisici nel voler rendere meno intuitive cose che invece sembrano del tutto istintive. Ma, in verità, la distinzione tra massa e peso è solo una pallida anticamera su una distinzione assai più sottile e sfuggente: appunto quella tra massa inerziale e massa gravitazionale.

A ben guardare, tutto inizia con le prime righe dei Principia di Newton: da una parte, con la fondamentale $F=ma$ stabilisce le fondamenta della meccanica: "ladies and gentlemen, la forza è proporzionale all'accelerazione (e non alla velocità, come la maggior parte di voi ignoranti medievali tende a credere) e naturalmente alla massa del corpo accelerato"; poco più avanti, si incoccia nella Legge di Gravitazione Universale dove ricompare la "F" (che stavolta rappresenta non una forza qualunque, come quella dei buoi che tirano un carretto, ma la grandiosa Forza di Gravità) e una coppia di "m", seppur mescolate e interagenti con una costante di gravitazione e l'inverso di un quadrato di una distanza. Newton distingueva la prima "m" dalla coppia che compariva nella seconda, leggendaria equazione?[5] Noi non lo sappiamo, ma certo è che la comunità dei fisici la domanda se l'è

[5] In tutta questa scenetta si immagina che i Principia Mathematica seguano notazioni ed esposizione simile a quanto riportato negli odierni manuali di liceo: non è per niente così, naturalmente…

posta, e se l'è posta con forza. Anche perché, a ben vedere, implica delle conseguenze che non sono ovvie e scontate.

Tanto per dire, tornando al bravo professore di fisica che ha mentalmente trasportato la sua classe sulla Luna per far comprendere agli studenti la differenza tra massa e peso, questi potrebbe trovarsi in serio imbarazzo nel comminare le punizioni ai discoli della classe. Se Mariuccio lasciasse cadere sul piede di Lorenzino il famoso mattone da un chilo, farebbe meno danni sulla Luna che sulla Terra; ma se Lorenzino rispondesse tirando orizzontalmente sulla faccia di Mariuccio il medesimo mattone, la differenza tra la smusata terrestre e quella lunare sarebbe del tutto trascurabile.

Nel primo caso, agisce la massa gravitazionale: nel secondo, la massa inerziale. Il fatto che i comportamenti sui corpi di Mariuccio e Lorenzino siano diversi a seconda che si prenda come teatro della rissa la Terra o la Luna mostra che sono "masse" diverse? Certo che no; l'abbiamo detto fin dall'inizio che sono coincidenti… mostra però che sono diverse concettualmente, e la cosa ha ambasciato a lungo gli scienziati. Il mattone che cade sul piede di Lorenzino ha una massa "m" che viene accelerata in maniera diversa sulla Terra e sulla Luna: diminuendo l'accelerazione di gravità, diminuisce la forza (peso) con cui il mattone si schianta sul piede di Lorenzino astronauta rispetto a quella che sentirebbe il Lorenzino terrestre. Il mattone che colpisce in faccia Mariuccio, invece, viaggerà orizzontalmente spinto dalla medesima forza muscolare impressa da Lorenzino, che ci aspettiamo sia grossomodo uguale sia sulla Terra sia sulla Luna, e quindi altrettanto paritetica sarà la frattura del setto nasale. Resta però almeno un aspetto sorprendente, con cui fare i conti, ed è verosimilmente un aspetto prevalentemente psicologico: il mattone "pesa" di meno sulla Luna, e l'esperienza quotidiana ci porta a pensare che un oggetto pesante tirato in faccia produca un certo grado di dolore. Sollevando il mattone sulla Luna, e sentendolo così insolitamente "leggero", si potrebbe essere portati a pensare che a tirarlo in faccia a qualcuno sia meno dannoso di quanto sarebbe sulla Terra, e invece si supporrebbe male. La massa non ha niente a che vedere col "peso", e facendo l'esperienza ipotetica di diverse situazioni gravitazionali si riuscirebbe verosimilmente a capire meglio la differenza concettuale tra massa inerziale e massa gravitazionale.

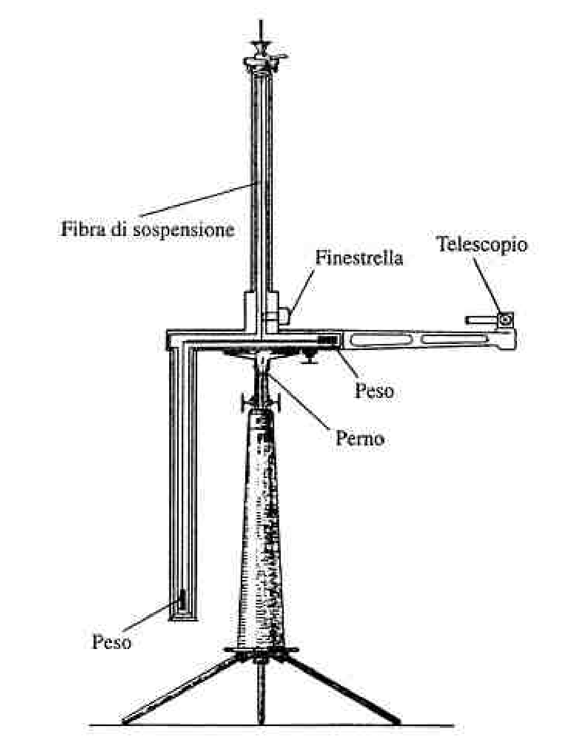
Differenza che, in termini di definizione, è tutto sommato semplice, come si è visto: la massa gravitazionale è quella che entra in gioco nelle interazioni gravitazionali; la massa inerziale è quella, per così dire, che si oppone testardamente a chi vuole modificare lo stato di quiete o di moto uniforme del corpo proprietario della massa medesima.

Differenza che però, ad un esame più approfondito, dovrebbe effettivamente stupire: per quale motivo la "caratteristica" delle interazioni gravitazionali dovrebbe coincidere con la "caratteristica" delle resistenze inerziali? Non ci sarebbe nulla di illogico nel presupporre che a regolamentare le due cose fossero delle caratteristiche diverse, anzi: quando si cominciò a teorizzare razionalmente sui fenomeni elettrici, fu del tutto naturale introdurre un nuovo concetto, quello di carica elettrica, per studiarli a dovere, e la carica è entrata di diritto tra le grandezze fisiche fondamentali. Quando si appurò che le "caratteristiche" fondamentali dell'elettricità, del magnetismo e della luce erano in ultima analisi coincidenti, si festeggiò a lungo la grandiosa unificazione concettuale, avvenuta tramite un mastodontico lavoro di teoria e sperimentazione: per contro, l'unificazione dei fenomeni gravitazionali e inerziali si è presentata fin dall'inizio, gratuita, e forse proprio per questo, sospetta.

Non c'è da stupirsi, pertanto, se i fisici ottocenteschi[6] si sono dedicati con grande impegno a misurare, misurare, misurare le "due masse" alla ricerca di eventuali differenze. In questa ricerca, Eötvös brilla come una stella di prima grandezza: inventa la "bilancia di torsione di Eötvös", un geniale strumento in grado di amplificare tramite la torsione di un filo l'eventuale differenza tra i valori delle masse inerziali e gravitazionali. Si tratta di uno strumento dalla precisione impressionante per l'epoca, e anche di difficile utilizzo: occorreva una abilità manuale sofisticata per ottenere la precisione che la bilancia poteva

[6] E non solo ottocenteschi: la caccia è ancora aperta, apertissima…

dare. Vennero effettuate diverse misure, a partire dal 1891, in diverse zone d'Ungheria[7]: l'equivalenza tra massa inerziale e gravitazionale fu verificata fino alla precisione di cinque parti su cento milioni[8].



5 *La bilancia di torsione Eötvös*

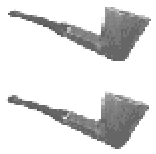
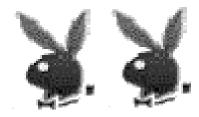
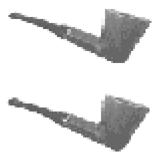
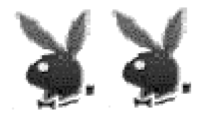
La vita di Lóránd prosegue senza scossoni, dopo la sua "misura" così accuratamente ottenuta. Nel 1885 fonda la Società Ungherese di Matematica; nel 1894, per pochi mesi, diventa Ministro della Pubblica Istruzione durante il governo di Sandor Wekerle. In questo breve periodo riesce a fondare il "Collegio Eötvös", ma non era egocentrico quanto si potrebbe credere: il nome dell'istituto è dedicato a suo padre, non a sé stesso. Del resto, non avrà bisogno di autocelebrarsi: l'Accademia delle Scienze ungherese lo eleggerà presidente nel 1889, e dopo la sua morte, che avvenne nel 1919, la Società di Matematica che aveva fondato prende il nome di "Società di Matematica e Fisica Eötvös Lóránd", mentre l'Università di Budapest dove aveva studiato cambia nome, passando dal precedente "Péter Pázmany" a "Università Lóránd Eötvös".

L'importanza del "Principio di Equivalenza", come i fisici chiamano la coincidenza tra massa inerziale e massa gravitazionale, è ben chiarita dal fatto che l'esperimento di Eötvös è uno dei pochi citati da Albert Einstein nell'esposizione della sua Teoria della Relatività, e dell'assunzione che il grande fisico tedesco fa ponendo il Principio di Equivalenza come uno dei fondamenti cruciali della sua teoria. O anche dal fatto che sono stati progettati almeno tre esperimenti da effettuarsi a bordo di satelliti artificiali per ripetere l'esperienza di Eötvös anche nello spazio, con lo scopo di raggiungere una certezza ancora più probante dell'equivalenza. O forse, più semplicemente, ricordando che le due grandi scoperte scientifiche degli ultimi anni, il Bosone di Higgs e le Onde Gravitazionali, hanno in comune entrambe il ruolo centrale giocato da quella grandezza, evidentissima e al tempo stesso sfuggente, che è la massa. Tra le montagne di Misurina e la sua splendida ossessione per la misura, Lóránd Eötvös ha giocato uno splendido ruolo per svelarne i misteri.

[7] La bilancia era utile anche per esplorazioni geofisiche.

[8] Un po' più precisamente: il risultato ha portato alla valutazione di un η pari a $5x10^{-8}$, dove η è un parametro che, ovviamente, è detto "parametro di Eötvös".

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Candele bidimensionali			
Un problema dal dentista			

2.1 Candele bidimensionali

I più *diversamente giovani* lettori di questa rivista probabilmente ricordano un vecchio problema, che riportiamo qui di seguito (no, non è lui, il problema: lo è stato, ma non lo è. Oh, insomma, avete capito):

> Avete sette candele (accese) in cerchio: ogni volta che cambiate stato a una candela, cambiano stato anche le due candele vicine. Come fate ad avere nel minor numero di "mosse" possibili tutte le candele spente?

Secondo noi (e anche secondo voi, a giudicare dal numero di soluzioni ricevute) era un problema molto bello, e Rudy è stato molto felice quando ha trovato una cosa "che gli somiglia" (ma gli somiglia talmente poco che... No, prima risolvete il problema e poi cercate la parte *generalizzazioni).*

Questa volta, avete una scacchiera "grossa" (diciamo 98x98, visto che il problema è stato inventato nel 1998), con i suoi quadrati come d'abitudine bianchi e neri alternati: per motivi di realizzazione, la consideriamo visualizzata sullo schermo di un PC.

Con il mouse[9], potete selezionale un rettangolo composto (da un numero intero) di caselle: quando siete certi della vostra selezione, potete confermare e tutte le caselle selezionate *invertono il colore*.

Dopo qualche esplorazione di questa meraviglia della scienza e della tecnica (che probabilmente i più sgamati di voi avranno già implementato in trenta secondi su un foglio di calcolo), vi ponete un interessante quesito.

Come posso trasformare, con il minimo numero di conferme, tutta la scacchiera in caselle dello stesso colore?

As usual, sin qui, il problema. Ma a quelle due anticaglie informatiche che sono Rudy e Doc, è venuto in mente uno dei primi *arcade* di successo, nel quale potevate *sforare* dallo schermo e finivate dall'altra parte (ci abbiamo messo un po' a capirlo, ma il modello *non* è una sfera: è un toro); se a vostra scacchiera è organizzata in questo modo, come fate?

[9] Mentre scriviamo queste note, l'inglese è appena diventata una lingua extracomunitaria. Ci riferiamo a *el raton* o a *le souris*, come dicono in posti più civili.

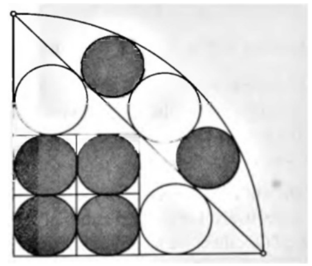
Giusto per dimostrarvi quanto poco abbiamo lavorato a questa espansione, sappiate che la prossima frase è il punto più lontano al quale siamo arrivati: *numero pari di righe e di colonne, chiaramente.*

Ci sarebbe anche la possibilità di partire da "colorazioni" diverse, ma la cosa ci pare poco interessante; forse, aumentando le dimensioni...

2.2 Un problema dal dentista

Con (adesso possiamo dirlo) un'eccezione, a noi i dentisti stanno antipatici.

Vi è piaciuto il Q&D della volta scorsa? Bene, questo è quasi al contrario, nel senso che spiegarlo è facilefacile, ma chi l'ha trovato (Rudy) pensa che risolverlo sia difficiledifficile: lo si spiega in una frase e una figura (quella qui di fianco: tra l'altro, è una copia dell'originale), ma a risolverlo "da noi" non ci pensiamo neanche.



6 *L'originale (quasi: copia di copia)*

Dimostrate che i tre cerchi bianchi hanno lo stesso raggio e che i sei cerchi neri hanno lo stesso raggio.

Finito.

Potevamo inventarci bislacchi aggiustamenti di bordolesi e borgognone, ma preferiamo metterla come segue.

Prendete un dentista, nato il 13 dicembre del 1908 e mancato il 16 febbraio del 1997.

Apritegli uno studio a Beverly Hills, e piazzate tra i suoi pazienti qualche *rock star* e svariati attori.

Fategli suonare (a livello semiprofessionale) pianoforte e chitarra.

Scultore.

Profondo conoscitore dell'esperanto.

Come se non bastasse, scopritore di un cerchio equivalente ai cerchi gemelli archimedei (quelli dell'Arbelos), con numero di Erdos pari a 1, curatore di una rubrica di problemi su un'importante rivista di matematica ricreativa americana.

No, non ce lo siamo inventato: si chiamava Leon Bankoff, e lo trovate a https://en.wikipedia.org/wiki/Leon_Bankoff. Questo problema, l'ha inventato lui. E adesso, dovrebbe esservi più chiaro il motivo per il quale Mike Jagger si ritrova quella dentatura.

3. Bungee Jumpers

Dimostrate che se una linea retta biseca sia l'area sia il perimetro di un triangolo, allora passa per il suo incentro.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Luglio. Non riesco mai a cominciare così senza pensare "col bene che ti voglio…", incredibile, come i nostri neuroni collegano cose indipendentemente dai nostri desideri: i miei insistono su canzonette, ma perdono pezzi su molto altro ben più importante. Un po' l'età, o forse un po' troppo sole, in questi giorni. La vostra redattrice delle S&N è appena tornata da qualche giorno al mare, così come il Capo, ma contrariamente a lui non ha preparato nulla durante il periodo, così, come al solito, il numero di luglio sarà ben in ritardo e – al solito – scarso dal punto di vista dei miei contributi. Ma dopotutto l'estate è tempo di riposo anche per i nostri lettori.

Ve lo dico già da ora: da come siamo organizzati ultimamente, con i rispettivi lavori che ci mangiano vivi e tutto il resto, i numeri di RM sono predestinati ad arrivare sempre un po' in ritardo. Ma voi ci volete bene, vero? È luglio…

4.1 [208]

4.1.1 Un problema di quelli "belli" [2]

Il mese scorso è arrivata una sola soluzione a questo problema, da parte di Valter. Vediamo di che cosa si trattava:

> *Un poligono è iscritto in un cerchio ed è triangolato da un insieme di sue diagonali non intersecantesi. In ognuno dei triangoli risultanti è tracciato il cerchio inscritto. Mostrate che la somma dei raggi dei cerchi inscritti è indipendente dalla triangolazione.*

Anche se era bellissimo, non abbiamo ricevuto altre soluzioni, solo una critica, da parte di ***Alberto R.***:

> La soluzione di ***Valter*** al secondo problema "di quelli belli" di RM 108 non mi convince.
>
> L'area di un triangolo è uguale al semiperimetro per il raggio del cerchio inscritto. Invece l'area del triangolo di Valter sarebbe uguale al raggio del cerchio inscritto per la somma di due lati (che è sempre maggiore del semiperimetro).
>
> Naturalmente è possibile che io non abbia ben compreso il testo.

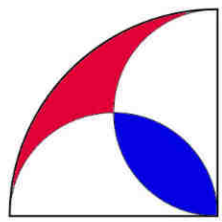
Beh, al solito, i testi del Capo non sono chiarissimi. Però è un peccato, per un problema tanto bello, non ricevere altre soluzioni… Provateci! Andiamo avanti.

4.2 [209]

4.2.1 Quick&Dirty

Non è nostra abitudine pubblicare le soluzioni del Q&D, ma questa volta vi abbiamo chiesto esplicitamente se avevate soluzioni alternative. Il problema ce lo aveva proposto ***Andrea***, che a sua volta lo aveva letto come problema del pi-day: la loro soluzione si trova in rete (https://www.theguardian.com/science/2016/mar/14/did-you-solve-it-the-pi-day-puzzle-that-will-spin-you-in-circles), quella che avevamo trovato noi la trovate nell'apposito capitolo. E tutte quelle che abbiamo ricevuto sono qui sotto.

Cominciamo con ***Alberto R.***:

> Indichiamo con Q l'area del Quarto di cerchio grande, con S l'area di un Semicerchio piccolo, con R l'area Rossa e con B quella Blu. Risulta:
>
> 
>
> $$Q = 2S$$
>
> poiché raddoppiare il raggio quadruplica l'area e prendere un quarto di cerchio anziché un semicerchio la dimezza.
>
> D'altra parte Q può essere ottenuto come somma delle figure che lo compongono detraendo le sovrapposizioni, cioè
>
> $$Q = S + S - B + R$$
>
> Sottraendo membro a membro si ottiene $B = R$.

Chiara e veloce, ma anche quella di ***Valter***, però fa qualche calcolo in più:

> - B area blu
> - R area rossa
> - r raggio delle due metà di cerchio piccolo
>
> Ho 1/4 di cerchio grande che ha raggio doppio delle 2 metà di cerchio piccolo che si intersecano in B. Se spezzo B longitudinalmente e appoggio i due pezzi sotto R rimane in bianco un triangolo rettangolo isoscele. I due cateti di tale triangolo, che considero come sua base e altezza, sono lunghi $2r$. Area triangolo = $2r^2$ quindi:
>
> $\pi r^2 - 2B = 2 r^2$ –> due metà cerchio piccolo meno due volte B = area triangolo
>
> $\pi r^2 - B - R = 2 r^2$ –> 1/4 cerchio grande – $B - R$ = area triangolo.
>
> Quindi, se non ho sbagliato qualcosa, $B = R$.

Bella anche quella di ***Nicola***, che ricalca quella online:

1) L'area di una figura cresce come il quadrato del lato/raggio

2) Consideriamo la figura completa ribaltando sui due assi il quadrante vediamo che i quattro cerchi (per la 1) hanno area pari al cerchio maggiore quindi (per simmetria) l'area dell'intersezione dei cerchi è pari all'area mancante compresa tra i quattro cerchi ed il circoscrivente.

Quindi il rapporto è pari a 1.

Forse non ce la facciamo, a riportarle tutte, ma almeno quelle con pochi calcoli… la prossima è anche di un nuovo lettore:

Mi chiamo ***Andrea***, sono un ingegnere prestato alla matematica (o viceversa), vivo a Senigallia (AN) e sono un nuovo lettore! (…) ho preso spunto dalla soluzione in rima di Alberto R (mitico!) per il problema dei due tizi e dei numeri successivi, ma essendo la poesia un'arte lontana anni luce da me, la mia la definirei più una filastrocca:

Se potessi della loro forma disporre

coi due semicerchi il quarto potrei coprire

ma dovendoli in parte sovrapporre

ciò che il blu fa sparire

al rosso tocca restituire.

Non ci credete?

A raggio e pi greco ricorrete

una bella equazione scriverete

e presto rosso uguale blu otterrete

Bravo ***Andrea*** e benvenuto. Decidete voi qual è la migliore? Secondo noi tutte.

4.2.2 Almeno con la fantasia…

Il mese scorso è arrivata una sola soluzione a questo problema, da parte di Valter. Vediamo di che cosa si trattava:

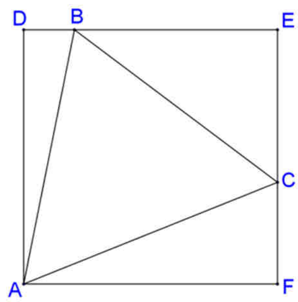
Dato un triangolo equilatero, costruiamo un rettangolo in modo tale che il triangolo abbia un vertice in un vertice del rettangolo e gli altri due vertici su altri due lati. A meno di casi particolari, si ottengono fuori dal triangolo tre triangoli rettangoli, uno più grande e due più piccoli. Determinate quale superficie è maggiore: la somma dei due triangoli piccoli o il triangolo grande?

Come al solito, la prima soluzione è di ***Alberto R.***:

Giacinti e tulipani in ugual numero.

Angolo CAF = x angolo DAB = $\pi/6 - x$ angolo BCE = $\pi/6 + x$.

Quindi, usando il lato del triangolo equilatero come unità di misura delle lunghezze,



A1 = doppia area CAF = sen x cos x = 1/2 sen $2x$

A2 = doppia area DAB = sen $(\pi/6 - x)$ cos $(\pi/6 - x)$ = 1/2 sen $(\pi/3 - 2x)$

A3 = doppia area BCE = sen $(\pi/6 + x)$ cos $(\pi/6 + x)$ = 1/2 sen $(\pi/3 + 2x)$

2(A1 + A2 – A3) = sen $2x$ + sen $(\pi/3 - 2x)$ – sen $(\pi/3 + 2x)$

Applicando le formule di addizione/sottrazione e tenuto conto che cos $\pi/3 = 1/2$

2(A1 + A2 – A3) = sen $2x$ + sen $\pi/3$ cos $2x$ – cos $\pi/3$ sen$2x$ – sen $\pi/3$ cos $2x$ –

– cos $\pi/3$ sen$2x$ = 0

Dunque A1 + A2 = A3. QED.

La prossima soluzione, veramente interessante, è di ***Valter***, mi scuso in anticipo se non sono riuscita a rendere le indentazioni:

Provo a buttare giù: due idee sul problema, un tentativo di risolverlo e un abbozzo di tentativo. Chissà che ci sia qualcosa che abbia un qualche senso e che possa servire: vedete Voi cosa farne. Come premessa, omettendo i dettagli, osservo che:

- le configurazioni di triangoli piccoli/grande stanno in un cerchio di diametro = lato triangolo equilatero (essendo tutti triangoli rettangoli con stessa ipotenusa = lato triangolo equilatero)
- la somma dei 2 angoli sul vertice del triangolo equilatero dei triangoli piccoli dà sempre 30 gradi (90 gradi del rettangolo meno 60 del triangolo equilatero).

Noto due casi in cui la somma delle aree dei due triangoli piccoli è uguale a quella del più grande (per ognuno dei casi fornisco dei commenti che dovrebbero servire a corroborare l'affermazione):

1 – quando uno dei due triangoli piccoli è ridotto a un segmento con area, quindi, zero:

- un lato del triangolo equilatero coincide con uno del rettangolo
- il vertice opposto a tale lato del triangolo equilatero va al centro del lato opposto del rettangolo

2 – quando i due triangoli piccoli sono uguali:

- il rettangolo diventa un quadrato (i suoi lati che partono dal vertice del triangolo equilatero hanno la stessa lunghezza)
- il triangolo grande è mezzo quadrato essendo sia rettangolo che isoscele (con l'ipotenusa, che coincide con un lato del triangolo equilatero, come diagonale)
- il cateto "lungo" dei triangoli piccoli è il lato del rettangolo diventato quadrato
- il cateto "corto" dei triangoli piccoli è uguale a quello "lungo" meno il cateto del triangolo grande
- dato il lato del triangolo equilatero con equazioni di secondo grado si ottengono:
    - i due cateti uguali del triangolo grande (lato al quadrato del triangolo equilatero = due volte il cateto al quadrato)
    - i due cateti dei triangoli piccoli uguali (lato al quadrato del triangolo equilatero = somma dei due cateti al quadrato calcolati come sopra)
- calcolando quindi le aree si verifica quanto richiesto (fornisco un esempio:
    - lato triangolo equilatero = 2
    - cateti triangolo grande = $2^{1/2}$
    - cateti triangoli piccoli = $(1 + 3^{1/2}) / 2^{1/2}$, $(1 - 3^{1/2}) / 2^{1/2}$ (il primo cateto è quello "lungo" che parte da un vertice del triangolo equilatero)
    - area triangolo grande = 1
    - aree triangoli piccoli = 1/2)

Nei 2 casi precedenti si nota quindi che:

- la somma delle altezze sull'ipotenusa dei triangoli piccoli coincide con l'altezza di quello grande (la base è sempre il lato del triangolo grande e nel primo caso chiaramente una delle altezze è zero)
- tutti le altre coppie di triangoli piccoli hanno un coppia simmetrica con i due triangoli invertiti (al crescere dell'angolo sul vertice del triangolo equilatero di uno decresce quello dell'altro e viceversa).
- Ipotizzo che la somma delle 2 aree dei triangoli piccoli coincide sempre con l'area del triangolo grande. Provo a dimostrarlo:
- senza perdere in generalità (almeno penso) ipotizzo che il triangolo equilatero abbia lato lungo 1

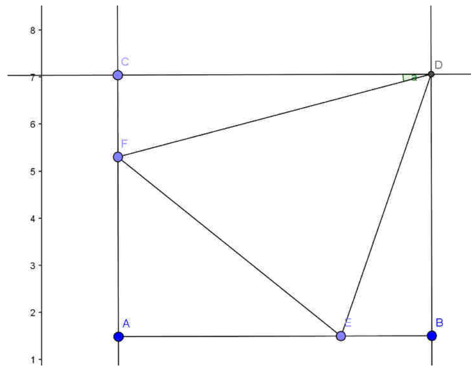
- in questo modo la somma delle aree dei 2 triangoli piccoli sarebbe sin(15°) cos(15°) (15° è l'angolo del vertice che hanno in comune con quello del triangolo equilatero)
- il triangolo grande avrebbe area (1/2) sin(45°) cos(45°)
- per ottenere una combinazione generica dei tre triangoli si modificano di x° gli angoli:
    - uno dei triangoli piccoli ha l'angolo al vertice del triangolo equilatero che aumenta di x°
    - l'altro triangolo piccolo ha l'angolo che diminuisce di x°
    - il triangolo grande ha uno degli angoli che aumenta e l'altro che diminuisce di x°
- le aree del triangolo grande e la somma dei due piccoli diventano in questi casi rispettivamente:
    - $\sin(45° + x°)\cos(45° + x°)$ (o per simmetria: $\sin(45° - x°)\cos(45° - x°)$)
    - $(\sin(15° + x°)\cos(15° + x°)) + (\sin(15° - x°)\cos(15° - x°))$
- risolvo utilizzando le formule di identità per la somma e differenza di angoli (data l'identità di aree iniziale dovrebbe ottenersi una analoga identità nel caso generico)
- non ho voglia di proporre tutti i passaggi …)

Termino con un tentativo di dimostrazione alternativa che non sono riuscito però a portare a termine (se per caso venisse presa in considerazione e qualcuno volesse dire qualcosa a tal proposito …):

- assumo per assurdo che l'ipotesi sia falsa
- mi occupo del caso in cui la somma delle aree dei triangoli piccoli sia maggiore dell'area di quello grande (per simmetria dovrebbe valere anche per il caso in cui è minore)
- considero il grafico della funzione che ha (dovrebbe essere una funzione continua):
    - sull'asse x la lunghezza del cateto "corto" di uno dei triangoli piccoli della coppia (come range di lunghezze considero i due casi esaminati prima: da 0 al caso in cui sono uguali)
    - sull'asse y la differenza fra la somma delle aree delle triangoli piccoli e l'area del triangolo grande
- se vi è una coppia di triangoli piccoli per cui la somma è maggiore allora:
    - per continuità vi è un coppia per cui la differenza fra tale somma e l'area del triangolo grande è massima
    - da tale coppia la differenza dovrà decrescere (ai due casi estremi della funzione descritti sopra tale differenza è zero)
    - per simmetria nella coppia di triangoli dovrà esserci un altro punto di massimo della differenza (è quello in cui il secondo dei triangoli piccoli coincide con il primo del caso in esame)
    - dovrà quindi esserci un punto di minimo fra questi due punti di massimo
- ai due estremi la funzione ha un punto di massimo o di minimo
    - per simmetria gli estremi o sono ambedue punti di massimo o di minimo
    - per simmetria il punto intermedio fra i due estremi deve essere o un punto di massimo o di minimo
- qui mi fermo ma ho la sensazione che:

    - tali punti di minimo e massimo debbano moltiplicarsi per simmetria
    - tra punti di minimo e di massimo si debba passare per un punto in cui la differenza e zero (quindi alla fine tutti i punti hanno differenza di aree uguale a zero)
- non ho le capacità per analizzare funzioni di questo tipo e capire se sto vaneggiando …

Beh, i vaneggiamenti tendenzialmente ci piacciono. Per completezza aggiungiamo che ***Valter*** ci ha anche mandato una correzione riguardo le aree che devono essere divise per due, ma non abbiamo osato applicarla che già l'indentazione ci è sembrata problematica. Concludiamo con la bella soluzione di ***NickBe***:



> Guardando la figura, chiamiamo A l'area di AEF, B quella di BED e C quella di CFD. Sia a l'angolo compreso tra FD e DC e sia l la lunghezza del lato del triangolo: l=FE=FD=DE.
>
> Siccome gli angoli interni di un triangolo equilatero valgono 60°, l'angolo tra EF ed FA vale 30° + a e quello tra ED e DB vale 30° – a. Dunque:
>
> $$C=l^2\, sin(a)\, cos(a)/2$$
>
> $$B = l^2\, sin(30°-a)\, cos(30°-a)/2$$
>
> $$A = l^2\, sin(30°+a)\, cos(30°+a)/2.$$
>
> Usando le formule trigonometriche di somma e differenza, si ottiene che, per ogni valore di a,
>
> $$C + B = A.$$
>
> Dunque la somma delle due aree piccole è sempre uguale a quella grande.

Questo è quanto. Siamo tutti d'accordo, incredibile. Andiamo al secondo problema.

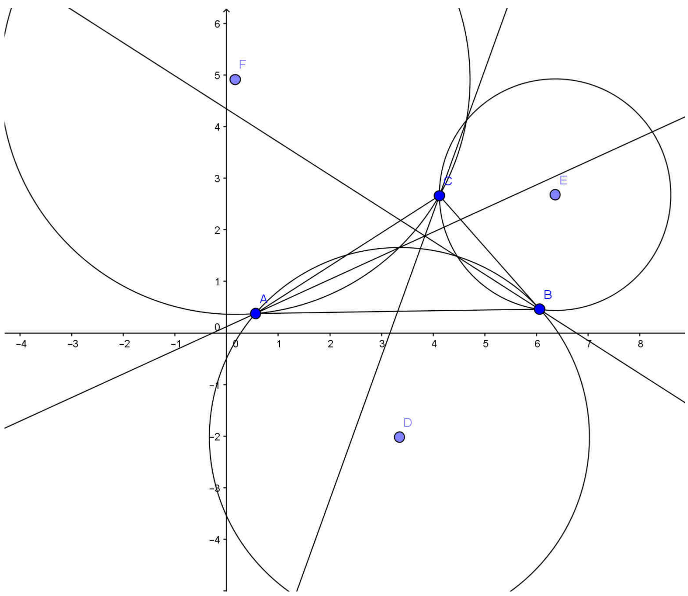
4.2.3 ...e leggere i PM?

Poco affetto per i PM del Capo, almeno secondo lui, e poco affetto anche per i problemi ad essi correlati, come questo:

> *Partiamo da un triangolo ABC qualsiasi e costruiamo i tre triangoli isosceli arbitrari aventi come basi i lati del triangolo originale ABD, ACF, CBE. Potete ora costruire il triangolo DEF e tracciare per A, B, C le perpendicolari rispettivamente ai lati DF, DE, EF: dimostrate che le tre perpendicolari sono concorrenti.*

Come si diceva, il problema è stato bellamente ignorato dai nostri lettori più attivi. Per fortuna alla fine ***NickBe*** ci ha inviato la sua soluzione:

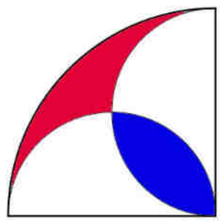
> Geogebrando un po' ho costruito la figura sotto.
>
> Costruiamo il cerchio d con centro in D e passante per A. Tale cerchio passa anche per B perché DA=DB per costruzione. Costruiamo analogamente i cerchi e ed f con centri in E ed F e passanti per C,B e C,A rispettivamente. L'asse radicale di d ed e è esattamente la retta perpendicolare ad ED e passante per B. Analogamente avremo che gli assi radicali di e ed f e di f e d coincidono con le altre due rette che ci interessano. Gli assi radicali di tre cerchi non concentrici sono però concorrenti in un punto. Infatti l'asse radicale di due cerchi è il luogo dei punti del piano che hanno la stessa potenza rispetto ai due cerchi. Se consideriamo tre cerchi non concentrici, due dei tre assi radicali si intersecano e per il punto di intersezione deve passare pure il terzo asse radicale (transitiva dell'uguaglianza applicata alle potenze dei punti rispetto ai cerchi).



Non abbiamo ricevuto altro, per cui siamo qui a sperare che siate tutti sulla spiaggia a tracciare cerchi e rette, e a settembre, sì, allora arriveranno tante soluzioni. E aspettiamo ovviamente le soluzioni del Summer Contest per la collezione di ottobre. Grazie a tutti e alla prossima!

5. Quick & Dirty

Con riferimento alla figura qui a fianco, calcolate il rapporto tra l'area rossa e l'area blu.



Se r è il raggio del quadrante, la sua area è $\pi r^2/4$.

Quindi, l'area di uno dei due semicerchi è $\pi(r/2)^2/2 = \pi r^2/8$.

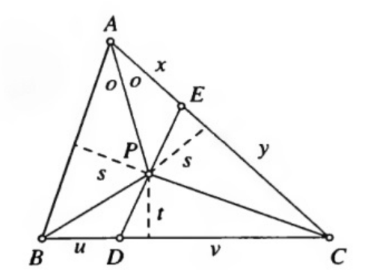
Quindi l'area dei due semicerchi (contando due volte l'area blu) è $2\pi r^2/8 = \pi r^2/4$ ossia è uguale all'area del quadrante.

Ma, avendo calcolato due volte l'area blu, questo significa che l'area blu e l'area rossa sono uguali.

Quello che apprezziamo, di questa soluzione, è che ci lascia nella più beata ignoranza di quanto valgano le aree...

6. Pagina 46

Supponiamo che, come in figura, la linea che biseca il perimetro e l'area incroci BC in D e AC in E; inoltre, supponiamo incroci la bisettrice dell'angolo in A in P.



7 *Ipotesi.*

In questo caso, P si trova alla stessa distanza (sia essa s) da AB e da AC, e ad una qualche distanza t da BC.

Supponiamo inoltre che D e E dividano rispettivamente BC e AC nelle parti u, v e x, y, come indicato in figura.

Dal fatto che DE per definizione biseca l'area del triangolo, otteniamo che deve essere:

$$½\ (xs + \mathrm{AB}\ s + ut) = ½\ (ys + vt).$$

Mentre, dal fatto che biseca il perimetro, abbiamo che:

$$x + \mathrm{AB} + v = y + v\ .$$

Da quest'ultima espressione, si ricava che $x + \mathrm{AB} = y + v - u$; raddoppiando entrambi i membri della prima espressione e sostituendo quanto appena ottenuto, abbiamo:

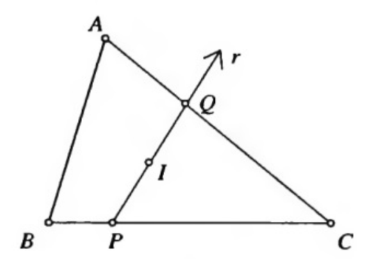
$$(y + v - u)s + ut = ys + vt$$

e

$$(v - u)s = (v - u)t.$$

Ora, se *D* ***non è il punto medio*** di *BC*, allora v – u ≠ 0, e quindi deve essere $s = t$, e quindi *P* deve essere l'incentro in quanto si trova alla stessa distanza dai tre lati.

Se invece *D* ***è il punto medio*** di *BC*, visto che una mediana biseca l'area di un triangolo, allora *DE* deve essere la mediana per *A*, implicando che *E* e *A* coincidano. Ma siccome *DE* biseca anche il perimetro, questo implica che *AB* e *AC* siano uguali, e quindi che il triangolo sia isoscele: in questo caso, la mediana per *A* coincide con la bisettrice di *A*, e quindi passa per l'incentro.



8 *Esistenza della bisettrice del perimetro*

A margine, notiamo che l'esistenza di una linea in grado di bisecare simultaneamente area e perimetro non è così ovvia: chiudiamo quindi fornendo una dimostrazione di questo fatto.

Sia *P* un punto del lato *BC* del triangolo *AC* (come in figura a fianco), e sia *r* la retta orientata da *P* attraverso l'incentro *I* del triangolo. Definiamo la funzione *f*(*P*) come la differenza della parte sinistra rispetto alla parte destra rispetto alla retta data del perimetro, ossia (con qualche libertà di notazione) come PBAQ – PCQ, in cui non consideriamo la "chiusura" dei poligoni data dal segmento *PQ*.

Non è difficile vedere che la funzione appena definita è una funzione continua (piccole variazioni del punto *P* implicano variazioni del punto *Q* dello stesso ordine). Quindi, se *P* si sposta sul perimetro del triangolo sino a coincidere con *Q*, considerato che i due "semiperimetri" sono da considerarsi orientati, avremo $f(P) = -f(Q)$. Ma a questo punto, per il teorema di Weierstrass, deve esistere un punto *T* tra *P* e *Q* per il quale sia $f(T) = 0$ e, siccome la nostra retta orientata oltre che per *T* passa per *I*, abbiamo che *TI* biseca il *perimetro* del triangolo.

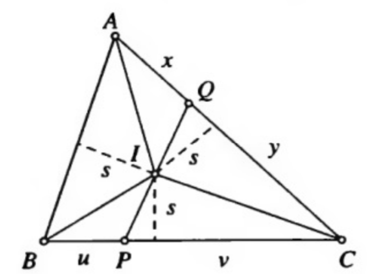
Con riferimento alla figura a fianco, supponiamo ora che *PIQ* bisechi il perimetro, ossia che si abbia:

$$x + \mathrm{AB} + u = y + v.$$

Essendo l'incentro alla medesima distanza *s* da ogni lato, abbiamo che deve essere:

$$\tfrac{1}{2}\, s\, (x + \mathrm{AB} + u) = \tfrac{1}{2}\, s\, (y + v),$$

ma questa funzione non significa altro che sostenere che *PQ* biseca l'area del triangolo *ABC*, da cui segue la tesi.



9 *Esistenza della bisettrice dell'area*

Si noti che questa dimostrazione di esistenza può facilmente essere invertita, definendo la funzione come differenza delle due aree e facendone seguire l'uguaglianza dei due "semiperimetri".

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Attacco all'alba (ma anche no)

In realtà avevamo un'altra opzione per il titolo ma anche se più legato all'incipit, partire con "Si è rotta la macchinetta" ci sembrava poco serio e scarsamente legato al corpus dell'articolo.

La connessione è il *Cloud Computing*. Ossia quella cosa consistente, come ha detto un bello spirito, nel "fare esattamente lo stesso lavoro di prima, ma sul computer di un altro".

Nel Cloud Computing, è fondamentale lo scambio di informazioni tra i vari elementi del sistema e un qualche modo per verificare l'affidabilità degli altri elementi coinvolti; dobbiamo, in sostanza, essere in grado di accorgerci se una qualche macchina nella nuvoletta sta dicendo solenni asinate (e quindi ignorarla, spegnerla, o cercare un'altra fonte di dati) o se è affidabile (e quindi seguire docilmente tutti i messaggi che riceviamo prendendoli per oro colato).

I matematici, quando si sono trovati a far di conto con questi concetti, hanno immediatamente cercato un modello più prosaico e aderente alla realtà di tutti i giorni e i lavori in questo campo sono noti come il ***Problema dei Generali Bizantini***.

Infatti, il contorno è una cosa di questo genere: alcune divisioni dell'esercito bizantino stanno assediando una città, e ogni divisione è comandata da un generale, e i generali possono comunicare tra loro solo attraverso messaggeri. Dopo aver osservato e studiato la città assediata, devono decidere un piano comune di azione; il guaio però è che alcuni dei generali potrebbero essere dei traditori che intendono impedire ai generali leali di raggiungere un piano comune; quello che si chiede è un algoritmo che permetta di raggiungere due obiettivi:

1. Tutti i generali leali concordano sul piano d'azione
2. Un piccolo gruppo di generali traditori non possono costringere i generali leali ad un piano cattivo

In pratica, la condizione (1) significa che i generali leali faranno sempre quello che il piano dice loro di fare, mentre i traditori faranno quel che pare a loro; la condizione (2) è più difficile da formalizzare, in quanto dovremmo definire il concetto di "piano cattivo": una scappatoia è quella di considerare come i generali raggiungono la loro decisione: ognuno di loro osserva il nemico e comunica la propria decisione a tutti gli altri; ognuno di loro, poi, in funzione delle decisioni $v_1, v_2, \ldots, v_n$ di tutti (che ora conosce), applica un qualche algoritmo per decidere il piano definitivo; quindi, la condizione (1) è soddisfatta se l'algoritmo è lo stesso per tutti, mentre la condizione (2) è soddisfatta se l'algoritmo è robusto (ad esempio, se le opzioni sono solo "attacco" o "ritirata", si potrebbe utilizzare un metodo a maggioranza[10]).

E qui, si comincia con le cose che *non sappiamo* (non solo noi, anche chi ci lavora da tempo). Questo metodo funziona, ma *ne esistono altri*? Infatti, a ben vedere, pone una richiesta piuttosto stringente: i generali devono avere a disposizione *tutti lo stesso vettore delle decisioni* : $v_1, v_2, \ldots, v_n$ data la presenza dei traditori (che potrebbero trasmettere attraverso i messaggeri decisioni diverse a generali diversi), non necessariamente tutti avranno le stesse informazioni. Quindi, di solito si pone una condizione ulteriore per garantire la soddisfazione della condizione (1):

3. Ogni generale leale deve ricevere lo stesso vettore $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Questa condizione implica che non necessariamente un generale utilizzi il valore v_i ottenuto direttamente dall'i-esimo generale, in quanto se i fosse un traditore potrebbe

[10] Notare che questo algoritmo è molto robusto: romperlo richiederebbe che i traditori siano la maggioranza, ma in questo caso la decisione "giusta" da prendere sarebbe la loro... Insomma, qui si finisce nei bizantinismi della politica piuttosto facilmente, da cui il nome.

aver inviato a generali diversi messaggi diversi: questo, ci porta a generare una forma più "stretta" dell'utilizzo del messaggio:

4. Se l'i-esimo generale è leale, allora il valore che egli invia verrà utilizzato da ogni altro generale leale come valore v_i.

La cosa, di solito, si semplifica come:

5. Due qualsiasi generali leali utilizzano lo stesso valore v_i.

Si noti come sinora ci si sia limitati a lavorare sul messaggio inviato da un singolo generale, l'i-esimo, che viene ricevuto dagli altri generali: quindi, possiamo modificare il problema trasformandolo in quello di un generale che deve mandare i suoi ordini a $n - 1$ luogotenenti in modo tale che siano soddisfatte le:

***Condizione di consistenza interattiva* 1**: Tutti i luogotenenti leali ricevono lo stesso ordine.

***Condizione di consistenza interattiva* 2**: Se il generale è leale, tutti i luogotenenti leali obbediscono al messaggio ricevuto.

Quindi, per risolvere il problema originale, il generale manda il suo valore come se fosse un ordine ai suoi luogotenenti, nella forma "Usate v_i come mio valore di decisione". Sembra di aver fatto poca strada, vero? Beh, forse perché la situazione è tutt'altro che semplice: supponiamo i messaggi siano trasmessi oralmente, e che si sia in presenza di un comandante (**C**) e due luogotenenti (**L1** e **L2**): affrontiamo un paio di scenari.

***Scenario* 1**: L2 è un traditore. In questo caso, C invia il messaggio "Attacco" a L1 e L2; L2 invia a L1 il messaggio "C ha detto di ritirarsi".

***Scenario* 2**: C è un traditore. In questo caso, C invia il messaggio "Attacco" a L1 e "Ritirata" a L2; L2 invia a L1 il messaggio "C ha detto di ritirarsi".

Insomma, in entrambi i casi L1 riceve due messaggi contradditori, che gli permettono di capire che da qualche parte c'è un traditore ma non gli permettono di individuare quale sia: in entrambi i casi, obbedirà all'ordine del comandante. Non solo, ma nel secondo scenario L1 riceve il messaggio "Attacco" e L2 il messaggio "Ritirata", e questo viola la Condizione di Consistenza Interattiva 1. Quindi, due leali in presenza di un traditore non potranno mai prendere decisioni con messaggi orali. Sulla stessa linea (anche se con grossi *caveat*: l'uso di ragionamenti non rigorosi qui è pericolosissimo) si dimostra che se tra *meno di* $3m + 1$ generali vi sono m traditori, la decisione diventa impossibile.

Se ci avete seguito attentamente, vi sarete accorti che abbiamo stressato particolarmente il concetto di messaggi *orali*. Il concetto può essere formalizzato attraverso alcune assunzioni:

1. Ogni messaggio inviato è ricevuto nella stessa forma.
2. Il ricevente sa chi ha inviato il messaggio.
3. L'assenza di un messaggio viene rilevata.

Quindi, un traditore non può bloccare un messaggero, non può mandare messaggi falsificati e non può impedire una decisione semplicemente non inviando un messaggio: per implementare i casi estremi del punto (3), supponiamo che l'assenza di messaggio sia sempre interpretata come "ritirata".

Ci serve anche un altro concetto, la funzione *Maggioranza*: questa rappresenta un metodo per ottenere un valore singolo dai vari v_i ricevuti (quando il valore "ritirata" se non ricevo il messaggio). Due scelte piuttosto naturali sono la maggioranza dei valori ottenuti (nel caso di due valori possibili) o la loro mediana (nel caso di valori comunque ordinabili, ad esempio l'ora dell'attacco), ma potete inventarvi il metodo che preferite.

Un metodo piuttosto ragionevole utilizza l'algoritmo MESSAGGIO_ORALE, definito nei due casi come segue (attenti che è ricorsivo):

MESSAGGIO_ORALE(0)

1. Il comandante manda il proprio valore a tutti i luogotenenti
2. Ogni luogotenente utilizza il valore ricevuto dal comandante o il valore "Ritirata" se non riceve il messaggio.

MESSAGGIO_ORALE(m), m>0

1. Il comandante manda il proprio valore a tutti i luogotenenti
2. Per ogni i, sia v_i il valore che il luogotenente i riceve dal proprio comandante, o "Ritirata" se non riceve il messaggio. Il luogotenente i agisce allora come comandante e applica MESSAGGIO_ORALE(m–1) ai restanti n–2 luogotenenti.
3. Per ogni i con $i \neq j$, sia v_j il valore che il luogotenente i riceve dal luogotenente j al passo (2) dall'applicazione dell'algoritmo MESSAGGIO_ORALE(m–1) o "Ritirata" se non riceve nessun messaggio; a questo punto, il luogotenente i calcola il valore "Maggioranza" dei messaggi v_1, v_2, …, v_{n-1}.

Cerchiamo di capire come funziona in un caso semplice, ad esempio m=1 e n=4: un comandante C e i luogotenenti L1, L2, L3, con quest'ultimo traditore. Focalizziamoci sul comportamento di L2.

Al primo passo di MESSAGGIO_ORALE(1) C invia il messaggio v a L1, L2, L3.

Al secondo passo, L1 (leale) manda v a L2 utilizzando MESSAGGIO_ORALE(0), mentre L3 (traditore) manda a L2 un qualche valore x; a questo punto, L2 calcola Maggioranza(v, v, x) e ottiene il corretto valore v.

Il sistema (anche se più complicato) funziona anche se C è il traditore e invia a L1, L2, L3 tre messaggi diversi x, y, z: attraverso lo scambio interno, visto che sono tutti e tre leali, applicheranno comunque la funzione Maggioranza(x, y, z) ottenendo tutti e tre lo stesso valore.

Si dimostra inoltre (ma non lo facciamo) che sussiste un interessante teorema:

> Per qualsiasi m, MESSAGGIO_ORALE(m) soddisfa le Condizioni di Interazione Consistente 1 e 2 se ci sono più di 3m generali e al più m traditori.

In tutto quanto detto, abbiamo sottinteso l'impossibilità di falsificare i messaggi; abbastanza stranamente[11], questa condizione può essere indebolita. Attenti alla parola in corsivo nell'assunzione aggiuntiva seguente:

4. La firma di un generale *leale* non può essere falsificata, e qualsiasi alterazione del suo messaggio può essere rilevata e chiunque può verificare la correttezza della firma.

"È 'ovvio' che non ci interessi sapere se è stata falsificata la firma di un traditore..." E infatti, come dicevamo, questo è uno degli inciampi in questo campo in cui il ragionamento non formale porta a conclusioni errate. Tra l'altro, questo fatto potrebbe tradursi in un *vantaggio* per i traditori, permettendo loro di concordare risposte.

Qui, il trucchetto consiste nel ricevere un ordine da qualcuno, aggiungere la propria firma, e passarlo agli altri: in questo modo, chiunque può verificare l'origine dell'ordine, lo stesso ordine arriva da più punti e se due ordini sono diversi allora lungo quella catena c'è un traditore.

Sembra logico, vero? Beh, se non fate attenzione, in alcune condizioni potreste ricevere comunque un ordine sbagliato, quindi è stata posta molta attenzione a formalizzare l'algoritmo.

Per prima cosa, ci serve un algoritmo di "Scelta": definiamolo in modo semplice: Se V contiene un elemento v, allora Scelta(V)=v; se V non contiene elementi, allora Scelta(V)=Ritirata.

Adesso, veniamo all'algoritmo, con la notazione che le cose separate da due punti sono le firme.

MESSAGGIO_FIRMATO(m)

Sia V = insieme vuoto.

1. Il comandante firma e invia il messaggio a ogni luogotenente.
2. Per ogni i:

[11] Questo è uno dei casi in cui "ovvio" è parola molto pericolosa, e quindi preferiamo "stranamente".

1. Se il luogotenente i riceve un messaggio nella forma v:0 dal comandante e non ha ancora ricevuto ordini, allora:
    i. Pone $V_i = v$;
    ii. Manda il messaggio v:0:i a ogni altro luogotenente
2. Se il luogotenente i riceve un messaggio nella forma v:0:j_1:…:j_k e v non è ancora in V, allora:
    i. Aggiunge v a V_i
    ii. Se $k<m$, allora manda il messaggio v:0:j_1:…:j_k:ia tutti i luogotenenti che non sono in j_1:…:j_k .
3. Per ogni i: quando il luogotenente i non riceve più messaggi, ubbidisce all'ordine Scelta(V_i).

Resta una piccola ambiguità, relativa al "non riceve più messaggi", ma si può risolvere in modo complicato basandosi sulla tipologia dei messaggi (si riceve uno e un solo messaggio con una data sequenza di firme) o, se cominciate ad essere stanchi, potete cavarvela con un prosaico time out.

Questo algoritmo è potentissimo: si dimostra infatti che risolve il problema anche con al più m traditori.

Siccome i matematici adorano farsi del male, ci sarebbe anche il caso nel quale alcuni messaggi vengono persi: ma noi siamo dei perenni ottimisti, e ci fermiamo qui.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms