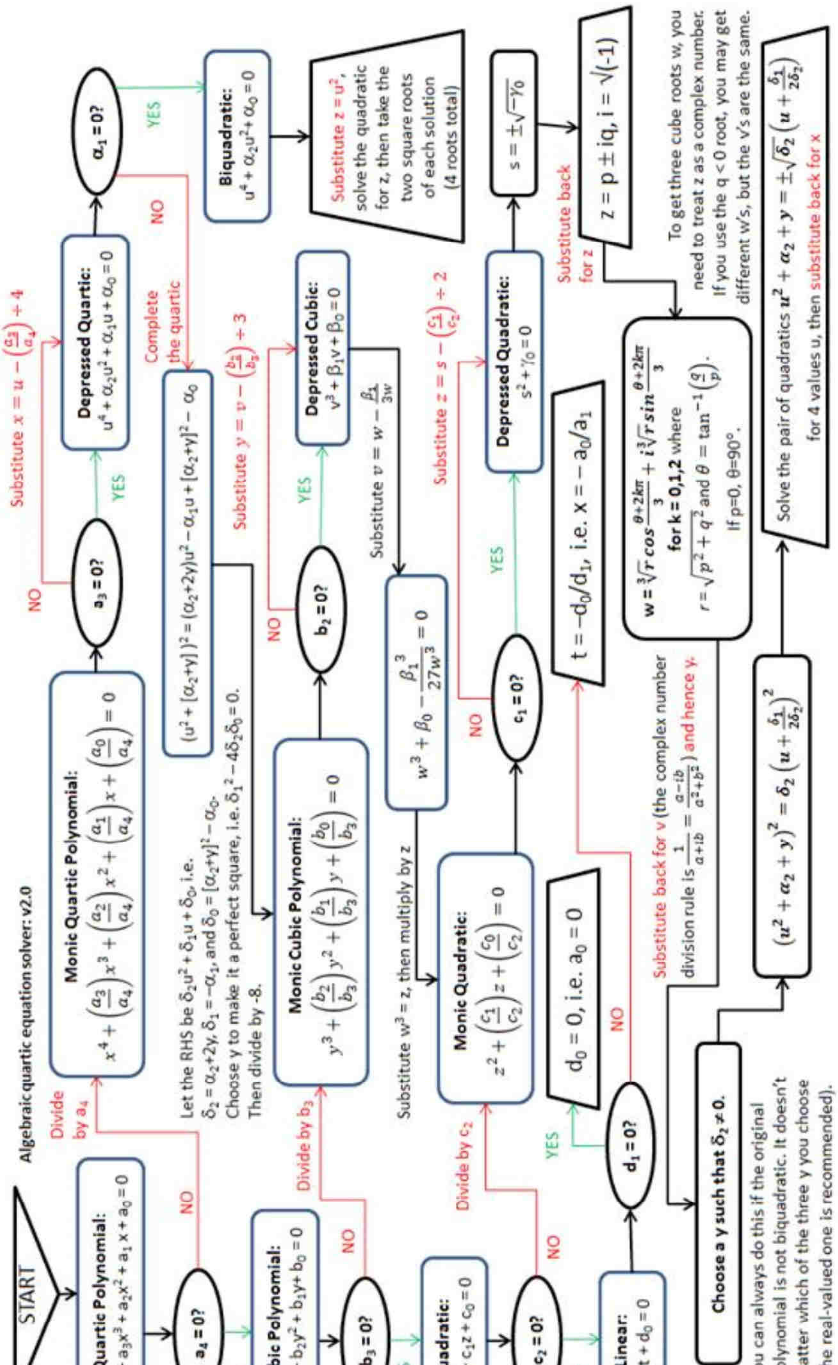
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 209 – Giugno 2016 – Anno Diciottesimo



1. Carta e punzone **3**

2. Problemi **9**

2.1 Almeno con la fantasia... 9

2.2 ...e leggere i PM? 10

3. Bungee Jumpers **10**

4. Soluzioni e Note **10**

4.1 [208] 10

4.1.1 Un problema di quelli “belli” [1] 10

4.1.2 Un problema di quelli “belli” [2] 12

5. Quick & Dirty **13**

6. Summer Contest **13**

7. Pagina 46 ..... **14**

8. Paraphernalia Mathematica **16**

8.1 Grazioso come un regolo 16

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell’altro millennio da

Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM208 ha diffuso 3’100 copie e il 10/06/2016 per Google eravamo in 11’900 pagine.

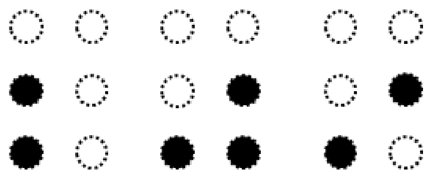
...dedicato a tutti coloro per cui “*la matematica non serve capirla, basta studiare a memoria le formule!*”. Non conosciamo l’autore, ma una cosa del genere, relativa agli integrali indefiniti, ci avrebbe fatto comodo molti anni fa.

1. Carta e punzone

"La geometria è un problema particolare,
perché servono davvero le figure."

Lo sappiamo, lo sappiamo benissimo che vi piacciono gli indovinelli. E sappiamo anche che quelli che vi piacciono di più sono i quesiti matematici; e certo, sappiamo anche che, da abituali lettori di questa Prestigiosa Rivista Italiana di Matematica Ricreativa, solitamente i problemi non li cercate a pagina 3, ma qualche pagina più avanti. Del resto, come ricorda John Belushi, è quando il gioco si fa duro che i duri cominciano a giocare.

Però, tanto per fare gli originali e rompere le tradizioni, stavolta un quesito ve lo proponiamo subito, e senza tanti giri di parole: cercate di interpretare questo disegno.



Fatto? Trovata la risposta? Eppure non è difficile, ve lo assicuriamo. C'è gente che lo capisce in un attimo, a occhi chiusi.

Mentre cercate di risolvere il quesito, può essere istruttivo cercare di capire quali strumenti – nel senso più ampio possibile del termine – avete a disposizione per affrontarlo. La prima tentazione potrebbe essere quella di rispondere con un semplice "Strumenti? Quali strumenti?", e non si può negare che sia risposta legittima; come racconta una vecchia storiella sui costi della ricerca accademica, i matematici sono gli unici ricercatori per i quali i costi di laboratorio possono limitarsi ad una sostanziale fornitura di risme di carta e un gran numero di matite.

Come tutte le storielle, anche questa ha un fondo di verità nascosta dietro a una valanga di luoghi comuni. Anche se è indubbio che i costi di un esperimento di fisica delle alte energie sono ormai quantificabili meglio con le frazioni di PIL che con le migliaia di euro, anche la ricerca matematica è diventata qualcosa di molto diverso dall'idea, ormai un po' retorica, d'un professore concentrato su una lavagna riempita di formule. Ciò non meno, il senso della battuta è chiaro: sono ben poche le discipline scientifiche[1] che, per propria natura, possono essere affrontate solo con l'ausilio di carta e matita.

Per quanto ridotti al minimo, gli strumenti del matematico potrebbero comunque, forse, essere ulteriormente essere sottoposti a una *spending review*: in fondo, carta e matita sono davvero così indispensabili?

La domanda non è del tutto banale: per provare a rispondere, forse è consigliabile lasciare per un momento il regno troppo vasto e profondo della matematica e ripiegare su un argomento meno esteso, per quanto certamente nobile, come gli scacchi. Cosa è veramente indispensabile per giocare a scacchi? La risposta naturale e immediata è inevitabilmente costituita da una breve lista: due giocatori, una scacchiera, e le trentadue figure degli scacchi. Risposta esattissima nel caso che la domanda fosse stata "cosa serve per giocare a scacchi?", ma certo contestabile se la questione posta poco sopra viene presa alla lettera: il "minimo indispensabile" è senza dubbio un insieme più piccolo.

[1] L'aggettivo "scientifiche" è necessario, perché altrimenti letterati, poeti e romanzieri potrebbero facilmente contestare l'affermazione. Anche la filosofica teoretica, probabilmente, non richiede nulla di più di quanto serve al matematico, ma non sappiamo dire quale sia la posizione dei filosofi sulla "scientificità" della loro materia.

1 *Vecchio orologio scacchistico (per gli appassionati: è uno dei due usati nella leggendario sfida mondiale tra Alekhine e Capablanca nel 1927)*

La scacchiera è davvero indispensabile, nell'era di Internet? Con migliaia di siti dedicati e pronti a costruire una mappa di pixel perfettamente riconoscibile come succedanea della legnosa griglia di caselle bianche e nere? Per di più, quelle "scacchiere" elettroniche sono dotate di orologi scacchistici sofisticati, in grado di stabilire e regolamentare il tempo a disposizione per ogni giocatore in maniera assai più creativa di quanto facessero i vecchi (e costosissimi) orologi scacchistici di un tempo[2]. E, inutile dirlo, i 32 pezzi sono compresi nel prezzo, così come è automatica la registrazione della partita, nonché un ferreo controllo del rispetto delle regole: provate ad arroccare dopo aver mosso il re, se ne siete capaci…

I giocatori, invece, sono indispensabili. Ma devono proprio essere due? Escludendo le variazioni che – anche in questo caso – sono centinaia, resta indubbiamente il fatto che, almeno virtualmente, i giocatori dovrebbero rimanere effettivamente due, visto che i colori dei pezzi in campo sono due. Anche se…

…ma per il momento sorvoliamo. Ebbene, come procedono le cose nel ben circoscritto mondo scacchistico? È presto detto: due principianti che si affrontano per la prima volta di fronte ad una scacchiera cercano di governare mentalmente molte cose; innanzitutto cercano di ricordare al meglio come si muovono i pezzi, per non fare figuracce terribili in pubblico: ma questo è ragionevolmente facile, dopo le primissime partite. Successivamente, censiscono una per una tutte le mosse che la disposizione dei pezzi sulla scacchiera consente loro, generalmente seguendo questo fondamentale crivello logico: "C'è qualche pezzo nemico che posso catturare? C'è qualche mio pezzo che il mio avversario può prendere?", e se le risposte sono negative ad entrambe le domande, allora si procede a muovere, grosso modo a caso, uno dei pezzi a disposizione, cercando di fare attenzione a non metterlo in presa.

Una delle caratteristiche fondamentali per un buon giocatore di scacchi è la profondità di analisi: è una dote che si può certo allenare, ma in gran parte è probabilmente innata. L'approccio dei due principianti è in fondo riassumibile come "profondità di analisi pari a una mossa"[3], e naturalmente non ci si può aspettare di più, da dei novizi. Le cose però cambiano in fretta: specialmente nei bambini e nei ragazzi molto giovani, ci vuole davvero poco tempo per scoprire le differenze di talento, e inevitabilmente sono differenze dettate dalla diversa abilità che hanno i vari soggetti nell'immaginare gli sviluppi successivi a profondità maggiori. Come in tutte le cose, l'allenamento, lo studio della teoria, l'esperienza e il riconoscimento di alcuni elementi tattici[4] fanno miracoli, e sono davvero

[2] Quelli meccanici si limitavano a camminare uno alla volta, in accordo con le pressioni dei giocatori sui relativi bottoni, e a far cadere un "bandierina" quando il tempo finiva. Quelli di oggi, elettronici se non puro software nella forma di app per telefoni cellulari, gestiscono anche incrementi di tempo per ogni mossa, attribuibili prima o dopo l'esecuzione della stessa, precisi alla frazione di secondo e con più opzioni e suoni quanti se ne possano immaginare…

[3] Tecnicamente, sarebbe più corretto parlare di "mezza mossa", più che di una mossa intera, perché negli scacchi per "mossa" si intende l'esecuzione di un tratto da parte di entrambi i colori.

[4] Quali l'inchiodatura, la forchetta, l'attacco doppio, lo scalzamento, l'adescamento, il sovraccarico e altro ancora. Un bel libretto che li spiega benissimo è l'ormai praticamente introvabile "*Di più sugli scacchi*" (Vallardi-Garzanti)di CHOD Alexander. Questa nota si trova perfettamente a suo agio in una rivista di matematica, perché Conel Hugh O'Donel Alexander è proprio quel campione britannico che faceva parte della squadra di Alan Turing a Bletchey Park, quando si tentava di decrittare il codice di Enigma: nel recente film "The Imitation Game" è interpretato da Matthew Goode.

necessari: ma la vera differenza la fa la capacità di progredire di un maggior numero possibile di mosse nell'analisi.

La difficoltà aumenta spaventosamente con la profondità di analisi: in una situazione normale, di medio gioco, le mosse possibili in una determinata posizione sono svariate decine, e anche se diventa evidente con l'esperienza che molte non devono essere prese in considerazione, analizzare una posizione con una profondità anche solo di tre o quattro mosse, nelle sue linee principali, è cosa di estrema difficoltà, che solo pochi riescono a fare con maestria. È evidente che, per diventare buoni giocatori di scacchi, serve pertanto anche una dote solo apparentemente accessoria, ovvero quello di riuscire a visualizzare mentalmente le varie posizioni che possono formarsi sulla scacchiera. In realtà, questa capacità è praticamente condivisa da tutti i giocatori di scacchi di buon livello: non solo i Maestri e i Grandi Maestri riescono ad immaginare un'intera partita a scacchi senza l'aiuto di una scacchiera; è una cosa che riesce abbastanza facilmente a un gran numero di scacchisti[5].

1. e4 e5 2. f4 exf4 3. Bc4 Qh4+ 4. Kf1 b5 5. Bxb5 Nf6 6. Nf3 Qh6 7. d3 Nh5 8. Nh4 Qg5 9. Nf5 c6 10. g4 Nf6 11. Rg1 cxb5 12. h4 Qg6 13. h5 Qg5 14. Qf3 Ng8 15. Bxf4 Qf6 16. Nc3 Bc5 17. Nd5 Qxb2 18. Bd6 Qxa1+ 19. Ke2 Bxg1 20. e5 Na6 21. Nxg7+ Kd8 22. Qf6+ Nxf6 23. Be7#

2 *Esempio di notazione scacchistica*

Del resto, basta guardare un libro di scacchi non esplicitamente destinato ai principianti: i diagrammi che illustrano le posizioni sono assai più rarefatti di quanto ci si potrebbe aspettare, e normalmente le partite sono riportante integralmente senza soverchi commenti, più o meno come nell'esempio qui a fianco (che riporta una partita celeberrima, sia detto per inciso). Lo scacchista esperto "legge" i libri di scacchi non certo – o per lo meno non sempre – ricostruendo la posizione sulla scacchiera, ma semplicemente scorrendo le mosse scritte sul testo: lui "vede" la partita svolgersi, alla stessa maniera in cui un musicista "sente" la musica suonare nei propri orecchi quando legge uno spartito, anche senza suonarla[6]. Questo comporta che se due scacchisti di buon livello si incontrano per caso durante una noiosa coda alle Poste, possono ingaggiare un rilassante duello mentale senza bisogno della scacchiera.

3 *Una storica "simul": Sammy Reshevsky, anni 8, contro diversi maestri in Francia, 1920.*

Naturalmente, i grandi scacchisti possono fare cose assai più impressionanti. È tradizione antica forse quanto il gioco stesso quella delle simultanee: un maestro che gioca contro molti avversari spostandosi da una scacchiera all'altra. In casi come questi si vede bene come la capacità di analisi diventa, ad alti livelli, qualcosa che trascende anche il mero numero della "profondità delle mosse": verosimilmente, uno sguardo basta ai campioni per vedere l'impianto strategico della situazione, analizzare velocemente gli aspetti tattici e agire di conseguenza. Per gli amanti del Guinness dei Primati, il record attuale di simultanee dovrebbe appartenere ancora a Raul Capablanca, che nel 1922 a Cleveland giocò 103 partite simultanee,

[5] Ma non a chi scrive, per esempio: non per niente, nonostante le molte partite giocate e il grande affetto per il gioco, è rimasto sempre una epica schiappa.

[6] Almeno, è quanto immaginiamo succeda ai musicisti… in realtà non ne siamo sicuri. Di musica ci intendiamo perfino meno che di scacchi.

vincendone 102 e pattandone una[7]. Per quanto impressionante, anche l'impresa del grande campione cubano scolorisce un po' di fronte al record di Miguel Najdorf, che nel 1947, a San Paolo del Brasile, affrontò in una simultanea 45 avversari, battendone 39, perdendo contro 2 e pareggiando le restanti 4 partite; uno "score" certo peggiore, ma il punto è che le 45 partite simultanee di Najdorf furono giocate dal Grande Maestro tutte alla cieca: insomma, Capablanca passeggiava di fronte a 103 scacchiere, Najdorf giocava 45 partite senza vederne neppure una[8].

È tempo di tornare alla matematica. Come "lavora" un matematico? Come produce i teoremi? Come visualizza – se visualizza – formule, diagrammi, concetti? È un processo di elaborazione che può procedere senza nemmeno l'ausilio di carta e penna, analogamente ad una partita alla cieca a scacchi? Come "legge" un articolo zeppo di formule? Probabilmente, non esiste una risposta univoca a tutte queste domande, perché è immaginabile che ogni persona abbia con la propria mente un rapporto del tutto particolare, non necessariamente identico da soggetto a soggetto. Lo scacchista che gioca mentalmente una partita vede davvero, nella sua testa, le figurine degli alfieri, dei pedoni e delle torri scorrere su una immaginaria scacchiera dalle caselle bianche e nere, o magari, con l'esperienza e l'abitudine, la sua capacità di visualizzazione mentale si è raffinata al punto di non necessitare più dell'immagine reale dei pezzi, ma qualcosa di diverso? Il matematico che legge una formula, visualizza qualcosa nella sua testa? Probabilmente sì, almeno all'inizio: ma quando la matematica si fa sempre più astratta e complessa, cosa mai potrà immaginare? I matematici hanno dovuto fare i conti con un numero di dimensioni superiore a tre ben prima dei fisici, tanto per dire: e su territori del genere il concetto stesso di "visualizzazione", almeno nel senso letterale del termine, perde rapidamente significato.


4 *Eulero, con l'occhio destro già evidentemente menomato; più avanti negli anni, perse la vista anche dal sinistro.*

Quale che sia la forma del puro ragionamento mentale che scacchisti, matematici e, in ultima analisi, tutti gli esseri umani elaborano almeno in qualche momento della propria vita, resta aperto un quesito di difficile risoluzione, ed è quello relativo alla fase iniziale, del primo apprendimento. È pacifico che, da un certo momento in avanti, gli scacchisti possono fare a meno della scacchiera: ma sarebbero mai riusciti a imparare il gioco se non ne avessero avuta una davanti, quando ancora non sapevano nulla degli scacchi?

Uscendo fuor di metafora, non è difficile immaginare che un matematico esperto, qualora per disgrazia diventasse cieco, potrebbe comunque continuare a fare il suo lavoro, proprio per la natura prevalentemente speculativa della sua professione: Leonhard Euler, che a buon diritto può aspirare ai primissimi posti sia nella classifica dei più grandi matematici che in quella dei più celebri non vedenti, era solito raccontare che la cecità gli era stata assai utile in tarda età, perché lo aiutava ad evitare le distrazioni. Nonostante l'ammirevole senso dello humour mostrato dal grande svizzero, immaginiamo che in realtà avrebbe preferito conservare il bene della vista: ma resta il fatto che la domanda in merito agli inizi resta del tutto ancora senza risposta: si può insegnare ad un bambino non vedente la matematica?

[7] Per dare un colpo al cerchio e una alla botte: la peggiore esibizione di un Maestro Internazionale è la tragedia toccata a Robert Wade nel 1951: invitato in Unione Sovietica da una scolaresca, si esibì in una simultanea su 30 scacchiere contro ragazzi la cui età massima era di quattordici anni: ne perse 20 e ne pattò 10.

[8] Naturalmente, i 45 avversari la loro scacchiera la vedevano benissimo.

Ci sono migliaia di insegnanti che possono rispondere orgogliosamente di sì: quasi in ogni scuola si possono trovare dimostrazioni pratiche della cosa. Bambini privi della vista studiano e imparano tutte le materie, e non è insolito scoprire che alcuni di essi si trovano particolarmente a loro agio proprio con i numeri. Nondimeno, è indubbio che soprattutto la geometria possa costituire un ostacolo significativo, perché il primo approccio richiede il riconoscimento delle forme geometriche, che tradizionalmente vengono presentate esclusivamente con disegni alla lavagna accompagnate dalla naturale denominazione: "Ecco, ragazzi: questo è un triangolo; questo è un cerchio…", e così via. Ma "mostrare" un triangolo o un cerchio a chi non può vederli disegnati è un problema non da poco, specialmente se non ce lo si è mai posto in precedenza: ma, per fortuna, c'è chi lo ha fatto.

Eleanor Pairman nasce in Scozia, a Broomieknove, l'8 Giugno 1896. È l'ultima delle quattro figlie di Helen Dunlop e John Pairman, avvocato nella Corte Suprema di Scozia; apparentemente una situazione invidiabile, se non fosse che John muore quando Eleanor ha appena cinque anni, e la situazione economica della madre, con quattro figlie a carico, diventa presto difficile. In qualche modo però riescono a tirare avanti: la sorella più grande, dall'impegnativo nome di Maxwell (detta Maxie), trova impiego come insegnante; la secondogenita Madge apre un negozio di tè mentre Aline, la terza, fa un po' di baby-sitting e manda avanti la casa. Eleanor, che in famiglia tutte chiamano Nora, ha così la possibilità di istruirsi: dopo le primarie e il college, riesce ad entrare all'università di Edimburgo nel 1914.

Si laurea con onore in "Matematica e Filosofia Naturale" nel 1917; vince anche un concorso per esami che le garantisce una sorta di borsa di studio (la "Vans Dunlop") per applicarsi in qualsiasi università: ma Nora decide di restare a Edimburgo. Già nel 1918 pubblica due articoli per la Società Matematica di Edimburgo, e il presidente della Società scrive una lettera di raccomandazione diretta al rettore del Radcliffe College, nel Massachusetts. Si tratta di una lettera che riepiloga assai bene le straordinarie qualità matematiche di Nora Pairman: "è davvero estremamente raro avere la fortuna di insegnare a uno studente che abbia una così forte predilezione per lo studio della matematica, come è successo a me con miss Pairman…", vi si legge, fra l'altro; e poi vi si elencano gli studi seguiti, tra cui un corso sui Quaternioni di Hamilton e le loro applicazioni in fisica.

Tra il 1918 e il 1919, comunque, Nora resta nel Regno Unito, all'Università di Londra, nel dipartimento di Statistica Applicata. La sua abilità è tale che Karl Pearson, il direttore del laboratorio, per evitare errori negli articoli destinate alle riviste specializzate, chiede a Nora di fare da supervisore. Nel 1919, probabilmente complice la fine della guerra, Eleanor riesce ad avere finalmente il visto su passaporto che le consente di raggiungere gli Stati Uniti, naturalmente al Radcliffe College, dove ottiene il dottorato nel 1922. Nello stesso anno si sposa con Bancroft Huntington Brown, ed è per questo che talvolta si fa confusione nelle biografie, perché ci si riferisce a lei sia come Eleanor Pairman che come Nora Brown. B.H. Brown è un suo compagno di studi, che ottiene il dottorato in matematica nella stessa sessione di Nora: anche lui valente matematico, insomma, che insegnerà per tutta la vita. Dal matrimonio nasceranno quattro figli: John, Barbara, Joanna e Margaret, quasi tutti intraprenderanno la carriera accademica, anche se in campi diversi da quello dei genitori.


5 *Maxwell (Maxie) Pairman*

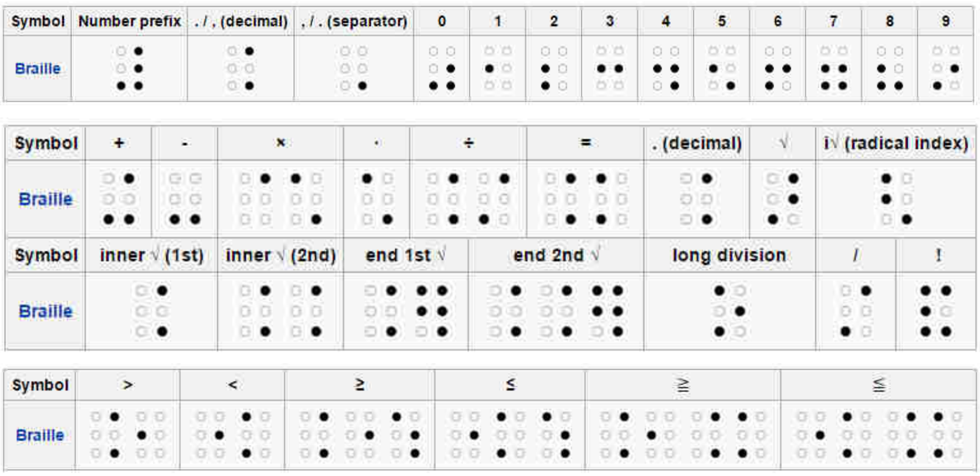
Quella di Nora sembra essere stata una vita serena e tranquilla: verosimilmente, anche molto appartata, se si narra che i coniugi Brown non abbiano mai posseduto un'automobile e che abbiano sempre evitato di volare in aeroplano [*Ancora più inquietante, specie per chi tentasse di scrivere un articolo su di lei destinato ad una e-zine, è che non sembra reperibile in rete nessuna sua fotografia. A mero titolo di completezza dell'informazione, e per mostrare che il tentativo è stato fatto, pubblichiamo l'unica traccia iconografica di Eleanor Pairman Brown recuperata dal web, ovvero una foto di sua sorella Maxwell: speriamo le somigli* *almeno un po'…*]. Una lunga e condivisa dedicata alla ricerca e all'insegnamento, vacanze presumibilmente ancora più tranquille a Martha's Vineyard; e sembra che Nora fosse ormai una tranquilla cinquantenne quando decise di interessarsi alla didattica della matematica per i non vedenti.

Imparò il Braille, e in seguito si dedicò al Nemeth Braille, che era stato da poco sviluppato: il codice Nemeth è una notazione Braille estesa ai simboli matematici. Abraham Nemeth, che era cieco dalla nascita, riuscì a diventare professore di psicologia e soprattutto di matematica, e aveva vissuto sulla propria pelle tutte le difficoltà connesse all'apprendimento della matematica per i non vedenti. Nora Pairman decise di dedicarsi con tutta sé stessa al miglioramento della didattica per i ciechi, dedicandosi soprattutto alla geometria euclidea, così fortemente ancorata alle figure e alle forme. Cominciò raccogliendo in casa tutti gli strumenti che potevano tornare utile all'uopo: cartone, forbici, forme per biscotti, e li utilizzò per creare forme tangibili che potessero essere d'aiuto nella comprensione della natura degli oggetti geometrici. Sembra che nessuno lo avesse mai fatto prima[9].

La nuora di Eleanor racconta un aneddoto significativo: uno studente laureato di Harvard aveva bisogno che un libro specialistico fosse pubblicato in Braille, ed era un libro pieno di diagrammi e simboli matematici. Nora lo tradusse in Braille, armata di cartoncini e punzoni: poi, per i diagrammi, si mise alla macchina da cucire, riproducendo accuratamente le figure.

Si aggregò al National Braille Club di New York, dove il laboratorio dedicato alla matematica era diretto dallo stesso Abraham Nemeth che aveva sviluppato la notazione matematica per i ciechi. Vi si dedicò con un entusiasmo davvero fuori dal comune.

Ecco un esempio del Nemeth-Braille[10]:



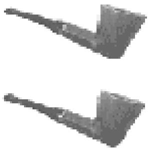
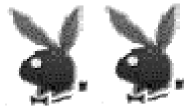
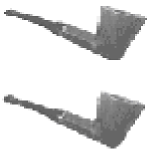
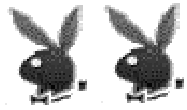
Esempio che dovrebbe essere più che sufficiente a rivelare la soluzione del piccolo quiz d'apertura: si tratta infatti semplicemente del numero d'ordine di questo RM scritto in Nemeth-Braille.

La figlia di Eleanor, Margaret, ricorda di non averla mai vista così felice come quando si dedicava a questo tipo di insegnamento; e forse le farebbe piacere sapere che questa sua storia, in molti modi diversi, è di grande lezione anche per tutti noi.

[9] In verità, è noto che il metodo didattico di Maria Montessori si basava molto sulla possibilità di "toccare" le forme geometriche, e un gran numero di bambini, soprattutto italiani, hanno avuto l'esperienza di toccare cerchi e triangoli, spesso ricoperti di cartavetra per rendere il contatto ancora più chiaro e deciso. Ma forse questo non era abbastanza noto ancora nel mondo anglosassone, e comunque non era esplicitamente diretto all'insegnamento per i non vedenti.

[10] Tutti presi da Wikipedia in lingua inglese (https://en.wikipedia.org/wiki/Nemeth_Braille).

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Almeno con la fantasia…			
…e leggere i PM?			

2.1 Almeno con la fantasia...

Ci riferiamo al Campo dei Chinotti: è sabato, gli uccellini splendono e il sole cinguetta, e Rudy e Doc sono chiusi in due stanzini (uno buio, l'altro no) a scrivere rubriche per RM. Sentitevi almeno un po' in colpa.

Questa volta, il punto fermo che abbiamo non è il contorno del giardino, ma un oggetto al suo interno: l'indubbiamente originale fontana il cui bordo è un triangolo equilatero. Ora, circoscriviamo al nostro triangolo un rettangolo, ossia costruiamo un rettangolo in modo tale che il nostro triangolo abbia un vertice in un vertice del rettangolo e gli altri due vertici su altri due lati[11].

Se non siete andati a caccia di casi particolari, dovreste ottenere, come avanzo del ritaglio del triangolo dal rettangolo, tre triangoli rettangoli, uno più grande e due più piccoli; nonostante l'intenzione di Rudy e Doc di dedicare queste aree alla ricerca scientifica di base ("Quanto ci mettiamo a ricoprirle completamente di lattine di birra vuote, avendo a disposizione il corretto numero di lattine piene?"), le due Paole non sono d'accordo e, siccome loro due sono la maggioranza, i nostri eroi vengono spediti ad acquistare il corretto numero di bulbi di giacinti e tulipani in modo da occupare con i primi i due triangoli piccoli, e con i secondi il triangolo grande.

Considerato che ogni bulbo, a qualsiasi delle due specie appartenga, richiede la medesima superficie per sopravvivere (non che questa sia la prima preoccupazione dei nostri due eroi, ma *si deve*), quello che vorremmo sapere è se alla fine ci saranno più giacinti o più tulipani (in funzione di quel che vi pare: inclinazione del rettangolo, sobrietà dei convenuti – no, questa no: tra il viaggio al vivaio e il lavorio di zappetta, meglio mantenersi lucidi – o quant'altro vorrete considerare).

Una piccola nota storica, su questo problema: secondo qualcuno è una leggenda, ma crediamo di no.

[11] Secondo i nostri testi, quando si circoscrive un qualcosangolo a un qualcosaltrangolo si fa così: già non ci piace il nome (etimologicamente correttissimo, ma "suona male"), poi ci pare che la cosa ingeneri confusione... alcune cose dovrebbero essere impossibili da circoscrivere in altre, e la cosa non ci piace *[Nonostante i plurali, questa è un'opinione personale di Rudy].*

Dijkstra (lo conoscete tutti, sì? Quello che vi fa traversare un grafo alla svelta) lo ha proposto alla sua mamma, che lo ha risolto in un modo decisamente brillante. Al momento di questo *exploit*, la signora era ultraottuagenaria.

2.2 ...e leggere i PM?

No, dico, con tutta la fatica che abbiamo fatto a parlare delle *ceviane*, non uno che abbia vagamente ringraziato o detto almeno "Le userò per torturare menti innocenti dove insegno".

Adesso, per punizione, un problema sulle ceviane. Forse.

E senza disegno.

E senza ambientazione.

No, in realtà l'ambientazione era questa qui sopra. Non abbiamo la più pallida idea se si possa utilizzare qualche scappatoia sulle ceviane (hanno l'aria di esserlo, comunque), ma dai tempi del Teorema di Morley ci piacciono le cose strane che saltano fuori dai triangoli e, nella catalogazione dei punti dei triangoli ci pare questi siano rimasti fuori. Potreste provvedere voi.

Partiamo da un triangolo ABC qualsiasi e costruiamo i tre triangoli isosceli *arbitrari* aventi come basi i lati del triangolo originale ABD, ACF, CBE.

Potete ora costruire il triangolo DEF e tracciare per A, B, C le perpendicolari rispettivamente ai lati DF, DE, EF: dimostrate che le tre perpendicolari sono *concorrenti*.

Come sempre quando si parla di triangoli, se decidete di risolvere il tutto in coordinate triangolari o baricentriche, vi ricordiamo che alla prima comparsa del termine "ovviamente", la soluzione verrà cancellata: qui, l'unica cosa ovvia è che non ci capiamo niente, di 'sta roba.

3. Bungee Jumpers

Provate che il cerchio di equazione $x^2 + y^2 = 1$ contiene un numero infinito di punti a coordinate razionali tali che la distanza tra ogni coppia di questi punti è irrazionale.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Giugno.

Mese normalmente in cui comincia a far caldo e ci si prepara alle vacanze, le scuole si chiudono, gli esami si moltiplicano… A giugno riceviamo sempre poche soluzioni, ma il mese scorso il Capo ha proprio trovato dei bei problemi, e così abbiamo parecchie risposte… Che fare? Andiamo direttamente a riportarvele.

4.1 [208]

4.1.1 Un problema di quelli "belli" [1]

Veramente simpatico, il problema, lo riportiamo così come è uscito dalla penna del Capo:

> *Siete uno dei due partecipanti a un nuovo gioco con poche ma strane regole:*
>
> 1. *A ognuno dei partecipanti, chiusi in sale diverse perfettamente isolate, viene detto un numero (intero, maggiore di zero) e viene comunicato che i due numeri sono in sequenza.*
> 2. *I due partecipanti vengono fatti entrare in una stanza, fatti sedere su due sedie e, sul muro, parte un cronometro che emette un suono esattamente ogni minuto.*
> 3. *È vietata qualsiasi forma di comunicazione tra i partecipanti, ma ognuno di loro vede e sente l'altro partecipante.*
> 4. *I due partecipanti stanno seduti sin quando uno dei due non è convinto di conoscere il numero dell'altro: a quel punto, aspetta lo scoccare del minuto ed enuncia il numero (dell'altro).*

> 5. *È permesso un solo tentativo (in due, non "uno ciascuno"): se chi parla indovina, entrambi i partecipanti ricevono un grosso premio; se chi parla sbaglia, niente a nessuno dei due, e si pagano la trasferta.*
>
> *Bene, voi siete uno dei partecipanti, e l'altro è una cosa che sembra avere il cervello di Einstein, il fisico di Thor e l'amabilità di un istrice sotto anfetamina. No, non potete scappare. Che cosa fate?*

Beh, se non l'avete ancora fatto, vi iscrivete alla lista di distribuzione di una *Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa*, i cui lettori vecchi e nuovi saprebbero bene che cosa fare. Per esempio ***Valter***, senza spiegazioni ma molto convinto:

> I partecipanti contano i suoni emessi dal cronometro. Il Primo che raggiunge il numero che gli è stato detto si alza e enuncia il numero dell'altro (che è il successivo in sequenza).

Se vi sembra che sia successo tutto troppo in fretta, vediamo ***Alberto R***, con tanto di poesia:

> *Quando il minuto N-esimo scocca*
> *a chi N possiede parlar tocca*
> *e dichiarare senza dubbio alcuno:*
> *"Al mio compagno fu dato* $N+1$*"*
>
> Questa, in rima baciata, è la strategia che – essendo la più semplice possibile – i due avrebbero certamente adottato se:
>
> - Fosse stato loro concesso di accordarsi preventivamente;
> - Fossero stati informati che sarebbero stati messi in una stanza con un contaminuti in funzione.
>
> Purtroppo ciò non è accaduto. Ma c'è un facile rimedio: è sufficiente che ciascuno si comporti come se detto accordo fosse in vigore.
>
> Quindi se io, ad esempio, ho il numero 10, mi attendo – con prob 50% – che al nono minuto il mio compagno lo dichiari. Se ciò non accade sarò io, al decimo minuto, che mi alzerò dicendo: "il mio socio ha il numero 11".

Bene, anche lui ci sembra piuttosto sicuro. Veniamo adesso a ***Stefano***, un nuovo solutore a cui diamo il nostro benvenuto:

> Dalle regole risulta evidente che io e l'altro partecipante non possiamo avere alcun tipo di comunicazione (verbale, mimica o simili), quindi l'unico fattore comune da poter utilizzare nella stanza è il suono del timer ogni minuto, che può quindi fungere da contatore!
>
> A questo punto partiamo dal caso banale, cioè l'eventualità in cui il mio numero sia 1. In questo caso non c'è bisogno di sfruttare i suoni del timer, dato che già in partenza ho la sicurezza che il numero del mio compare sia il 2 (dovendo essere i due numeri in sequenza e interi positivi), quindi aspetterei il suono del primo minuto (regola 4) e enuncerei il numero: 2!
>
> Escludendo questo caso (e sperando che i due numeri non siano eccessivamente grandi, altrimenti potrei passare dei giorni su quella sedia), io agirei nel seguente modo: ipotizziamo che il mio numero sia n. Di certo il numero del mio amico sarà $n-1$ oppure $n+1$. Sperando che il mio compagno abbia la mia stessa idea, non mi resta che aspettare l'n-esimo suono del timer: se lui non enuncia il mio numero a quel rintocco, ciò significa che il suo numero è $n+1$, quindi sarò io al rintocco successivo ad enunciare il suo.
>
> Quindi ricapitolando, io aspetterei l'$(n+1)$-esimo suono del timer per enunciare il numero $n+1$, sperando che anche l'altro partecipante ragioni così.
>
> Questo è quello che farei io in quella situazione!

Certo nessuno dei nostri lettori sembra molto spaventato dall'energumeno nella stanza: e tanti nuovi solutori! Il prossimo è ***Gerald Lambeau***, benvenuto anche a lui:

Per prima cosa, i soliti chiarimenti sulle ipotesi: il primo dubbio ce l'ho sul punto 1, due interi sono sempre in sequenza, se si considera la sequenza aritmetica che ha come primo termine il primo numero e come ragione la differenza fra il secondo numero e il primo; per questo motivo, ho inteso quest'ipotesi, altrimenti inutile, come il fatto che i due numeri sono consecutivi.

Il secondo dubbio riguarda invece il punto 3, l'ho inteso come "quando sai che l'altro giocatore ha il numero n, devi dire "n" subito dopo lo scoccare dell'n-esimo minuto".

SOLUZIONE: la situazione è simmetrica per i due giocatori, quindi la strategia è la stessa per entrambi, in particolare o devono dire entrambi il numero precedente al proprio oppure entrambi il numero successivo al proprio. In ogni caso, parlerà per primo chi ha il numero più piccolo, perché il minuto che deve dire arriverà prima. Se dicesse il numero precedente, sbaglierebbe, quindi deve dire il numero successivo; d'altro canto, se il primo che parla è il più piccolo e dice il numero successivo, il gioco è vinto. Questa strategia funziona anche se si ha il numero 1. Per evitare l'ira dell'avversario dobbiamo dunque aspettare il minuto n tale che $n = a + 1$ dove a è il numero che conosciamo noi e dire "n"; ovviamente se lui parla prima non dobbiamo fare nulla.

Simili i ragionamenti di ***Salvatore***, ***Paolo*** e ***Pelkan***: a questo punto siamo proprio convinti che l'energumeno non può toccare i nostri lettori… ma procediamo con il secondo problema.

4.1.2 Un problema di quelli "belli" [2]

Certo che è bellissimo, è un Sangaku! Eccolo:

Un poligono è iscritto in un cerchio ed è triangolato da un insieme di sue diagonali non intersecantesi. In ognuno dei triangoli risultanti è tracciato il cerchio inscritto. Mostrate che la somma dei raggi dei cerchi inscritti è indipendente dalla triangolazione.

Per la nostra tristezza, malgrado la bellezza del problema ed il ritardo di questo numero, solo una soluzione! Che fine ha fatto ***Sawdust***? Non fa niente, ecco la versione di ***Valter***:

È a andata così: ho provato a giocherellare un po' con geogebra per vedere se ne cavavo qualcosa. Ho notato che, comunque muovessi i vertici del quadrilatero, i centri dei 4 cerchi pareva formassero sempre un rettangolo. Provato ciò il resto doveva venire abbastanza facile. Ho cercato di dimostrarlo ma non ne ho cavano niente.

Ho cercato quindi in rete di farmi un po' di esperienza sulle proprietà dei quadrilateri inscritti in una circonferenza. Cercando qua e là però ho trovato i pezzi della dimostrazione già fatti e solo da mettere assieme (almeno così mi sembra). Mi è rimasto però un tarlo: i Nostri suggeriscono che la soluzione è semplice e "intrigante". Quella proposta non mi pareva lo fosse.

Ho cominciato quindi a rimuginarci su (mi fa compagnia durante le passeggiate, lavori in giardino, spesa, ...). Mi pare ora di aver trovato una dimostrazione che mi soddisfa. Questa è "farina del mio sacco" (quindi, se non già trovata da qualcun altro, di sicuro sbagliata).

Considero un dei 4 triangoli formati dalla diagonale del quadrilatero e da 2 suoi lati. I 6 triangoli che lo formano (costruiti con i 3 raggi sui punti di contatto del cerchio inscritto) sono a 2 a 2 uguali (lato comune, angolo di 90° sul lato del quadrilatero e 2 angoli sul vertice uguali essendo formati dalla bisettrice ...).

L'area del triangolo grande, quindi, è uguale al raggio del cerchio moltiplicato per la somma dei due lati del quadrilatero (l'altezza dei 6 triangoli è il raggio e la base sono i singoli segmenti che uniti formano i 2 lati del quadrilatero).

Discorso analogo per l'altro triangolo grande dalla parte opposta della diagonale del quadrilatero. Quindi l'area totale del quadrilatero è uguale alla somma dei 2 raggi moltiplicata per il perimetro del quadrilatero.

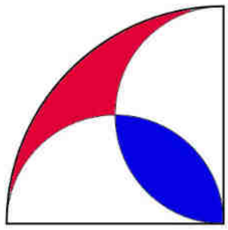
> Discorso analogo per i 2 triangoli grandi sull'altra diagonale del quadrilatero. Siccome l'area del quadrilatero e il perimetro dello stesso non variano la somma delle 2 coppie di raggi deve essere uguale.

Che ne dite? Volete proporre una soluzione alternativa?

Ecco, siamo arrivati al fondo. Sono quasi riuscita a far finta di niente per il ritardo di questo mese, visto che è tutta colpa mia… ma alla fine i miei compari mi perdonano sempre quindi chiedo scusa a voi lettori solo qui al fondo. Grazie a tutti e alla prossima!

5. Quick & Dirty

Quesito proposto da un nostro lettore, e anche se sapete dirci chi è stato, non è questa la domanda. Una volta tanto, vi chiediamo di mandarci le vostre soluzioni: vince un "Bravo!" quella meno "calcolosa".



Con riferimento alla figura qui a fianco, calcolate il rapporto tra l'area rossa e l'area blu.

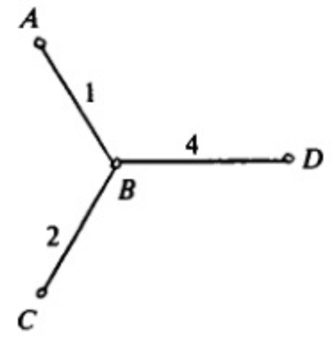
6. Summer Contest

È mancato Solomon Golomb.

No, dico, *dura molto???* Certo che quest'anno c'è da toccarsi, se ci passate la volgarità… Oggi, su *La Repubblica*[12] compare un articolo dell'ottimo Bartezzaghi che cerca di tirarci un po' su il morale, dimostrando che quest'anno è sostanzialmente uguale a tutti gli altri: molto semplicemente, la risonanza mediatica che hanno avuto queste morti è stata altissima. Apprezziamo il tentativo, ma lasciateci dubitare della cosa: quando il buon Stefano supera le due colonne "corte" (e qui occupa metà pagina) sta, come si dice a Torino, *ciurlando nel manico*: lui con le parole è decisamente bravo, e con uno spazio come quello utilizzato oggi riuscirebbe a convincere una rana a impanarsi, tuffarsi nell'olio bollente e chiedere di alzare la fiamma perché fa freschino[13]. Quindi, grazie ma siamo arrabbiati lo stesso.

E poi, uno di noi era particolarmente affezionato a Golomb, pur non avendolo mai conosciuto. Il primo articolo di Martin Gardner che Rudy ha letto (non capendoci assolutamente nulla, ma non è qui il punto) era sui *grafi graziosi* di, giustappunto, Golomb.

Nel caso ve lo foste perso (probabile: era circa il Giurassico[14]), ne trovate qualche estratto nei *Paraphernalia*. Adesso, parliamo di "quasi" altro.



1 *Un esempio facile.*

Prendete un grafo senza circuiti (si chiamano anche *alberi*, ma se vi dicevamo "prendete un albero" ci arrivavate in Redazione con un paio di querce e tre ippocastani, per non perdere in generalità), e *pesate* gli archi, nel senso che piazzate un numero (diversi tra loro e non necessariamente consecutivi) su ogni arco: partiamo da un caso semplice come quello in figura qui a fianco e calcoliamo un po' di pesi dei vari percorsi.

$AB = 1$, $BC = 2$, $AC = AB + BC = 1 + 2 = 3$, $DB = 4$, $DA = DB + BA = 4 + 1 = 5$, $DC = DB + BC = 4 + 2 = 6$. Giusto? Giusto.

Quindi, abbiamo ottenuto i *pesi* dei cammini 1, 2, 3, 4,

[12] Stiamo scrivendo tutto questo il ventun maggio, se volete andarvelo a cercare.

[13] In questa arte comunque il B. arriva secondo. Ma l'altro si chiamava Umberto. Appunto, Quod Erat Demostrandum.

[14] Numero 57, maggio 1973. Rudy è *quasi* sicuro (la sua collezione non è ordinata come quella di Doc) di avere ancora la copia cartacea. Comunque, essendo ben ammanicati con il Supremo Direttore, siamo felici possessori della copia elettronica.

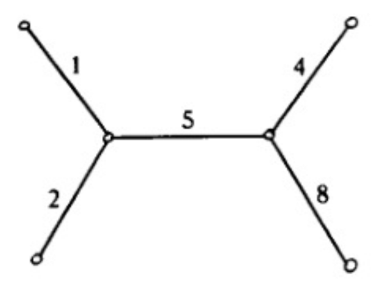
5, 6, e spero vi siate accorti che abbiamo percorso *tutti* i cammini possibili e generato *tutti* gli interi possibili, *tutti* diversi tra loro.

Decidiamo unilateralmente di chiamare quanto ottenuto *albero di Taylor*.

Facciamo un po' di conti.

Nel nostro caso il grafo ha 4 nodi e $\binom{4}{2} = 6$ cammini possibili, e questo numero rappresenta anche il massimo peso di percorso che possiamo ottenere.

Non stiamo a darvi gli alberi per $n = 2$ e per $n = 3$, in quanto sarebbe solo uno spreco di elettroni: se ci pensate tra inizio squillo e manata alla sveglia, ci potete arrivare tranquillamente da soli.



2 *Quello bello.*

A Rudy piace particolarmente quello per $n = 6$, che trovate qui di fianco: non stiamo a darvi tutti i cammini, ci limitiamo a segnalarvi che $\binom{6}{2} = 15$, e ve lo verificate da soli.

Adesso, se volessimo farvi passare qualche estate disegnare sulla sabbia, potremmo dire *"Trovatecene degli altri..."*. E qui arrivano due guai (In realtà ci sarebbe anche un terzo guaio, ma lì c'è un *forse* e non ve lo diciamo).

Il primo è la cosiddetta *Condizione di Taylor* (capito, adesso, perché li abbiamo chiamati così?): *Non esistono alberi di Taylor di* ***n*** *nodi se n non è un quadrato perfetto o un quadrato perfetto più* 2.

Carino, vero? Il secondo guaio è che il nostro testo si esibisce in un "meraviglioso[15]":

[…] e Taylor ha trovato una semplice e bellissima dimostrazione in merito.

Punto. Fine capitolo. No, dico, almeno *Hanc marginis* poteva scriverlo, no? Telefonatina a Wiles e eravamo tutti tranquilli!

Ehm… Qualcuno ci trova una dimostrazione almeno carina?

7. Pagina 46

Sia p un primo dispari nella forma $4k + 1$; secondo un teorema attribuito a Fermat, p ha un'unica espressione non ordinata sotto forma di somma di quadrati: $p = a^2 + b^2$.

Essendo p dispari, a e b non possono essere uguali: supponendo $a > b$, si ha che il punto:

$$P\left(\frac{a^2-b^2}{p}, \frac{2ab}{p}\right)$$

ha coordinate razionali ed appartiene alla circonferenza, in quanto:

$$\left(\frac{a^2-b^2}{p}\right)^2 + \left(\frac{2ab}{p}\right)^2 = \frac{a^4-2a^2b^2+b^4 +4a^2b^2}{p^2} =$$
$$= \frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{p^2} = \frac{p^2}{p^2} = 1$$

Notiamo che queste coordinate sono ridotte ai loro minimi termini: $a^2 - b^2$ è un intero positivo minore di p e, poiché $a \neq b$, allora per la diseguaglianza tra medie aritmetica e geometrica si ha:

$$2ab < a^2 + b^2 = p.$$

[15] Rudy sostiene che il sarcasmo è la forma meno efficace di ironia: qui intende caricare abbastanza sarcasmo da renderla efficacissima.

Quindi, ogni primo della forma $4k + 1$ genera un punto P razionale sul cerchio; dato che esistono un numero infinito di primi in questa forma, esistono infiniti punti razionali sul cerchio dato.

Sia ora

$$Q\left(\frac{c^2-d^2}{q},\frac{2cd}{q}\right)$$

un punto generato da un differente primo q nella forma $4k + 1$. Q non può essere lo stesso punto P in quanto le loro coordinate ridotte ai minimi termini hanno diverso denominatore. Dovendo entrambi i punti soddisfare l'equazione del cerchio, la distanza tra loro è:

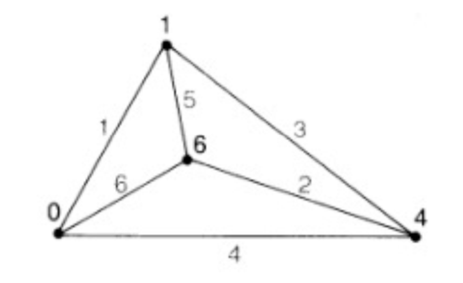
$$\begin{aligned}
PQ &= \sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{p}-\frac{c^2-d^2}{q}\right)^2+\left(\frac{2ab}{p}-\frac{2cd}{q}\right)} \\
&= \sqrt{2-2\left(a^2-b^2\right)\frac{\left(c^2-d^2\right)}{pq}-\frac{8abcd}{pq}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{pq}}\sqrt{2pq-2\left(a^2-b^2\right)\left(c^2-d^2\right)-8abcd} \\
&= \frac{1}{\sqrt{pq}}\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)-2\left(a^2-b^2\right)\left(c^2-d^2\right)-8abcd} \\
&= \frac{1}{\sqrt{pq}}\sqrt{4a^2d^2-2abcd+b^2c^2} \\
&= \frac{2|ad-bc|}{\sqrt{pq}}
\end{aligned}$$

e, essendo il numeratore un intero e pq non un quadrato perfetto, deve essere irrazionale.

8. Paraphernalia Mathematica

Questo PM è scopiazzato da un vecchio articolo di Martin Gardner: siccome non volevamo far arrabbiare il *Diretùr* di "Le Scienze" col copia&incolla, siamo partiti dalla versione inglese; anche perché, come poco sopra detto, *forse* abbiamo la versione cartacea, e se ci mettiamo a cercarla usciamo l'anno prossimo (e poi, visto che il formato della copia elettronica è immagine, la fatica sarebbe stata la stessa).

8.1 Grazioso come un regolo



3 *Il primo Grafo Grazioso.*

Bene, veniamo al lavoro di Golomb. L'inizio è tutt'altro che matematico, infatti il Nostro parte tranquillamente con un esempio, cosa che un Vero Matematico non fa mai. Lo riportiamo nella figura qui a fianco.

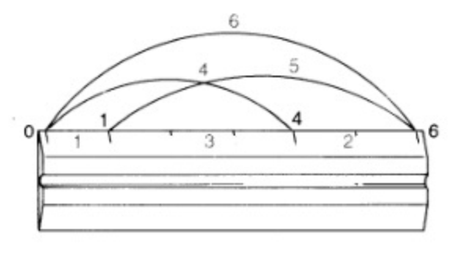
Per prima cosa, disegnate un *grafo completo* (in cui non esistono archi multipli o archi che uniscono un punto a sé stesso, e ogni punto è connesso a tutti gli altri attraverso un singolo arco); poi, attribuite un valore ad ogni vertice cominciando da zero e senza valori duplicati; infine, attribuite ad ogni arco la differenza tra i valori attribuiti ad ognuno dei nodi che congiunge.

Un grafo è ***grazioso*** se e solo se:

1. Tutti i numeri sugli archi sono diversi tra loro.
2. La numerazione dei nodi è tale da minimizzare il massimo valore di nodo.

Se guardate il disegno, vi accorgete che questo caso specifico ha anche un'altra caratteristica: i numeri sui sei archi vanno da 1 a 6, e ci sono tutti. Attenzione, perché *questa caratteristica **non** è richiesta per avere un grafo grazioso*: se la si ottiene, meglio, ma non è necessaria, l'importante è, appunto, che la numerazione dei vertici sia quella minima e che i numeri siano tutti diversi tra loro[16]. È immediato vedere che, se questo è il caso, siamo *sicuri* che il grafo sia grazioso (non possiamo abbassare ancora il massimo valore di nodo, avrei una ripetizione), ma non è vero l'inverso.

Qualsiasi grafo completo può essere deformato in modo tale che tutti i suoi nodi siano su una retta e, siccome ogni nodo è equivalente a qualsiasi altro, possiamo deformarlo in modo tale che i numeri sui nodi siano in ordine crescente sulla retta (qualche arco ne incrocerà altri, ma comunque non avremo un nodo all'incrocio): la grande idea di Golomb è stata quella di organizzare i punti su un *righello*[17]: per il nostro aggeggio a quattro punti, lo trovate qui di fianco (immagine leggermente modificata rispetto all'originale).



4 *Il "regolo" di Golomb.*

A cosa serve questo grazioso oggetto? Tanto per cominciare, notate che ha *solo quattro tacche* (0, 1, 4, 6), ma è in grado di misurare qualsiasi distanza intera tra 1 e 6 *[Non lo ripeteremo mai abbastanza: il fatto che le misuri "tutte" non è necessario, basta che siano tutte diverse e che il numero di punti sia minimo].*

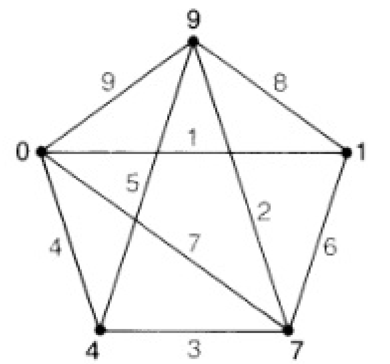
In realtà Gardner aveva già parlato di qualcosa di simile, in un pezzo che non ci risulta si stato tradotto in italiano[18]: i "regoli del Dr. Matrix" sono in grado di misurare *tutte le distanze* da zero alla lunghezza del regolo, ma *non è*

[16] Fonti autorevoli (Rudy medesimo) sostengono che sia proprio qui che il Nostro, in prima lettura (nel 1973) si è incartato, cominciando a non capirci nulla.

[17] Tutta la letteratura italiana in merito chiama questo oggetto *regolo* di Golomb: a noi non piace, ma ci adattiamo.

[18] "*Miami Beach*", reperibile come sesto capitolo del libro *The Incredible Dr. Matrix.*

richiesto che i numeri sugli archi siano tutti diversi: se aggiungessimo questa richiesta, quello che otterremmo sarebbe esattamente un regolo di Golomb.



5 *Un "regolo di Qualcuno".*

Chiariamo la faccenda con un esempio: lo trovate qui di fianco.

Tanto per cominciare, vedete che *non è un grafo completo*: manca l'arco tra 1 e 4; ma se tracciassimo questo arco, avrebbe numero 4 – 1 = 3, che è già presente come arco tra i nodi 4 e 7; quindi, *non è un grafo di Golomb*. In compenso, il regolo equivalente misura tutte le distanze tra 0 e 9, quindi è un *regolo del Dr. Matrix*.

Riassumendo (per l'ennesima volta, ma in forma leggermente diversa):

Un ***Regolo del Dr. Matrix*** di lunghezza k minimizza le tacche per misurare qualsiasi lunghezza tra 1 e k.

Un ***Regolo di Golomb*** per un numero n di marchi minimizza la lunghezza del regolo e tutte le distanze tra le tacche sono diverse.

Siccome fare ogni volta il disegno è piuttosto seccante, è stato trovato un modo piuttosto simpatico per definire un regolo: anziché stare a disegnare il grafico o a tirare linee, ci si limita a definire la *distanza tra due tacche adiacenti*, mettendole in ordine; sempre per restare negli esempi, il Regolo di Golomb con otto marchi è descritto come:

$$\{1, 3, 6, 11, 8, 5, 2\};$$

Partite dalla tacca 0, la tacca successiva è in 0 + 1 = 1; quella dopo ancora in 1 + 3 = 4; quindi ne avete una in 4 + 6 = 10 e le successive in 10 + 11 = 21, 21 + 8 = 29, 29 + 5 = 34, 34 + 2 = 36: l'ultima, è anche la lunghezza del vostro righello.

Abbiamo scelto questo esempio non per amor di complicazione, ma per il semplice fatto che ci permette di ripetere ancora una volta il concetto fondamentale: prima, però, vediamo un modo decisamente grazioso per ottenere il modo con il quale misurare una certa lunghezza con il nostro regolo: riferimento alla prossima tabellina (che, per motivi presto evidenti, vorremmo tutta nella stessa pagina).

La *prima riga* sono i numeri del nostro regolo.

La *seconda riga* sono i numeri somma dei *due numeri* della *prima riga* che si trovano sopra il risultato.

La *terza riga* sono i numeri somma dei *tre numeri* della *prima riga* che si trovano sopra il risultato (Attenzione, abbiamo detto *prima riga*: Pascal & Tartaglia non c'entrano niente).

E avanti così: questi sono tutti i numeri che potete ottenere sommando uno (prima riga), due (seconda riga), tre (terza riga) segmenti adiacenti:

1		3		6		11		8		5		2
	4		9		17		19		13		7	
		10		20		25		24		15		
			21		28		30		26			
				29		33		32				
					34		35					
						36						

L'ultimo numero, come si nota anche dal metodo costruttivo, è la lunghezza del regolo.

E, come potete facilmente notare, *mancano i valori* 12, 14, 16, 18, 22, 23, 27, 31: finalmente, abbiamo un Regolo di Golomb che *non misura alcuni dei valori*.

“...ma come fai ad essere sicuro che sia minimo?” Ehm… cambiamo discorso? Golomb ha ammesso lui stesso che i regoli di lunghezza superiore a sei (quindi, praticamente tutti tranne quello “facile” visto all’inizio) il metodo migliore è la forza bruta. Deludente, ma pare essere l’unico modo sensato. Se volete lavorarci, fate pure (attenti che non siete gli unici: c’è gente che ci gira attorno sin dal 1965).

I Regoli di Golomb, soprattutto quando vengano visti come grafi, hanno alcune strane proprietà, ma francamente non ci pare il caso di stare ad elencarle; continuiamo a tagliare per i campi, che è molto più divertente.

Se alleggeriamo la richiesta di “grafo completo”, trasformandola in quella di “grafo completo bipartito”, succede qualcosa di interessante: ma andiamo con calma.

Un “grafo completo bipartito” è un grafo per il quale i nodi sono divisi in due gruppi, uno formato da a elementi e l’altro formato da b elementi; ogni nodo del primo gruppo è connesso a tutti i nodi del secondo gruppo, ma a nessun nodo del primo gruppo (e viceversa); complicato? Beh, almeno uno, il cosiddetto *Grafo di Thomsen*, lo conoscete: non ci credo, che da piccoli non vi hanno mai fatto il problema delle tre case da unire con Acqua-Luce-Gas!

Questo aggeggio può essere numerato graziosamente: siccome ci siamo appena inventati una notazione, tanto vale usarla: {1, 1, 1, 3, 3}; in pratica, le “case dei tizi” sono numerate 0, 1 e 2; acqua, luce e gas sono numerate 3, 6 e 9; questo regolo misura tutte le distanze da 0 a 9, il che è già interessante, ma Golomb è riuscito a dimostrare che *tutti i grafi completi bipartiti sono graziosi!* E scusate se è poco…

Beh, dai, per questa volta basta: dalle altre cose potremmo ricavare qualche problema, quindi ci tacciamo.

Rudy d’Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms