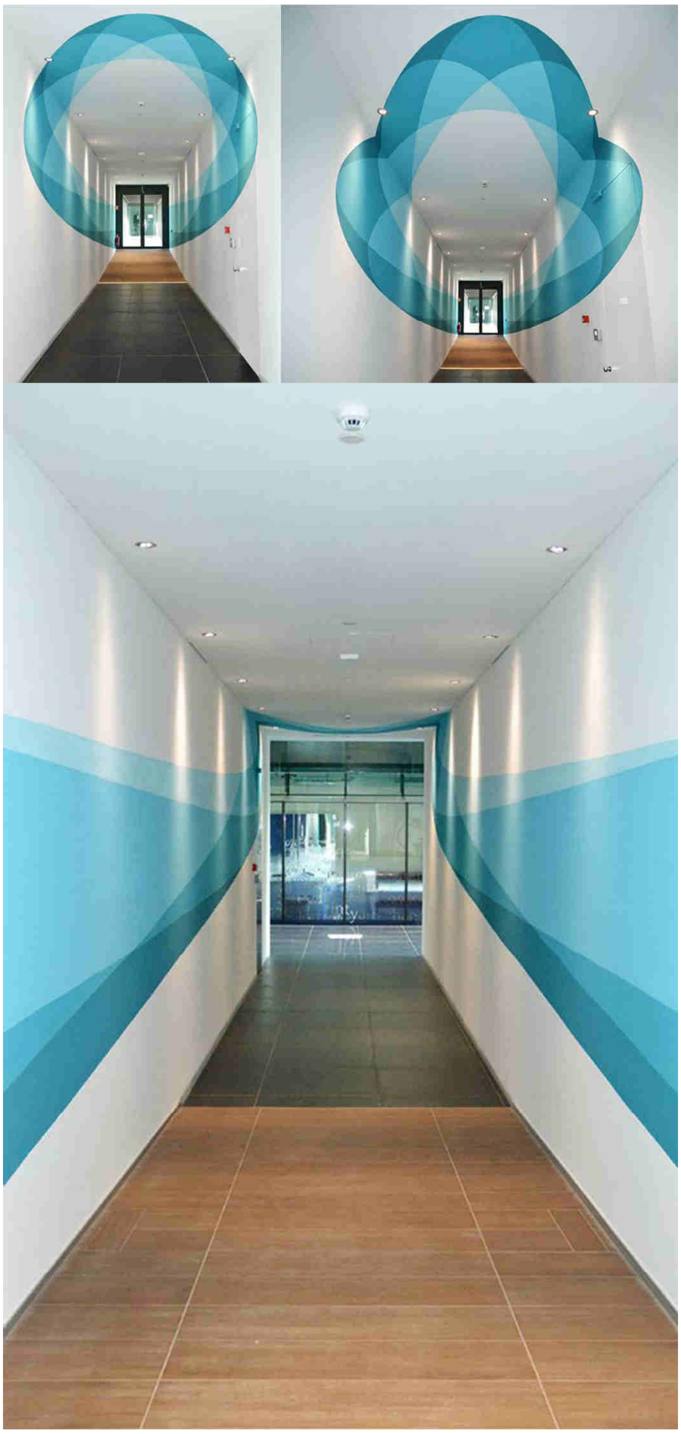
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 208 – Maggio 2016 – Anno Diciottesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell’altro millennio da
Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

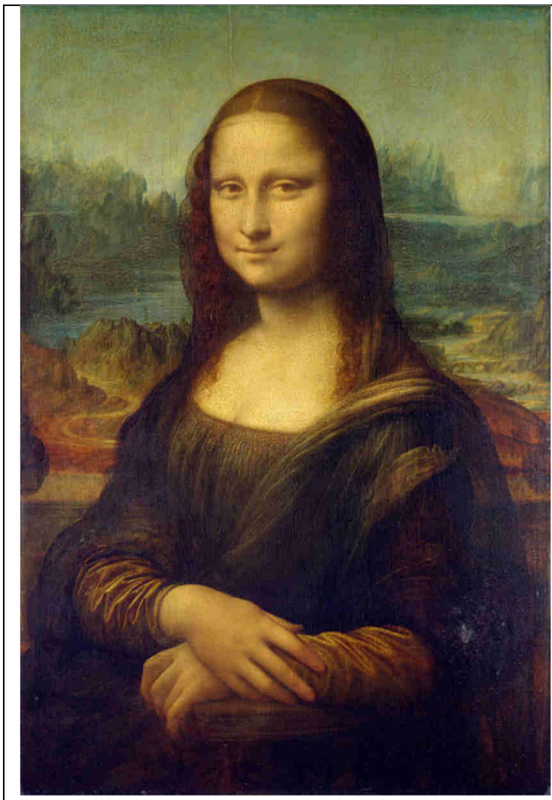
RM207 ha diffuso 3’087 copie e il 08/05/2016 per Google eravamo in 8’640 pagine.

La copertina ci piace per tre motivi e non ci piace per uno, totale due. Tanto per cominciare, si intitola ***Space Oddity***, e a noi David Bowie è sempre stato simpatico. Poi, chi l’ha progettata si chiama ***Truly Design***, ed è torinese. Infine, c’entra la Svizzera, visto che è l’ingresso della ***VF Corporation di Lugano***. …e per trovarla siamo dovuti andare sin su un sito americano?!?

1. Mille e una Gioconda

"Monna Lisa è l'unica bella donna che sia riuscita a mantenere intatta la sua reputazione attraverso i secoli"
(Will Rogers)

Ci sono alte probabilità che Lisa Gherardini non si sia mai goduta appieno il suo ritratto. Anzi, a voler estremizzare e drammatizzare la cosa, si potrebbe anche dire che non l'abbia mai visto come lo possiamo vedere noi; e questa affermazione assai difficilmente potrà essere smentita. Quando Lisa va in sposa a Francesco di Bartolomeo di Zanobi del Giocondo ha soltanto quindici anni, giusto la metà degli anni del marito; e forse sarà rimasta un po' perplessa, a suo tempo, quando il nonno Mariotto la destina a diventare la terza moglie di qualcuno che forse in passato chiamava anche "zio", visto che la seconda moglie di Bartolomeo era stata proprio una figlia del nonno[1].


1 *Non ci ricordiamo il titolo di questo quadro.*

Sia come sia, da brava fiorentina della fine del quindicesimo secolo, Lisa conduce la sua vita coniugale in maniera integerrima, e certo avrà accolto con gioia l'intenzione del marito di farle fare un ritratto da un valente artista del luogo, a titolo di festeggiamento per la nascita di Andrea, il loro terzo figliolo.

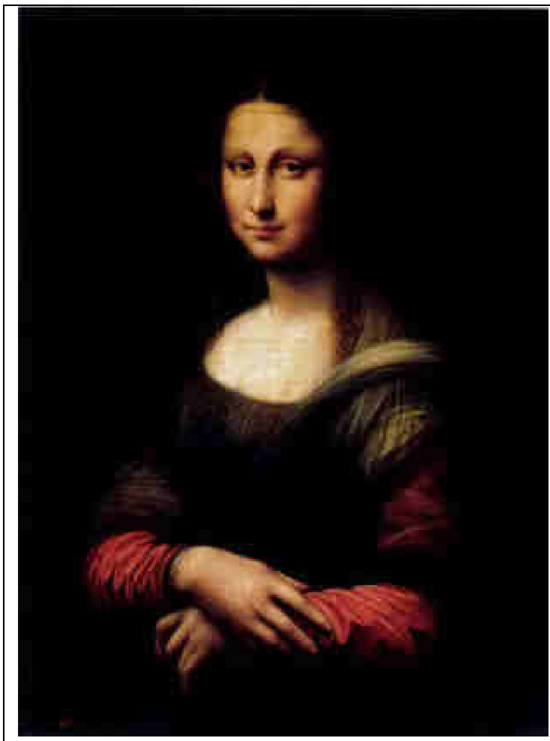
Ma è a questo punto che diventa difficile seguire il rapporto tra Lisa e il suo ritratto: Leonardo da Vinci è tornato a vivere a Firenze per la terza volta nella sua vita, e nel 1503, quando verosimilmente inizia a ritrarre la ventiquattrenne Lisa, ha già compiuto cinquant'anni. È certamente considerato uno dei più grandi maestri del suo tempo, e lui ne è certo consapevole: raramente il genio è associato ad una ipertrofica modestia che gli impedisce di riconoscere il suo stesso talento. Ma è anche consapevole di non essere particolarmente bravo a finire i lavori; più avanti negli anni, ormai vecchio, dichiarerà che il suo più grande rimpianto è quello di non essere mai riuscito a finire davvero un'opera.

Così, il ritratto di Lisa va per le lunghe. Inizia probabilmente nel 1503, come si è detto, ma forse il primo colpo di pennello sulla tavola di pioppo[2] è solo del 1505. Di certo, il quadro piace molto all'autore, perché continua a lavorarci sopra per un bel po'. Eternamente insoddisfatto, Leonardo continua a correggere e ritoccare, quando proprio

[1] Le nostre scarsissime capacità di ricerca non ci consentono, peraltro, neppure di eliminare del tutto la possibilità che la seconda moglie di Bartolomeo del Giocondo fosse proprio la madre di Lisa: ma riteniamo di no, se non altro perché anche il più scalzacani dei biografi sarebbe andato in brodo di giuggiole nel raccontarlo, fosse stato così.

[2] La Gioconda è appunto dipinta su una tavola di legno di pioppo, e ha le dimensioni di 77x 53 centimetri. Se anche a voi (come è successo a chi scrive) ve la siete talvolta immaginata come arrotolata dentro un contenitore cilindrico nei momenti più critici della sua storia, beh: ricredetevi.

non a rifare tutto da capo; tanto per rubare dei termini all'informatica, si potrebbe dire che oltre alle "revisioni minori", quelle che cambiano solo il numero dopo il punto nel codice di versione, le radiografie del dipinto hanno rivelato almeno tre "revisioni maggiori": in altri termini, quella che genera le lunghissime code al Louvre è probabilmente la Gioconda 3.0, o meglio la Gioconda 3.xx, con xx verosimilmente alto.


2 *La "Gioconda del Prado" (prima del restauro)*

In un certo qual modo, questo risolve un po' i dubbi sulla capacità visiva del Vasari[3], che quando parla del quadro si dilunga ad elogiarne la perfezione delle sopracciglia e delle fossette sulle guance; fossette e sopracciglia che è davvero arduo ritrovare nella Gioconda così come la conosciamo. Insomma, Leonardo ci lavora e torna a lavorarci, e nel 1508, quando lascia definitivamente Firenze, si porta via il quadro con sé. Lo avrà pagato, Bartolomeo Zanobi del Giocondo? Ci saranno state delle furibonde litigate tra il committente deluso e l'artista che disattende gli impegni? Difficile dirlo: ma è virtualmente certo che la povera Lisa non abbia mai potuto rimirare il suo ritratto appeso nella parete più nobile della sua casa; e certo non la consolerebbe neppure sapere che invece Napoleone Bonaparte, qualche secolo dopo, se lo teneva orgogliosamente in camera da letto.

Poi, a ben vedere, è opportuno anche ricordare che non è del tutto certo che la Gioconda, che pure prende il suo nome dalla moglie del Giocondo, sia davvero il ritratto di Lisa Gherardini. Lo sostiene il Vasari, e lo ribadisce certo la tradizione storica, ma i dubbi in merito sono molti, e autorevoli. In fondo, è sempre possibile che le sopracciglia che tanto entusiasmarono il Vasari fossero quelle di altri ritratti, e non mancano opere che possano essere identificate come il "vero ritratto" di Lisa; così, c'è chi sostiene che la signora che enigmaticamente sorride nel museo di Parigi fosse in realtà Caterina Sforza, chi opta per Isabella d'Aragona, chi preferisce pensare si tratti di Isabelle d'Este, o altre signore ancora[4].

Signore, abbiamo detto? Certo: ma figuriamoci se il quadro più famoso del mondo non ha solleticato anche ipotesi meno ordinarie. Del resto, Freud stesso dedicò un intero saggio alla sessualità di Leonardo, e la curiosità sulle preferenze erotiche del genio vinciano è sempre stata molto accesa; così, oltre ad ipotesi assai ardite che propongono la Gioconda addirittura come una sorta di autoritratto in vesti femminili, altre più ragionate chiamano in causa, come possibile modello, Gian Giacomo Caprotti, più noto come Salaì, che di Leonardo è stato amico, allievo e modello[5]. Già il soprannome lo qualifica come figura maledetta: Salaì sarebbe la contrazione di Saladino[6], che a quei tempi era a tutti

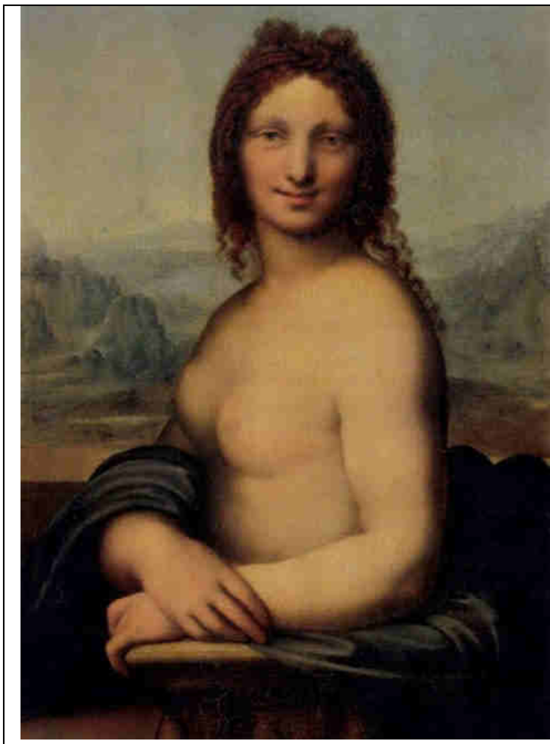
[3] Rubiamo da Wikipedia la citazione vasariana: "Prese Lionardo a fare per Francesco del Giocondo il ritratto di Monna Lisa sua moglie, e quattro anni penatovi lo lasciò imperfetto, la quale opera oggi è appresso il re Francesco di Francia in Fontanableò". Vorremmo porre l'attenzione sul termine "imperfetto", che qui è ovviamente da intendersi nel senso originario di "incompiuto".

[4] Tanto per arricchire l'elenco: ipotesi vertono anche su Cecilia Gallerani (la "Dama con l'ermellino"); sulla duchessa di Francavilla Costanza d'Avalos; su Pacifica Brandano; e anche su Isabella Gualanda. Ciò non di meno, la maggioranza dei critici al momento sta dalla parte tradizionale di Lisa Gherardini.

[5] E, naturalmente, molti commentatori aggiungono anche la qualifica di "amante".

[6] Nonché nome di un personaggio (sempre demoniaco) del *Morgante* del Pulci.

gli effetti un sinonimo di "demonio". Con ogni probabilità è lui che posa quando Leonardo dipinge il suo celebre Giovanni Battista; ma non va dimenticato che Salaì era allievo di Leonardo, e quindi pittore lui stesso: e, abbastanza curiosamente, la sua[7] opera più conosciuta è la "Monna Vanna" una sorta di versione nuda della Monna Lisa.


3 *La "Monna Vanna" di Salaì*

I più arditi sostenitori del fatto che tra Leonardo e Salaì ci fosse un vero e proprio rapporto d'amore sostengono che negli occhi della Gioconda siano leggibili una "S" (nell'occhio sinistro) e una "L" (in quello destro); e che le lettere siano appunto le iniziali dei due amanti. Insomma, la Monna Lisa sarebbe l'equivalente (seppur di fattura infinitamente più elevata) di un cuore inciso sulla corteccia d'albero, con freccia e iniziali dei fidanzati.

Sia o non sia il modello della Monna Lisa, è certo che Salaì[8] ha un ruolo cruciale nella storia del quadro. Leonardo lascia definitivamente Firenze nel 1508, diretto a Milano, che al tempo era sotto il controllo dei francesi: qui gli vengono rinnovate le offerte di andare in Francia, che già gli aveva avanzato re Luigi XII. Leonardo, dopo un ultimo prolungato soggiorno a Roma, infine accetta l'idea di varcare definitivamente le Alpi, e nel 1517 viene accolto da Francesco I di Francia, che era diventato re nel 1515. Si sistema nel castello di Clos-Lucé, vicino ad Amboise, e lì resta, sereno, fino alla morte che lo coglie il 2 maggio 1519.

Una volta che Leonardo se ne è andato a ritrarre gli angeli dal vero, quel che rimane di certo è che la Gioconda viene acquistata proprio da Francesco I, re di Francia. Assai meno chiaro e certo è se l'acquisto del re avviene direttamente trattando con Leonardo o, come sembra più probabile, con Salaì, che eredita buona parte delle opere del maestro.

Naturalmente, anche in questo passo cruciale dell'eredità le teorie, più o meno fantasiose, si accalcano: c'è chi sostiene che Salaì si sia appropriato di troppe opere, che invece dovevano andare a Francesco Melzi, altro discepolo di Leonardo; chi sostiene che quasi tutti i dipinti che aveva Salaì non fossero originali leonardeschi, ma copie fatte da lui stesso degli originali; in ogni caso, il demoniaco Salaì se ne torna in Italia e, nel giro di pochi anni, raggiunge il suo maestro: muore nel 1524 per le conseguenze di un colpo di balestra rimediato durante un duello.

In tutto il rincorrersi di ipotesi e contro-ipotesi, non sono molte le cose che possiamo estrarre con assoluta sicurezza: ma, abbastanza curiosamente, una di queste è proprio che il quadro più celebre del mondo, noto come "la Gioconda", conservato al Louvre di Parigi, è stato dipinto da un artista italiano e regolarmente acquistato dal re di Francia. La conclusione è curiosa perché – ed è sostanzialmente questa la ragione per la quale ci siamo dilungati sul sorriso di Lisa – è ancora molto diffusa, tra le italiche genti, la

[7] Sarebbe, come al solito, più correttamente scrivere "l'opera più conosciuta a lui attribuita…"

[8] Ci accorgiamo solo in questo momento, scrivendo, che "Mona Lisa" – come lo chiamano i francesi e quasi tutti, italiani a parte – è un facile anagramma di "mon Salaì", e Leonardo ha parlato francese per tutta la parte finale della sua vita, essendo stato un *émigré* ante-litteram. Se troviamo una ricca associazione di complottisti artistici, proveremo a vendergli subito l'osservazione…

convinzione che la Gioconda sia stata portata in Francia illegalmente, come bottino di guerra.

Ahimè, no: la Gioconda è una migrante, e a differenza dei sui compagni viventi a noi contemporanei, è stata accolta con tutti gli onori dal paese ospitante, che dopo mezzo millennio di "ius soli" avrà ben il diritto di chiamarla "francese", almeno nel senso della pura cittadinanza: che sia italiana nella fattura, nel concepimento, nella genetica, insomma, è cosa ovvia e fuori discussione, e del resto i francesi non si sono mai sognati di metterlo in dubbio.

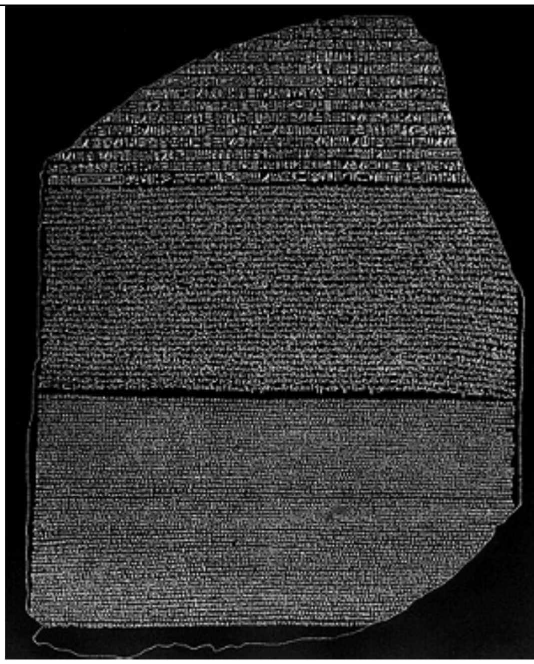

4 *La Gioconda del Prado (dopo il restauro)*

A questo proposito, è forse opportuno ricordare l'episodio che regalò alla Gioconda uno dei suoi molti record: oltre ad essere, come ricorda John Lichfeld in un articolo su *The Independent*, "l'opera d'arte più conosciuta, la più visitata, quella su cui si è più scritto e cantato e la più parodiata", la Monna Lisa è anche stato il primo dipinto della storia ad essere rubato da un museo. Il 21 agosto del 1911 Vincenzo Peruggia, un impiegato del Louvre di evidente origine e nazionalità italiana, si infila il quadro sotto il cappotto e si defila senza troppe difficoltà. La polizia francese rimane semplicemente basita all'idea del furto, procede con indagini a tappeto, inquisendo persino Guillaume Apollinaire e Pablo Picasso, senza cavare il ragno dal buco. Viene ritrovata solo più di due anni dopo, nel dicembre del 1913, e naturalmente in Italia: Peruggia aveva incautamente preso contatti con un antiquario, che andò all'incontro nell'albergo[9] concordato accompagnato dal direttore degli Uffizi.

Peruggia avrebbe venduto il quadro all'antiquario per poco denaro, se ci fosse riuscito: cosa che in fondo dimostra che la sua motivazione non era tanto quella di arricchirsi. In realtà, Vincenzo Peruggia pensava che la Gioconda fosse "italiana", e dovesse tornare in Italia. Non sappiamo dire se la sua idea fosse che i francesi l'avessero in qualche modo "rubata" al Bel Paese, o più semplicemente che il quadro più famoso era comunque "italiano", e come tale in Italia doveva restare; però è certo che la convinzione che la Gioconda sia stata una preda di guerra è diffusissima: in particolare, un gran numero di persone è tuttora convinta che sia stata portata in Francia durante le cosiddette "spoliazioni napoleoniche" fatte durante le campagne d'Italia da Bonaparte. Non è così, come si è visto; ma vale quasi sempre la pena di indagare sulle false credenze, proprio come è utile indagare sugli errori di calcolo che portano ad una soluzione errata di un problema matematico. Ci sono poi davvero state, queste spoliazioni?

[9] Nel 1913, probabilmente sull'onda della recente guerra italo-libica, l'albergo si chiamava Hotel Tripoli; dopo l'evento, cambiò nome: indovinate quale scelse...

Certo che ci sono state. La Francia è stata costantemente in guerra, praticamente da sola contro il resto d'Europa, quasi ininterrottamente dal 1792 al 1815: più di vent'anni, e per gran parte di questi, sotto il governo unico e diretto di Napoleone Bonaparte. E Napoleone è figlio della Rivoluzione Francese, pur diventando gradualmente sempre più autoritario e dittatoriale: da generale al Direttorio, poi al Consolato, infine all'Impero, con buona parte dei troni d'Europa rovesciati e occupati da suoi parenti e amici. Come figlio della rivoluzione, deve indubbiamente fare i conti con le sue contraddizioni verso gli ideali che la rivoluzione hanno generato. L'Ancien Régime è quello che vuole gli stati, i territori, persino i popoli come proprietà diretta dei sovrani: figuriamoci le opere d'arte e qualsivoglia oggetto di pregio. Il nuovo ordine rivoluzionario esige di dare agli uomini, ai cittadini, una dignità diversa e superiore.



5 *La Stele di Rosetta*[10]

Come succede quasi sempre, gli ideali migliori finiscono con lo scontrarsi con la logica perversa della realtà e delle debolezze umane: così come la Rivoluzione Francese, nata sotto le esigenze di fratellanza libertà e uguaglianza, conoscerà periodi tragicamente contraddittori come quello del Terrore, allo stesso modo Napoleone dovrà far coesistere il suo ego smisurato, il suo indubbio e pervicace desiderio di imperio e dominio con i principi che, in un modo e nell'altro, gli hanno consentito di governare quasi tutta l'Europa. Spoglia i territori che conquista, ma ha almeno l'alibi, se non proprio la scusante, di farlo per rendere di dominio pubblico i tesori artistici che fino a quel momento erano stati solo patrimonio privato di nobili e sovrani. Razzia l'Egitto durante la campagna del 1798, ma potrà sempre dire che il Louvre è nato per essere una reggia, non un palazzo pubblico, e tanto meno un museo: ed è l'Assemblea Nazionale Costituente della Rivoluzione che, nel 1791, decide invece che quel grandioso edificio deve diventare il ricettacolo delle arti e delle scienze. Le grandiose opere d'Egitto partiranno verso Parigi, ma quantomeno saranno destinate ad un museo: e, a quei tempi, la stessa parola "museo" aveva suono strano e innovativo. Non per niente, la campagna napoleonica d'Egitto risponde solo in parte ad esigenze strategiche e militari: certo, vista l'impossibilità di un'invasione dell'Inghilterra, la conquista egiziana avrebbe inferto uno scacco al dominio inglese nel mediterraneo; e in parte avrebbe anche solleticato i sogni di grandezza di Napoleone, che forse voleva cimentarsi sulle stesse mitiche terre che aveva calpestato Alessandro Magno, suo modello. Ma c'era anche la ragione – o quanto meno l'illusione, l'alibi – rivoluzionario e illuminista: quello della cultura e della ricerca, della scienza e della Dea Ragione: e verso l'Egitto, infatti, le navi francesi imbarcano non solo soldati, ma anche un gran numero di studiosi e scienziati.

[10] Scoperta proprio dalla truppe francesi di Napoleone durante la Campagna del 1798, potrebbe per questa ragione essere considerata un po' meno un "furto" ai danni dell'Egitto. In compenso, dopo la battaglia navale di Abukir, vinta dagli inglesi, sono quest'ultimi che la requisiscono ai francesi. Non per nulla la Stele risiede oggi al British Museum, e non al Louvre…

6 *"Estasi di Santa Cecilia", Raffaello Sanzio*

Prima e dopo l'Egitto, l'Italia: l'Italia che è il luogo dove l'arte sembra nascere quasi spontaneamente, e in maniera grandiosa e continua. L'Italia che Napoleone considera forse sua patria quasi quanto la Francia, e che riesce ad unire, seppur in pochi stati satelliti emanazioni della Francia e di sé stesso, una sessantina d'anni prima di quando riuscirà a farlo il Risorgimento. Opere d'arte italiane prendono la via per la Francia. E dopo quelle italiane, seppur in misura ovviamente minore, anche quelle del resto d'Europa.

Ma le dimensioni delle spoliazioni? Alla fine, quante opere d'arte hanno varcato le Alpi da sud a nord? Quante sono partite dalle regge e dalle chiese italiane verso le sponde della Senna? Tre quadri sgraffignati? Dieci, cento? Rendersi conto delle dimensioni delle spoliazioni lascia abbastanza interdetti, perché sono dimensioni impressionanti. Senza entrare nell'elenco delle opere e neppure in quello dei maggiori artisti i cui lavori venivano requisiti[11], può essere sufficiente ricordare che le opere vennero radunate in quattro grandi depositi, a Roma, Livorno, Genova e Tolone; che si raccolsero un gran numero di bufali e perfino dei cammelli (forniti dal Granduca di Toscana), destinati ad aprire trionfalmente il convoglio. Il regista incaricato di organizzare e controllare tutta l'operazione, dalle iniziali requisizioni fino all'arrivo a Parigi, scrive:

> "*Quando tutto ciò che attualmente si trova nei depositi di Roma, Livorno, Genova e Tolone verrà indirizzato a Parigi, formerà un convoglio di circa cento carri, carichi di un vario e preziosissimo bottino. Per quanto aristocratica sia Parigi, per quanto abbia in odio l'uguaglianza, quali che siano la sua superstizione, la sua ignoranza, la sua meschinità, i suoi rimpianti vaghi per la schiavitù... se non sarà divenuta del tutto insensibile ai sentimenti della gloria, e se, per quanto in basso sia caduta, saprà ancora levare in alto il capo, il suo cuore palpiterà e accorrerà in massa ad ammirare il maestoso corteo dei trofei dei repubblicani che hanno combattuto in Italia, senza i quali esso avrebbe ornato il trionfo dei nostri nemici, cioè dei nemici dell'umanità*"[12].

Il convoglio arriva a Parigi il 27 luglio 1798, e la città lo accoglie con una festa trionfale: una festa che ha tutte le caratteristiche e le contraddizioni della rivoluzione, una festa che è al tempo stesso di vittoria guerresca e di pace, di popolo e di nazione francese. In qualche misura, è la festa di battesimo del Museo del Louvre, il museo che ancora oggi è il più visitato al mondo.

[11] Comunque sì: c'erano codici manoscritti di Leonardo e di Galileo; opere di Raffaello (tra cui la Santa Cecilia sopra riprodotta), Guercino, Correggio, per non parlare delle statue, dal Lacoonte ai Cavalli di San Marco, e molte, molte altre.

[12] Tratto dal volume "*Dall'Italia (1796-1798)*" di Gaspard Monge, Sellerio 1993. Anzi, ad essere del tutto precisi, la citazione è tratta dalla recensione che del libro ha fatto P.Morello per la rivista "L'indice" numero 6, del 1994: ma si tratta di un virgolettato, quindi riteniamo che si tratti di un estratto puntuale delle lettere di Monge. E poi "L'Indice" è una rivista seria, ci fidiamo senza riserve. E poi non possiamo fare di meglio, perché il libro non ce l'abbiamo, dannazione.

E, almeno per quel che riguarda la natura del giornalino che ospita quest'articolo, forse ancora più impressionante dell'enormità di un convoglio composto da cento carri pieni d'opere d'arte, è che la regia del grandioso furto messo in atto dalla neonata République Française era tutta di un matematico.

7 *Gaspard Monge*

Gaspard Monge nasce a Beaune, in Borgogna, il 9 maggio 1746[13]. Figlio di un commerciante modestamente benestante (è proprio in questo periodo che cominciano ad essere apprezzati i vini di Borgogna), Gaspard riesce ad avere un'educazione tutto sommato privilegiata per i suoi tempi: riesce a frequentare una scuola normalmente destinata solo a nobili e ricchi e che, benché tenuta da religiosi, non limitava l'insegnamento alle materie umanistiche ma dava anche una buona formazione scientifica. Sedicenne, prosegue gli studi a Lione, e appena un anno dopo il Collège de la Trinité, dove è allievo, lo incarica di tenere un corso di fisica come docente. Completati gli studi torna a Baume, dove disegna un piano per la città: piano che è tanto accurato e ben disegnato da essere notato da un membro della Reale Scuola del Genio di Mézières. In breve Gaspard si ritrova a prestare la sua opera proprio alla scuola del Genio, con la qualifica di disegnatore.

Gli elementi ci sono già tutti: Monge è con tutta evidenza un disegnatore eccezionale, con un eccezionale talento per la matematica. È molto giovane e ancor privo di formazione accademica, ma è già ben presente in lui il desiderio di ripercorrere e rifondare l'antica alleanza tra il disegno geometrico e la matematica. Alla Scuola del Genio entra in contatto con il professor Charles Bossut, che è matematico di alta levatura; Monge, seppur dapprima un po' scettico, perché aveva già delle sue idee precise su come applicare la matematica al disegno, si applica e riesce a risolvere un difficile compito che gli richiedeva di progettare una fortificazione secondo vincoli forti e ben precisi. Bossut rimane impressionato dal risultato, che Monge aveva peraltro ottenuto applicando al progetto i suoi nuovi e rivoluzionari principi, e quando Bossut lascia l'incarico per andare a Parigi (è stato nel frattempo anche eletto all'Accademia delle Scienze), Monge prende il suo posto a Mézières.

Finalmente Gaspard entra in contatto con i grandi del suo tempo: conosce d'Alembert e Condorcet, e quest'ultimo gli consiglia di sottoporre all'Accademia le sue innovative idee sulla geometria: il risultato prende forma in quattro memorie cruciali sul calcolo delle variazioni, la geometria infinitesimale, la teoria delle equazioni differenziali parziali e il calcolo combinatorio, tutte basate sulla nuova sua teoria che prenderà poi il nome di Geometria Descrittiva, e che poi evolverà nella Geometria Differenziale, di cui è naturalmente considerato il fondatore[14].

[13] Nota per i redattori di Wikipedia.it: ci siamo permessi di modificare la data di nascita riportata sull'articolo dedicato a Monge (10 maggio), perché la maggior parte delle fonti (comprese le maggiori Wikipedie consorelle in altre lingue) riporta con autorevole sicurezza quella del 9 maggio. Se ci fossero delle prove sicure a sostegno dell'ipotesi del 10 (data che, peraltro, ci è molto cara) saremmo ben lieti di vedere corretta la nostra correzione.

[14] Grazie soprattutto al metodo da lui descritto in "*Application de l'analyse à la géométrie*", dove introduce il concetto di linee di curvatura su una superficie inserita in uno spazio tridimensionale.

Pur restando per sempre un matematico e un professore, poco prima dello scoppio della Rivoluzione Monge intraprende il primo dei lavori che lo indirizzeranno verso una carriera non propriamente accademica: diventa esaminatore dei cadetti, insomma degli allievi ufficiali, della Marina. Quando arriva il 1789, Monge si mostra entusiasta della Rivoluzione, favorendola e sostenendola: in breve, diventandone un autorevole (viste le sue cariche accademiche e militari) sostenitore. Quando la Francia nel 1792 diventa una Repubblica, la Convenzione Nazionale designa Gaspard Monge Ministro della Marina.

Gaspard non ha troppo successo come ministro: si dimette dopo poco, nell'aprile del 1793, e torna alla Commissione Pesi e Misure; propone al governo repubblicano diverse riforme per l'educazione, con alterna fortuna. Nel 1794, comunque, assume l'incarico di organizzare una grande scuola, inizialmente denominata "Scuola Centrale dei Lavori Pubblici", che però presto assumerà il nome con il quale è rimasta famosa: École Polytechnique.

Nel 1796 Monge compie esattamente cinquant'anni, e incomincia a legare il suo destino a quello di un militare trentasettenne: è l'anno in cui Napoleone intraprende la Prima Campagna d'Italia, e Monge è incaricato di accompagnare il giovane generale nella penisola, fa parte della commissione incaricata di vagliare opere d'arte nelle terre occupate. Nell'anno e mezzo di questa prima campagna diventa così familiare e amico di Bonaparte che sarà proprio lui, Monge, a riportare a Parigi il Trattato di Pace firmato a Campoformio tra gli sconfitti austriaci e i francesi.

Il ritorno in patria è di breve durata: sufficiente a ricevere la nomina a direttore dell'École Polytechnique, e assaggiare appena i suoi compiti precedenti. All'inizio del 1798 è di nuovo in Italia, a Roma, ad organizzare la nascita della Repubblica Romana[15]. Per quanto l'atmosfera romana e l'incarico gli piacciano (si predisponeva a riformare il sistema educativo), a maggio Napoleone gli chiede di unirsi a lui nella spedizione verso l'Egitto, e a Napoleone Monge non sa dire di no. Ci resterà un anno e mezzo, fino al novembre del 1799 e assumerà anche la carica di presidente dell'Istituto d'Egitto del Cairo.

Nel frattempo, il suo amico Napoleone si dedica alla politica interna: istituisce una nuova forma di governo, il Consolato, e si autonomina Primo Console. Ma non dimentica gli amici: Gaspard Monge viene nominato senatore a vita, ed è solo l'inizio; nel 1804 otterrà la Legion d'Onore, nel 1806 sarà Presidente del Senato, e nel 1808 addirittura nobile, col titolo di Conte di Péluse. In realtà, non sembra che Monge fosse poi particolarmente entusiasta di questa pletora di onori: i suoi sentimenti repubblicani erano ancora vivi e vivaci. Ma certo, l'affetto e la stima per Napoleone erano tali che riuscivano a tacitare i suoi ideali giovanili.

Stima e affetto davvero esagerati, se è vero, come sembra, che la disastrosa campagna di Russia del 1812 e la conseguente sconfitta di Lipsia del 1813 non solo affossarono Napoleone, ma minarono fortemente anche la salute di Monge, che peraltro non era certo presente agli eventi. La fedeltà al còrso non venne mai meno: né quando venne relegato all'Elba – Monge organizzava la difesa di Liegi – né tantomeno dopo i Cento Giorni e la sconfitta finale di Waterloo: Gaspard fu uno dei pochi fedelissimi che continuò a frequentare l'ex-imperatore fino all'ultimo, fino al momento in cui venne imbarcato sul Bellerophon, la nave che lo avrebbe condotto a Sant'Elena[16].

[15] Ovviamente, di quella Repubblica Romana giacobina che resistette appena due anni tra il 1798 e il 1799, non quella pre-risorgimentale di Mazzini, Saffi e Armellini del 1849.

[16] Prima che si scatenino i pignoli: in realtà il Bellerophon fa solo la prima – e breve – tratta del viaggio. Napoleone viene poi trasferito sulla Northumberland, ed è con questa che arriva al suo ultimo approdo.

Con la fine dell'avventura napoleonica, finisce anche la vita di Gaspard Monge: rientra a Parigi solo nel 1816, e la Francia è tornata sotto il governo realista di Luigi XVIII, che difficilmente poteva apprezzare un fervente repubblicano e un ancor più fervente bonapartista: appena due giorni dopo il rientro gli arriva la comunicazione di essere stato espulso dall'Institute de France, e questo è comunque ben poco, visto che viene ripetutamente minacciato di morte. Ma, almeno come scienziato e docente, non doveva essere poi male: quando lascia questa valle di lacrime, il 28 luglio 1818, vige l'assoluto divieto di celebrazioni in suo onore, ma gli studenti del Politecnico disobbediscono, e ne onorano la memoria.

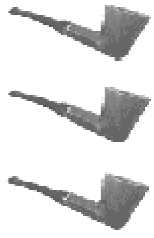
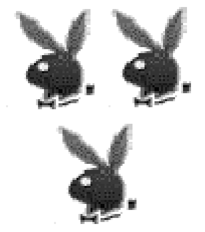
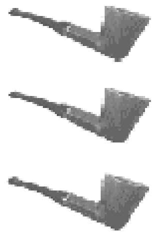
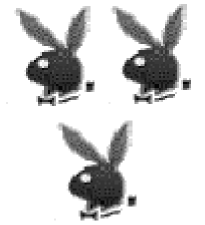
8 *La BEM A601 "Monge"*

La Francia, poi farà lo stesso: il nome di Gaspard Monge è uno dei settantadue che ornano la Tour Eiffel, per celebrarlo come grande matematico; e la marina militare francese ha dato il suo nome ad una nave davvero peculiare: la A601, una BEM (*Bâtiment d'Essais et de Mesures*) ovvero una "nave per prove e misurazioni" del tutto unica per la marina francese e assai rara anche nel resto del mondo: solo americani, russi e cinesi ne hanno di analoghe; ha il compito principale di controllare, analizzare e prevedere le rotte dei missili in volo.

Noi ci limitiamo a celebrarlo con quest'articolo, soprattutto per quanto ha fatto per la matematica. Per il resto, anche considerando il fatto che la maggior parte delle opere d'arte stipate in quel convoglio di cento carri sono ritornate, o volontariamente lasciate in dono al Louvre, ci piace ricordare che, vedendo l'Estasi di Santa Cecilia di Raffaello, scriveva alla moglie Cathérine che il volto di Cecilia gli pareva tanto bello che rischiava di innamorarsene.

Era il tipo che avrebbe senza dubbio rubato anche la Gioconda, non fosse già stata in terra di Francia: ma sembra anche il tipo che lo avrebbe fatto con rispetto, seguendo i suoi – per quanto forse discutibili – ideali.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Un problema di quelli "belli" [1]			
Un problema di quelli "belli" [2]			

2.1 Un problema di quelli "belli" [1]

Vi abbiamo già detto che i nostri problemi preferiti sono quelli che, ai tempi dell'Università, chiamavamo "*Dato nulla, trovare tutto*", ossia quei problemi nei quali apparentemente non avete nessun dato e vi viene chiesto di trovare un risultato.

Purtroppo (viviamo in una valle di lacrime) questi problemi sono decisamente rari, e grande è la nostra soddisfazione quando riusciamo a trovarne uno da presentarvi; va anche detto che se fossero diffusi come le pratoline a primavera forse ne ricaveremmo meno piacere, quindi il "purtroppo" a inizio di questa frase si può togliere. Comunque, se ne conoscete qualcuno, passatecelo privatamente (completo di soluzione): promesso, riconosceremo l'origine citandovi nel testo del problema.

Ma veniamo al problema.

Siete uno dei due partecipanti a un nuovo, emozionante gioco, con poche ma strane regole.

1. A ognuno dei partecipanti, chiusi in sale diverse perfettamente isolate, viene detto un numero (intero, maggiore di zero) e viene comunicato che i due numeri sono in sequenza.
2. I due partecipanti vengono fatti entrare in una stanza, fatti sedere su due sedie e, sul muro, parte un cronometro che emette un suono esattamente ogni minuto.
3. È vietata qualsiasi forma di comunicazione tra i partecipanti, ma ognuno di loro vede e sente l'altro partecipante.
4. I due partecipanti stanno seduti sin quando uno dei due non è convinto di conoscere il numero dell'altro: a quel punto, aspetta lo scoccare del minuto ed enuncia il numero (dell'altro).
5. È permesso un solo tentativo (in due, non "uno ciascuno"): se chi parla indovina, entrambi i partecipanti ricevono un grosso premio; se chi parla sbaglia, niente a nessuno dei due, e si pagano la trasferta.

Bene, voi siete uno dei partecipanti, e l'altro è una cosa che sembra avere il cervello di Einstein, il fisico di Thor e l'amabilità di un istrice sotto anfetamina. No, non potete scappare.

Che cosa fate?

2.2 Un problema di quelli "belli" [2]

Ma nell'altro senso: tutte le ambientazioni che ci sono venute in mente lo rovinano, e quindi ve lo diamo in forma "da libro di testo". A titolo di scusante, vi diciamo che ci risulta essere un *sangaku*, e che ci è sembrato apprezzaste questi ultimi "di per sé", anche senza le nostre farneticazioni. No, non è pigrizia, e se qualcuno riesce a trovare un'ambientazione, la mettiamo nelle *Soluzioni & Note*, al posto della versione "scarna" che pubblichiamo di solito. Bene, sei righe di introduzione, sono anche troppe. Andiamo all'enunciato.

> *Un poligono è iscritto in un cerchio ed è triangolato da un insieme di sue diagonali non intersecantesi. In ognuno dei triangoli risultanti è tracciato il cerchio inscritto. Mostrate che la somma dei raggi dei cerchi inscritti è indipendente dalla triangolazione.*

E, come disse un nostro prof di fronte all'equazione di Dirac (quella che la gente si tatua addosso sbagliata): "...ma non è bellissima?".

3. Bungee Jumpers

È dato un insieme $\boldsymbol{S}$ di $2n + 3$ punti sul piano, tali che non ne esistono tre collineari o quattro co-circolari. Dimostrare che è sempre possibile individuare un cerchio $\boldsymbol{C}$ passante per tre e solo tre punti di $\boldsymbol{S}$ per cui n dei punti restanti sono all'interno del cerchio e i restanti n all'esterno.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Ci capita di fare conferenze. Non tanto spesso, a dire la verità: e per fortuna, tutto sommato… quando diciamo e ripetiamo di essere dilettanti, non è solo per falsa modestia; è anche e soprattutto perché per non far divorziare Pranzo e Cena siamo costretti a lavorare, e per fare le conferenze prendiamo ferie. A noi piacerebbe un sacco fare tre conferenze alla settimana, ma finché il nostro monte di giorni ferie non raggiunge quota 200, la cosa resta difficile.

Abbiamo detto "per fortuna"? Beh, non credeteci. L'abbiamo detto solo nel caso leggessero queste righe i datori di lavoro: l'unico avverbio legittimo, in realtà, è "purtroppo"; perché andare in giro per manifestazioni, forum, convegni è cosa davvero piacevole, e gratificante. E si conosce un sacco di bella gente. Tanto per dire: abbiamo ripetuto fino alla nausea che questa isterica rubrica di recensioni recensisce solo libri scritti o comunque lavorati da "amici di RM", ma non abbiamo mai ricordato che "gli amici di RM", quasi sempre, sono amici che si sono trovati proprio grazie a RM stesso. Ad esempio, come avremmo mai conosciuto Andrea Capozucca se non ci avesse invitato in quel di Porto Sant'Elpidio per la sua invenzione di Math&Co? È successo un bel po' di tempo fa[17], ma ce ne ricordiamo ancora benissimo: il clima meteorologico forse non è stato dei migliori, ma certo lo ha fatto per compensare tutti gli altri aspetti. Il posto era magnifico, le conferenze un vero spettacolo (e no, non lo diciamo perché una l'abbiamo tenuta noi), e soprattutto le persone che si incontravano erano tutte eccezionali, come Stefano Papetti, che trovava la matematica nell'arte, o Anita Eusebi, che aveva allestito una mostra sui giochi matematici incantevole quasi quanto lei.

E, naturalmente, Andrea Capozucca. A vederlo, viene da pensare che ha più l'aspetto del cantante di blues che del matematico, ed è una scoperta piacevolissima venire a sapere che non ci si è sbagliati di tanto. Oh, è un matematico, certo: la insegna, la divulga, la racconta, e prova a portarla nei posti più impensati. Ma non è solo questo, a dimostrazione che chi ama la matematica ama di solito anche il mondo, l'arte, la musica e gran parte delle creazioni dell'uomo. Andrea, che era già un amico prima ancora di vederlo di persona, insomma.

[17] Era l'11 novembre 2012, per la precisione.

E insomma, Andrea ha scritto un libro. Lo ha scritto insieme a Barbara Cerquetti, che non conosciamo, ma che deve essere un elemento cruciale della coppia autoriale, visto che il suo nome campeggia come primo dei due, nonostante il parere contrario dell'ordine alfabetico. O forse è Andrea che ha voluto fare il cavaliere fino all'ultimo, chissà… è proprio il tipo da farlo.

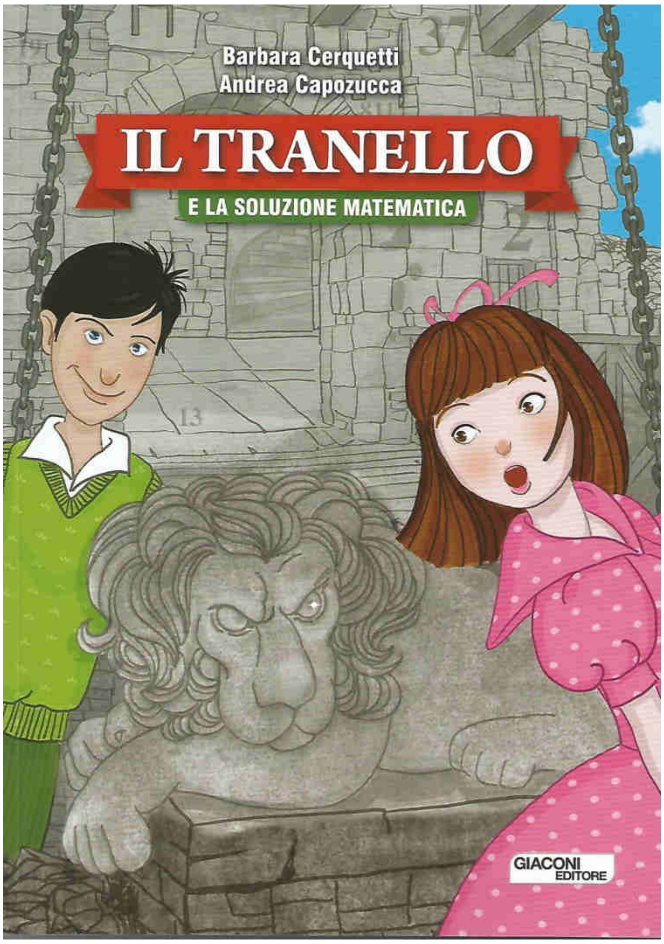
E insomma, Barbara e Andrea hanno scritto un libro, e ce l'hanno spedito. Potevamo non recensirlo?

4.1 Il Tranello

«Non cadere mai nel tranello della tua insicurezza. Il pregiudizio verso te stessa e verso il mondo sarà sempre il tuo peggiore nemico.»

C'è una cosa che noi di Rudi Mathematici non sappiamo proprio fare. Anzi, chiariamo meglio: le cose che non sappiamo fare sono davvero tante, certamente misurabili soltanto con gli Aleph di Cantor, ma ce n'è una in particolare, una che in molti credono che noi potremmo fare, proprio in qualità di "Rudi Mathematici", e che pertanto ci chiedono spesso di farla. Ma noi niente, decliniamo sempre con timore, paura, e soprattutto con l'incrollabile certezza che no, non ne saremmo davvero capaci.

Scrivere per i ragazzi. "Perché non fate un RM per i bambini delle elementari?"; "Che ne dite fare un giornalino destinato ai ragazzi, per avvicinarli ai diletti della matematica?"; "Avete mai pensato di fare dei numeri speciali appositamente per i giovani?"; sono domande che ci arrivano con frequenza e regolarità impressionanti. Di solito rispondiamo con una assoluta verità, ovvero che non ne abbiamo il tempo: ed è verissimo, ormai facciamo una fatica incredibile anche solo a comporre un "normale" RM al mese. Ma anche le verità assolute possono servire da alibi: perché, in realtà, anche avendone il tempo, non ne saremmo capaci.



Scrivere per i ragazzi è una cosa difficile. Gli interessi di una signorina di quinta elementare sono diversi da quelli di un quarantenne: il linguaggio di un tredicenne, il suo senso dello humour non coincidono con quello di ultracinquantenni che sorridono di fronte a un'equazione differenziale. Per questo siamo certi che non riusciremmo a fare qualcosa di adatto: ci manca la lingua, la conoscenza, l'abilità per farlo.

Perché scrivere per ragazzi, insegnare ai ragazzi è cosa seria, e delicata. Bisogna innanzitutto essere chiari, evitare gli ammiccamenti che tanto solleticano gli adulti, eliminare i doppi sensi, scegliere i termini giusti. Bisogna riuscire a ricordare cosa affascina le persone molto giovani, e provare a costruire una storia che agisca su quei tasti. Soprattutto, non bisogna sottovalutare i lettori, perché i lettori giovani sono tutt'altro che stupidi, e meno che mai ingenui: sono lettori che sanno cosa gli piace, ma sono aperti a nuove esperienze; hanno il loro acutissimo senso critico, ma nello stesso tempo sono assai più tolleranti e privi di pregiudizi degli adulti.

E quindi miscelare gli ingredienti per un libro che porta la fascetta "dai 9 anni" è particolarmente impegnativo: non solo per il limite inferiore dell'età, che è bassa, e richiede una grossa capacità di ricordare o, meglio ancora, una vasta e continua esperienza di frequentazione dei novenni; ma anche e soprattutto per l'assenza del limite superiore, perché è giusto e ovvio: oltre i nove anni, deve essere leggibile anche dai novantenni.

Il problema che si devono essere posti gli autori è quindi con molte sfaccettature: parlare di matematica, insegnare matematica, senza scrivere un libro che fosse evidentemente di matematica. Da qui l'idea di una storia, una storia per ragazzi, che tirasse la matematica in ballo quasi per caso; perché in fondo gli autori lo sanno: la matematica è dappertutto, non è impossibile farla filtrare attraverso i pertugi della trama.

Ma potrebbe essere successo anche l'opposto: ovvero il desiderio di raccontare una storia, e solo successivamente decidere di arricchirla con intrighi matematici. Di sicuro, quel si doveva fare era portare avanti due fronti allo stesso tempo, quello narrativo e quello che mostrava aspetti affascinanti della matematica.

E così fluisce il libro: inizia con la storia di Silvia, una ragazzina che vive con la zia e che è contenta di finire in collegio. L'inizio è originale, e lo è ancora di più se si pensa che l'ambientazione non è certo contemporanea: i piccoli lettori sono portati ad immaginare una loro coetanea che vive i giorni difficili subito successiva alla fine della Seconda Guerra Mondiale. Guerra, collegi, bombe: nessun dolcificante narrativo, perché gli autori sanno bene che i ragazzi sanno leggere e immaginare.

Un pizzico di storia, quindi: e subito dopo un bel po' di avventura, quando Silvia incontra Andrea, così diverso da lei per interessi e abitudini, ma che come lei è un ragazzo. E dopo l'avventura anche la magia, perché non c'è contraddizione nel miscelare insieme gli elementi narrativi, quando il lettore è curioso e tollerante come sono i lettori giovani.

Anche perché le tre componenti del racconto, quella storica, quella avventurosa e quella magica fanno da preludio alla componente matematica. Silvia e Andrea devono affrontare prove e indovinelli, per superare gli ostacoli che si frappongono al loro obiettivo. Sono ostacoli che si risolvono con la matematica, ed è per questo che alla narrazione si alternano intermezzi esplicitamente matematici, dove si trovano nomi come quelli di Euclide, Polibio[18], Fibonacci, Piet Hein, Loyd, Gauss, Ada Lovelace, Babbage, e Maurits Cornelius Escher, che ha il privilegio di comparire anche come vero e proprio personaggio del racconto; e si trovano concetti come la crittografia, i numeri primi, la computazione, le tassellature, i polimini, e naturalmente il fascino della ricreazione matematica.

In uno scenario del genere, ha ben poco senso chiedersi se il libro usi il racconto per parlare di matematica o usi la matematica per arricchire il racconto; l'importante è che il lettore di nove o novant'anni capisca che la storia è una, che non c'è incompatibilità tra la letteratura e la scienza. Paradossalmente, persino il ruolo della magia è chiaro, perché è una delle poche entità che oscilla lieta e serena tra entrambe le discipline: la magia letteraria e la magia matematica hanno entrambe il ruolo essenziale di stupire.

E poi, la sensazione finale è che lo scopo ultimo del libro, almeno per quanto riguarda i giovani lettori, non sia in realtà né quello di dirigerli verso la matematica, né verso la narrativa, ma di convincerli qualcosa di più importante. Lo si capisce interrogandosi, a fine lettura, sul titolo del libro: la storia, sia quella matematica sia quella narrativa, non prevede tranelli nel vero senso del termine. Indovinelli, quesiti, misteri, quanti se ne vuole: ma perché chiamare il libro "Il tranello", se di tranelli veri e propri non c'è l'ombra?

[18] Che ben conoscevamo come storico, ma di cui ignoravamo del tutto le sue attività di crittografo (vergogna su di noi!).

Basta tornare indietro di qualche pagina, dopo avere raggiunto la fine: e ritrovare la frase che apre a mo' di citazione quest'articolo. È una frase non troppo importante nella logica del romanzo, ma è cruciale nella missione di un insegnante, e che ci convince che entrambi gli autori lo siano.

Ed è un gran bel messaggio da trasmettere, che si insegni matematica o italiano, chimica o filologia romanza, meccanica industriale o dattilografia.

Titolo	Il Tranello
Sottotitolo	e la soluzione matematica
Autori	Barbara Cerquetti – Andrea Capozucca
Editore	Giaconi Editore
Collana	Piccoli Picchi
Data Pubblicazione	Marzo 2015
Prezzo	10 Euro
ISBN	**9788894122596**
Pagine	208

5. Soluzioni e Note

Maggio.

Non so voi, ma a me i mesi primaverili piacciono molto, mi rimettono in pace con il mondo. E anche se sono sempre in ritardo RM mi mette in pace con il mondo il resto del tempo, così l'effetto primaverile è doppio. Poi maggio è il mese del compleanno del nostro grandissimo Postino Scrittore Tuttofare, che conclude le celebrazioni redazionali annuali in bellezza, così non è che ci sia più molto da dire, siamo occupati.

Veloce velocissimo, un commento dal nostro grande ***Alberto R.***:

> Su RM 206 è stata pubblicata la soluzione di un divertente quesito che si presta a un curioso paradosso. Ripropongo il quesito in salsa schematica:
>
> - Il sig. Rossi ha due figli non gemelli, uno dei quali di nome Marco
> - Marco è **il più grande** dei due
> - Qual è la probabilità che Marco abbia una sorella?
> - Risposta: 1/2
>
> - Il sig. Rossi ha due figli non gemelli, uno dei quali di nome Marco
> - Marco è **il più piccolo** dei due
> - Qual è la probabilità che Marco abbia una sorella?
> - Risposta: 1/2
>
> - Il sig. Rossi ha due figli non gemelli, uno dei quali di nome Marco
> - **Non sappiamo** se Marco è il più grande o il più piccolo dei due
> - Qual è la probabilità che Marco abbia una sorella?
> - Risposta: 2/3
>
> Assurdo! Ma non riesco a capire dov'è l'inghippo. Mi aiutate?

Noi no di certo (soprattutto la sottoscritta…), ma i nostri lettori sono spettacolari per queste cose. Nel frattempo noi andiamo avanti.

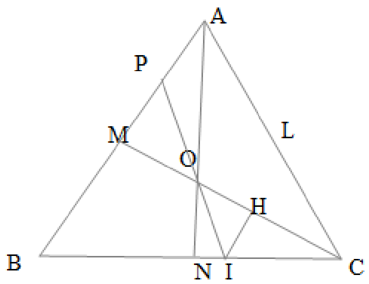
5.1 [207]

5.1.1 Probabilmente, un giardino bonsai

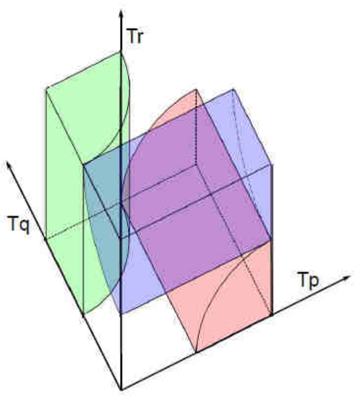
Il primo problema del mese scorso ha avuto un successo esagerato! Siccome è probabilistico, limito i tagli del testo al minimo, per non perdere qualche dettaglio che io non avevo capito essere importante…

> *Supponiamo che sul nostro campo di tiro vengano posti a dimora Chinotti & Giuseppi, ai vertici di un triangolo equilatero. Scegliamo quindi tre punti a caso (distribuzione uniforme), uno per ogni lato del triangolo testé definito, e tracciamo il triangolo avente come vertici questi tre punti. Il ciuffo di insalata dei prati che svetta rigoglioso nel centro del triangolo di Chinotti e Giuseppi, con che probabilità è all'interno del triangolo "casuale" che abbiamo costruito?*

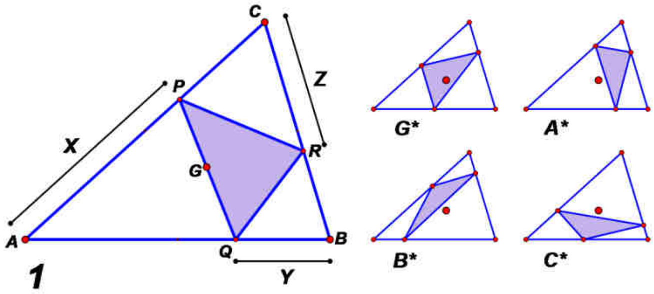
Bene. Il Capo ha avuto il coraggio di mettere la probabilità in un problema geometrico, non ho parole. Vediamo di andare per ordine e cominciamo con ***NickBe***:

> Chiamiamo ABC il triangolo equilatero esterno. Chiamiamo M, N, L i punti medi di AB, BC, CA, rispettivamente, ed O il centro, come in figura. Sia *k* la lunghezza del lato del triangolo ABC.
>
> 
>
>
> Se scegliamo un punto P su AM, un punto Q su NC che sia compreso tra C e l'intersezione I di PO con NC ed un punto qualunque R su AC, il triangolo PQR non contiene O al suo interno.
>
> Sia allora PROB(AM,NC,AC) la probabilità che, scelti i tre punti a caso sui lati di ABC, il punto P su AB cada in AM, il punto Q su BC sia compreso tra C ed I ed il punto R su AC sia qualunque.
>
> Definiamo analogamente PROB(BM, LC, BC) e PROB(BN, AL, AB). Ovviamente, per simmetria, PROB(BM, LC, BC) = PROB(BN, AL, AB) = PROB(AM, NC, AC).
>
> Allora la probabilità che stiamo cercando (cioè che O cada dentro al triangolo PQR) è data da 1 – PROB(BM, LC, BC) – PROB(BN, AL, AB) – PROB(AM, NC, AC) =
>
> 1 – 3 PROB(AM, NC, AC).
>
> Se la lunghezza di PA è x, la lunghezza di IC risulta essere $(k - 2x) / (2 - 3x/k)$.
>
> Per dimostrarlo si tracci la perpendicolare da I alla retta MO e sia H il punto di intersezione. Si sfrutta poi la similitudine tra HIO ed MOP e il fatto che le lunghezze di MC ed MA sono note (ABC è triangolo equilatero)...
>
> Dunque PROB(AM, NC, AC) =
>
> $$\frac{1}{k^3}\int_0^k\int_0^{k/2}\int_0^{(k-2x)/(2-3x/k)} 1\,dz\,dx\,dy$$
>
> Si calcola facilmente che il valore della precedente espressione è dato da
>
> 1/3 – Ln(4)/9
>
> (dove Ln è il logaritmo naturale). Allora la probabilità che cercavamo è
>
> 1 – 3 (1/3 – Ln(4)/9) = Ln(4)/3,
>
> cioè circa 0.462.

Niente male, vero? Allo stesso risultato giunge ***Rockini***, che ci ha mandato una soluzione in formati mai visti prima, o forse solo in una nuova versione di latex. Ci scusiamo in anticipo se ci siamo persi qualcosa nella ri-formattazione:

> La probabilità è 2/3 ln 2 (circa 0,4621, meno della metà, anche se a prima vista sembrerebbe di più). Il triangolo di violette contiene il tarassaco, solo se i suoi tre lati sono "dalla parte giusta" rispetto al centro.
>
> Prendiamo i vertici consecutivi P e Q: il segmento PQ sta dalla "parte giusta" solo se Q è più vicino a B di QMax, intersezione della retta PO sul segmento BC.
>
> Supponiamo di parametrizzare i punti P, Q ed R con i parametri da 0 ad 1: T_p, T_q e T_r (tutti in senso antiorario). Posizioniamo A in (0; 0), B in (1; 0) e C in (1/2; √3/2); O sta ovviamente in (1/2; √3/6). La retta PQ ha equazione
>
> (0; 0) + T_p · (1; 0) + *k* · [(1/2; √3/6) – T_p · (1; 0)],
>
> mentre il segmento BC ha equazione
>
> (1; 0) + T_q · (–1/2; √3/2).
>
> Intersecando le due equazioni e risolvendo per T_q si ottiene:
>
> $$T_{qMax} = \frac{T_p - 1}{3T_p - 2} \quad (1)$$
>
> che corrisponde al massimo valore che T_q può assumere affinché il centro sia contenuto nel triangolo, cioè al parametro di qMax. Questo vale solo quando P si trova nella metà sinistra del segmento AB (cioè quando T_q è compreso fra 0 ed 1/2), se invece P supera la metà, il triangolo contiene sempre il centro.
>
> Consideriamo il nostro spazio probabilizzato cubico (T_p; T_q; T_r). Quanto misura la parte da eliminare, tenendo conto solo del vincolo PQ, cioè la probabilità che il centro NON sia contenuto nel triangolo, considerando solo il lato PQ? Indipendentemente da T_r, vale la superficie sopra la funzione (1) moltiplicata per 1, cioè:
>
> $$1 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} 1 - \frac{x-1}{3x-2}dx = \frac{1}{3} - \frac{2}{9}\ln 2 \quad (2)$$
>
> Un ragionamento analogo può essere fatto per gli altri due lati del triangolo casuale, ottenendo 3 regioni di esclusione. Le tre regioni sono disgiunte (vedi prossima figura); sono infatti contenute in quadranti diversi. Si conclude quindi, che la probabilità finale è 1 – 3 volte il valore (2): 1 – 3 (1/3 – 2/9 ln 2) = 2/3 ln 2.
>
> 
>
>
> *Figura 1: Zone dello spazio probabilizzato, per cui il triangolo non contiene il centro. Ad ogni colore corrisponde il vincolo relativo ad un lato del triangolo. Le zono sono disgiunte.*
>
> P.S.: Tentando una qualche generalizzazione ho pensato al quadrato (ed al pentagono), ma la soluzione risulta un po' troppo facile...

Ecco, le zone dello spazio probabilizzato ci sono piaciute molto. Abbiamo tagliato un pezzettino con il programma C di verifica, e forse qualcos'altro, ma speriamo che la parte importante non si sia persa. Veniamo ora alla versione di ***trentatre***:

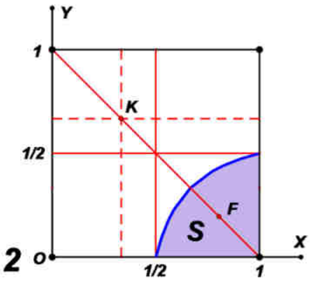
> Nel problema si parla di un triangolo equilatero e del suo centro. Ma la probabilità cercata è la stessa per un triangolo qualsiasi e il suo baricentro. Infatti qualsiasi triangolo può essere trasformato in equilatero (o anche in rettangolo) con due dilatazioni lineari; ma una dilatazione lineare non cambia i rapporti fra le distanze, e quindi non cambia la posizione relativa del triangolo inscritto e i punti di mezzo dei lati (da cui le mediane e il baricentro); la proprietà del triangolo inscritto di contenere o meno il baricentro è invariante.
>
> Anziché partire da un triangolo speciale (equilatero o rettangolo), mi attengo al caso generale.
>
> 
>
>
> In fig. 1
>
> - ABC : triangolo generico
> - G : baricentro
> - PQR : triangolo inscritto in ABC, con P, Q, R scelti a caso sui lati
> - X, Y, Z : distanze relative, rapportate ai lati di P, Q, R da A, B, C .
>
> I possibili triangoli PQR possono essere divisi in 4 insiemi (a destra in figura)
>
> - G^* : insieme dei triangoli con G all'interno
> - A^*, B^*, C^* : insiemi dei triangoli con G esterno dalla parte del vertice A, B, C.
>
> Questi insiemi sono mutuamente esclusivi, e per le relative probabilità si ha
>
> [1] $p_G + p_A + p_B + p_C = 1$.
>
> In fig. 1 il lato PQ passa per G (PQR è un triangolo di confine fra G^* e A^*); questo determina fra X, Y la relazione[19]
>
> [2] $3XY - 2X - Y + 1 = 0$ da cui
>
> [3] $Y = (2X-1)/(3X-1)$ valida nell'intervallo $1/2 \le X \le 1$ (P e Q devono restare sui lati)
>
> - la [2] è una iperbole equilatera (fig. 2 con K : centro, F : fuoco)

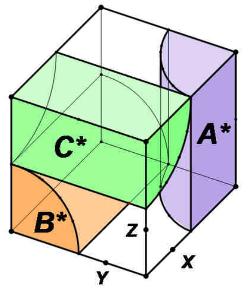
[19] la [2] si ottiene imponendo che P,Q,G siano allineati; il modo più semplice è usare le coordinate baricentriche, cioè

$$P = (1-X)\cdot A + X \cdot C \rightarrow P = |1-X : 0 : X|$$
$$Q = (1-Y)\cdot B + Y \cdot A \rightarrow Q = |Y : 1-Y : 0|$$
$$G = |1:1:1|$$

P, Q, G sono allineati se

$$Det\begin{vmatrix} 1-X & 0 & X \\ Y & 1-Y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2 

3 

- dai valori di X, Y si vede (fig. 1) che i punti nella zona S corrispondono all'insieme A^*
- ogni triangolo PQR è determinato dalla una terna di valori (X,Y,Z) scelti nell'intervallo [0…1], ed è quindi un punto nel cubo unitario in fig. 3; la fig. 2 è quindi la faccia XY del cubo, e poiché tutti i valori di Z sono ammessi, l'insieme A^* è il volume indicato; poiché le X, Y, Z sono distribuite in modo uniforme sui lati, il volume è anche la probabilità, cioè $p_A = S$ che si ottiene da [3]

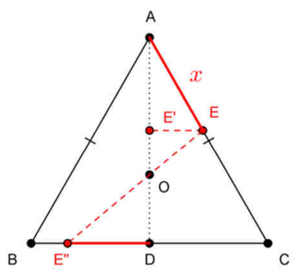
$$[4]\quad S = \int_{1/2}^{1} Y\,dX = \int_{1/2}^{1} \frac{2X-1}{3X-1}\,dX = \frac{3-\ln 4}{9}.$$

- nell'analogo calcolo per B^* e C^*, la relazione [2] - che non dipende da ABC - si trasforma con la permutazione ciclica $(X \to Y \to Z)$ e il valore [4] non cambia; si ha quindi $p_A = p_B = p_C = S$
- la fig. 3 riporta i volumi dei 4 insiemi (G^* è la parte del cubo che resta bianca) e da [1] si ha la probabilità cercata

$$\boxed{P_G = 1 - 3S = \frac{\ln 4}{3} = 0.4620981}.$$

Avete notato che un disegno verso la fine richiama un altro visto prima? I nostri lettori sono sulla stessa lunghezza d'onda? O hanno finalmente trovato la chiave per interpretare i quesiti del Capo? Del resto guardate che cosa succede, ci scrive perfino il ***Panurgo***:

> Con riferimento alla figura seguente, dato il punto E sul lato AC (del triangolo equilatero di lato unitario ABC), il triangolo ottenuto dai tre punti scelti sui tre lati non conterrà il centro O se il punto G[20], scelto sul lato BC, cade a sinistra del punto E″

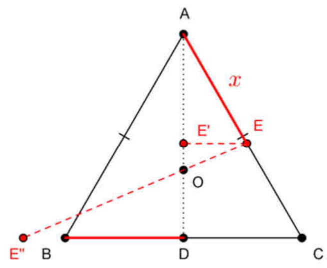


> Basta un po' di geometria elementare per trovare la lunghezza del segmento E″D in funzione di x: $\overline{E''D} : \overline{EE'} = \overline{OD} : \overline{OE'}$ con $\overline{EE'} = 1/2$, $\overline{OE'} = \sqrt{3}/3 - \sqrt{3}x/2$ e $\overline{OD} = \sqrt{3}/6$. Ovvero

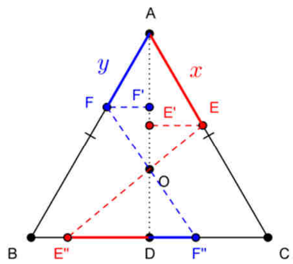
[20] Niente ironia, per favore…

$$\overline{E''D} = \frac{x}{4-6x}$$

Il punto E dista x dal punto A: se fosse $x > 1/2$ allora il punto E'' cadrebbe fuori da BC non ponendo limiti a sinistra per la scelta del punto G



Le stesse considerazioni valgono per il punto F, giacente su AB e distante y da A, che impone un limite a destra ai punti di BC che, insieme a E e F, determinano un triangolo contenente O



ovviamente, con $\overline{DF''} = y/(4-6y)$.

Abbiamo quindi quattro situazioni: per $x, y \in [0;1/2]$ la frequenza con cui si chiude un triangolo che contenga il centro di ABC è pari a

$$f_1 = \frac{x}{4-6x} + \frac{y}{4-6y}$$

per $x \in [0;1/2]$ e $y \in [1/2;1]$

$$f_2 = \frac{x}{4-6x} + \frac{1}{2}$$

per $x \in [0;1/2]$ e $y \in [1/2;1]$

$$f_3 = \frac{1}{2} + \frac{y}{4-6y}$$

e, per $x, y \in [1/2;1]$, $f_4 = 1$

Per tener conto di tutti i possibili valori di x e y dobbiamo calcolare gli integrali

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{4-6x} + \frac{y}{4-6y} \right) dxdy$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{4-6x} + \frac{1}{2} \right) dxdy$$

$$I_3 = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{4-6y}\right)dxdy$$

e

$$I_4 = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{1} dxdy = \frac{1}{4}$$

Facciamo uso del fatto che

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{4-6t}dt = \left[-\frac{t}{6}-\frac{1}{9}\log(4-6t)\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{12}+\frac{2}{9}\log 2 = \frac{8\log 2-3}{36}$$

per ottenere

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{4-6x}+\frac{y}{4-6y}\right)dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{4-6x}dx\right)dy + \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{y}{4-6y}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}dx\right)dy =$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{8\log 2-3}{36}dy + \frac{8\log 2-3}{36}\int_0^{\frac{1}{2}}dx = \frac{8\log 2-3}{36}$$

e

$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x}{4-6x}+\frac{1}{2}\right)dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{8\log 2-3}{36}+\frac{1}{4}\right)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{8\log 2+6}{36}\right) = \frac{4\log 2+3}{36}$$

mentre $I_3 = I_2$ per la simmetria tra *x* e *y*.

La frequenza dei punti E, su AC, F, su AB, e G, su BC, che formano un triangolo contenente il centro di ABC è

$$I_1+I_2+I_3+I_4 = \frac{4\log 2+3}{9} = 0{,}641\ldots$$

E con "frequenza" intendo, dato l'insieme delle terne di punti sui tre lati del triangolo ABC ovvero delle terne ordinate di numeri reali (x,y,z) con $x,y,z\in[0;1]$, la misura del sottoinsieme delle terne che producono un triangolo contenente O.

Possiamo poi, se vogliamo, considerare *x*, *y* e *z* come campionamento da tre variabili causali uniformi tra 0 e 1 e assegnare la misura trovata come probabilità, ma non è strettamente necessario.

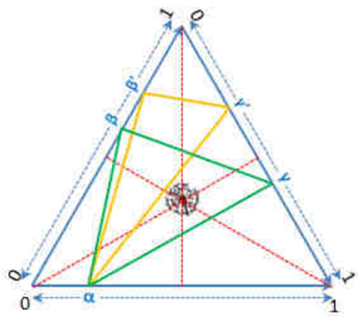
L'avevo detto io che la probabilità non era strettamente necessaria… ma il Capo non mi ascolta mai. Non possiamo pubblicare tutte le soluzioni ricevute, ma sappiate che abbiamo imparato nuovi nomi per il tarassaco, per esempio ***Sawdust*** (mentre ci invia una bella soluzione in formato regalo) ci informa della forma francese di *pissenlit*. Altre le trovate nell'ultima soluzione, che ho trovato irresistibile per un paio di dettagli, che probabilmente capirete leggendola. A proposito delle estensioni, ***Franco57*** scrive ancora:

> L'estensione ad un triangolo qualsiasi mi sembra semplice (oppure ho preso un abbaglio col primo sole di primavera, quello che temo abbia già fatto fiorire il ciuffo baricentrico di tarassaco): una trasformazione affine porta un triangolo equilatero in un qualsiasi altro triangolo (trasformando il baricentro nel nuovo baricentro, ovviamente) e mantiene le proporzioni tra i segmenti su una retta (non in generale ma su una retta sì), perciò una distribuzione uniforme su un lato rimane tale anche sul trasformato, quindi la probabilità calcolata vale per ogni triangolo.

No, niente abbaglio, basta leggere più sopra lo stesso commento di ***trentatre***. Ma ecco la soluzione di ***BR1***, l'originale:

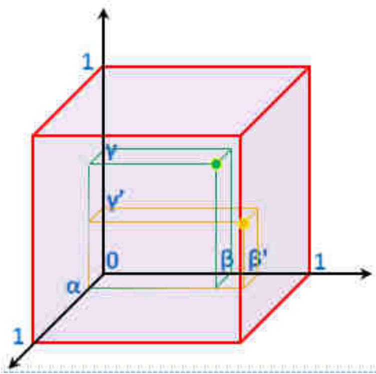
Inizierei dicendo che mai pianta mi fu più invisa del *Tarassaco*[21]; questa infesta con deliberata ed ostinata malignità gli interstizi fra i piastrelloni in graniglia che pavimentano il vialetto d'accesso alla cucina di casa mia, ed i cui malefici fittoni risultano praticamente inestirpabili, se non a costo di dolorose escoriazioni alle dita. E però le escoriazioni mai pagano come risultato, in quanto le trionfanti pianticelle di *Tarassaco* continuano a spuntare dove loro più pare opportuno, beffarde ed indifferenti nei confronti dei miei patetici tentativi di estirpazione, e dello spruzzare diserbante negli interstizi suddetti…

Per vendicarmi personalmente delle angherie del *Tarassaco*, talora ne assecondo l'inevitabile presenza sfruttandolo come insalatina (le foglie sono un po' coriacee, ed amarognole, come a me piace l'insalata), ma stavolta soprattutto approfitto del quesito di **RM207** per confinare almeno una pianticella nel centro di un bel triangolo blu equilatero (chiamiamolo triangolo *base*) e, con probabilità P_T da valutare, anche all'interno di un secondo *altro* triangolo…



La faccenda è riassunta nella **Figura 1 (il Tarassaco confinato e no)** qui a lato: posto pari ad **1** il lato del triangolo *base* equilatero blu *fisso*[22], l'insieme completo di tutti i possibili *altri* triangoli aventi vertici sui lati di quello *base* blu può essere definito facendo variare uniformemente, ed indipendentemente, i tre parametri α, β e γ nell'intervallo [0, 1].

Possiamo immaginare di rappresentare tutti gli *altri* triangoli di tale insieme come i punti appartenenti al cubo di spigolo *1 Rudo*, posizionato con un vertice nell'origine dello spazio cartesiano tridimensionale di assi α, β e γ, come nella **Figura 2 (lo *spazio* completo dei triangoli probabilistici)** a destra.



Nel cubo violetto, ogni singolo punto rappresenta uno dei possibili *altri* triangoli da inserire in quello *base*; tutti questi punti (ed i conseguenti *altri* triangoli) sono da considerarsi equivalenti fra loro, in base all'affermazione del quesito: "*Scegliamo quindi tre punti a caso (distribuzione uniforme! Dai, non sto barando), uno per ogni lato del triangolo testé definito*". Ed il cubo violetto li comprende tutti; ce ne sono lì due tipi, di punti:

- i punti del cubo violetto per cui l'*altro* triangolo ad esso associato *contiene* il *Tarassaco*, come ad esempio quello verde di **Figura 1**, rappresentato dal pallino anch'esso verde in **Figura 2**;

[21] *Tarassaco*, detto anche (da Wikipedia) *dente di leone*, *dente di cane*, *soffione*, *cicoria selvatica*, *cicoria asinina*, *grugno di porco*, *ingrassaporci*, *insalata di porci*, *pisciacane*, *lappa*, *missinina*, *piscialletto*, *girasole dei prati*; da altre fonti, *piscialetto* (una sola "*l*"), *bofarella*, *soffiùn*, *cicoria selvaggia*, *cicoria matta*, *cicoria burda*, *susciùn*, *radiciùn*, *virasoul*, *cicoria mata*, *brusa-oci*, *pessalèt*, *girasole selvatico*, *cascigno*, *maroglia*, *macogliola*, *taràssacu*, *zicoria burda*, *denti de cagn*, *dentinciagn*, *zicoria*, eccetera eccetera eccetera… E poi *insalata dei prati*, come doverosamente da **RM207**. Quando le mie due figliole erano bimbe (*many years ago*…) lo chiamavamo *fiore soffia*…

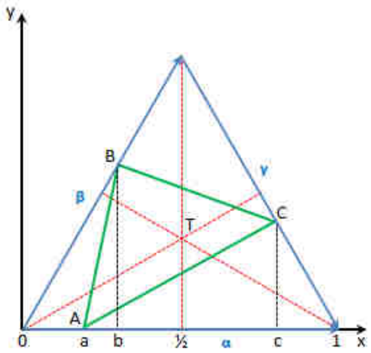
[22] Ai cui vertici, *Chinotti & Giuseppi*… L'unità di misura sarà ancora *1 Rudo*, come da **RM207**…

- i punti del cubo violetto per cui l'*altro* triangolo ad esso associato ***non contiene*** il *Tarassaco*, come ad esempio quello arancio di **Figura 1**, rappresentato ovviamente dal pallino arancio in **Figura 2**

Vi è corrispondenza biunivoca fra i punti del cubo violetto e tutti i possibili *altri* triangoli; allora una *misura* della *quantità totale* di *altri* triangoli (verdi o arancio che siano) è assimilabile al *volume* del cubo violetto, che è ovviamente pari ad ***1** Rudo cubo*.

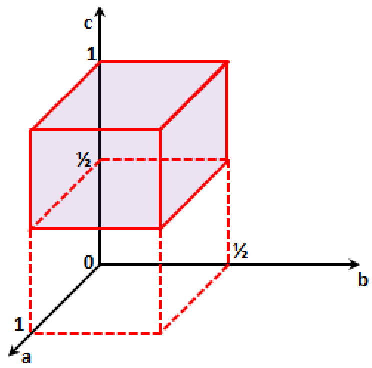
I punti corrispondenti ai soli *altri* triangoli *che contengono il Tarassaco*, quindi i soli verdi, formeranno una figura solida interna al cubo violetto; ed il *volume* di tale solido verde, rapportato al volume unitario complessivo, rappresenterà la probabilità cercata P_T di confinare il *Tarassaco*…

***



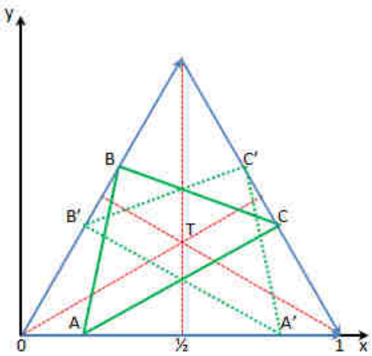
Per calcolare il volume del solido verde, introduciamo un sistema bidimensionale di assi cartesiani sovrapposto al triangolo *base* come illustrato in **Figura 3 (i triangoli cartesianizzati)** qui a destra, dove è mostrato fra l'altro un generico *altro* triangolo verde di vertici A, B e C. Anziché utilizzare come variabili le posizioni α, β e γ dei tre vertici lungo i lati orientati del triangolo *base*, adotteremo invece le proiezioni a, b e c di tali vertici lungo l'asse x; mentre le prime tre quantità α, β e γ variavano nell'intervallo [0, 1], quelle adesso definite varieranno corrispondentemente come segue:

$$1)\begin{cases} \alpha \in [0,1] \rightarrow a \in [0,1] \\ \beta \in [0,1] \rightarrow b \in [0,1/2] \\ \gamma \in [0,1] \rightarrow c \in [1/2,1] \end{cases}$$



Di nuovo, il variare di a, b e c nei rispettivi intervalli coprirà l'intero insieme di possibili *altri* triangoli verdi e arancio, e il *volume* complessivo contenente lo *spazio* degli *altri* triangoli si trasformerà nel parallelepipedo *galleggiante* mostrato qui a destra in **Figura 4 (lo *spazio* dei triangoli *compresso*)**. Tale parallelepipedo ha *volume* ¼ se misurato nelle unità adottate sugli assi a, b e c; ma *attenzione*! Occorre notare che (poiché ad ogni punto degli intervalli di variazione di b e c corrisponde biunivocamente un punto degli intervalli di β e γ) le distanze sugli assi b e c vanno adesso misurate in *Birudi*[23], per cui il volume del parallelepipedo resta pari ad ***1** Rudo cubo*.

In sostanza, sugli assi b e c si è operata una *compressione di scala*, senza alterare il valore complessivo dei volumi.



Consideriamo adesso la **Figura 5 (simmetria a centrocampo)** qui sotto; sono mostrati uno qualsiasi degli *altri* triangoli, ABC, ed il suo speculare riflesso rispetto all'asse verticale di equazione x = ½, cioè A'B'C'. Se il primo è verde – come in figura – allora sarà tale anche il secondo;

[23] Ove, of course, ***1** Birudo* = ***2** Rudi*…

se viceversa il primo fosse stato arancio, lo stesso sarebbe capitato anche all'altro. Si può dire che a ciascun *altro* triangolo caratterizzato dai parametri (a, b, c) ne corrisponde un secondo, rappresentabile tramite le coordinate (a', b', c'), tale che il colore verde o arancio è lo stesso per entrambe, e si ha:

$$2)\begin{cases} a' = 1 - a \\ b' = 1 - c \\ c' = 1 - b \end{cases}$$

Ciò vuol dire che non è necessario analizzare *tutti* i valori di **a** dell'intervallo **[0, 1]**, ma basta studiare cosa accade nella prima metà di tale intervallo; proseguendo oltre il valore a = ½, si ritrovano infatti tutti gli stessi *altri* triangoli, semplicemente ribaltati attorno al suddetto asse di simmetria, verdi o arancio che siano.

Possiamo quindi tagliare a metà il parallelepipedo di **Figura 4**, lungo il piano a = ½. Nello spazio {a, b, c}, questo ridiventa un cubo con spigoli lunghi ½ ma, *ancora attenzione*! Il volume espresso in *Rudi cubi* stavolta ***si dimezza*** e diventa ½ *Rudo cubo*, poiché adesso non stiamo più operando una *compressione* di coordinate, bensì una concreta riduzione del campo d'indagine.

Quindi nel seguito la ricerca del volume totale occupato dai triangoli verdi nello spazio {a, b, c} si limiterà agli intervalli:

$$3)\begin{cases} a \in [0, 1/2] \\ b \in [0, 1/2] \\ c \in [1/2, 1] \end{cases}$$

In tale *volume dimezzato*, troveremo esattamente la metà di triangoli verdi rispetto al volume complessivo, per cui il rapporto fra il volume occupato dai questi (chiamiamolo $\mathbf{V_V}$, *Volume Verde*) e quello effettivamente esplorato (V_E, *Volume Esplorato*) non cambierà, fornendo ancora la probabilità P_T di confinare il *Tarassaco*. Per V_E, tutto lo sproloquio di cui sopra ha portato a dire che esso vale ½ *Rudo cubo*; per $\mathbf{V_V}$, si può scrivere invece che:

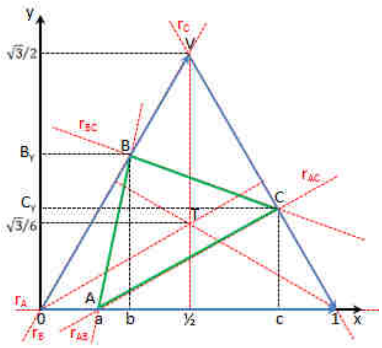
$$4) V_V = \iiint_{\substack{a=0 \\ c=1/2 \\ b=0}}^{\substack{b=1/2 \\ c=1 \\ a=1/2}} Green(a, b, c)\, db \cdot dc \cdot da$$

Dove la funzione *Green* è definita come segue:

$$5)\begin{cases} Green(a, b, c) = 0 \text{ se il Tarassaco } T \text{ si trova} \\ \quad \text{all'esterno dal triangolo } ABC \\ Green(a, b, c) = 1 \text{ se il Tarassaco } T \text{ si trova} \\ \text{all'interno o sul perimetro del triangolo } ABC \end{cases}.$$

Va da sé che le coordinate del *Tarassaco* T nel sistema di riferimento x-y sono date da:

$$6) T \equiv \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$



Nell'affrontare la 4), si è scelto di integrare analiticamente prima *lungo b*, poi *lungo c* e quindi infine *lungo a*; questa scelta si giustificherà nel seguito analizzando gli intervalli di integrazione.

Cominciamo col considerare la **Figura 6 (il *teepee*)** qui a destra; *qualitativamente* si intuisce che i lati AC e BC dell'*altro* triangolo taglieranno ***sempre*** entrambi l'asse di simmetria di equazione x = ½, mentre il lato AB ***mai***; inoltre il lato BC si troverà ***sempre*** *al di sopra* di quello AC. Quindi, si può dire che il *Tarassaco* risulterà *confinato* quando il punto di BC di ascissa ½ si trova *al di sopra* di T e, ***contemporaneamente***, il punto di AC di ascissa ½ si trova *al di sotto* di T.

Dette adesso, come da **Figura 6**, r_{AC} ed r_{BC} le rette su cui giacciono i lati AC e BC dell'*altro* triangolo, la definizione della funzione *Green* può allora essere riformulata come segue:

$$7)\begin{cases} Green(a,b,c) = 0 \; se \; \left\{\left[r_{AC}\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{\sqrt{3}}{6}\right] OR \left[r_{BC}\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\sqrt{3}}{6}\right]\right\} \\ Green(a,b,c) = 1 \; se \; \left\{\left[r_{AC}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{6}\right] AND \left[r_{BC}\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{6}\right]\right\} \end{cases}$$

Per esplicitare in termini algebrici le disuguaglianze contenute nella 7), cominciamo con l'osservare che le equazioni delle rette r_A, r_B ed r_C su cui giacciono i tre lati del triangolo *base* sono date da:

$$8)\begin{cases} r_A \rightarrow y = 0 \\ r_B \rightarrow y = \sqrt{3}x \\ r_C \rightarrow y = y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \end{cases}$$

I vertici A, B e C dell'*altro* triangolo devono rispettivamente giacere su tali rette; dalle 8) si ottengono allora i valori delle ordinate dei tre vertici, per ogni qualsiasi insieme di valori (a, b, c). Le coordinate dei tre vertici saranno allora:

$$9)\begin{cases} A \equiv (a;0) \\ B \equiv \left(b; b\sqrt{3}\right) \\ C \equiv \left(c; \sqrt{3}(1-c)\right) \end{cases}$$

Ora, le equazioni delle rette r_{AC} ed r_{BC} si possono trovare imponendo che passino la prima per i punti A e C, e per B e C la seconda; con qualche calcolino si ottiene:

$$10)\begin{cases} r_{AC} \rightarrow y = \sqrt{3}\frac{1-c}{c-a}(x-a) \\ r_{BC} \rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{c-b}[(1-c-b)x + b(2c-1)] \end{cases}$$

***

Per coloro cui non bastassero le 4 *affermazioni qualitative* sopra esposte nel testo riquadrato in verde, nelle righe che seguono se ne fornisce una giustificazione più dettagliata. Chi invece si fida ciecamente può saltare tranquillamente a valle di tale analisi[24].

- la *prima affermazione* decreta che il lato AC dell'*altro* triangolo taglia necessariamente l'asse verticale di equazione x = ½; ciò equivale a dire che l'ascissa del punto A è non superiore al valore ½, e quella del punto C non inferiore a tale valore. Ciò deriva direttamente dalle 9) e 3)
- la *seconda affermazione* decreta che il lato BC dell'*altro* triangolo taglia necessariamente l'asse verticale di equazione x = ½; ciò equivale a dire che l'ascissa del punto B è non superiore al valore ½, e quella del punto C non inferiore a tale valore. Anche questo deriva direttamente dalle 9) e 3)
- la *terza affermazione* decreta che il lato AB dell'*altro* triangolo non può tagliare mai l'asse verticale di equazione x = ½; ciò equivale a dire che le ascisse dei punti A e B sono entrambe non superiori al valore ½. Ancora, questo deriva direttamente dalle 9) e 3)
- la *quarta affermazione* decreta che il lato BC dell'*altro* triangolo si trova ***sempre*** *al di sopra* di quello AC; questa è la più complessa da dimostrare.

[24] In questa esposizione si trascurano i casi *degeneri* tipo a = c = 1/2, eccetera. Nel seguito, questi casi non saranno più menzionati, in quanto danno comunque contributo complessivo infinitesimo al calcolo di V_V.

Si tratta di provare che, dati i vincoli su a, b e c espressi dalle 3), risulta sempre:

$$11) r_{BC}(x,b,c) \geq r_{AC}(x,a,c)$$

Sostituendo le 10) nella 11), dovrà essere quindi:

$$12) \frac{\sqrt{3}}{c-b}[(1-c-b)x + b(2c-1)] \geq \sqrt{3}\frac{1-c}{c-a}(x-a)$$

Con un po' di passaggi si verifica che la 12) è vera se:

$$13) x(ac+ab+b-2bc-a) \geq c(ac+ab+b-2bc-a)$$

Il termine fra parentesi presente nei due membri della 13) ha identico valore algebrico; può essere semplificato, ma il verso della diseguaglianza va invertito se tale termine è negativo. Ciò avviene se:

$$14) ac+ab+b-2bc-a < 0$$

Con ulteriori passaggi si vede che la 14) vale quando:

$$15) \frac{(b-a)(1-c)}{b(c-a)} < 1$$

Analizziamo ora l'andamento del primo membro della 15) al variare di a; la sua derivata è:

$$16) \frac{d}{da}\frac{(b-a)(1-c)}{b(c-a)} = -\frac{1-c}{b}\frac{c-b}{(c-a)^2}$$

Sempre ricordando le 3), questa derivata è sempre negativa nel campo di valori di interesse; ciò vuol dire che il massimo valore del primo membro della 15) si manifesta quando a assume il suo valor minimo, cioè $a = 0$:

$$17) \max\left[\frac{(b-a)(1-c)}{b(c-a)}\right] = \left.\frac{(b-a)(1-c)}{b(c-a)}\right|_{a=0} = \frac{1-c}{c}$$

Adesso vediamo quando *questo valor massimo* assume a sua volta il *suo valor massimo* al variare di c; si ha:

$$18) \frac{d}{dc}\frac{1-c}{c} = -\frac{1}{c^2}$$

Anche questa derivata è sempre negativa, per cui il massimo della 17) si ottiene in corrispondenza *del minimo* di c, che è ½ sempre in base alle 3); quindi:

$$19) \max\left[\frac{(b-a)(1-c)}{b(c-a)}\right] = \left.\frac{(b-a)(1-c)}{b(c-a)}\right|_{\substack{a=0\\c=1/2}} = 1$$

Allora, il *valore massimo limite* del primo membro della 15) è 1, per qualsiasi terna (a, b, c) che rispetta le 3); quindi nella 13) il termine fra parentesi è sempre negativo, e può essere semplificato invertendo il senso della diseguaglianza, e si ha:

$$20) x \leq c$$

In definitiva, la 11) è vera per tutti i valori x del lato BC inferiori a c, che a sua volta – dalle 3) – è sempre superiore in valore ad ½; quindi per tutti i valori di interesse.

***

Torniamo alla 7); adesso la definizione della funzione *Green* lì data può essere esplicitata come segue, in base alle 10):

$$21) \begin{cases} Green(a,b,c) = 0\ se\ \left\{\left[\sqrt{3}\frac{1-c}{c-a}\left(\frac{1}{2}-a\right) > \frac{\sqrt{3}}{6}\right]\ OR\ \left[\frac{\sqrt{3}}{c-b}\left[(1-c-b)\frac{1}{2}+b(2c-1)\right] < \frac{\sqrt{3}}{6}\right]\right\} \\ Green(a,b,c) = 1\ se\ \left\{\left[\sqrt{3}\frac{1-c}{c-a}\left(\frac{1}{2}-a\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{6}\right]\ AND\ \left[\frac{\sqrt{3}}{c-b}\left[(1-c-b)\frac{1}{2}+b(2c-1)\right] \geq \frac{\sqrt{3}}{6}\right]\right\} \end{cases}$$

Possiamo interessarci della sola parte verde della *Green*, visto che quella in arancio fornisce comunque contributo nullo all'integrale 4) destinato a restituirci il valore di Vv; la prima delle due disequazioni che appaiono nella definizione 21) si riduce con qualche calcolo a:

$$22) c \geq \frac{3-5a}{2(2-3a)}$$

Si verifica facilmente che, con i valori consentiti per a (cioè nell'intervallo [0, ½]), il secondo membro della 22) è sempre confinato all'interno dell'intervallo [½, 1], quindi con valori consentiti per c.

Con la seconda delle due disequazioni della parte verde della 21) le cose sono più complesse; si ricava da essa:

$$23) b(3c-2) \geq \frac{4c-3}{4}$$

Il termine in parentesi al primo membro della 23) può essere sia positivo che negativo, in dipendenza del valore di c; ne derivano due diversi vincoli per i valori assumibili da b:

$$24) \begin{cases} c < \frac{2}{3} \to b < \frac{3-4c}{4(2-3c)} \\ c > \frac{2}{3} \to b \geq \frac{4c-3}{4(3c-2)} \end{cases}$$

Se si analizza il vincolo della prima delle 24), si vede che il limite per b vale al minimo ½; tale vincolo perciò non aggiunge nulla a quanto già fissato in precedenza, cioè che debba essere b < ½; possiamo allora ignorare la prima delle 24).

Il vincolo espresso per b dalla seconda delle 24) è negativo per valori di c compresi nell'intervallo]⅔, ¾[, ed è quindi sin lì soddisfatto dal fatto che è sempre $b > 0$. Per c > ¾, il limite inferiore per b è invece quello espresso dalla disuguaglianza; riassumendo, la seconda delle 24) impone due diversi intervalli di variazione per b, a seconda del valore di c:

$$25) \begin{cases} c \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \to b \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ c \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \to b \in \left[\frac{4c-3}{4(3c-2)}, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

Le due situazioni sono rappresentate nella **Figura 7** che segue; a sinistra il caso limite c = ¾, dove si vede come b possa variare liberamente in tutto il suo intervallo di definizione mantenendo il lato BC al di sopra del *Tarassaco*. Ed a destra il caso c > ¾, dove interviene invece il limite inferiore per b espresso dalla seconda delle 24):

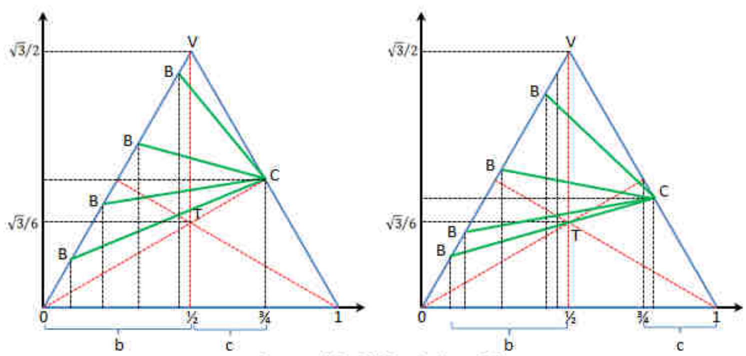


Figura 7: i limiti di variazione di b

E a questo punto possiamo tornare alla 4); imponendo i limiti di integrazione forniti dalle 22) e 25) si ha:

$$26) V_V = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\frac{3-5a}{2(2-3a)}}^{\frac{3}{4}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} 1\, db \right) dc + \int_{\frac{3}{4}}^{1} \left(\int_{\frac{4c-3}{4(3c-2)}}^{\frac{1}{2}} 1\, db \right) dc \right] da$$

Osservando la 26), si comprende la scelta per l'ordine di integrazione preannunziata più sopra: alcuni dei *limiti d'integrazione* contengono infatti le *variabili d'integrazione* a e c; con l'ordine suddetto, si evita di dover calcolare integrali che presentino contemporaneamente a o c sia come variabili che come limiti d'integrazione.

***

Nella parte che segue, viene calcolato il valore della 26); si tratta di un procedimento piuttosto meccanico, che può essere volendo saltato, passando direttamente alle conclusioni. Comunque, cominciando con i semplici integrali in parentesi tonda della 26) si ha:

$$
\begin{aligned}
27)V_V &= \int_0^{\frac{1}{2}}\left[\int_{\frac{3-5a}{2(2-3a)}}^{\frac{3}{4}} b|_0^{\frac{1}{2}}\,dc + \int_{\frac{3}{4}}^{1} b|_{\frac{4c-3}{4(3c-2)}}^{\frac{1}{2}}\,dc\right]da \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}}\left[\int_{\frac{3-5a}{2(2-3a)}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{2}\,dc + \int_{\frac{3}{4}}^{1}\left(\frac{1}{2}-\frac{4c-3}{4(3c-2)}\right)dc\right]da \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\int_{\frac{3-5a}{2(2-3a)}}^{\frac{3}{4}} 1\,dc + \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{2c-1}{3c-2}dc\right]da = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\int_{\frac{3-5a}{2(2-3a)}}^{\frac{3}{4}} 1\,dc + \frac{1}{2}I_1\right]da
\end{aligned}
$$

Valutiamo ora separatamente il secondo integrale che appare nella parentesi quadra, denominato I_1; operando le sostituzioni qui sotto:

$$
28)\begin{cases} z = 3c-2 \rightarrow c = \dfrac{z+2}{3} \\ dc = \dfrac{dz}{3} \\ c = \dfrac{3}{4} \rightarrow z = \dfrac{1}{4} \\ c = 1 \rightarrow z = 1 \end{cases}
$$

si ha:

$$
\begin{aligned}
29)I_1 &= \int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{2c-1}{3c-2}dc = \int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{2\frac{z+2}{3}-1}{z}\frac{dz}{3} = \frac{1}{9}\left(\int_{\frac{1}{4}}^{1}2\,dz + \int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{z}dz\right) = \frac{2}{9}z|_{\frac{1}{4}}^{1} + \frac{1}{9}\ln|z||_{\frac{1}{4}}^{1} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{2}{9}\ln(2)
\end{aligned}
$$

La 27) diviene allora:

$$
\begin{aligned}
30)V_V &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\int_{\frac{3-5a}{2(2-3a)}}^{\frac{3}{4}} 1\,dc + \frac{1}{2}I_1\right]da = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[c|_{\frac{3-5a}{2(2-3a)}}^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9}\ln(2)\right]da = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{3}{4} - \frac{3-5a}{2(2-3a)} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9}\ln(2)\right]da \\
&= \frac{1}{12}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2-3a}da + \frac{1}{18}\ln(2)\int_0^{\frac{1}{2}}1\,da = \frac{1}{12}I_2 + \frac{1}{18}\ln(2)\int_0^{\frac{1}{2}}1\,da
\end{aligned}
$$

Anche adesso, valutiamo separatamente il primo integrale che appare nella 30), denominato I_2; operando le seguenti sostituzioni:

$$
31)\begin{cases} z = 2-3a \rightarrow a = \dfrac{2-z}{3} \\ da = -\dfrac{dz}{3} \\ a = 0 \rightarrow z = 2 \\ a = \dfrac{1}{2} \rightarrow z = \dfrac{1}{2} \end{cases}
$$

si ha:

$$32)\, I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2-3a} da = -\int_2^{\frac{1}{2}} \frac{1}{z}\frac{dz}{3} = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{3}\ln|z||_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{1}{3}\left[\ln(2) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{2}{3}\ln(2)$$

Tornando alla 30):

$$33)\, V_V = \frac{1}{12} I_2 + \frac{1}{18}\ln(2)\int_0^{\frac{1}{2}} 1\, da = \frac{1}{12}\frac{2}{3}\ln(2) + \frac{1}{18}\ln(2)\, a|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}\ln(2)$$

***

E siamo quasi al termine… Ricordando che nel calcolo del volume V_V le variabili *b* e *c* sono state espresse in *Birudi*, *a* in *Rudi*, che il *volume esplorato* V_E vale ½ *Rudo cubo*, e che la agognata probabilità P_T di confinare il *Tarassaco* è data dal rapporto di tali volumi (a parità di unità di misura), si ottiene:

$$34)\, P_T = \frac{V_V|_{Rudi\ cubi}}{V_E} = \frac{4V_V|_{Rudi\ e\ Birudi\ misti}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\ln(2) = 0{,}46209812 +$$

Quando è spuntato fuori questo risultato, non è che ne fossi del tutto convinto: era un numero come un altro, e le uniche indicazioni che potesse esser corretto consistevano nel fatto che fosse positivo ed inferiore all'unità, il che è di buon auspicio per una probabilità, ma non basta...

Allora ho fatto girare un programmino *ad hoc* che genera un paio di miliardi di terne di numeri casuali, tutti compresi nell'intervallo [0, 1], e che per ciascuna terna verifica se il *Tarassaco* viene circondato o meno dal triangolo ABC corrispondente alla terna randomatica. I risultati della simulazione sono qui a destra; c'è accordo (entro 6-7 parti per milione) con il valore esposto nella 34)…

Infine, un paio di viste 3D dell'inviluppo del volume verde V_V, nello spazio $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ analogo a quello di **Figura 2**; il cubo delimitato dalle linee rosse tratteggiate ha spigolo 1; il *rendering* non sarà quello della *Pixar*®, ma qualcosa si vede…

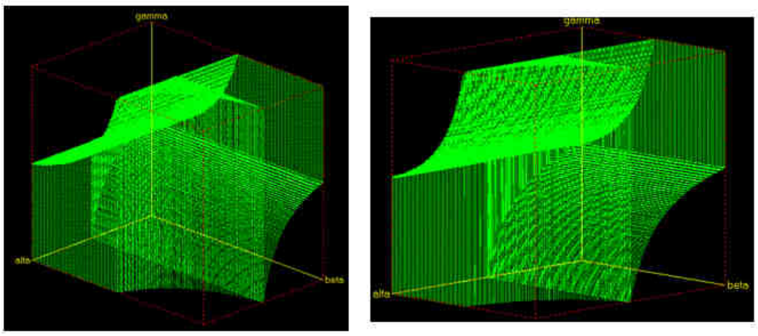


Figura 9: il *Volume Verde*

Che ne dite? Probabilmente potevamo tagliare dei pezzi, ma il Capo si diverte molto a leggere le unità di misura di ***BR1*** in tutte le forme… ma aspettate, c'è ancora un problema, proseguiamo.

5.1.2 Prima o poi, ce la faremo!

Chissà se il Capo questa volta è riuscito ad enunciare questo problema correttamente? Vediamo:

> *Il "Club dell'Anno" è un club in lenta ma continua crescita: infatti, quest'anno ha raggiunto la rispettabile cifra di 2016 associati, e questi si aspettano di arruolare un nuovo membro alla mezzanotte del 31 dicembre. Se due soci del club si conoscono tra i loro, allora ciascuno di loro ha lo stesso numero di conoscenze nel club (e*

viceversa); se, invece, due soci non si conoscono, allora il numero delle loro conoscenze è necessariamente distinto (e viceversa).

Nelle vesti del segretario del club, vi si chiede di dimostrare che:

1. *Esiste un membro che ne conosce altri 62.*
2. *L'anno prossimo, esisterà un membro che conoscerà altri 63 soci.*

Io non ho capito niente. Soprattutto i "viceversa", da eliminare in caso di estensione. Ma vediamo subito come se la sono cavata i nostri lettori, cominciando con ***Alessio***:

Abbiamo N persone facenti parte dell'Illustre Club. Diamo qualche definizione per lavorare comodamente.

Definiamo l'insieme $P=\{p1, p2, \ldots, pN\}$ come l'insieme di tutte le persone del club. Ora diciamo che $\forall p1,\ p2\in P,\ p1\ \sigma\ p2$ se e solo se $p1$ conosce $p2$. Chiamiamo f: $P\rightarrow$ ℕ0 il numero di persone (inclusa sé stessa) che una certo partecipante conosce. La relazione $\sigma\sigma$ deve rispettare le seguenti proprietà:

$$\text{(i) } p1\ \sigma\ p2 \Rightarrow f(p1) = f(p2)$$
$$\text{(ii) } \neg(p1\ \sigma\ p2) \Rightarrow f(p1) \neq f(p2)$$
$$\text{(iii) } \exists(p1, p2) \mid \neg(p1\ \sigma\ p2)$$

Iniziamo col dimostrare che σ è una relazione di equivalenza. Sicuramente è riflessiva, in quanto ognuno conosce sé stesso. Altrettanto sicuramente è simmetrica, perché se Tizio conosce Caio, allora Caio conosce tizio.

Veniamo ora alla proprietà transitiva. Diciamo che $p1\ \sigma\ p2$ e che $p2\ \sigma\ p3$. Per (i) $f(p1) = f(p2) = f(p3)$ e dunque, sempre per (i) e (ii), $p1\ \sigma\ p3$.

Questo ci permette di suddividere P in classi di equivalenza P_i, che contengono tutte le persone che conoscono i persone. $P_i = \{p\in P \mid f(p) = i\}$. Notiamo inoltre che, per definizione, p_i contiene i elementi.

Ora, per N=2016, dobbiamo dimostrare che esiste una persona p_k tale che $f(p_k)\geq 62$. Si dà il caso che 2016 abbia la felice proprietà di essere annoverato tra i numeri triangolari, ovvero $2016=\sum_{k=0}^{63} k$. Cerchiamo dunque il caso più sfortunato, ovvero quello che ha tra le classi di equivalenza quelle con il minor numero di conoscenti. Ne esisterà una in cui un poveraccio conosce solo sé stesso. Un'altra con due conoscenti, e così via. In virtù della triangolarità (o triangolezza o triangolosità?) di 2016, ce ne sarà una di 63 persone che conoscono esattamente 63 persone. Primo punto dimostrato.

Per il secondo consideriamo di aggiungere un nuovo membro al club. Quante persone conoscerà? Di certo non una, in quanto sia il nuovo che il poveraccio di cui abbiamo parlato sopra non si conoscerebbero ma conoscerebbero lo stesso numero di persone contraddicendo (ii). Di certo non si inserirebbe neanche nella coppia, perché diventerebbe una tripla, di cui ce ne è già una. Quindi se si volesse inserire in P_n esso diventerebbe P_{n+1}, che tuttavia esiste già se n<63, finendo col contradire ancora una volta (ii). Dunque dovrà inserirsi in P_{63}, che diventerà P_{64}. Dunque c'è un gruppo di 64 persone che conosce esattamente 64 persone. Dimostrato anche il secondo punto.

Complimenti. Siamo quasi al fondo, manca solo la soluzione di ***NickBe***:

Costruiamo il grafo che ha per nodi le persone e per archi la relazione di conoscenza: due persone sono collegate da un arco se e solo se si conoscono. Per ipotesi due persone sono collegate da un arco se e solo se hanno lo stesso numero di conoscenti.

Le componenti connesse di questo grafo devono essere dei grafi completi (un grafo è completo se tutti i nodi sono collegati tra loro). Infatti se due persone stanno nella stessa componente connessa (cioè si può passare dall'una all'altra tramite una sequenza di archi e nodi intermedi) allora quelle due persone devono avere lo stesso numero di conoscenze e quindi devono anch'esse essere collegate da un arco.

> Inoltre, non ci possono essere due componenti con lo stesso numero di persone al loro interno. Se così fosse, essendo entrambe le componenti dei grafi completi, dovremmo collegare tra loro ciascun nodo della prima con ciascun nodo della seconda (perché avrebbero lo stesso numero di conoscenti).
>
> Siccome quest'anno ci sono 2016 persone, dobbiamo dimostrare che ogni partizione del numero 2016 in interi (positivi) distinti (ciascun intero della partizione rappresenta il numero di nodi di una componente connessa) contiene almeno un intero maggiore o uguale a 62. La partizione di 2016 "meno peggiore", cioè quella che contiene in numeri (distinti) più piccoli possibili è 1+2+3+4...+62+63 (=63*64/2=2016).
>
> Quindi ogni partizione di 2016 in interi distinti contiene almeno un numero maggiore o uguale a 62 e dunque c'è di sicuro una persona che ne conosce almeno altre 62 (non è detto però che ce ne sia una che conosce esattamente altre 62 persone; ad esempio se consideriamo la situazione in cui 16 persone si conoscono vicendevolmente e le altre 2000 si conoscono vicendevolmente ma non conoscono le prime 16, cioè la partizione 16+2000, abbiamo una situazione in cui non c'è una persona che ne conosce esattamente altre 62).
>
> Allo stesso modo, se ci fossero 2017 persone, la partizione di 2017 corrispondente dovrebbe contenere almeno un intero maggiore o uguale a 63, da cui la tesi.

Secondo me il Capo ce l'ha fatta, almeno secondo ***Alessio*** e ***NickBe***. Non proprio secondo ***Alberto R***:

> Premetto che è necessario interpretare il testo sottintendendo un paio di "almeno", cioè: *"dimostrare che esiste (*almeno*) un membro che ne conosce (*almeno*) altri 62*". Infatti sostituendo "almeno" con "esattamente" il problema non avrebbe soluzione perché richiederebbe di dimostrare un'affermazione falsa.
>
> Assimiliamo il club a un grafo semplice non orientato. I soci ne sono i vertici e i "si conoscono" ne sono i lati.
>
> Osserviamo che il grafo non è completo perché *"non potete pretendere che tutti conoscano tutti*" e che da nessuna parte è richiesto che il grafo sia connesso.
>
> Ciò premesso, la condizione che due soci si conoscono se e solo se hanno lo stesso numero di conoscenze, comporta che il grafo sia formato da sottografi:
>
> - **completi** perché due vertici qualunque di ogni sottografo, avendo lo stesso grado, devono, per l'ipotesi assunta, essere collegati
> - **di ordine diverso** perché se due sottografi completi distinti avessero lo stesso ordine i vertici dell'uno e dell'altro avrebbero lo stesso grado e dovrebbero essere collegati a formare un unico sottografo
> - **reciprocamente non connessi** perché è vietato collegare vertici di diverso grado
>
> Insomma uno strano club diviso in compartimenti stagni, dove se ammazzi tutti i membri di un compartimento nessuno se ne accorge.
>
> Se N1, N2, N3,.... sono gli ordini dei sottografi, deve essere N1+N2+N3+ .... = 2016, con gli N tutti diversi, quindi il più grande di essi sarà minimo se gli N sono numeri consecutivi da 1 a 63 (guarda caso 2016 è triangolare).
>
> In definitiva esistono **almeno** 63 persone ciascuna delle quali conosce le altre 62. L' "almeno" è doveroso perché con qualunque diversa scelta dei numeri N1, N2, N3, ... si sarebbe ottenuto qualche gruppo con più 63 persone che si conoscono.
>
> E, per finire, quando a capodanno arriverà il 2017esimo socio, ci saranno, come minimo, 64 soci che si conoscono (quindi ognuno ne conosce 63) perché 1+2+3+....+61+62+64 = 2017 è la somma che possiede il minimo addendo massimo, sotto la condizione che gli addendi siano tutti diversi.

E su questa nota, chiudiamo. Grazie a tutti e alla prossima!

6. Quick & Dirty

Due domande su tre punti, totale sei.

Consideriamo il centro di un tetraedro regolare e due vertici qualsiasi: è facile vedere che giacciono tutti sullo stesso piano. Questo è vero anche per i tetraedri *irregolari*?

Scegliamo tre punti a caso su una sfera: qual è la probabilità che giacciano tutti e tre nello stesso emisfero? Il bordo dell'emisfero è considerato come facente parte dell'emisfero.

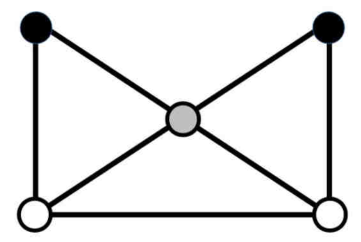
> *Prima domanda: sì, tre punti* qualsiasi *sono sempre complanari.*
>
> *Seconda domanda: uno. È sempre possibile definire un equatore in modo tale che i tre punti giacciano nello stesso emisfero.*

7. Zugzwang! (O Summer Contest?)

7.1 Pong Hau Ki

Il nome, a quanto dicono i Sacri Testi, è cantonese. A quanto pare è diffuso anche in Corea, dove è noto come Ou-mul-ko-no, ma noi ci permettiamo di dubitarne.

L'apparecchiatura del gioco (almeno nella sua versione base) è piuttosto facile: vi bastano due ***pedine*** per ogni giocatore, distinguibili tra di loro (i giocatori, non le pedine, per intenderci, due monete da dieci cent per uno e due da cinque cent per l'altro vanno benissimo) e una ***scacchiera*** come quella in figura, organizzabile con carta e matita in pochi secondi (qualche minuto se, volendo fare le cose per bene, usate PowerPoint).



9 *Scacchiera facile, stavolta.*

Quindi, posizionate due delle monete (dello stesso tipo) sui cerchi neri e le altre due sui cerchi bianchi.

"...e sul cerchio grigio?" non ci mettete niente: resta libero.

Lo ***svolgimento*** del gioco è abbastanza semplice: il giocatore di turno muove una pedina in una casella libera (casella che non è particolarmente difficile da trovare, visto che nella scacchiera ci sono *cinque* caselle e *quattro* pedine); ***vince*** il giocatore che riesce a impedire la mossa all'avversario, ossia chi non può muovere perde. Non si mangia.

Ci pare siate d'accordo con noi nel non definirlo esattamente un gioco da starci su la notte a vedere i cinquecentododicesimi di finale del campionato di condominio ma, almeno a questo livello, ci pare un gioco ***analizzabile*** con una certa facilità, e che non richiede neppure una grossa potenza di calcolo: potreste provarci. A noi (a parte le riflessioni) risulta una sola posizione perdente, consistente nell'avere una pedina del perdente su un cerchio nero, l'altra pedina nel cerchio bianco "sotto" e le due pedine del vincente una nel cerchio grigio e l'altra nel restante cerchio bianco; ma arrivare in questa posizione può non essere facilissimo, anche perché (stiamo sempre parlando "ad occhio") il perdente potrebbe essere passato per una posizione esattamente speculare a quella del "matto in una mossa", solo alla mossa prima... Insomma, la *reverse analysis* potrebbe portare a qualche sorpresa.

Abbiamo detto "almeno a questo livello"; questo, in quanto abbiamo omesso una cosa ed esiste un'estensione.

Non vi abbiamo detto *chi muove per primo*; e, in effetti, la cosa (come in tutti i giochi semplici) potrebbe rappresentare un vantaggio notevole per un giocatore.

Inoltre, esiste una variante nella quale si parte a scacchiera vuota, e i primi due turni consistono nel posizionare le proprie pedine: solo al terzo turno si inizia effettivamente a giocare.

Sappiamo benissimo che i giochi che presentiamo non li giocate mai, ma almeno potreste scambiarli per problemi e analizzarli.

8. Pagina 46

Sia $\boldsymbol{L}$ una retta esterna a $\boldsymbol{S}$.

Spostiamo $\boldsymbol{L}$ verso $\boldsymbol{S}$ sin quando non passa per un punto di $\boldsymbol{S}$, sia esso A; a questo punto, con centro in $\boldsymbol{A}$, ruotiamo $\boldsymbol{L}$ sin quando non passa per un altro punto dell'insieme[25], sia esso B. Poiché tre punti di $\boldsymbol{S}$ non possono giacere sulla stessa retta, A e B sono gli unici due punti di S a giacere su $\boldsymbol{L}$, e i restanti punti di $\boldsymbol{S}$ P_1, P_2, …, P_{2n+1} giaceranno tutti dallo stesso lato di $\boldsymbol{L}$. Se ora il segmento AB sottendesse lo stesso angolo con due altri punti P_i, P_j di $\boldsymbol{S}$, allora i punti A, B, P_i, P_j giacerebbero tutti sulla stessa circonferenza, il che è proibito dalle ipotesi: quindi AB sottende angoli tutti diversi con i punti dell'insieme $\boldsymbol{S}$.

Se i punti P_i sono stati indicizzati in modo tale che gli angoli che sottendono da quei punti il segmento AB siano posti in ordine crescente, ossia tali che $AP_1B < AP_2B < \ldots < AP_{2n+1}B$, essendo questi punti in numero dispari nella successione ne esisterà uno centrale, con vertice nel punto P_{n+1}.

Il cerchio $\boldsymbol{C}$ passante per A, P_{n+1} e B risolve il nostro problema: infatti, tutti i punti dell'arco di cerchio $AP_{n+1}B$ sottendono AB sotto lo stesso angolo, quindi non possono appartenere all'insieme $\boldsymbol{S}$; tutti i punti che sottendono AB sotto angoli inferiori devono essere esterni al cerchio e tutti quelli che sottendono AB ad angoli superiori devono essere interni al cerchio, e questo non è altro che la nostra tesi.

Si noti che questa costruzione permette anche di definire *quante* soluzioni esistano come minimo.

In prima istanza, possiamo costruire un cerchio per ogni lato della copertura convessa di $\boldsymbol{S}$, ma dobbiamo considerare che, nel caso anche AP_{n+1} o $P_{n+1}B$ siano lati della copertura convessa, costruiremmo lo stesso cerchio due volte; in ogni caso, nessuno di questi cerchio può essere costruito più di due volte, in quanto non tutti e tre i lati del triangolo ABP_{n+1} possono appartenere alla copertura di $\boldsymbol{S}$. Quindi, se la copertura è un k-agono, potremo ottenere almeno $k/2$ cerchi che siano soluzione del problema.

[25] In termini più formali, $\boldsymbol{L}$ è esterna alla *copertura convessa* di $\boldsymbol{S}$ e, dopo queste due operazioni, AB ne diventa un lato.

9. Paraphernalia Mathematica

Come (quasi) sempre, questo pezzo ha una storia: alla ricerca di un argomento per la rubrica, ne avevamo trovato uno del quale avevamo già parlato ma, scorrendolo, ci siamo scontrati con alcuni concetti interessanti; questi sono finiti addirittura su un oggetto inerente il nostro lavoro "fuori di qui" e, se venisse messa in atto una certa idea di Rudy, la cosa potrebbe concludersi con una grossa arrabbiatura per Alice. Ma di queste cose è più salutare parlarne un'altra volta, quindi ci fermeremo prima.

9.1 Quanto lontano?

Tutto comincia con un articolo sull'algoritmo di ***Gale*** e ***Shapley***, del quale abbiamo già parlato[26]: l'articolo che stavamo leggendo era piuttosto critico nella valutazione, in quanto favoriva spudoratamente la categoria che *prendeva l'iniziativa*, ottimizzano la scelta per quest'ultima; non solo, ma presentava anche dei casi in cui la "scelta migliore" del momento si rivelava, con il passare del tempo, una cattiva scelta causa l'affiorare di differenze di vedute che non erano state prese in considerazione in prima istanza.

Siccome abbiamo la certezza che non siete andati a rileggervelo, sorvoliamo sulle conclusioni della prima parte dell'articolo; la parte che ci interessa, infatti, partiva dal fatto che, più che una prima impressione, possa essere importante fare delle considerazioni ad un livello più profondo: a esempio, piuttosto che su un *fast dating*, basarsi su un questionario; ma, esattamente come nelle elezioni (abbiamo parlato anche di questo, ma per una serie di motivi non vi diamo il link), anche qui possono nascere dei problemi.

Oh, nel caso questi argomenti vi paiano eccessivamente legati alla realtà, potreste sempre partecipare all'ultima nostra conferenza: se "relazione di ordinamento nel campo complesso" per voi significa qualcosa, abbiamo ghiaia per i vostri denti (nel senso che l'argomento è molto più "duro" del pane).

Bene, fine delle divagazioni. Supponiamo di avere una serie di candidati al prestigioso posto di vice apprendista aiutante all'addetto all'apertura delle porte elettriche in caso di guasto, e di voler rispettare, nell'assunzione, quelli che sono gli standard aziendali; all'uopo, avete preparato in bellissimo questionario composto da una serie di domande con risposta "Sì/No"; il modo migliore per selezionare il candidato rispetto all'ideale è allora, probabilmente, la cosiddetta ***distanza di Hamming***: contate i punti in cui i candidati differiscono dal profilo ideale, e scegliete quello con meno differenze.

Per quanto semplice possa sembrare (e lo è) questo metodo, i matematici sono comunque riusciti a complicarsi la vita: infatti, per lo *spazio delle parole* di una data lunghezza (i risultati del questionario: l'*alfabeto* qui è composto solo di "Sì" e "No") rappresenta una *metrica*, in quanto è non-negativa, simmetrica e ammette la diseguaglianza triangolare (di Schwarz: quella che dice che la somma di due lati di un triangolo deve essere maggiore del lato restante). E, sempre se restate nel caso binario, il calcolo della distanza di Hamming diventa decisamente facile: uno XOR, contate gli uno, fatto.

Quest'ultimo punto potrebbe aver sollevato in voi un dubbio: nel caso, avete ragione.

Le *parole* sono i vertici di un (iper)cubo in un numero di dimensioni pari alla lunghezza delle parole: condite il tutto con un po' di *taxicab geometry*, e avete lo spazio di Hamming, in cui misurare le distanze di Hamming e, se lasciate qualche dimensione per il calcolo della parità (che, tra l'altro, potete definire come pare a voi), avete anche i codici di Hamming.

Simpatica, carina, ma forse un po' troppo semplice: si sa, il mondo è complicato, e meno egocentrico di chiunque.

Nel senso che sin quando si tratta di trovare la differenza tra voi e la supposta anima gemella, la distanza di Hamming va benissimo (anche se più che due binari siete dei tipi

[26] "Marcia Nuziale", PM di RM195, Aprile 2015. Oibò, esattamente un anno fa. Nozze di Carta! Festeggiare!

discreti o continui); il guaio nasce quando dovete confrontarvi con una *popolazione* o, se preferite, con una *distribuzione*; fuor di metafora e giochi di parole, avete una serie di variabili casuali e un punto: quanto "dista" quel punto dalle distribuzioni?

Per cominciare, semplifichiamoci la vita: *una* distribuzione, *un* punto; la statistica di base, qui, ci insegna che un buon metodo è (come dicono quelli che hanno fatto il classico) "calcolare i sigma da mu": ossia, quante *deviazioni standard* il nostro punto disti dal *valor medio*: data una qualsiasi distribuzione $\{x_i\}_1^N$, senza andare a cercare la legge che la governa[27], il valor medio vale:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N},$$

mentre la deviazione standard vale[28]:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \mu \right)}{N-1}}.$$

E questa è una buona misura di quanto "differite dalla media": non in funzione del primo benpensante che passa (alcuni di noi hanno un'età tale da ricordare i tempi in cui la misura dei capelli maschili era "1 +/- 0.1 cm", e il secondo era il "sigma"), ma in funzione della effettiva distribuzione dei valori nella popolazione (voi escluso, evidentemente: stiamo cercando di capire se fate parte di quella ghenga o no).

E sin quando si parla di un'unica variabile (voti nello scritto di Analisi I, colore degli occhi o quel che vi pare[29]), tutto va bene; ma, come ebbe a dire un bello spirito: "*Il mondo si divide in due categorie: chi divide il mondo in due categorie, e chi no*". Se abbiamo due variabili su una popolazione data, ad esempio l'altezza e l'indice tronco-scelico[30], può non essere facile stabilire la "distanza" di un dato campione dalla nostra popolazione; infatti le due variabili viaggiano ciascuna per conto loro, anche se hanno una (vaga) relazione: come si fa, in questi casi, a stabilire la distanza del nostro soggetto dalla popolazione?

Viene in aiuto, in questo caso, la ***distanza di Mahalanobis***: cerchiamo di affrontare la cosa in modo intuitivo, partendo dal fatto che nel *caso unidimensionale* con i mu e i sigma ce la siamo cavata abbastanza bene.

Abbiamo un insieme di misure su varie (ad esempio, *N*) caratteristiche e abbiamo la certezza che queste misure appartengono all'insieme; un nuovo punto, con l'intero set di misure disponibile, si presenta, e ci chiediamo se appartenga all'insieme.

Il primo passo (molto semplice) potrebbe essere quello di considerare uno spazio *N*-dimensionale, calcolare il centro di massa di tutti i punti e vedere quanto dista il nostro nuovo punto da questi; più è distante, meno appartiene all'insieme.

Anche se "intuitivamente" la cosa funziona, il guaio comincia quando dovete stabilire un limite netto: ma appartiene o no, all'insieme? La cosa, anche nelle famiglie più dialoganti, suscita comunque discussioni, visto che ciascuno tende a definire le cose in funzione dei

---

27 Ossia, senza partire dal principio che sia sempre descrivibile da una funzione: la cosa farebbe sicuramente comodo ma, checché ne dicano i (peggiori) libri sul *Six Sigma*, non tutto è "normale".

28 Già i puristi non si sono sentiti bene alla prima formula, probabilmente qui sono presi da fortissimi crampi allo stomaco: diciamo che prima o poi scriveremo un PM "statistically correct", in merito, e se volete criticare scrivetelo pure voi (nel senso che non accetteremo critiche se non in forma di articolo): condizione necessaria (ma non sufficiente) è che spieghiate il motivo di quel ridicolo "N–1" a denominatore.

29 Tranquilli: nessun razzista è abbastanza ferrato in matematica. Tant'è che, non sapendo usare i percentili, hanno dovuto inventare gli *octoroons*.

30 Questo è un esempio meno stupido di quanto sembra, come potrete vedere se accendete un cero a San Google.

"suoi" confini[31] in ognuno dei campi sotto esame, e questi possono essere estremamente vari; un modo per aggiustare il calcolo potrebbe essere quello di *normalizzare le variabili*, considerando non il loro valore ma il loro *valor medio normalizzato* definito come:

$$\bar{x}_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \ :$$

se adesso calcoliamo la distanza del nostro punto (normalizzato anche lui) dal valor medio della distribuzione, dovremo riuscire ad ottenere qualcosa di sensato.

La prima obiezione a tutto questo è che, se le caratteristiche che stiamo misurando sono due, stiamo presupponendo che entrambe *si comportino allo stesso modo*, ossia che abbiano uguale valor medio e deviazione standard; la cosa non è assolutamente garantita! Non solo, ma potremmo avere, come nel caso dell'altezza e dell'indice tronco-scelico sopracitato (l'avete cercato, vero? Bravi ragazzi), una *relazione* tra i due, il che rende le due distribuzioni *non indipendenti*...

All'uopo si utilizza la cosiddetta ***matrice di covarianza***: per generalizzare, passiamo al caso di *n* variabili, variamente correlate tra di loro:

$$\Sigma = \| \sigma_{ij} \| = \left\| \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} \left(x_{hi} - \mu_i \right) \left(x_{hj} - \mu_j \right) \right\| \ :$$

insomma, state calcolando la *varianza* relativa alle due distribuzioni "combinate"; se le varie distribuzioni non c'entrano niente una con l'altra, dovreste ottenere una matrice identità, con i valori 1 sulla diagonale principale e zero in tutti gli altri; altrimenti, vuol dire che le variabili sono (in un qualche modo) correlate tra di loro.

Forti di questo strumento (o meglio, forti della sua inversa), possiamo stabilire una nuova distanza: se avete un'osservazione[32] $\bar{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n \right)^T$ e un insieme (o distribuzione) avete valor medio (vettoriale) $\bar{\mu} = \left(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \right)^T$, e se *S* è la matrice covarianza, la cosiddetta ***distanza di Mahalanobis***: vale:

$$D_m(\bar{x}) = \sqrt{\left(\bar{x} - \bar{\mu} \right)^T \Sigma^{-1} \left(\bar{x} - \bar{\mu} \right)} \ ;$$

se la cosa vi sembra complicata, provate a ignorare le "T" e le "sigma": state, in pratica, calcolando la varianza di un oggetto rispetto a una media.

A cosa serve questo aggeggio? Beh, è molto comodo quando le due distribuzioni sono più o meno vagamente correlate: se non c'entrano niente una con l'altra (ossia, se la matrice di covarianza è la matrice identità), allora la bestia qui sopra si riduce alla distanza euclidea: quindi, per quanto brutta possa sembrare, non è altro che una sua generalizzazione. Per farla semplice, nel caso della distanza euclidea cercavamo la distanza su una *linea* (l'asse *x* della distribuzione, per intenderci); nel passare allo spazio, l'idea intuitiva era di cercare la distanza definendo una (iper)*sfera*, ma il fatto che le distribuzioni avessero diversa varianza ha fatto sì che ci si dovesse basare su un (iper)ellissoide: le parentesi servono solo per generalizzare la cosa ad un numero qualsiasi di dimensioni.

Un fatto piuttosto seccante, relativamente alle distribuzioni statistiche, è che possiamo ridurle allo stesso valor medio, ma continuano a comportarsi in modo clamorosamente diverso: nel caso di medie[33] uguali, la distanza di Mahalanobis tende a zero, e ciò non è bello.

---

[31] La famiglia dello scrivente, da giovane (lo scrivente, non la famiglia), aveva un conoscente che, residente a e nativo di Torino, considerava "terrone" chiunque fosse nato a sud di Moncalieri (cuneesi inclusi). Siamo stati felici di constatare un cambio di *weltanschauung* quando sua figlia ha sposato un senegalese.

[32] Non fate caso all'esponente: stiamo parlando di *vettori*, e dovendo moltiplicare (al prossimo passaggio un vettore per una matrice e poi di nuovo per un vettore, e volendo ottenere un qualchecosa di cui si possa calcolare la radice quadrata, utilizziamo la *trasposta*.

[33] Usiamo il plurale in quanto non stiamo parlando solo del *valor medio*, ma ci riferiamo anche a moda, mediana, e quant'altro vi possa venire in mente.

All'uopo, è stata inventata una generalizzazione, la cosiddetta ***distanza di Bhattacharyya*** (sì, si scrive così, impiegato all'Ufficio Indiano di Statistica): se p e q sono due distribuzioni *sullo stesso dominio X*, la distanza tra di loro è definita come

$$D_B(p,q) = -\ln\left(\sum_{x\in X}\sqrt{p(x)q(x)}\right),$$

e, anche se ha l'aria tosta, non è difficile passare dal discreto al continuo (basta trasformare la sommatoria in un integrale): l'aggeggio sotto logaritmo è noto come ***coefficiente di Bhattacharyya*** e, giusto se volete sfoggiare qualche nome, sottraetelo da uno, calcolate la radice quadrata del tutto e ottenete la ***distanza di Helliger***: la cosa strana, da queste parti, è che la distanza di B. è (passateci il termine) una distanza per modo di dire, visto che non rispetta la diseguaglianza triangolare; la distanza di H., invece, riesce a rispettarla.

Sempre l'aggeggio sotto logaritmo, ha alcune caratteristiche interessanti: visto che siete riusciti (come da ipotesi) a portare le due distribuzioni sullo stesso intervallo, questo coefficiente è una misura di quanto le due distribuzioni si sovrappongano, il che è utile per stabilire la "similitudine" tra le due popolazioni.

"...e quand'è che tu e Alice litigate?" Tranquilli, una delle prossime volte: in statistica, non mancano di sicuro le occasioni...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms