Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 206 – Marzo 2016 – Anno Diciottesimo

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM204 ha diffuso 3'057 copie e il 07/03/2016 per Google eravamo in 8'730 pagine.

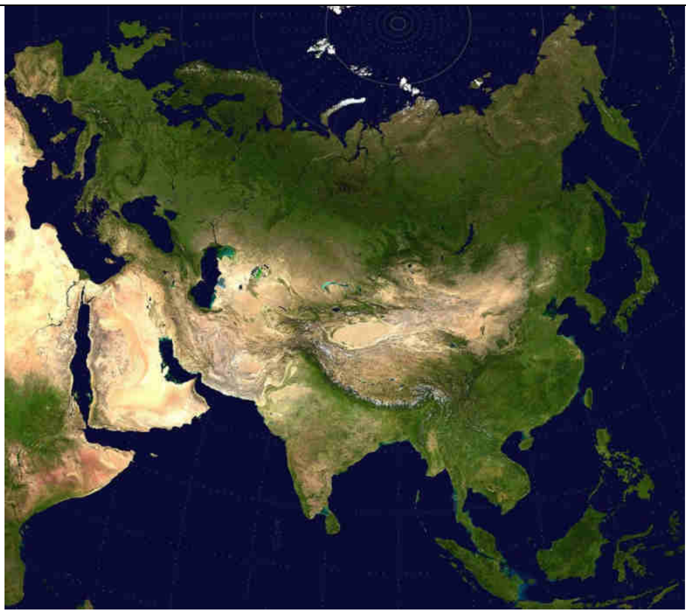
Il pregevole altorilievo in copertina mostra quella che è probabilmente la prima raffigurazione di un *laptop*; e a chiunque sia così ingenuo da ritenerlo uno specchio con uno scomparto per gli accessori da *toilette*, ci limitiamo a far notare la presenza delle due porte USB sul lato verso l'osservatore. È ipotizzabile, quindi, che la giovine in copertina non stia facendo altro che connettersi a *prosoponbiblos* (il VAdLdRM più giovane, e chi altro?).

1. La tenda nera

"Fiumi poi campi, poi l'alba era viola,
bianche le torri che infine toccò,
ma c'era tra la folla quella nera signora
stanco di fuggire la sua testa chinò:
"Eri fra la gente nella capitale,
so che mi guardavi con malignità,
son scappato in mezzo ai grilli e alle cicale,
son scappato via ma ti ritrovo qua."
"Sbagli, t'inganni, ti sbagli soldato
io non ti guardavo con malignità,
era solamente uno sguardo stupito,
cosa ci facevi l'altro ieri là?
T'aspettavo qui per oggi a Samarcanda
eri lontanissimo due giorni fa,
ho temuto che per ascoltar la banda
non facessi in tempo ad arrivare qua."

(R.Vecchioni, "Samarcanda", 1977)

È una delle forme più familiari, presente com'è su tutti gli atlanti, o trionfalmente campeggiante su tutti i grandi planisferi appesi nelle aule delle scuole: eppure la maggioranza di noi non riuscirebbe a disegnarla con un'approssimazione anche solo a malapena accettabile. Anzi, a voler essere onesti fino in fondo, quasi nessuno sarebbe in grado di nominare con esattezza ogni sua parte: le penisole, i rilievi, i fiumi, i laghi. L'impresa è certo difficile, ma il livello d'ignoranza resta drammaticamente profondo. Parliamo della più vasta delle piattaforme continentali, l'Eurasia: un blocco compatto che da solo copre più del 36% delle terre emerse, e ospita quasi la metà degli stati nazionali del mondo, anche se gran parte del suo territorio è coperto da una nazione sola, la più estesa di tutte.



1 *Eurasia*

Certo, la scarsa conoscenza geografica (ma anche storica, culturale, sociale) è un malanno che non affligge solo l'Eurasia: si potrà certo ben dire lo stesso per l'Africa, misteriosa quasi per definizione; per le Americhe, etichettate velocemente come "Nuovo Mondo" e come tali considerate quasi prive di interesse storico; per non parlare dell'Australia, o meglio dell'Oceania[1], piantata laggiù agli antipodi e dispersa nel mare come i relitti d'una nave di legno distrutta da una tempesta. Ma l'Eurasia è il continente dove viviamo, è casa nostra: Pechino e Calcutta, Vladivostok e Seul sono raggiungibili senza abbandonare la terra che

[1] A proposito di ignoranza geografica: è frequente la confusione tra Australia (nazione) e Oceania (continente), ma questo è niente. Immaginiamo che sia nota quanto la suocera di Carneade la divisione dell'Oceania in quattro regioni (Australasia, Melanesia, Polinesia, Micronesia), e la curiosa doppia identità della Nuova Zelanda, che è considerata a un tempo appartenente sia all'Australasia, sia alla Polinesia.

calpestiamo ogni giorno. Sono lontane, certo, lontanissime; ma è davvero illogico immaginarle come appartenenti ad un altro continente.

Già la separazione con la grande massa dell'Africa sembra più formale che reale, e lo sembra ancora di più se si ricorda che il Canale di Suez è artificiale, e assai recente, sulla scala cronologica del pianeta; ma quantomeno si nota bene la compattezza e l'identità unitaria nella geografia del continente africano, e diventa ragionevole considerarlo distinto dalla gran massa delle terre eurasiatiche. Ma la separazione tra Asia e Europa non ha davvero niente di geografico: gli Urali sono solo un pretesto orografico per dissimulare una divisione culturale; eppure, paradossalmente, resistono come linea di confine. Ancor più paradossalmente, si tratta di una linea di confine che non divide neppure la nazione, unica, a cui gli Urali appartengono per intero, ma ciò nonostante nell'immaginario comune riescono a dividere due continenti.

Eppure, l'unità geografica dell'Eurasia, già leggibile in qualsiasi carta, è rafforzata anche da evidenti simmetrie storiche e culturali, se solo si decide di guardare al super-continente come un tutt'uno. A guardarla nel suo insieme, e con l'attenzione rivolta alla storia delle popolazioni umane che l'hanno abitata, l'Eurasia mostra un comportamento curioso: a differenza di quanto solitamente accade, con una cultura unificante che si diffonde dal centro verso le periferie, si vedono imperi e culture periferiche che, per lungo tempo, prosperano restando quasi del tutto ignote l'una all'altra. Al momento della sua massima estensione, l'Impero Romano copre una parte significativa della periferia occidentale, e nello stesso tempo il grande regno della Cina fa altrettanto al margine orientale: ma le comunicazioni tra le due civiltà rimangono scarse e frammentate, quasi assenti. Oltre ai due grandi imperi, ci sono molte altre realtà che crescono, fioriscono nel grande arco di terre che si affacciano sulle coste degli oceani Indiano e Pacifico: le mille culture dell'India, la porzione di pianeta storicamente più aperta e portata alla spiritualità; l'evoluzione perennemente complessa del Medio Oriente; e quella popolatissima regione compresa tra India e Cina, che, con somma originalità, gli occidentali hanno chiamato Indocina. Tutte culture che comunicavano, ma a fatica: passando di periferia in periferia, quasi avessero più familiarità con il mare che con la terra.

Il grande assente è il centro. Il cuore del super-continente resta dimenticato o quasi negli annali, e con lui tutte le immense zone che si allungano a nord, fino a circondare l'Artico.

Ci sono molte cause per questa latenza: l'assenza del mare, ad esempio. Per molto tempo, anche se può sembrare a prima vista contro-intuitivo, le comunicazioni hanno viaggiato assai più velocemente per via d'acqua che per via di terra. Il Mediterraneo, oltre ad un clima invidiabile e alla fertilità delle terre che lo circondano, è stato la culla di molte civiltà soprattutto perché, ancorché essere d'ostacolo alle comunicazioni culturali, commerciali e militari, era il mezzo principale che le rendeva possibili. All'altro capo dell'Eurasia, la Cina si affaccia su un mare denso di isole e penisole, tra Giappone e Corea, e poi ancora giù, fino a quella specie di ponte di terre interrotte che dalla punta indonesiana arrivano fino all'Australia.

2 *Deserto del Gobi*

Poi, naturalmente, bisogna fare i conti con il clima: steppa, tundra e taiga non sono sinonimo di terre fertili e ubertose. Da quando l'uomo ha scoperto i vantaggi dell'agricoltura, rispetto alla caccia e alla pastorizia, si è messo in cerca di terre ricche d'acqua e di calore; e il centro del continente, da questo punto di vista, è davvero sfortunato: fa troppo freddo alle alte latitudini settentrionali, e per di più ci sono le più grandi catene montuose del pianeta a bloccare la via verso il sud, l'India. La combinazione è fatale, perché impedisce ai venti umidi provenienti dal mare di fecondare la terra, e quindi genera deserti: il Gobi, soprattutto, ma anche il Taklamakan, il Karakum, il Kizilkum, il Thar. E tra la steppa e il deserto non cresce quasi nulla.

E infatti, nel cuore del grande continente, le popolazioni sono padrone della loro terra in maniera diversa da quanto accade nel resto del mondo. Non coltivano molto, e restano prevalentemente nomadi e pastori: vivono in simbiosi coi loro cavalli, hanno case mobili che si spostano in funzione del clima e della ricerca del cibo. Per loro la terra non è un luogo per scavarci fondamenta, è una strada destinata a essere percorsa.

Una vita da reietti, sembrerebbe; e forse è davvero così. Il resto dell'Eurasia produce arte, scienza, cultura, mentre gli abitanti del centro del continente producono a malapena quanto serve alla mera sopravvivenza. Una vita da dimenticati perenni, viene da dire. Ma non è proprio così; almeno, non lo è sempre.

I grandi eventi storici che fanno da cesura nelle grandi culture periferiche, sia a occidente sia a oriente, sono i terribili sconvolgimenti causati dai crolli dei grandi imperi, dalle grandi pestilenze o dalle terribili carestie. Ma è curioso, usando quello sguardo che resta fisso sulla globalità del supercontinente, senza lasciarsi distrare dai drammi specifici delle periferie, notare come ci sia una strana coincidenza di tempi, una unità quasi perfettamente sincronica dei maggiori eventi devastanti: ed è un sincronismo dato dal pulsare del cuore centrale.

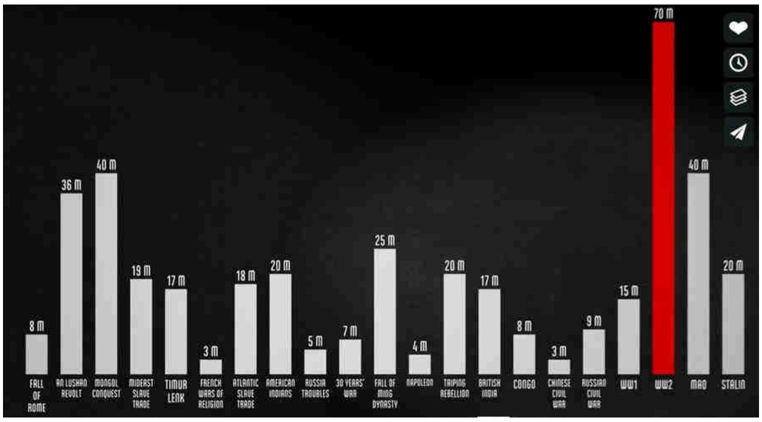
3 *Visigoti (secondo una stampa tedesca)*

L'impero romano cresce costruendo il "limes", il confine fortificato destinato a impedire le invasioni barbariche; la Cina costruisce l'opera più grandiosa dei suoi tempi, la Grande Muraglia. I barbari che sconfiggono le legioni romane ad Adrianopoli, nel 378 d.C., uccidendo sul campo l'imperatore Valente, sono Visigoti; e come tali, come abitanti dell'Eurasia occidentale, hanno tutto il diritto di essere considerati "europei", anche in senso moderno. Il termine "barbari", allora come oggi, è davvero troppo generico, oltre che niente affatto politically-correct: i Visigoti di Fritigerno che vincono ad Adrianopoli, come un po' tutti i Goti, sono popolazioni che da tempo vivevano ai margini dell'Impero Romano, e il loro maggior desiderio non era tanto quello di conquistarlo, quanto, più semplicemente, quello di entrare a farne parte[2]. Dall'altra parte del mondo, a quel tempo, la Cina attraversa il disordinato periodo dei "Sedici Regni", con tutte le sue regioni settentrionali che sono popolate da etnie prevalentemente non cinesi, ma mongole, turche[3], tibetane. E i Goti, del resto, che finalmente riescono ad entrare con gran forza dentro i confini dell'impero romano hanno iniziato la loro pressione non certo per capriccio, ma perché sono spinti a loro volta: sono anch'essi nient'altro che vittime fuggiasche, massacrate sulle loro terre dall'arrivo dei temibili Unni.

[2] Curioso e simbolico che il significato del nome Fritigerno sia "desideroso di pace".

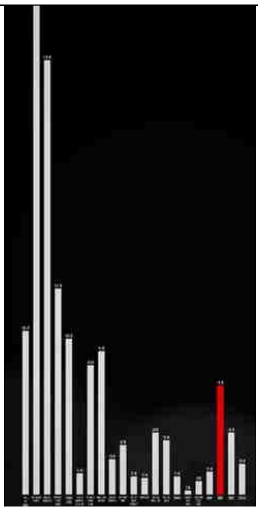
[3] È probabilmente opportuno ricordare che i "turchi" sono una popolazione originaria delle terre tra l'Asia Centrale e la Siberia. L'odierna Turchia, davvero lontana dalla terra originaria, è il frutto della loro lunga conquista verso occidente.

È il respiro terribile del cuore del continente euroasiatico: le popolazioni povere e nomadi della zona centrale periodicamente divampano, prendono armi e cavalli, e saccheggiano le periferie. Le cause possono essere le più disparate: un clima impietoso e una carestia particolarmente feroce, che riduce alla fame anche le bestie e i pastori; una pestilenza, che quasi sempre accompagna le carestie; una mutazione del clima, che rende ulteriormente inospitali terre già tutt'altro che accoglienti dal punto di vista meteorologico; o una strana congiuntura politica, che ogni tanto raccoglie le popolazioni tradizionalmente restie all'unione a coagularsi sotto un unico capo. Quale che sia la causa ultima, se il Centro decide di muoversi, le Periferie si devono preparare al disastro.



4 *Le peggiori atrocità della Storia*

E succede: se non proprio regolarmente, con ragionevole frequenza, almeno su scala storica. La più terribile diastole del cuore dell'Eurasia è quella causata da Temuçin, a cavallo tra il dodicesimo e il tredicesimo secolo. Sotto la sua guida tutti i popoli della steppa si riuniscono, e conquistano quasi l'intero supercontinente.



5 *Stesso grafico, in % sulla popolazione del tempo*

L'Eurasia non è mai stata politicamente unita, ma di certo è questo il momento in cui ci va più vicina: l'impero dei mongoli che danno al loro capo, Temuçin, il titolo di "Gengis Khan", sovrano universale[4], è ancora oggi l'impero "geometricamente connesso" più grande di tutta la storia.

L'impero più grande, e il più sanguinoso. Lo strano malinteso che accompagna quasi sempre gran parte delle storiografie, quello che ammanta dello strano concetto di "gloria" tutte le imprese militari, lascia spesso trascurare l'elementare conseguenza di ogni azione di conquista, ovvero le inevitabili stragi di esseri umani. L'espansione delle orde mongole di Gengis Khan in tutto l'Eurasia provocarono un numero incredibile di vittime: 40 milioni. Nel grafico[5] a fianco è la terza barra, che resta inferiore solo a quella rossa che riporta i caduti della Seconda Guerra Mondiale, che arriva a quota 70 milioni. La piazza d'onore, in realtà è soltanto apparente: settanta milioni di caduti nel XX Secolo sono un'enormità, ma se messi in rapporto con il totale dei viventi del periodo, sono molto, molto minori del peso percentuale di quaranta milioni di morti sulla popolazione mondiale del 1300 d.C. Il medesimo grafico, pesato percentualmente, ha un aspetto radicalmente diverso.

Quando i Mongoli di Temuçin arrivano a scontrarsi con le civiltà della periferia continentale, è un vero scontro di cultura quello che richiede il tributo di sangue: i popoli

[4] In realtà, non si è ancora del tutto certi del significato del termine "Gengis" (o "Genghis"): la parola mongola che sembra essere più prossima è "*tengis*", che significa "oceano", e infatti ci si riferisce spesso a Gengis Khan come all'Imperatore Oceanico. Vista la dimensione del suo impero, il significato non sembra inappropriato, ma resta assai curioso che ad usare l'aggettivo "oceanico" sia sto il popolo che, geograficamente, è quello che ha in assoluto meno dimestichezza con gli oceani.

[5] Grafico che (come il successivo) è in realtà una cattura di un fotogramma del video "The Fallen of World War II", la cui visione è altamente consigliata, e che si trova all'indirizzo https://vimeo.com/128373915.

nomadi, quando vanno alla guerra, ci vanno essenzialmente per il saccheggio. I popoli stanziali, invece, ci vanno essenzialmente per conquistare nuove terre, perché la base primaria di ogni ricchezza, per economie basate sull'agricoltura, è la terra. È rimasto celebre il consiglio che i generali di Gengis Khan dettero al loro re dopo l'ennesima conquista: suggerirono la distruzione totale, "*per ridare alla terra la dignità della steppa*". E sembra che fu solo per il suggerimento di un vecchio consigliere, che gli fece notare che i popoli sottomessi potevano comunque essere costretti a versare tributi, che la distruzione non fu davvero totale.

Resta comunque la più terribile delle devastazioni della storia: i nemici andavano distrutti, nel senso fisico e più letterale del termine. Si leggono dettagli raccapriccianti sulle decapitazioni in massa degli abitanti di intere città, con le teste ammucchiate a forma di piramide come macabro memento per i sopravvissuti; o più banalmente le cronache che riportano come i soldati comandati alle esecuzioni risultassero sfiniti a fine giornata, perché le uccisioni erano tante e tali da poter essere quasi annoverate come "lavoro usurante".

L'espansione dei Mongoli – e soprattutto delle popolazioni turche, alleate di Temuçin e comunque più numerose delle tribù mongole – finisce quasi per mancanza di nemici, più che per sconfitte militari. Gengis Khan muore nel 1227, prima che finisca ancora la conquista della Cina; ma i suoi successori continuano le guerre, giungono in Europa e toccano l'Africa, e solo una tempesta[6] impedisce loro la conquista del Giappone.

Il più grande impero terrestre della storia ha comunque vita breve, anche se le conseguenze dell'impresa si sentono ancor oggi: l'Impero Ottomano nasce da tribù turche, stanziate in Anatolia al seguito della grande orda mongola; il Cristianesimo, che intorno all'anno Mille sta raccogliendo grandi successi di conversioni in tutta l'Asia, viene fermato e respinto, perché i Mongoli, pur restando sostanzialmente animisti, trovano più affascinante l'insegnamento dell'Islam, che in breve diventerà la loro religione ufficiale. Soprattutto, le imprese di Gengis Khan lasciano in Asia la convinzione che un grande impero unitario e centrale sia possibile: e non passa molto tempo prima che qualcuno decida di ripetere la colossale impresa di Temuçin.

6 *Tamerlano (ricostruzione del volto a partire dal teschio)*

In lingua Chatagai[7], "ferro" si dice "timur"; e Tīmūr diventa anche un nome proprio, che si dà ai bambini quando si vuole che dimostrino forza[8]. Non è quindi strano che un uomo della Transoxiana porti questo nome, come accadde a Tīmūr Barlas. Ma spesso più dei nomi possono i soprannomi, specialmente nell'antichità: e se un uomo diventa famoso, la probabilità che riceva un soprannome è ancora più forte. Tīmūr Barlas era figlio di un capotribù, ma di una tribù tutt'altro che famosa e rispettata dai vicini, che con sdegno chiamava i suoi componenti col dispregiativo di "mezzosangue"; e anche se in un certo senso Tīmūr era "nobile", lo era di una nobiltà che non disdegnava i furti di bestiame. La leggenda vuole che una notte,

[6] È il famoso "vento sacro", come lo chiamano i giapponesi: nella loro lingua, si dice "*kamikaze*".

[7] I resti dell'Impero Mongolo si organizzano in regni, chiamati naturalmente "khanati", dalla parola Khan=Capo, Re. Il Khanato Chagatai è uno dei molti regni che si formano negli anni successivi alla caduta del controllo centrale del Gran Khan, stanziatosi in Cina. Copriva gran parte dell'Asia centrale a ovest della Cina e a nord dell'India, fino al lago d'Aral a ovest e il Bajkal a nord, e tutta la Transoxiana.

[8] La storiografia sovietica indulge molto sulle similitudini tra Tamerlano e Stalin, proprio a partire dalla coincidenza di significato tra il nome del khan (ferro) e il nome di battaglia del leader sovietico (stalin=acciaio). E, per quanto semplici coincidenze, di parallelismi se ne possono trovare molti, a partire dalle zone di origine, fino alle molte sventure negli affetti personali che hanno colpito entrambi i personaggi.

mentre cercava di rubare delle pecore, il pastore lo sorprese e riuscì a colpirlo al piede con una freccia[9], azzoppandolo. Quando, più tardi, diventerà famoso anche ben oltre i confini della sua tribù, sarà universalmente chiamato "Timur lo zoppo", che in farsi, lingua dell'antica Persia, suona "Temur-i lang". Quando la sua fama raggiungerà anche l'occidente, i vari idiomi nazionali adatteranno questi suoni orientali alla loro pronuncia, e in italiano il nome diventerà Tamerlano.

È passato a malapena un secolo dalla morte di Gengis Khan alla nascita di Tamerlano, che vede la luce da qualche parte nell'odierno Uzbekistan tra il 1320 e il 1330; un secolo che marca molte differenze tra il grande Khan dei Mongoli e il più grande dei suoi emulatori. Se Tamerlano si ispira senza dubbio alle gesta di Temuçin, è anche vero che proprio per l'esistenza del grande khanato in Cina egli non si dichiarerà mai imperatore, ma soltanto "emiro", quasi a voler ribadire la sua obbedienza alla dinastia mongola sul trono cinese; d'altro canto, morirà nel febbraio del 1405 proprio durante il suo tentativo di conquistare la Cina, anche (o forse soprattutto) perché dal 1368 la dinastia mongola Yuan era stata sostituita dalla Ming, e Tīmūr, di stirpe mongola, ha tutta l'intenzione di riportare la sua gente sul più grande trono del mondo conosciuto. A differenza di Gengis Khan, virtualmente analfabeta, si pensa che Tamerlano potesse essere dotato di una certa cultura: si intratteneva spesso con filosofi e sapienti, e questo lascia pensare che i suoi interessi culturali fossero certo maggiori di quelli del suo idolo.

Ma in guerra, le somiglianze sono certo maggiori delle differenze. La spietatezza di Tamerlano era forse ancora maggiore di quella delle orde mongole agli ordini di Temuçin, e sapeva usarla a fini tattici e strategici. Il numero di vittime che fece è certo inferiore a quello del suo predecessore, ma è forse ancora più significativo, se si tiene conto che il suo impero, per quanto vastissimo, fu certo assai inferiore a quello realizzato da Gengis Khan. Nei grafici delle pagine precedenti, dove sono riportate le maggiori atrocità della storia, la sua colonna è la quinta da sinistra, e si può vedere come, percentualmente, le sue razzie hanno provocato più vittime della Seconda Guerra Mondiale. Un record non da poco, per un personaggio che molti, in Occidente, non ricordano neppure.

7 *L'impero di Tamerlano*

Al massimo della sua estensione, l'impero "timuride" raccoglie entro i suoi confini tutta la Persia, metà dell'attuale Turchia, la Mesopotamia, l'Afghanistan, l'Uzbekistan, e molti altri territori. La sua potenza bellica è travolgente e terribile: basti ricordare che a quel tempo, l'Europa cristiana stava subendo una delle più disastrose sconfitte della sua storia, l'impero ottomano aveva conquistato i Balcani nel 1389 con la Battaglia del Kosovo, e continuava l'espansione verso il cuore dell'Europa centrale. Papa Bonifacio IX proclamò allora una crociata contro i Turchi, e le maggiori forze cristiane del periodo risposero all'appello: forze che erano soprattutto Franchi e Ungheresi, perché ormai il confine religioso tra Islam e Cristianità passava in territorio ungherese. Era il meglio delle forze cristiane, ed erano veri e propri crociati: si diressero verso i Turchi con la sensazione di difendere tutta l'Europa, in una battaglia cruciale che

[9] A dire il vero, un'altra ipotesi – forse più realistica – è che sia stato ferito in una delle sue prime battaglie. Altri ancora, registrando che oltre ad essere claudicante Tamerlano era offeso anche ad un braccio, hanno ipotizzato malattie precoci come la poliomielite, o un ictus.

avrebbe verosimilmente scritto una volta per tutte la vittoria o la distruzione di una delle due parti.

La battaglia decisiva avvenne a Nicopoli, il 25 settembre 1396: ben centotrentamila cristiani fronteggiarono gli appena settantamila turchi agli ordini di Bayadiz I e fu una travolgente vittoria ottomana. Lo scontro aveva espresso un verdetto chiaro e senza mezzi termini, e nulla sembrava poter fermare l'avanzata musulmana verso il cuore del continente europeo, ma Bayadiz non continuò l'invasione. Non poteva farlo: il suo impero era attaccato in un altro fronte, e da truppe assai più terribili di quelle europee. Era l'esercito di Tamerlano.

L'Islam timuride attaccava l'Islam ottomano, e lo travolgeva senza apparente difficoltà. Nel 1402, con la Battaglia di Ankara, il sovrano Bayadiz che tanto terrorizza gli europei è battuto, catturato e messo in schiavitù: si racconta perfino che Tamerlano lo usasse come cuscino poggiapiedi[10].

La ferocia di Tamerlano era leggendaria: le piramidi di teste mozzate di Gengis Khan erano nulla, di fronte alle torri di teschi che Tamerlano faceva erigere a scopo intimidatorio, ognuna era composta di circa diecimila teschi, e in un solo assedio se ne contarono ventotto.

Usava il terrore con la sapienza di un moderno esperto di comunicazione: le piramidi di teschi, oltre ad essere una prova di crudeltà, erano anche un tradizionale mezzo turco-mongolo per convincere il nemico a cedere in fretta le armi e quindi, un po' paradossalmente, aveva lo scopo "umanitario" di ridurre i tempi delle ostilità. Ma è soprattutto rimasto celebre il codice cromatico che usava durante gli assedi: quando si avvicinava ad una città e si predisponeva all'assedio, faceva erigere come suo quartier generale una grande tenda bianca. Il significato del colore era, più o meno: "Siete assediati da Tamerlano: se aprirete le porte, ci accontenteremo di prendere quanto potrete darci, e tutto sommato resterete più poveri ma saremo amici". La città aveva qualche giorno per decidere, ma certo non troppi. Se rifiutava di aprire le porte, in breve la tenda di Tamerlano cambiava colore, e passava al rosso, che significava: "vi prenderemo ogni cosa, e faremo della vostra città quel che più ci pare. Ma se aprite le porte in fretta, avrete salva la vita". L'ultimo colore della tenda era il nero, ma quando questo compariva, non c'era più spazio per trattativa: significava semplicemente che l'assedio sarebbe proseguito fino al saccheggio più completo e che tutti gli abitanti della città, comprese le donne e i bambini, sarebbero stati ammazzati.

Curiosamente, è proprio durante uno di questi assedi prolungati – e pertanto verosimilmente con la tenda nera già eretta – che si ricorda uno dei rari momenti di generosità da parte di Tamerlano. Nel 1394 Tīmūr imperversa nel Kurdistan, conquistando una fortezza dopo l'altra nella sua marcia verso occidente, che lo porterà alla conquista di buona parte dell'Anatolia fino alle frontiere con l'Egitto. In questa campagna vede morire il suo figlio prediletto, Omar Shaik, con il conseguente dolore che è facile immaginare. Ma la campagna prosegue, ed è la città anatolica di Mardin che è presa d'assedio: assedio lungo e prossimo alla terribile conclusione. Ad un certo punto arriva a sovrano una notizia che lo rallegra al punto di perdonare gli abitanti di Mardin, e di rimuovere l'assedio: un altro suo amatissimo figlio, Shah Rukh, è diventato padre, e la gioia della nascita del nipotino è tale che il feroce Tamerlano, almeno per un po', interrompe la guerra e si dà ai festeggiamenti.

[10] Ma altre fonti, probabilmente più affidabili, dicono che invece la prigionia di Bayadiz non fosse poi così terribile: sia l'ottomano sia il mongolo erano sovrani ormai vecchi, e forse Bayadiz, che pure morì in prigionia, non fu maltrattato più di tanto.


8 *Ulugh Beg*

Il piccolo a cui gli abitanti di Mardin devono la vita si chiama Ulugh Beg[11]; nato il 22 marzo del 1394[12], nipote di uno dei più feroci sovrani della storia, diverrà sovrano a sua volta; ma, a differenza del nonno, più che dal potere sarà affascinato dalla scienza. Anche se nasce in Persia, a Soltaniyeh, la città che più è legata alla vita di Ulugh Beg è la maestosa capitale dell'impero timuride, quella Samarcanda che Tamerlano, nei rari periodi di pace, non cessava di arricchire e ingrandire, fino a renderla una delle città più belle e misteriose d'oriente.

Samarcanda, per Ulugh Beg, è quasi un dono e un riconoscimento paterno della peculiarità del figlio. I primi anni di vita sono passati da Ulugh Beg alla corte del grande nonno, il che significa al seguito dell'esercito che tempestava l'Asia con le sue battaglie. Alla morte di Tamerlano, Shah Rukh eredita parte dell'impero e decide di eleggere a sua capitale Herat, la città dell'Afghanistan che ai tempi nostri entra spesso nelle cronache turbolente di quella regione. Herat cresce pertanto come centro politico e anche culturale, con la fondazione di biblioteche e moschee. Ciò non di meno, il nuovo re non vuole trascurare la splendida Samarcanda, che sotto Tamerlano era diventata, insieme a Bukara, la più bella e importante città asiatica lungo la Via della Seta. Vedendo che gli interessi del suo primogenito, ormai sedicenne, erano assai più orientati verso l'indagine scientifica che verso le battaglie e la politica, Shah Rukh di fatto "regala" Samarcanda e la sua regione a Ulugh Beg.

Il ruolo di Ulugh Beg è anche, anzi soprattutto, quello di viceré, di governatore in nome di suo padre. Per quanto prevalentemente affascinato dall'astronomia e dalla matematica, non tralascerà le altre scienze, le arti, (dedicandosi in prima persona anche alla pittura, e componendo versi), e tantomeno la religione. Proprio attraverso l'uso islamico delle *madras*, le scuole religiose, fonderà un istituto per lo studio avanzato dell'astronomia. La sua madras sarà costruita tra il 1417 e il 1420, e vi chiamerà i maggiori studiosi dell'Islam per diventarne docenti.

Ma non è solo un mecenate: a Samarcanda Ulugh Beg farà costruire l'osservatorio astronomico che, con ogni probabilità, è il più grande e maestoso del mondo, all'epoca; e sarà lui stesso ad usarlo per le osservazioni. Non si tratta certo di un osservatorio così come lo intendiamo oggi, dotato di telescopi e interferometri, ma le sue dimensioni sono assolutamente confrontabili, e la "strumentazione" non meno affascinante: di forma circolare, strutturato su tre diversi livelli, aveva un diametro di cinquanta metri e raggiungeva l'altezza di trentacinque: al suo interno ospitava un sestante così grandioso che il suo arco penetrava a fondo nel terreno, che dovette quindi essere scavato per lasciargli completare la corsa.

[11] O, un po' più correttamente, Uluğ Bek. Ma le traslitterazioni dai linguaggi uralo-altaici sono sempre complicate, e in occidente è ragionevolmente diffusa la grafia (di calco inglese, immaginiamo) Ulugh Beg.

[12] La data esatta di nascita ci risulta riportata solo dall'edizione italiana di Wikipedia, mentre quasi tutte le altre fonti si limitano a precisare l'anno (e talvolta suggeriscono addirittura il 1393, come fa la nostre fonte tradizionale principale, la St.Andrews University), al punto che questo compleanno è stato a lungo considerato come uno dei molti compleanni senza una precisa collocazione in calendario. Non sappiamo come l'italica Wiki abbia raggiunto la conoscenza della fatidica data di nascita, ma noi, come è noto, le vogliamo molto bene, e ci fidiamo. [Post-scriptum: anche la sorella maggiore, Wikipedia inglese, si è recentemente adeguata alla data del 22 marzo; curiosamente, nel frattempo, la pagina di riferimento a cui punta la Wiki italiana in merito alla data di nascita del nostro è miseramente crollata in un triste "errore 404"].

Con strumenti del genere, l'astronomia e la matematica fecero dei progressi assolutamente notevoli. Sotto la direzione di Ulugh Beg si compilò un grande "Catalogo delle Stelle", il primo dai tempi di Tolomeo, che elenca quasi mille stelle corredate da misurazioni così precise che i valori trigonometrici dei seni e delle tangenti raggiungeva gli otto decimali. Il lavoro è così accurato che vi ritrovano metodi estremamente sofisticati per approssimare le soluzioni delle equazioni cubiche, e perfino l'utilizzo del teorema binomiale.

9 *L'osservatorio di Ulugh Beg, con ritratto Viyatkin, l'archeologo che lo scoprì*

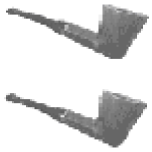
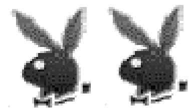
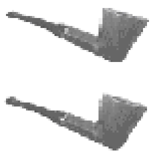
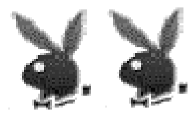
La precisione delle osservazioni astronomiche è stupefacente: lo studio dei movimenti di Marte, Giove, Saturno e Venere differiscono dai valori ottenuti coi metodi moderni di non più di cinque secondi; la lunghezza dell'anno venne calcolata in 365 giorni, 5 ore, 49 minuti e 15 secondi, che è valore di una precisione stupefacente. Questi successi si basano tutti sull'accuratezza che Ulugh Beg e i suoi studiosi dedicarono alla valutazione del "seno di un grado", che arrivarono a stabilire come sin 1° = 0.017452406437283571. Al giorno d'oggi si usa il valore sin 1° = 0.017452406437283512820, che mostra una completa coincidenza fino al sedicesimo decimale.

Ci si ritrova così, abbastanza curiosamente, ad avere un grandioso centro culturale nel bel mezzo dell'Asia, fondato dall'erede di uno dei popoli più sanguinari della storia, e nel giro di poche generazioni. È un'altra dimostrazione di come la cultura e la scienza siano i maggiori – se non unici – motori di civiltà.

Ma la civiltà è fragile, la barbarie è resistente e forte. Pur essendo figlio unico del khan suo padre, non riuscì a tenere il potere dopo la morte di Shah Rukh, nel 1447. Appena due anni dopo, quando aveva cinquantaquattro anni, fu deposto dal suo stesso figlio, Abd al-Latif: la sua più famosa esortazione, "*ogni vero musulmano, uomo o donna che sia, ha il dovere di perseguire la conoscenza*", non deve essere stata ben raccolta dal sangue del suo sangue. Il figlio lo mise a morte: quando il suo corpo venne ritrovato nel grande Mausoleo di Tamerlano, a Samarcanda, erano inequivocabili i segni della decapitazione.

Difficile trarre lezioni dalla storia di Ulugh Beg, se non quelle, persino un po' ovvie e scontate, già accennate poco sopra: solo la cultura può metter fine alla barbarie, ma la barbarie riesce fin troppo facilmente a metter fine alla cultura.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Noioso come un prof...			
Ostara!			

2.1 Noioso come un prof...

...dal punto di vista di uno studente.

Obiettivamente, per un tizio che riesce a parlare per un anno sempre della stessa cosa, "noioso" ci sembra addirittura un eufemismo; questa idea nasce però da un punto di vista piuttosto limitato ("Il prof in aula parla sempre della stessa cosa"), e non tiene conto della parte restante dell'universo: in questa ottica, i consigli di classe dovrebbero, per definizione, svolgersi nel più assoluto silenzio, visto che ciascuno è in grado di parlare solo di un definito argomento.

Va detto che comunque anche aumentare il numero di argomenti di conversazione non è che porti a grossi aumenti della comunicazione, e l'organizzazione di gruppi può, talvolta, rappresentare un discreto problema.

Supponiamo un gruppo ragionevolmente numeroso (chessò, duemilasedici, giusto per avere un problema dell'anno in tempo, una volta tanto) di persone, che hanno, in totale, *sei* argomenti di conversazione predefiniti: per intenderci, quando a incontra b, parlano sempre del primo argomento; ma quando a incontra c, parlano sempre del secondo argomento, mentre se c incontra b parlano sempre del quarto ("E il terzo dov'è finito?" Era per vedere se eravate attenti). Insomma, tutte le conversazioni a due sono prestabilite e sono possibili.

Quello che ci chiedevamo qualche tempo fa era se, per il nostro gruppo, ci fosse la possibilità che, quando tre di loro si incontravano, se ne stessero zitti; ossia se fosse impossibile trovare tre persone mutuamente interessate allo stesso argomento.

Ora, con duemila e passa persone la cosa sembra piuttosto improbabile ma, in questo caso, qual è la dimensione minima del gruppo per cui questo è possibile? O meglio, qual è il gruppo minimo per il quale esiste almeno un *ménage a trois* sullo stesso argomento?

Aiutino? Aiutino. Se dal gruppo minimo si assentasse una persona ben precisa, il gruppo ci sarebbe particolarmente simpatico.

Non abbiamo il coraggio di chiedervi di generalizzare: nel caso, comunque, non ditelo solo a noi. C'è un mucchio di gente interessata a questa roba, ai piani alti della matematica.

2.2 Ostara!

Che sarebbe il nome celtico dell'Equinozio di Primavera. E che sarebbe anche quello che dà il nome inglese (*Easter*) alla Pasqua; con tipico *humor* britannico, a quanto pare gli Albionici hanno preso il nome di una festa *mobile* secondo il calendario celtico (l'Equinozio) ma *fissa* secondo il calendario gregoriano (zona venti-ventun marzo: non fate i pignoli) e l'anno attribuita a una festa *fissa* nel calendario celtico (luna piena di Ogron) ma *mobile* nel calendario gregoriano (la Pasqua, giustappunto).

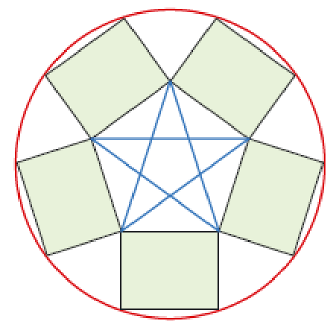
La matematica del calendario è una delle vecchie fissazioni di Rudy, e ha deciso di festeggiare facendo un disegno matematicamente interessante che coinvolga qualche simbolo dell'arte celtica, e la sua scelta è caduta sul *tetragrammaton* pitagorico, altrimenti noto come pentacolo[13]. Non abbiamo nessuna intenzione di organizzare un S*abbath*[14], ma ci piaceva l'idea di avere una serie di simmetrie per alloggiare i Cinque Barbecue, ciascuno dei quali ha bisogno, attorno a sé, del massimo spazio possibile.

Avendo a disposizione una zona perfettamente circolare, l'idea era di tracciare appunto un *tetragrammaton* nel centro, riservando le cinque aree rettangolari ai barbecuisti[15] (qui ci starebbe bene qualche battutaccia sui roghi degli eretici, ma *transeat*).

Date le dimensioni ipertrofiche dell'ego dei cuochi, non solo non possiamo permetterci di dare loro aree di dimensioni diverse, ma queste devono essere di dimensioni *massime*, compatibilmente con il disegno del cerchio esterno e con il pentacolo/tetragrammaton; siccome ormai non state capendo più niente, vi facciamo il disegnino qui di fianco.

In pratica, voi avete il cerchio rosso definito; dovete tracciare il *tetragrammaton* blu in modo tale che i cinque rettangoli grigi abbiano la massima area possibile.

Prendetevela pure calma; tanto con la fortuna che ha Rudy, anche quest'anno a Pasqua piove, e niente merenda nei prati.



1 *Tenete fermo l'unicorno!*

3. Bungee Jumpers

La sequenza $\{A_n\}$ è costruita attraverso la regola $A_1 = 0$, $A_2 = 1$ e, per ogni $n \geq 3$, il termine è dato dalla giustapposizione (nell'ordine) di A_{n-1} e A_{n-2}; quindi, i primi termini della successione sono:

$$\{0, 1, 10, 101, 10110, 10110101, \ldots\}$$

Quali sono gli A_n divisibili per 11?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Marzo.

Mese tradizionale di primavera, che inizia molte volte in molti modi: la primavera meteorologica inizia il primo marzo (come già sapete l'abbiamo fatta arrivare prima del numero di RM, cosa che non ci rende particolarmente orgogliosi, ma ormai c'è poco da fare), quella astronomica quest'anno arriverà il 20 marzo (e per allora contiamo che RM sia già stato letto ed archiviato), e altre tradizioni confermano un inizio precedente o

[13] Posto che vi poniate il pignolo problema del perché uno si chiama "*tetra*qualcosa" e l'altro "*penta*qualcosaltro", esiste un'ipotesi: "*penta*" se lo guardate dall'esterno (ha *cinque* punte), "*tetra*" se *voi* siete una punta, connesso agli altri *quattro* attraverso quattro linee.

[14] Che, tra l'altro, essendo inerente al Sole e non alla Luna, sarebbe un *Esbath*. Barzellettina? Barzellettina. "Per la Festa, dobbiamo sacrificare una vergine e un unicorno. Io ho portato l'unicorno." "Ecco, sempre a me i lavori difficili!"

[15] Se si scrive "scespiriano", si scrive "barbecuisti".

successivo. Ma che cosa cambia? Per noi è RM di marzo che annuncia di solito la primavera e il nostro giornalino è buono per tutto il mese, quindi non c'è problema.

Tra l'altro con il mese di marzo procediamo con le celebrazioni redazionali e festeggiamo il Capo, il cui compleanno in prossimità delle date che diedero i natali a Einstein, Berkeley e Kirchhoff – secondo lui – gli assicurano un brillante futuro in ambiente scientifico. Il futuro non lo conosciamo (e ci permettiamo di dubitarne, finché si associa ai due altri loschi figuri che firmano questa rivista), ma il presente ci pare già promettente (sempre malgrado le cattive compagnie… già sapete…).

Questa rubrica finisce con l'essere sempre brevissima un po' perché siamo sempre in ritardo, ma soprattutto perché riceviamo tanto altro, che vuole trovare spazio nelle nostre pagine. Per esempio il mese scorso ci siamo divertiti ad esporre ai nostri ferratissimi lettori il caro amico del Collettivo dei Fisici Volanti? Ebbene, gli stessi lettori non l'hanno lasciato passare senza commenti sulle varie approssimazioni, che noi abbiamo inoltrato all'interessato. Il Capo ha lanciato una sfida nel BJ? Certo la sfida è stata raccolta da ***Valter***, che scrive:

> L'ho pensata così (forse la faccio troppo semplice):
>
> - ingrandisco la figura aggiungendo righe e colonne sino a giungere ad avere un numero di righe e colonne che sia potenza di 2
>
> - non mi pare di perdere in generalità in quanto se dimostro per questa figura lo dovrebbe essere anche per quella di partenza
>
> - procedo per assurdo e divido in quattro quadranti di pari numero di righe e colonne la figura
>
> - mi pare che debba esserci almeno un quadrante che anche lui non soddisfi l'assunto (tutti sub-quadrilateri scelti nella figura completa sono formati da quelli presenti nei quattro quadranti)
>
> - procedo quindi ricorsivamente sino ad una figura con 4 quadrilateri in cui la somma delle aree delle 2 coppie agli angoli opposti non coincide
>
> - i 2 quadrilateri con area rispettivamente minore e maggiore si trovano in angoli opposti della figura *[…ehm… mi sfugge questa certezza. Non potrebbero essere entrambi "dalla stessa parte"? (RdA)]*
>
> - sottraggo l'area del quadrilatero più piccolo a tutti e quattro
>
> - la differenza fra la somma delle aree non dovrebbe variare avendo tolto lo stesso valore a tutti i quadrilateri
>
> - geometricamente la sottrazione la effettuo sovrapponendo opportunamente il quadrilatero più piccolo agli altri 3
>
> - dovrebbero rimanere una triangolo ciascuno al posto dei due quadrilateri intermedi e la composizione di tali 2 triangoli nel quadrilatero maggiore *[OK, mi sono perso. Ma mi pare si stiano supponendo angoli corrispondenti uguali, cosa vera solo nel caso dei parallelogrammi. Qualcuno mi fa "n" disegnini, per favore? (RdA)]*
>
> - quindi c'è una contraddizione e dovrebbe essere dimostrato il teorema

Ed ora io commenterò con un "che cosa ne pensate?", che a sua volta scatenerà altre risposte *[Comincio con la mia: il passaggio alla potenza di due è bellissimo e la strada mi pare decisamente promettente, ma non vedo le certezze dove ho messo le due note (RdA)]*. Vedete che non c'è posto per le mie baggianate? Ma tornando per un momento alla meteorologia, il mese dovrebbe promettere bel tempo e portare tutti i nostri affezionati ed efficienti solutori di problemi fuori all'aria aperta a godere i primi raggi di sole primaverile, quindi dobbiamo goderci per bene questa abbondanza di soluzioni invernali, che passeremo subito a presentare.

4.1 [Calendario 2010]

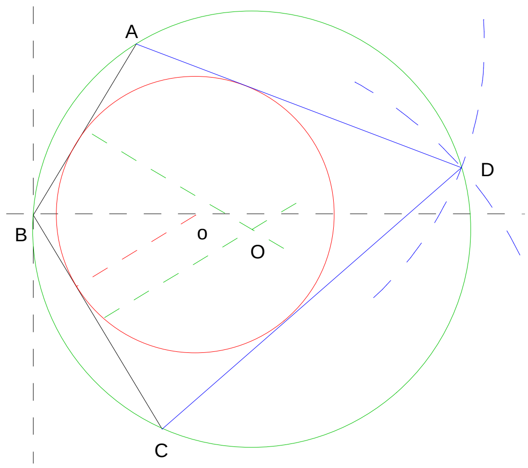
Il grande ed incredibile ***Sawdust*** nei calendari sembra prediligere aprile (e non è l'unico). Nelle prossime pagine un'altra soluzione geometrica dallo specialista.

4.1.1 Aprile 2010 – IMO 1962, 5

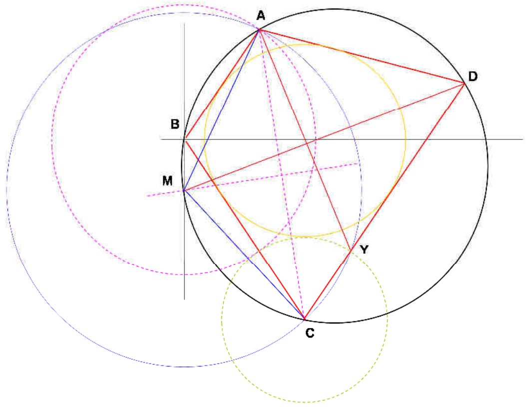
I testo del problema, per prima cosa:

> *Dati tre punti distinti A, B, C su un cerchio K, costruire un punto D su K, tale che un cerchio possa essere inscritto in ABCD.*

Ed ora la soluzione del nostro eroe:

> Un quadrilatero è circoscritto ad un cerchio se le somme delle 2 coppie di lati opposti sono uguali.
>
> Il centro della cfr circoscritta a un quadrilatero è l'incrocio degli assi dei lati. Il centro della cfr inscritta in un quadrilatero è l'incrocio delle bisettrici degli angoli, che devono essere complementari a coppie opposte (α+γ=β+δ=180°).
>
> Posto il punto B nell'origine di un piano cartesiano e il centro della cfr K sull'asse X, l'equazione della cfr K di raggio R è
>
> $$(x-R)^2+y^2=R^2$$
> $$x^2-2Rx+R^2+y^2=R^2$$
> $$x^2+y^2=2Rx$$
>
> 
>
>
> Però ora mi sembra molto rognoso andare a cercare la bisettrice dell'angolo ABC, su cui giace il centro della circonferenza inscritta per cui preferisco disporre questa bisettrice in coincidenza con l'asse X. In questo modo i punti A e C si trovano su due semirette, speculari rispetto all'asse X, uscenti da B.
>
> Le coordinate di A e C sono (x_A, y_A) e (x_C, y_C) e i segmenti AB e BC misurano rispettivamente
>
> $$\overline{AB}=\sqrt{x_A^{\;2}+y_A^{\;2}}\quad \overline{BC}=\sqrt{x_C^{\;2}+y_C^{\;2}}$$
>
> Ora, detta S la somma di 2 lati opposti, le distanze di D da A e C sono
>
> $$\overline{AD}=S-\sqrt{x_C^{\;2}+y_C^{\;2}}\quad \overline{CD}=S-\sqrt{x_A^{\;2}+y_A^{\;2}}$$
>
> E le equazioni delle 2 cfr di centri A e C aventi per raggi i 2 succitati segmenti, e quindi passanti per D, sono
>
> $$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=\left(S-\sqrt{x_C^{\;2}+y_C^{\;2}}\right)^2 \text{ e}$$
> $$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=\left(S-\sqrt{x_A^{\;2}+y_A^{\;2}}\right)^2$$
>
> Queste individuano un punto su K tale che CD+AB=AD+BC.
>
> Però forse a questo punto è meglio proseguire solo per mezzo del disegno, visto che forse in altro modo diventa un po' troppo complicato. Per cui passiamo al disegno seguente. Tracciato il segmento AC (che è una delle diagonali del quadrilatero cercato), il suo asse incontra la circonferenza K in M. Con centro C disegniamo una circonferenza di raggio BC – AB. Una circonferenza passante per A (e anche per C) di centro M incontra la precedente in Y.

L'asse di AY oltre a passare chiaramente per M, individua anche il punto D cercato. Infatti AD=AY per cui DC=AD+CY così come BC=AB+CY, ossia AB+DC=AD+BC che è la condizione riportata all'inizio per cui una circonferenza può essere inscritta in un quadrilatero. Inoltre, visto che MD è la bisettrice dell'angolo ADC, l'intersezione di MD con l'asse delle ascisse individua il centro del cerchio inscritto poiché per costruzione quest'asse biseca l'angolo ABC.



Bellissima, ottimo lavoro. E funziona come regalo di compleanno per il Capo, ma anche per sé stesso, visto che sono nati lo stesso giorno.

4.2 [204]

4.2.1 Allergie cervellotiche

Ancora un contributo su questo problema di gennaio:

Definiamo numero allergico ai primi un numero composto tale che, quando si cambia una qualsiasi sua cifra con un'altra cifra, il numero resta composto. Riuscite a trovarne uno di dieci cifre? E, secondo voi, quanti sono i numeri di questo tipo? Abbiamo trovato un numero di due cifre allergico ai primi che, se lo scrivete in binario e cambiate una o due cifre (ammesso il cambio nei bit più significativi) il numero resta comunque composto, qual è? Quanti sono gli allergici binari, per il cambio di una o due cifre? E se permettessi di cambiare più cifre?

Il mese scorso abbiamo pubblicato la soluzione di ***Valter*** e l'inizio di quella di ***Camillo***, che ci ha scritto per completare il suo lavoro:

Devo fare una rettifica alla mia precedente; dove scrivo che "(es. 200, 202, 204, 205, 206, 208) sono tutti allergici," questo non è del tutto vero difatti il 202 e il 205 sono anallergici e questo vale per tutti i finali 2 e 5 quando in mezzo vi sono solo degli 0 (es.2005, 60002,800005 ecc.).

Come risposta all'ultima parte del quesito; presumo che gli allergici con qualunque base siano infiniti. Per quanto riguarda il cambio di più cifre ed altre amenità qui di seguito qualche spunto.

A questo punto parto col TurboC e la mia solita forza bruta per analizzare questi numeri allergici.

Premetto che la mia analisi si ferma alle prime 6 cifre perché mi limito alla generazione di una tabella di numeri primi a 1MiB (in 64KiB ci possono stare al massimo gli 82025 primi fino al 1048573), se fate un po' di conti scoprirete perché.

Un primo algoritmo molto ottimizzato (impiega meno di 6s) ma per niente flessibile ha trovato i 243803 numeri allergici ai primi, gli estremi sono il 200 e il 999998.

Una curiosità, se escludiamo quelli divisibili per 5 vi sono solo 3 allergici dispari: 212159, x e 872897. Io x lo conosco ma lo lascio in sospeso.

Il secondo algoritmo di vera forza bruta ma con una lentezza esasperante (ha impiegato quasi 10 ore per fare quanto sopra) ma di una flessibilità incomparabile, è possibile utilizzare tutte le basi numeriche da 2 a 36 ed è in grado di evidenziare il cambio di più di una cifra.

La limitazione della tabella dei primi porta ad analisi diverse in funzione della base matematica presa in considerazione. Il numero massimo che è possibile analizzare deve essere inferiore a 1048576 elevando la base a potenza. Ad es. in base 33 si può analizzare fino a

35936 perché è il risultato di 33 alla terza –1. Le basi 2, 4, 16 e 32 sfruttano al massimo la tabella dei primi.

Tutto sommato di questi allergici ce ne sono un mucchio in ogni base. Il rapporto tra allergici trovati e numeri analizzati va diminuendo man mano che la base sale. Le basi pari hanno un rapporto più alto rispetto alle dispari e tra queste ultime le basi prime lo hanno ancora più basso.

La base più interessante è la binaria che ha 442225 allergici con una cifra più 27030 allergici per 2 cifre. Questi allergici per 2 cifre sono sempre seguiti da un allergico dispari la prima coppia è la già vista

84-85 segue 184-185, l'ultima coppia è 1048456 e seguente.

Vi sono poi gli allergici in fila; con 7 di fila vi sono 19 sequenze la prima parte da 133226, curiosamente vi sono solo 2 sequenze da 6 numeri in fila, nessuna oltre i 7 in fila.

Per quanto riguarda gli allergici con cambiamento di 2 cifre oltre ai 27030 di base 2 ve ne sono 223 con base 3 e 30 con base 4, nessuna altra base ne ha.

Per quanto riguarda i 30 con base 4 sono tutti a doppia coppia in fila:

doppio allergico, dispari, altro doppio e dispari (detta in base 10 34560/1/2/3), in 29 casi su trenta i quattro sono seguiti da un quinto allergico singolo (nell'esempio precedente il 34564).

La base 25 di curioso ha che tutti i suoi allergici terminano per 0 o per 5 od un suo multiplo (0, 5, a, f , k) equamente distribuiti.

In molte basi la cifra terminale è, quasi, equamente distribuita a parte una preponderanza col terminale 0 e/o una mancanza con terminale primo.

Per quanto riguarda le altre basi nulla di particolare da segnalare.

A proposito il primo base 10 allergico con 9 cifre e 1000000010.

Bravo ***Camillo***. Andiamo avanti, tanto ancora da raccontare.

4.2.2 Teoria del Campo (dei Chinotti)

Un problema che il mese scorso aveva ricevuto le soluzioni di ***Valter*** ed ***Alessio***, ecco di nuovo il testo:

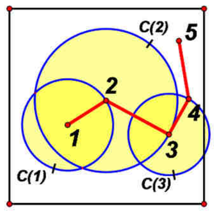
> *La nuova area sulla quale vorremmo imbastire il campo di tiro è un quadrato di lato unitario (ettometri) del quale il contorno è perfettamente accessibile; il nostro primo problema è che vorremmo mettere cinque oggetti nel campo, e poi procedere secondo questo algoritmo:*
>
> 1) *Si sceglie un punto e lo si nomina P_1.*
> 2) *Da P_1, si valuta quale sia il punto più vicino ancora senza nome e lo si nomina P_2.*
> 3) *Da P_2, si valuta... eccetera.*
>
> *Raggiunto P_5, si torna a P_1: se due punti sono equidistanti dal punto nel quale vi trovate, potete scegliere quello che preferite. Quello che vorremmo è che il circuito abbia la lunghezza massima possibile.*

Il mese scorso a questo punto mettevo una nota sul blackout della nostra mail, e grazie al cielo ***trentatre*** si è accorto che probabilmente alcune sue mail si erano perse. Ci ha rimandato anche altro (che no, non avevamo ricevuto), che troverà spazio in altre rubriche. Ecco qui la sua soluzione:

Indico con $\boldsymbol{Q}$ il quadrato, 1, 2, … N i punti posizionati in $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{S}(n)$ la lunghezza del vettore $\boldsymbol{n} \to \boldsymbol{n}+1$, $\boldsymbol{C}(n)$ il cerchio (privato della circonferenza) di centro $\boldsymbol{n}$ e raggio $\boldsymbol{S}(n)$, $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{n})$ l'unione dei cerchi fino a $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{n})$ incluso, ciclo il percorso orientato (1, 2, … $\boldsymbol{N}$, 1), L la lunghezza del ciclo, cioè $L = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{S}(n)$ con $\boldsymbol{S}(N) = |\ \boldsymbol{N} \to 1\,|$.

Il problema si può affrontare in due modi.

(A) per verifica, come dal testo del problema: <u>dati gli *N* punti</u> nel quadrato e scelto 1, si cerca 2 più vicino fra quelli non ancora toccati, ecc., fino ad ***N***, che si congiunge con 1; cambiando 1 e scegliendo le eventuali alternative (punti equidistanti), si possono avere diverse soluzioni, fra cui si sceglie quella con *L* massimo.



1

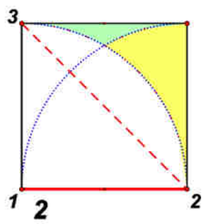
(B) per costruzione: partendo da 1 e 2, si individua l'area in cui possono stare i punti successivi (che devono essere tutti più lontani da 1), si colloca in quest'area 3 ecc.; il processo può interrompersi prima di arrivare a ***N*** se nel quadrato non c'è più spazio disponibile.

Lo schema del processo in fig. 1

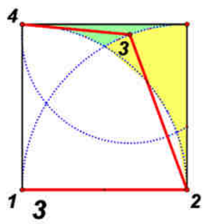
- sono dati i punti 1 e 2
- 3 deve essere esterno al cerchio ***C***(1) – altrim. sarebbe scelto da ***1***
- 4 deve essere esterno ai cerchi ***C***(1) e ***C***(2) – altrim. sarebbe scelto da 1 o 2 , ecc.
- in giallo l'unione ***U***(3); 5 può stare solo nella zona bianca del quadrato (perimetro della zona incluso).

Ne segue

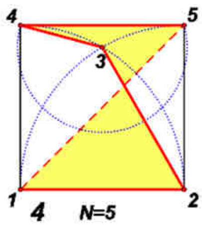
- per *n*>2 il punto ***n*** deve essere esterno a ***U***(*n*-2)
- ogni punto riduce lo spazio di ***Q*** per i punti successivi; infatti il cerchio ***C***(*n*) ha almeno una parte esterna a ***U***(*n*-1) e interna a ***Q***
- se il vettore ***n*** → ***n***+1 è una diagonale di ***Q*** il cerchio ***C***(*n*) occupa tutto ***Q*** salvo il vertice ***n***+1; quindi la diagonale è ***N***→***1*** oppure (***N***-1)→***N*** , e il ciclo comprende al massimo una diagonale
- se il ciclo include una diagonale, include al massimo due lati, contrapposti, di ***Q*** (il ciclo è orientato)
- data una soluzione (1, 2, … *N*) i vincoli precedenti valgono anche per il ciclo ridotto che si ha togliendo ***N*** oppure togliendo 1 (e scalando la numerazione); quindi da ogni soluzione *N* si ricavano due soluzioni *N*-1.



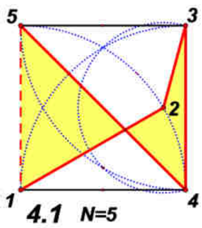
2



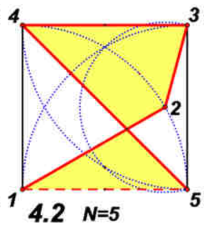
3



4 N=5



4.1 N=5



4.2 N=5

<u>caso *N* = 5</u>

In fig. 2,3,4 la costruzione di una soluzione con lo schema (B); il vettore ***n***→***n***+1 è sempre preso con la massima lunghezza ammessa dai vincoli.

fig. 2 – partendo con 1 e 2 su un lato di ***Q***, il punto 3 può stare solo nella zone in verde o in giallo; nella zona verde, 3 finisce nel vertice opposto a 2; 2→3 è una diagonale che blocca il processo

fig. 3 – nella zona gialla, 3 è sul cerchio ***C***(2) e lascia libera l'area verde, 4 va nel vertice opposto a 2, l'unione ***U***(3) dei tre cerchi copre tutto il quadrato e non si può proseguire a meno che 3 sia nell'incrocio di ***C***(1) e ***C***(2); in questo caso il vertice opposto a 1 è sul bordo di ***U***(3) e accessibile; si ha quindi la soluzione di fig. 4.

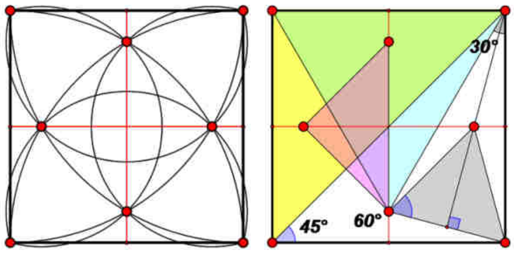
Questa è esattamente la soluzione trovata per via algebrica da ***Alessio***.

Verificando con gli stessi 5 punti gli altri cicli possibili si hanno, a meno di rotazioni e riflessioni, soluzioni peggiori salvo quelle equivalenti di fig. 4.1-2 (con forma uguale ma cicli diversi). Il valore di L è sempre dato dal perimetro del poligono intrecciato in giallo.

Cercando in modo analogo le soluzioni N=6 i due punti interni (v. fig. 6 e successive) sono sempre nella intersezione dei cerchi centrati sui vertici.

Se il ciclo passa per i 4 vertici di ***Q***, le soluzioni massime N=5,6 sono le uniche possibili.

casi N = 6,7,8



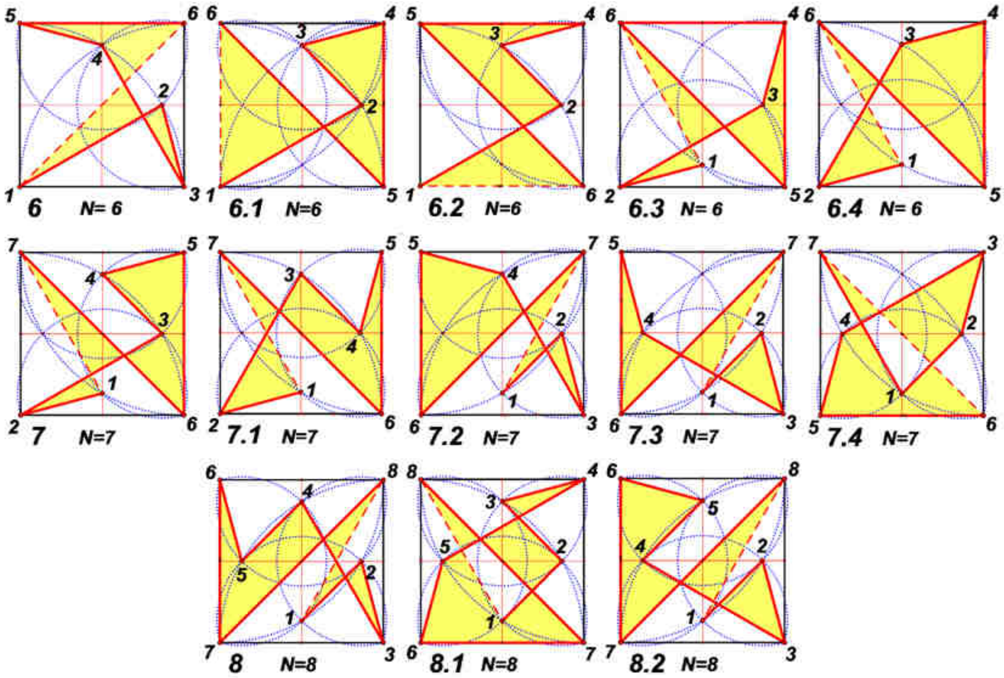
5

Ho quindi cercato le soluzioni a partire dagli otto punti di fig. 5. Ogni punto è centro di un cerchio che passa per altri 4 punti, e per ogni punto passano 4 cerchi. Per i punti si possono tracciare due tipi di triangoli rettangoli isosceli, di lati 1 e $2\sin 15° = (\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$, e due equilateri con gli stessi lati. Nelle soluzioni la lunghezza di un vettore, cioè la distanza fra una coppia di punti, può essere solo uno dei lati di un triangolo, per 4 valori diversi.

Dato N, le soluzioni si ottengono tracciando tutti i cicli possibili fra N punti scelti fra gli 8, e selezionando poi quelle con L massimo. Naturalmente per N > 8 occorrono altri punti.

Poiché il punti possibili sono fissi, la ricerca si può programmare. Per ragioni di simmetria, basta scegliere per il punto iniziale un vertice o un punto interno. Le scelte possibili per i punti successivi generano un albero che si può esplorare, eliminando ad ogni passo i punti nascosti dai precedenti. Se si arriva a un percorso completo di N punti si ha una soluzione.

Le soluzioni massime sono per N=5 quelle già viste. Quelle per N=6,7,8, tutte equivalenti, sono in fig. 6,7,8 e successive. Alcune soluzioni hanno la stessa forma, ma ciclo diverso. In tutte è presente la diagonale.



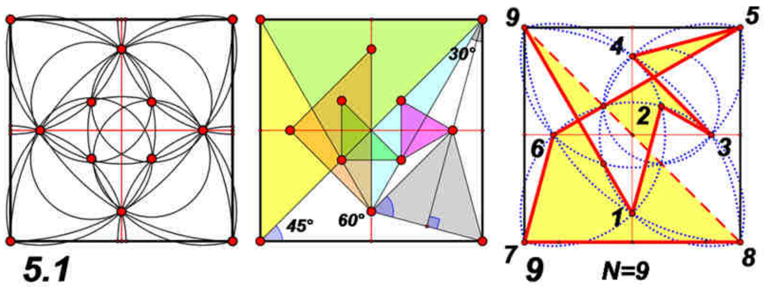
La lunghezza precisa dei cicli è

N=5 $L = 3 + (\sqrt{2} + \sqrt{6}) / 2 = 4.9319$

N=6 $L = 3 + \sqrt{6} = 5.4495$

N=7 $L = 3 + (3\sqrt{6} - \sqrt{2}) / 2 = 5.9671$

N=8 $L = 3 + 2\sqrt{6} - \sqrt{2} = 6.4848$.



Ho provato a passare da 8 a 12 punti con le stesse proprietà (fig. 5.1). Le soluzioni sono più numerose, ma le massime per N=5,6,7,8 restano quelle già viste.

Con questi punti si possono avere soluzioni fino a N=12, complicate da disegnare e che non riporto, salvo una di 9 punti (fig. 9) con $L = 5 + 2\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3} = 6.7527$.

Bloccare a priori la posizione possibili sembra in contrasto con la ricerca delle soluzioni massime, in cui i punti dovrebbero essere "liberi" nel quadrato. Ma i punti "fissi" sorgono naturalmente nei casi semplici.

Inoltre per ogni soluzione con gli 8 punti valgono le seguenti proprietà (che si verificano con i cerchi disegnati nelle figure).

(a) il punto $\boldsymbol{n}$ >2 è sul bordo dell'unione $\boldsymbol{U}(n\text{-}2)$ e all'incrocio di più cerchi

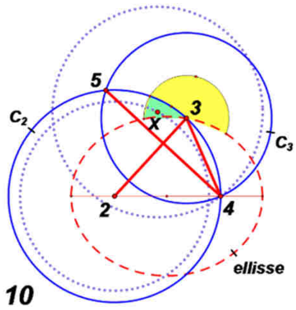
- questo implica che gli $\boldsymbol{U}(n)$ sono i più piccoli possibile, lasciando il massimo spazio ai punti successivi

(b) ogni $\boldsymbol{n}$<(N-1) può scegliere il prossimo punto in vari modi

- p.es. in fig. 8, 1 → (2,3,5,6), 2 → (3,4,8), 3 → (4,5,7,8), 4 → (5,6,8), 5 → (6,7), 6 → (7,8)

- in particolare ***n*** può sempre scegliere fra due punti successivi.

Ma in queste condizioni ogni spostamento di un singolo punto che aumenta L distrugge la soluzione. Nelle soluzioni trovate L è quindi un massimo locale.



10

Provo a dimostrarlo in fig. 10, dove i punti rispettano (a), (b) e proviamo a spostare 3

- L aumenta se 3 si sposta all'esterno dell'ellisse con fuochi in 2, 4 (verso le zone colorate)

- i cerchi che cambiano sono $\boldsymbol{C}(2)$ e $\boldsymbol{C}(3)$; la soluzione resta valida se (4, 5, …) restano esterni a $\boldsymbol{C}(2)$, (5, 6, …) restano esterni a $\boldsymbol{C}(2)$ e a $\boldsymbol{C}(3)$, ecc.

- nel giallo $\boldsymbol{C}(2)$ aumenta e copre 4 e 5; nel verde ($3\rightarrow x$) $\boldsymbol{C}(3)$ copre 5

- in ogni caso un punto successivo a 3 viene nascosto e la soluzione non può proseguire.

Questo non dimostra che gli L trovati sono i massimi assoluti, ma questo è vero per N=5 e 6, sotto la condizione (ragionevole) che il ciclo passi per i quattro vertici, e ritengo sia vero anche per 7 e 8. Ma non ho una dimostrazione esatta e completa.

Il Nostro ***trentatre*** non tradisce mai, sempre molto preciso. Andiamo avanti che ci sono parecchie altre soluzioni da presentare.

4.3 [205]

4.3.1 Il gioco delle tre carte

Un gioco, quello delle tre carte, che ha reso famoso il nostro Doc tra parenti e amici, ma non è di questo che si parla nel problema:

Sono dati tre foglietti con rispettivamente tre numeri naturali x, y e z, ordinati e tutti diversi tra loro, e con somma pari a tredici. I tre giocatori hanno il permesso di guardare una e una sola carta, senza discuterla o mostrarla agli altri. Agnese guarda la carta x, ci pensa ed enuncia: "Non so il valore delle altre due carte". Bruno guarda la carta z, ci pensa e sostiene: "Non so il valore delle altre due carte". Carla guarda la carta y, ci pensa e afferma: "Non so il valore delle altre due carte". Quanto vale la carta y?

Tantissime le soluzioni giunte su questo quesito, che se siete familiari con i "killer sudoku" era piuttosto facile, ma è sempre interessante vedere da dove partono le soluzioni. Cominciamo con ***Pelkan***:

Ho trovato la soluzione ma il procedimento non spicca per eleganza. In pratica tutte le combinazioni di naturali x, y e z che soddisfano alle tre regole sono

1 2 10

1 3 9

1 4 8

1 5 7

2 3 8

2 4 7

2 5 6

> 3 4 6
>
> Dobbiamo escludere subito le prime due combinazioni visto che il 9 e il 10 compaiono solo una volta e Bruno avrebbe avuto vita facile. A questo punto, nell'ordine, Agnese non ha pescato il 3 (ultima combinazione) e Bruno (che capisce che Agnese non ha pescato il 3) non ha pescato il 6 (penultima combinazione). Dunque a Carla, che ormai sa tutto di tutti, rimangono le quattro combinazioni centrali. Non può aver pescato né il 3 né il 5 altrimenti avrebbe saputo i valori di x e z. Perciò y=4.

Che ne dite? Anche voi pensate non sia elegante? Una simile procedura è quella di ***Carmine***, che a sua volta ci propone un quesito… come resistere?

> y=4 pur non essendo l'unica possibile:
>
> | Flag | x | y | z | Motivo |
> |---|---|---|---|---|
> | no | 1 | 2 | 10 | combinazione unica per z |
> | no | 1 | 3 | 9 | combinazione unica per z |
> | no | 2 | 3 | 8 | y capirebbe |
> | | 1 | 4 | 8 | |
> | | 2 | 4 | 7 | |
> | no | 3 | 4 | 6 | combinazione unica per x |
> | no | 1 | 5 | 7 | y capirebbe |
> | no | 2 | 5 | 6 | z sa che per sarebbe l'unica per y |
>
> Ne ho una simile forse più semplice ve la racconto nella versione breve, può essere meglio romanzata.
>
> Due logico-matematici si incontrano.
>
> A: che fai?
>
> B: mi sono sposato
>
> A: figli?
>
> B: sì, tre.
>
> A: età? (in numeri interi)
>
> B: il prodotto è 36
>
> A: non mi basta.
>
> B: la somma è il numero civico di quella casa.
>
> A: non mi basta.
>
> B: la piccola ha gli stessi occhi della mamma.
>
> A: Ho capito

Ecco, lui ci dà anche la risposta, ma noi non ve la scriviamo tanto siete troppo bravi per non capirla da soli. Vediamo che cosa ci scrive ***Nicola***:

> Debbo però farvi una tiratina di orecchie visto che nel testo introduttivo si citano i numeri naturali, ma appunto vengono solo citati e NON si dice (esplicita, rammenta, stabilisce et cetera) che i tre numeri posti sul retro dei foglietti siano naturali anch'essi. Lo si potrebbe inferire? Sì. Viene stabilito? No. Partendo dalla ragionevole (in matematica?) ipotesi che si tratti di numeri naturali vediamo cosa accade nel cervello di Agnese, Carla e Bruno:
>
> Tre numeri naturali diversi tra loro la cui somma dà 13, posti in ordine dal più piccolo al più grande; facile:
>
> (1 3 9) (1 4 8) (1 5 7) (2 3 8) (2 4 7) (2 5 6) (3 4 6)
>
> Agnese guarda la carta x, quella associata al numero minore dei tre e non è in grado di stabilire quale delle terne possibili è stata scelta; con una semplice

> occhiata vediamo che potrebbe identificare la terna solo nel caso che *x* sia 3, caso che quindi viene eliminato.
>
> casi rimanenti: (1 3 9) (1 4 8) (1 5 7) (2 3 8) (2 4 7) (2 5 6)
>
> Bruno esamina la carta *z*, quella associata al numero maggiore dei tre e non è in grado di stabilire quale delle terne possibili è stata scelta; potrebbe farlo solo nel caso che il numero maggiore della terna sia 9 (terna: 1 3 9) oppure 6 (terna: 2 5 6) che vengono quindi eliminate:
>
> casi rimanenti: (1 4 8) (1 5 7) (2 3 8) (2 4 7)
>
> per l'ultimo caso vediamo che se *y* fosse 5 oppure 3 i giochi sarebbero conclusi, visto che Carla dichiara non essere questo ciò che accade ci resta l'unico valore rimasto: *y*=4.
>
> Gli altri due numeri sono a scelta (1 8) oppure (2 7) potremmo giocarcela a testa e croce oppure (più matematicamente) a pari e dispari ma per il momento abbiamo concluso.

Abbiamo provato a rimediare alla tiratina d'orecchie nel riassunto all'inizio, ma vogliamo lasciare un po' di spazio ad ***Alberto R.***, che abbiamo fatto impazzire anche questa volta con i nostri dati imprecisi:

> Rilancio la mia proposta (vedi RM200) di un referendum per decidere se i "numeri naturali" comprendono o no lo zero. Nel primo caso (non riporto i calcoli) il problema mi risulta indeterminato: solo 7 delle 14 terne possono essere escluse. Consideriamo il secondo caso.
>
> Le terne (A,B,C) crescenti a somma 13 sono 8:
>
> (1,2,10) (1,3,9) (1,4,8) (1,5,7) (2,3,8) (2,4,7) (2,5,6) (3,4,6).
>
> Il "non so" di Agnese che conosce A esclude l'ultima. Il "non so" di Carla che conosce C esclude la prima e la seconda. Il "non so" di Bruno che conosce B (tenuto conto che la terna (1,3,9) è già stata cancellata) esclude la quinta. Restano:
>
> (1,4,8) (1,5,7) (2,4,7) (2,5,6)
>
> e non v'è modo di scegliere tra B=4 e B=5.
>
> Per superare l'impasse ho ipotizzato che sia lecito assumere informazioni non solo da quello che i tre protagonisti dicono, ma anche da quello che non dicono. Infatti è significativo che a questo punto Carla non intervenga esclamando "ora so qual è la terna!". Il suo silenzio cancella la prima e l'ultima terna e restano (1,5,7) e (2,4,7).
>
> Ma siamo di nuovo in un vicolo cieco perché adesso Agnese e Bruno dovrebbero dichiarare di conoscere la terna, invece tacciono entrambi. Evidentemente le regole del gioco sottintendono che ognuno parli una volta sola, quindi l'ipotesi dell'eloquente silenzio non è accettabile.
>
> Conclusione: B=4 oppure B=5 oppure ho preso un granchio.

Non è poi così tanto male, i granchi sono buonissimi da mangiare. Ma adesso ci fermiamo, grazie anche a ***Valter*** e ***Davide***, e agli altri che non sono apparsi in questo pezzo. Andiamo avanti.

4.3.2 Il giardino (assolutamente non) Zen

L'immagine di Rudy che gioca con la sabbia e legnetti vi ha perseguitato tutto il freddo mese di febbraio? Allora il problema che avete in mente è il prossimo:

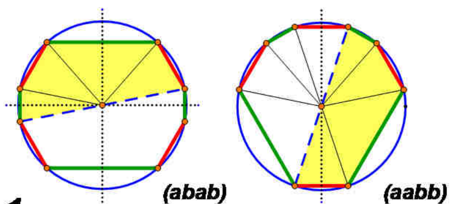
> *Rudy ha un vaso basso perfettamente circolare pieno di sabbia, otto legnetti di due colori tutti sul bordo, e dello spago. Con i quattro legnetti rossi, Rudy ha definito i vertici di un quadrato di area 4, e un pezzo di spago ne fa da frontiera. Adesso vorrebbe inserire nel disegno (seguendo le stesse regole) un rettangolo fatto con i legnetti verdi, spagato e avente area 5, in modo tale che sulla circonferenza ci sia un'alternanza di legnetti verdi e rossi. Adesso gli otto legnetti alternati rossi e verdi definiscono un ottagono, e Rudy sta pensando di passare uno spago lungo i legnetti nell'ordine, definendo una zona ottagonale con muschio nella zona interna,*

> *lasciando sabbia al di fuori dell'ottagono. E vorrebbe che l'ottagono avesse la maggior area possibile. Riuscite a dargli una mano a realizzare il tutto?*

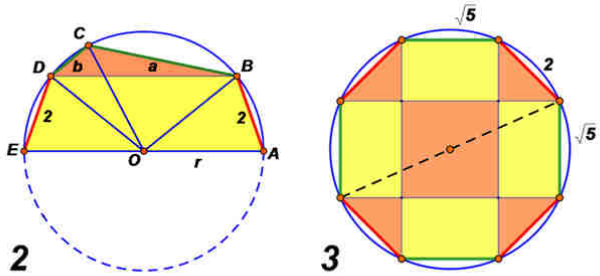
Non tanto successo, proprio perché il Capo Zen è un ossimoro. Infatti ***Valter*** conclude tristemente:

> O non ho capito i termini del problema o sto sbagliando qualcosa; provo a spiegarmi. Condizioni:
>
> - "vaso basso perfettamente circolare"
>
> - "tutti i legnetti sul bordo" —> cioè sul bordo del cerchio
>
> - "stesse regole … rettangolo" —> quindi "legnetti sul bordo" anche per il rettangolo
>
> - area quadrato inscritto nel cerchio 4
>
> - area rettangolo inscritto nel cerchio 5
>
> Mi pare ci sia un teorema che dica "il rettangolo inscritto per il quale si massimizza l'area è il quadrato".
>
> Quindi sembrerebbe che "il Nostro" non posso ottenere ciò che "vorrebbe inserire nel disegno". Provo a calcolare esplicitamente.
>
> Detto "a" il lato minore del rettangolo e "x" la differenza fra lato maggiore e minore desumo:
>
> - diagonale quadrato (quindi diametro cerchio) elevata al quadrato 8
>
> - $a^2 + (a + x)^2 = 8$ —> $2\,a^2 + x^2 + 2\,a\,x = 8$
>
> (il rettangolo deve essere inscritto nel cerchio)
>
> - $a\,(a + x) = 5$ —> $a^2 + a\,x = 5$
>
> (area del rettangolo)
>
> - da cui ottengo $x^2 = -2$
>
> (l'espressione a sinistra dell'uguale nella seconda equazione è presente moltiplicata per due nella prima).
>
> Quindi x dovrebbe essere uguale a radice di –2 ed entriamo nel mondo immaginario.

Il mondo immaginario è quello in cui esistiamo noi tre, per cui va bene. Ma forse qualcosa di più concreto si può fare, dopotutto gli ottagoni nella sabbia non sono come i circoli alieni nei campi di fieno. Vediamo che cosa ne dice ***trentatre***:

> Le condizioni del problema – quadrato di area 4 e rettangolo di area 5 – consentono soluzioni in cui il diametro del "vaso basso perfettamente circolare" e l'area dell'ottagono possono variare da un minimo all'infinito. La massima area dell'ottagono è quindi infinita (soluzione molto zen ma poco pratica), a meno di una precisazione, forse data per scontata: l'ottagono deve avere "*la maggior area possibile*" rispetto a quella del vaso. In questo caso esiste una soluzione da cui si ricava il diametro del vaso; ma come faceva Rudy a giocarci prima? e se aveva trovato il diametro e costruito il vaso perché giocarci dopo?
>
> 
>
>
> **1**
>
> I legnetti rossi sono lunghi 2, quelli verdi sono a e b con $ab = 5$. Seguendo il cerchio i verdi, alternati con i rossi, si possono presentare in due modi, ($abab$) e ($aabb$) come in fig. 1. In ogni caso un semicerchio è diviso in 4 settori corrispondenti a 4 lati (due lunghi 2, un a e un b); poiché i settori di cerchio corrispondenti ai lati si

possono permutare in ogni semicerchio senza modificare l'area dell'ottagono, i due casi sono equivalenti. In fig. 2 è riportata una possibile disposizione.



Per ogni coppia a, b con $ab=5$ è possibile costruire una soluzione, cioè un cerchio in cui posizionare gli otto legnetti; ma il cerchio e i settori dipendono dal rapporto a/b; p.es. se a è molto grande, lo è anche il diametro (sempre maggiore di a), e il settore *OBC* tende ad occupare tutto il semicerchio.

Ma in ogni soluzione il segmento *BD* resta parallelo al diametro *AE* e il triangolo *BCD* è massimo se isoscele cioè se $a=b=\sqrt{5}$.

Si ha quindi la fig. 3, dove il vaso è il più piccolo fra le soluzioni, ma l'ottagono è relativamente il più grande. I lati sono alternativamente 2 e $\sqrt{5}$ e dividendo l'ottagono come in figura, dove ogni diagonale orizzontale e verticale è $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{2}$, si hanno gli altri valori

- superficie ottagono (a muschio) $S=9+4\sqrt{10}=21.649$
- diametro del cerchio $d^2=18+4\sqrt{10}=30.649$
- area del cerchio $Sc=\pi d^2/4=\pi(9/2+\sqrt{10})=24.072$
- residuo del cerchio (a sabbia) = $Sc-S=2.423$.

Ma vi rendete conto? Trovare il problema data la soluzione? Certo che solo il Capo poteva pensare ad una versione tanto non-Zen. Ma è tempo di fermarsi. Grazie a tutti e alla prossima!

5. Quick & Dirty

Rudy ha due figli; almeno uno è un maschio. Qual è la probabilità che entrambi siano maschi?

Rudy ha due figli; il più vecchio è un maschio. Qual è la probabilità che entrambi siano maschi?

Prendiamo la prima domanda: ordinandoli per età, abbiamo che si possono avere tre casi: M-M, M-F, F-M. Solo uno di questi casi prevede siano entrambi maschi, quindi la probabilità è 1/3.

Per quanto riguarda la seconda domanda, abbiamo due possibilità: M-F e M-M; quindi, in questo secondo caso, la probabilità è 1/2.

Saluti dai VadLdRM, Al(berto) & F(r)ed(erico).

6. Pagina 46

Ricordiamo che un intero $n = abcdef$, in notazione decimale, è divisibile per 11 se e solo se la somma alternata delle sue cifre $a - b + c - d\ldots$ è divisibile per 11.

Siano r_n e d_n rispettivamente il numero delle cifre e la somma alternata delle cifre di A_n; dalla concatenazione:

$$A_n=\underbrace{(\ldots\ldots)}_{A_{n-1}}\underbrace{(\ldots\ldots)}_{A_{n-2}},$$

segue che:

$$d_n = d_{n-1} + d_{n-2} \text{ quando } r_{n-1} \text{ è pari,}$$
$$d_n = d_{n-1} - d_{n-2} \text{ quando } r_{n-1} \text{ è dispari.}$$

In ogni caso, quindi, è:

$$d_n = d_{n-1} + (-1)^{r_{n-1}} d_{n-2} \, .$$

Dalla concatenazione è evidente che deve essere:

$$r_n = r_{n-1} + r_{n-2}$$

e, essendo $r_1 = r_2 = 1$, la sequenza degli r_n diventa:

$$\{r_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...\}.$$

Una caratteristica interessante di questa sequenza[16] è di procedere attraverso un periodo di lunghezza 3 (dispari, dispari, pari), (dispari, dispari, pari), ... e quindi il termine $(-1)^{r_{n-1}}$ cicla attraverso i valori $\{-1, -1, 1\}$; iniziando con l'intero dispari r_4, abbiamo:

$$d_5 = d_4 - d_3$$
$$d_6 = d_5 - d_4$$
$$d_7 = d_6 - d_5$$

Dai primi termini della successione e da questa regola di ricorsione, possiamo calcolare facilmente i primi termini della successione dei d_n:

$$d_3 = 1$$
$$d_4 = 2$$
$$d_5 = d_4 - d_3 = 2 - 1 = 1$$
$$d_6 = d_5 - d_4 = 1 - 2 = -1$$
$$d_7 = d_6 + d_5 = -1 + 1 = 0$$
$$d_8 = d_7 - d_6 = 0 - (-1) = 1$$
$$d_9 = d_8 - d_7 = 1 - 0 = 1$$
$$d_{10} = d_9 - d_8 = 1 + 1 = 2$$
$$d_{11} = d_{10} - d_9 = 2 - 1 = 1$$
$$d_{12} = d_{11} - d_{10} = 1 - 2 = -1$$
$$d_{13} = d_{12} + d_{11} = -1 + 1 = 0$$
$$\ldots$$

Confrontando questi valori e come sono ricavati, si vede che vale la legge:

$$A_{11+k} = A_{5+k};$$

quindi, d_n si ripete con un periodo pari a 6, a partire da d_5, assumendo i valori $\{-1, 0, 1, 2\}$. Dovendo, per essere divisibile per 11, assumere il valore 0, si ha che questo accade ogni sesto termine, a partire da d_1; quindi, i valori cercati sono:

$$\{A_1, A_7, A_{13}, A_{19}, \ldots, A_{6k+1}, \ldots\}.$$

[16] Il fatto che sia la sequenza di Fibonacci, anche se interessante, non è d'aiuto nella soluzione del problema.

7. Paraphernalia Mathematica

Una volta tanto, il titolo dice esattamente di cosa parleremo nel pezzo, e statuiamo subito che la cosa non ci piace; volevamo mettere *biellismo*, ma alcuni esperti (non nel ramo) ci hanno spiegato che questo è un caso particolare (anche se quello più utilizzato: per questo ha un nome apposta), e grande è la nostra delusione nel dover utilizzare una così pallida traduzione del bellissimo termine inglese *linkages*. Che è esattamente quello di cui andiamo a parlare.

7.1 Meccanismi

Si definisce *meccanismo* (planare, ma per il momento non stiamo a sottilizzare) un insieme di segmenti di lunghezza fissa e monodimensionali (*archi* o, in inglese, *links*) costretti nel piano e formanti un grafo connesso: ogni connessione (detta anche *vertice*) permette un movimento completo a 360°, e i segmenti sono liberi di attraversarsi l'uno con l'altro, e una o più delle connessioni, fisse sul piano, pongono dei limiti ai movimenti di un qualsiasi punto J della struttura.

Tutto più chiaro, adesso? Sembra incredibile, ma a questo punto qualcuno trova già da litigare.

Infatti, secondo qualcuno i vertici, come in ogni grafo perbene, devono stare agli estremi dei segmenti, e la struttura va complicata in modo tale da soddisfare questa condizione (in pratica, dovete inventarvi una sovrastruttura che garantisca la rigidità dei due segmenti che hanno il punto in comune dove vi serve il giunto), mentre qualcun altro consiglia di prendersela più calma e, visto che abbiamo parlato di un *qualsiasi punto J*, posso allegramente piazzare un vertice dove mi pare. Noi appoggiamo ampiamente la seconda ipotesi e, una volta tanto, non solo perché è la più semplice, ma anche perché la prima viene allegramente violata dalle due macchine più semplici di questo tipo.

Adesso, se qualcuno ha voglia di spiegarci un po' di inglese, è il benvenuto: infatti, nella patria della Rivoluzione Industriale hanno inventato una terminologia tutta loro per definire i diversi giunti:

1. ***R-joint*** (*revolute joint*), o *giunto di rotazione*[17], che permette la rotazione a 360° dei segmenti che congiunge.
2. ***P-joint*** (*prismatic joint*), che traduciamo come *scorrevole*, e che sapete benissimo come è fatto, se pensate all'omonimo pezzo dell'aggiotato regolo calcolatore.
3. ***T-joint***, noto come *giunto universale*, costruibile attraverso due giunti di rotazione con gli assi a 90° tra di loro.
4. ***S-joint*****,** detto in italiano *giunto cardanico*, costruibile attraverso tre giunti di rotazione con assi concorrenti.
5. ***C-joint***, o *giunto cilindrico*, costruibile attraverso un giunto di rotazione montato su uno scorrevole tale che i due assi siano paralleli tra loro[18].

Dopo questo sfoggio di cultura, arriva la parte tranquillizzante: forti del fatto che negli ultimi tre compare l'espressione "costruibile attraverso", i Veri Matematici lasciano questi agli Ingegneri, e analizzano solo le macchine formate dai primi due (qualche purista riesce anche a ignorare lo scorrevole che, come vedremo, è – quasi perfettamente – costruibile con i giunti di rotazione).

Sempre restando sulle definizioni, i meccanismi si catalogano anche in base alla struttura del grafo associato: se il grafo è *ciclico*, il meccanismo viene detto *poligono*, mentre se è un cammino viene detto *arco* o (bellissimo!) *braccio robotico* (anche, più semplicemente, *braccio*).

[17] "Giunto di rivoluzione" è più bello, ma vorremmo tenerci sul moderato.

[18] I testi consultati erano, come al solito, in inglese, e lo scrivente (Rudy) non aveva la più pallida idea di cosa fosse un *hinge*; una veloce consultazione del fidato Hazon lo ha portato all'illuminante traduzione "cardine; ganghero" (sì, uno di quelli dai quali si esce: non si smette mai di imparare); ecco, il giunto di rotazione, qui, è un ganghero. Che non va fuori, ma scorre.

Un altro parametro che permette di catalogare i meccanismi è la *dimensione* dello spazio nel quale si muovono: pronti alla generalizzazione, i nostri Veri Matematici hanno anche esplorato i casi maggiori di tre[19] ma, con qualche rimorso, li lasceremo persi nei loro sogni di pecore elettriche.

Se la cosa qui sopra vi sembra contradditoria con quanto detto prima, aspettate a vedere l'ultimo parametro: un'altra catalogazione prevede di stabilire se i vari segmenti possono intersecarsi o no. Nel caso dei meccanismi bidimensionali, posto che vogliate realizzarli effettivamente, potete permettere l'intersezione ponendo i vari bracci su piani paralleli vicini tra loro (non fate i pignoli, ogni segmento è costretto comunque in due dimensioni): un tipo abbastanza strano di meccanismi di questo tipo è quello nel quale i segmenti possono tranquillamente intersecarsi, ma alcune zone dello spazio nel quale il meccanismo si muove sono bloccate. Siccome a far confusione siamo sempre in tempo, un meccanismo i cui segmenti non possano intersecarsi tra di loro viene detto *semplice*, quindi fate attenzione che la richiesta di *semplicità* di un meccanismo non significa che dovete risparmiare sul budget.

Forti di queste risposte, cerchiamo ora di catalogare le domande. A noi, la cosa sta facendo pensare che si voglia schivare l'oliva, ma a quanto pare è il metodo che si usa da queste parti.

Una prima tipologia di problemi che si pongono sui meccanismi è quello della *riconfigurazione*: si dice *configurazione* la specifica della posizione di tutti i punti terminali dei segmenti (e quindi dell'orientazione dei segmenti e degli angoli che formano tra di loro nei giunti); se un meccanismo non ammette l'auto-intersezione ma può penetrare gli ostacoli, la configurazione viene detta *libera*; se può toccarli ma non penetrarli è *semilibera*.

Forse, a questo punto, è meglio fare un esempio.

Prendete un poligono a n vertici in tre dimensioni: la sua configurazione sarà un insieme di $3n$ coordinate dei vertici, e il suo *spazio delle configurazioni* (ossia l'insieme di tutte le configurazioni possibili) sarà un sottoinsieme di R^{3n}. Il *problema della riconfigurazione* chiede se, data una configurazione iniziale A e una configurazione finale B, sia possibile passare in modo continuo da A a B mantenendo la rigidità dei segmenti e restando nello spazio delle configurazioni. Un caso leggermente più generale di questo problema è quello della *raggiungibilità*: in pratica ci si chiede se un determinato punto è raggiungibile ma non siamo interessati a come arrivarci; inoltre, ci si chiede se esistano degli *stati legati*[20], ossia se da una qualsiasi configurazione A si possa raggiungere qualsiasi altra configurazione o si sia costretti in una componente (sottoinsieme) dello spazio delle configurazioni.

Il secondo tipo di problemi ammette solo due risposte (in una però, c'è la fregatura): è il problema della *decisione*, cui si risponde "sì" o "no". Un problema tipico di questo tipo è "Quel dato punto, è raggiungibile?". La fregatura è che se rispondete "Sì" cadete nel problema della *pianificazione del percorso*, ossia dovete spiegare come arrivarci.

Gli informatici logicamente ci hanno messo lo zampino, e hanno deciso che va misurata anche la *complessità* (nel loro senso), quindi potete avere dei problemi NP-completi, PSPAZIO-difficili e avanti con tutto il loro incomprensibile gergo, come se non fosse già abbastanza complicato[21].

Adesso, mettiamo almeno qualche formula.

In un meccanismo formato da n oggetti, almeno un giunto è *fisso*, e i movimenti vengono misurati rispetto a lui: gli inglesi lo chiamano *ground*, e per lui usano lo stesso simbolo

[19] E "*Braccia Robotiche dalla Sesta Dimensione*" ci pare un titolo bellissimo per un romanzo di fantascienza che coniughi *space opera* e *steampunk*.

[20] Il termine ce lo siamo inventato noi: l'originale è "*locked*".

[21] Anche se esistono bellissime cose come il *Corollario di Hopcroft*, sostenente che "La raggiungibilità per un n-braccio robotico può essere decisa in un tempo $O(n)$." No, non ne parliamo. Cercatevelo e scriveteci un PM, se vi interessa.

che negli schemi elettrici si usa per la "terra"; comunque vogliate chiamarlo, questo giunto non ha gradi di libertà, quindi i gradi di libertà *non vincolati* di un sistema a n giunti sono $(n-1)\ K$, dove K rappresenta il numero di parametri richiesti per definire la posizione di un singolo giunto. Attenzione che questa definizione può essere ingannevole: un singolo giunto nello spazio tridimensionale ha $K = 6$, in quanto vi servono *tre* parametri per definire l'orientamento dell'oggetto (in pratica, il suo asse) e *tre* parametri per definire le coordinate spaziali del punto (il "centro" del giunto).

Adesso, vediamo un paio di comportamenti particolari.

I giunti "R" e "P" (il "giunto di rotazione" e lo "scorrevole", per capirci) introducono dei vincoli tutti loro: il giunto di rotazione costringe il movimento sul piano perpendicolare al suo asse di rotazione, e lo scorrevole costringe (come dice il nome) a *scorrere*; questo significa che stiamo imponendo delle *limitazioni tra i parametri di configurazione*; quando queste limitazioni riducono il *numero* dei parametri di configurazioni, vengono detti *vincoli olonomi*; questo per distinguerli dai vincoli che semplicemente riducono *lo spazio* di configurazione, come potrebbero per esempio essere degli ostacoli al movimento (questi ultimi si chiamano *anolonomi* ma, nell'ipotesi di dover un giorno leggere tutto questo davanti ad un pubblico, ci rifiutiamo di usare questo scioglilingua).

In pratica, il numero delle restrizioni imposte da un giunto diventa $u = K - f$, dove f sono le *libertà* (meglio: i *gradi di libertà*) imposti dal nostro giunto; questo significa che un insieme di j giunti diventa:

$$\sum_{i=1}^{j}\left(K-f_i\right).$$

Quindi, la *mobilità* (generica) di un meccanismo è esprimibile come la differenza tra le libertà di un giunto non sottoposto a restrizioni e il numero di restrizioni imposte dai giunti, ossia:

$$F=(n-1)K-\sum_{i=1}^{j}\left(K-f_i\right)=K\left(n-j-1\right)+\sum_{i=1}^{j}f_i.$$

Che sembra insignificante, ma pone un *limite inferiore al grado di libertà* del meccanismo; poi, il nostro aggeggio potrebbe benissimo avere (anzi, molto spesso li ha) un numero maggiore di gradi di libertà, ma sicuramente non ne avrà uno minore.

Consideriamo il caso particolare della *catena aperta*. Qui sussiste l'importante fatto che abbiamo sempre *un arco in più rispetto ai giunti*, ossia è $n = j + 1$ e quindi la nostra formula, per questo caso particolare, si semplifica enormemente:

$$F=\sum_{i=1}^{j}f_i.$$

Il che significa che la mobilità di una catena aperta è pari alla somma delle mobilità di ogni singolo giunto. Adesso dovremmo andare più nel dettaglio, ma ci teniamo l'argomento per la prossima volta.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms