Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 205 – Febbraio 2016 – Anno Diciottesimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM204 ha diffuso 3'057 copie e il 08/02/2016 per Google eravamo in 8'690 pagine.

Gavin e ***Daniel***, noti come gli ***Slow-Mo-Guys***, hanno forato un pezzo di cartongesso (con un trapano grosso), poi hanno passato con cura una punta più piccola nei colori (prima immagine), fatto passare la punta attraverso il buco, acceso il trapano e filmato il tutto ad alta velocità. Trovate il film a https://youtu.be/soMV-AkSOtA, ed è carino. E il risultato finale costituisce un'ottima alternativa al (falso) Pollock che da anni ormai vegeta nel vostro salotto.

1. Quel ramo del lago di Como

"Quel ramo del lago di Como, che volge a mezzogiorno, tra due catene non interrotte di monti, tutto a seni e a golfi…"
(Alessandro Manzoni
"I promessi sposi", incipit.)

C'è probabilmente una ragione ben precisa per il fatto che gran parte dei pianeti della galassia (almeno quella raccontata dai film di fantascienza) siano spesso nient'altro che infuocati deserti o dei lugubri mondi interamente ghiacciati; e quasi certamente non dipende dalle distribuzioni statistiche delle distanze dei pianeti abitabili rispetto alla stella madre.

Sospettiamo infatti che ciò dipenda essenzialmente da problemi di sceneggiatura: se, rinchiusi nell'ufficio di un famoso sobborgo di Los Angeles, vi state immaginando gli arditi paesaggi che vorreste vedere sullo schermo quando i Cavalieri Jedi parcheggiano la loro astronave su Tatooine, non avete in realtà troppa scelta, come saranno pronti a farvi notare i signori della produzione. Pensavate ad uno struggente tramonto metropolitano? Diamine, bisognerebbe allora fare in modo che la vera – e terrestre – metropoli in questione non sia riconoscibile, altrimenti tutta la catarsi galattica va a farsi benedire. Di conseguenza, o si decide di ricostruire tutta la metropoli con le consolidate, ma molto costose, tecniche della computer grafica applicate alla lussuriosa cinematografia 3D, o è meglio rinunciare all'idea. A quel punto, i signori in giacca e cravatta che si occupano del budget sottolineeranno che la computer grafica si è già pappata i cinque quarti dei soldi a disposizione, perché ci sono voluti molti più incrociatori stellari del previsto nella scena finale della Battaglia della *Morte Nera* (o della *Starkiller*, sua sorellina minore per età e maggiore per potenza), quindi lo struggente tramonto metropolitano sarebbe tanto meglio riprenderlo con la cara vecchia tecnica cinematografica che già fu cara ai fratelli Lumière; e se le metropoli terrestri sono troppo riconoscibili come tali – appunto terrestri, cioè situate sul trascurabile e azzurrognolo pianetino Sol III, non previsto come significativo nell'universo alternativo della sceneggiatura – allora sarà bene ripiegare su uno struggente tramonto desertico, che anche per il più attento degli spettatori risulterà difficile distinguere la sabbia di Tatooine da quella di Ksar Hadada, Tunisia[1].

Ma sabbia e ghiaccio, alla lunga, stancano: e non si può ragionevolmente immaginare di insistere troppo su paesaggi così monotoni per un'intera triplice trilogia; si scatenerà pertanto, immaginiamo, una strana e ambivalente ricerca: perché occorre trovare luoghi abbastanza belli da meritarsi il diritto di rappresentare la bellezza di un intero Universo avendo come limite spaziale effettivo la superficie di un solo pianeta; e, per di più, ricordando che i luoghi prescelti devono essere bellissimi e al tempo stesso non troppo riconoscibili.

In tale contesto, bisogna riconoscere che siamo spettatori fortunati: l'unico pianeta candidato a fare da location per le riprese cinematografiche d'intrattenimento[2] è davvero un gran bel pianeta, strapieno di luoghi del genere. Se a ciò si aggiunge che molto spesso le case produttrici cinematografiche sono americane e hanno come modello di riferimento di spettatore lo statunitense medio, ecco che molti angoli del mondo diventano fruibili:

[1] Sì, certo: è uno dei set preferiti per *Star Wars* e succedanei.

[2] La specificazione "d'intrattenimento" è necessaria, visto che una dozzina d'esseri umani si è divertita a fare da cineoperatori su un grosso satellite naturale, una cinquantina d'anni fa, e diversi macchinari hanno virtualmente indossato la visiera del regista cimentandosi in riprese video da altri corpi celesti, in tempi più recenti. Ma, bisogna riconoscerlo, l'intrattenimento non era tra i loro obiettivi prioritari.

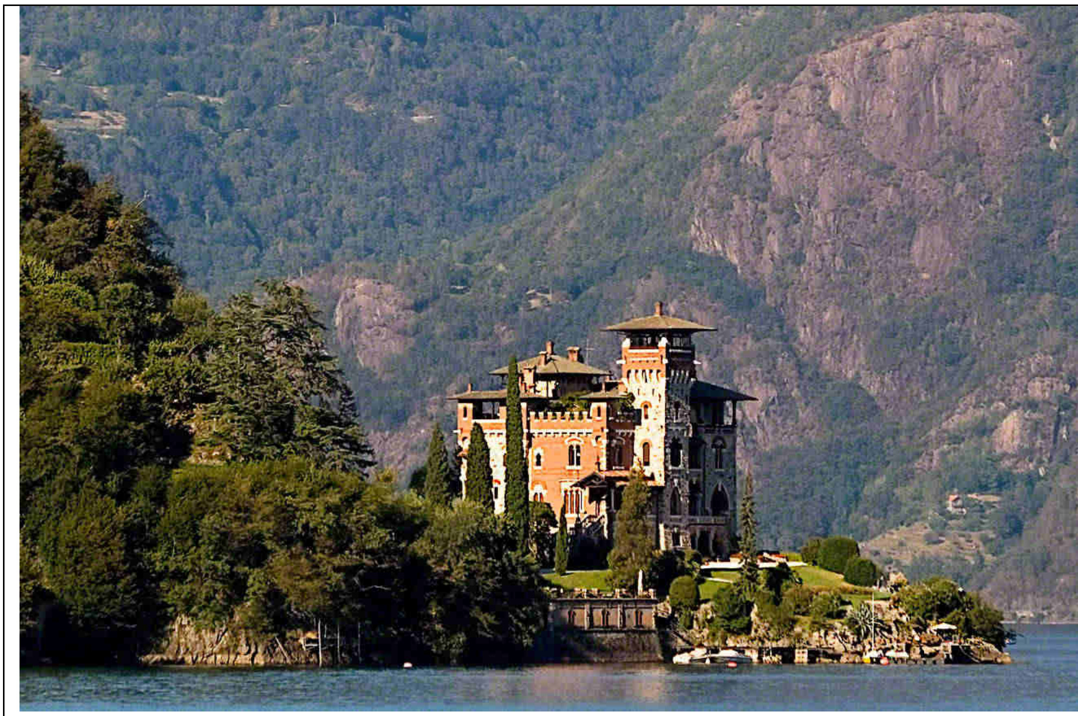
basta evitare di inquadrare mostri sacri come la Tour Eiffel, il Colosseo o l'Ayers Rock, e quasi ogni angolo della Terra potrà essere spacciato per un qualsiasi e generico pianeta della galassia.

Certo, se il film è destinato a fare grossi incassi in tutto il mondo, ci sarà sempre qualche spettatore che uscirà dalla sala un po' perplesso, come probabilmente hanno fatto molti comaschi dopo aver constatato, con comprensibile stupore, che il poetico matrimonio tra la principessa galattica Padmè Amidala e il futuro Lord Darth Vader, anziché sul remoto mondo di Naboo è stato celebrato nel rigoglioso giardino di Villa del Balbaniello, a Bellagio, sul loro lago di casa.

1 *In Star Wars II (L'Attacco dei Cloni), Anakin Skywalker e Padmè Amidala si sposano su Naboo (o, se siete meno fantaromantici, sul lago di Como, Bellagio, Villa del Balbaniello)*

In realtà, è probabile che la cosa non abbia poi scontentato nessuno: i produttori hollywoodiani saranno stati ben consapevoli che per trovare un posto altrettanto bello e adatto alla bisogna avrebbero dovuto perlustrare svariati sistemi solari, persino avendo budget, razzi e velocità ultra-luce a disposizione; e gli abitanti del luogo, probabilmente, avranno accettato di buon grado di rinunciare alla catarsi goduta dagli altri milioni di spettatori che sullo schermo vedevano davvero Naboo, godendosi in cambio la consapevolezza e l'orgoglio di prestare i loro paesaggi a qualche miliardo d'occhi.

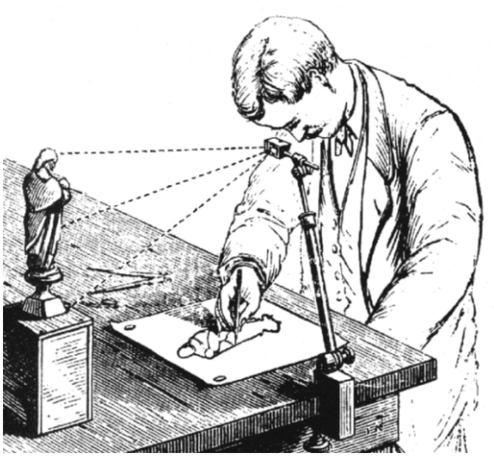
Senza considerare che poi, al pari di molti altri fortunati italici, gli abitanti delle sponde del lago di Como saranno davvero abituati a vedersi invasi da troupe cinematografiche. Anche i film che non hanno bisogno della "non immediata riconoscibilità" per ragioni fantascientifiche si lasciano sedurre facilmente dal Lago di Como. Da quando ad interpretare James Bond si è messo il biondo Daniel Craig, sembra proprio che 007 passi la maggior parte del suo tempo in Italia. Ammazza cattivi a Siena, mentre Piazza del Campo è invasa dal Palio; vede morire una sua amata a Venezia, in un evento tragico ma dalla dinamica curiosa, visto che si tratta di un annegamento in mare perpetrato dentro l'ascensore di un antico palazzo; e poi corse nelle campagne toscane, gimkana tra le buche di tutta Roma, e così via. E, naturalmente, il lago di Como: per non essere da meno degli eroi galattici, anche "Bond, James Bond" calpesterà il giardino di Villa del Balbaniello; e per superarli, andrà ad ammalorare la serata di un "*villain*" anche a Villa La Gaeta, tra San Siro e Menaggio, sulle sponde dello stesso lago.



2 *Villa La Gaeta, Lago di Como*

Del resto, lo si vede anche in quest'articolo: le immagini che lo corredano sono più grandi del solito, perché sono paesaggi che paiono fatti apposta per riempire gli occhi e allargare il cuore. Sembra quasi che l'arte della fotografia e il lago che fu caro a Manzoni abbiano stretto un patto antico, che richiede mutuo rispetto e rinnovate maestose celebrazioni.

Peraltro, prima ancora dei direttori della fotografia degli studi cinematografici, a vagolare lungo le sponde del lago si sono trovati un gran numero di pittori e disegnatori, oltre ad una moltitudine di persone che si contentavano di catturare il paesaggio con solo gli occhi e la memoria. Questi ultimi, verosimilmente, avranno nutrito un po' di comprensibile invidia nei confronti di chi riusciva a fissare con colori su tela quelle visioni, per poi appendersele in soggiorno, ed è certo per questo che molti accolsero con soddisfazione l'invenzione della "*camera lucida*".



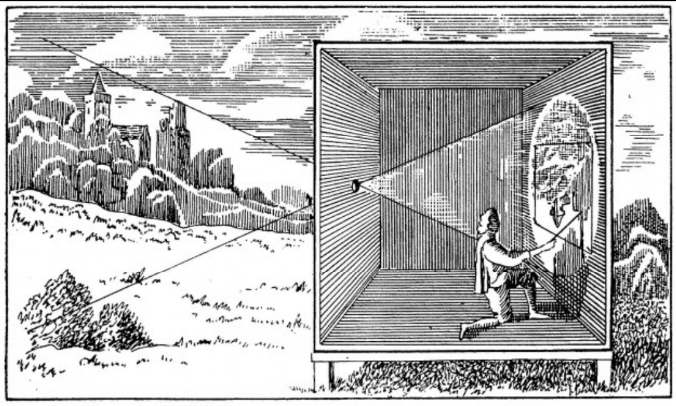
3 *La "camera lucida"*

La "*camera lucida*[3]", pur brevettata all'inizio del diciannovesimo secolo[4], è in realtà un'invenzione ben più antica: di certo ne parla già Keplero un paio di secoli prima. Il principio che la governa è geniale nella sua semplicità: in ultima analisi, non si tratta altro che di uno specchio inclinato a 45° che riflette sul tavolo da disegno l'immagine che si intende riprodurre: in questa maniera, l'artista può inquadrare il soggetto e ritrovarselo proiettato sul foglio di carta, e seguire con matita e pennelli i tratti dell'immagine. Alcuni importanti miglioramenti sul principio fondamentali rendono ancora più semplice la riproduzione: accorgimenti ottici

[3] Il termine suona benissimo in italiano, ma va inteso in latino: anche inglesi, francesi e tedeschi la chiamano "camera lucida", in evidente rassomiglianza e contrapposizione con la "*camera obscura*". Del resto, non è infrequente trovare in lingua italiana riferimenti alla "camera lucida" con il termine nazionalmente tradotto in "camera chiara".

[4] Il brevetto risale al 1806 ed appartiene a William Hyde Wollaston, dice la nostra amata Wikipedia.

consentono, ad esempio, di garantire che siano ben messi a fuoco sia il soggetto da riprendere sia il foglio su cui si esegue il disegno; o anche di poter osservare simultaneamente sia il soggetto che il disegno. Come si capisce dalla descrizione – e ancor meglio dalla figura che la rappresenta – il termine "camera" è un po' fuori luogo, visto che non c'è nulla che ricordi una scatola, o ancor meno una stanza. Il nome è evidentemente creato sul calco di "*camera obscura*", che è stata a lungo il principale ausilio tecnico dei disegnatori.



4 *La "camera obscura"*

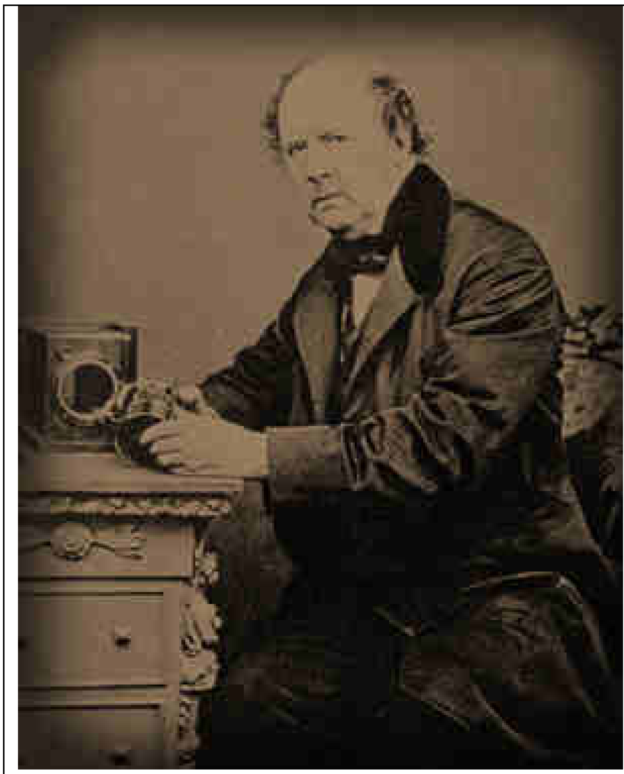
La camera oscura si basa su un principio ben diverso, ma persegue il medesimo obiettivo: "portare l'immagine" sulla tela dell'artista. Il soggetto, preferibilmente ben illuminato, viene proiettato su una parete interna di una vera e propria stanza, grazie ad un piccolo foro praticato sulla parete opposta. L'immagine proiettata, in accordo con le leggi dell'ottica geometrica, risulterà capovolta, ma questo non è certo un dramma per l'artista; piuttosto, almeno nelle versioni di grandi dimensioni come quella raffigurata, sarà stato meno piacevole lavorare in una vera è propria camera buia nella quale, oltre alla luce – che può entrare solo attraverso il minuscolo foro stenopeico[5] – probabilmente faceva fatica ad entrare anche l'aria. Naturalmente, anche le camere oscure hanno avuto dei grossi miglioramenti tecnici, e nelle versioni più sofisticate e moderne i disegnatori potevano contare su camere oscure ben più maneggevoli e che non richiedevano necessariamente che l'operatore agisse al suo interno.

Risultano quindi evidenti le differenze fondamentali nel funzionamento delle due "camere"; differenze che naturalmente si traducevano in vantaggi e svantaggi a favore di una o dell'altra, a seconda della natura del soggetto da riprendere, delle condizioni ambientali e delle preferenze degli artisti. Ma ancora più chiaro dovrebbe risultare il radicale difetto che avevano in comune: entrambe richiedevano infatti l'opera di essere umano che, con tutta evidenza, doveva essere abile nel disegno. Quando le prime "*camere lucidae*" furono messe in commercio, non sono certo stati pochi gli acquirenti che, fiduciosi nella potenza ausiliatrice dello strumento, saranno poi restati delusi nello scoprire che, anche solo per riprodurre a matita un'immagine proiettata, era pur sempre necessaria una non trascurabile capacità pittorica. Il senso di frustrazione che ne seguiva doveva essere davvero fastidioso.

Per certo, un senso del genere deve essere stato provato proprio sulle rive del Lago di Como: nell'autunno del 1833, da un inglese poco più che trentenne appena eletto al Parlamento. Estasiato dal panorama lacustre, prova per l'ennesima volta a riprodurlo su carta con l'aiuto della sua nuova camera lucida. Per l'ennesima volta, deve constatare che il risultato è tutt'altro che soddisfacente, e certo non per colpa di difetti nello strumento. Decide quindi di abbandonare la camera lucida in un angolo della stanza, e se fosse stato

[5] *Stenopeico* viene dal greco, e di fatto ribadisce il concetto di "foro", purché molto piccolo. È forse importante ricordare che l'elemento base dell'ottica, l'obiettivo, è proprio il foro, senza bisogno di lenti. Le lenti svolgono dei compiti importantissimi per ripulire, migliorare e ottimizzare l'immagine, ma in ultimissima analisi non sono necessarie. Il grande fotografo (e filosofo dell'immagine, potremmo dire) Ando Gilardi, scomparso non troppo tempo fa, insegnava ai ragazzi delle scuole elementari a costruire le loro prime "macchine fotografiche" utilizzando scatole di scarpe chiuse con il nastro adesivo come "camere oscure", e una strisciolina di domopak forata con un ago da cucito come "obiettivo". Si risparmiava molto (negli anni '70 le macchine fotografiche erano molto costose, e i cellulari ancora relegati nell'iperuranio) e soprattutto si imparava che la fotografia è una questione essenzialmente di luce e, non di clic e meccanismi sofisticati.

un uomo qualunque avrebbe relegato in un angolo della sua mente anche il desiderio di catturare immagini pur senza saper disegnare. Ma il personaggio in questione non era un uomo qualunque: oltre ad essere stato eletto al Parlamento inglese era anche membro della Royal Society, e quindi valente uomo di scienza. E, ovviamente[6], era un matematico.


5 *Henry Talbot*

William Henry Fox Talbot nasce a Melbury Sampford, Inghilterra, l'11 febbraio 1800. Per qualche ragione ancora misteriosa il nome "Fox", che pure era destinato ad imperversare nei secoli successivi nell'ambito dell'industria dell'immagine[7], non gli era affatto gradito, e ha sempre preferito farsi chiamare Henry Talbot, o al massimo Henry F. Talbot. In fondo è un peccato che il nostro Henry non gradisse il matronimico, perché è grazie all'abilità della madre, Elizabeth Fox-Strangways che è riuscito a sopravvivere ad un'infanzia problematica: pur discendendo da una famiglia di estrazione benestante con proprietà terriere, quando il padre, Davenport Talbot, mette su famiglia, la situazione economica è abbastanza tragica, con debiti e ipoteche che mettono a rischio la proprietà. Come se ciò non bastasse, mister Davenport abbandona questa valle di lacrime prima ancora che Henry riesca a metter piede fuori dalla culla: ciò non di meno, mamma Liz, forte della sua cultura e certo aiutata dall'essere rampolla di famiglia nobile (suo padre era il conte di Ilchester), riesce ad evitare il disastro. Dopo quattro anni, la madre si risposa con un ufficiale di marina che si rivelerà essere un buon patrigno per Henry.

L'infanzia e l'adolescenza di Henry riescono così ad essere ragionevolmente serene, nonostante la precocissima perdita del padre. Frequenta le elementari (e vi incontra, forse per caso, il vecchio astronomo William Herschel[8]); dai dieci ai quindi anni lo troviamo nella scuola preparatoria di Harrow, dove mantiene vivo il luogo comune che vuole gli studenti svegli essere abbastanza brillanti da farsi notare in tutte le discipline (matematica, fisica, lingue, astronomia) e abbastanza irruenti da combinare disastri (facendo esplodere composti chimici in laboratorio). Dopo un ulteriore paio di anni passati a prepararsi in privato, è un diciassettenne pronto ad entrare al Trinity College di Cambridge.

All'università Henry brilla ancora di più: si classifica tra i migliori dodici studenti dell'ateneo in matematica, e nel contempo vince il primo premio per la composizione di versi in Greco antico: e la sua vita procede nel migliore dei modi, visto che alla tenera età di ventidue anni è abbastanza benestante (grazie all'opera risanatrice materna) da avere un rendita terriera che gli toglie tutte le ambasce economiche; abbastanza bravo da

[6] "Ovviamente" non sta certo a significare che "Tutti i valenti uomini di scienza sono matematici", cosa falsa, ma più semplicemente che, se non fosse stato un matematico, difficilmente sarebbe finito dentro questo giornalino.

[7] Nessuna relazione, del resto, tra il Fox del nome di Talbot e quello della casa cinematografica "Twentieth Century Fox" né, di conseguenza, al network TV "Fox Broadcasting Company" di Rupert Murdoch. Il remoto fondatore della "20th" si chiamava sì William Fox, ma il suo è un cognome tradotto dal tedesco "Fuchs".

[8] Ne parliamo (di lui, ma soprattutto di sua sorella Caroline) in RM146, Marzo 2011, "*La signora delle comete*".

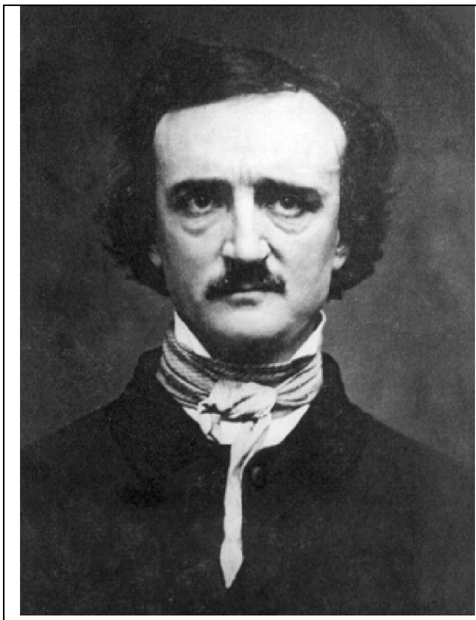
essere accettato già come membro della Royal Astronomical Society per i meriti guadagnati con le sue opere matematiche; e abbastanza saggio da godersi la vita, andando spesso il viaggio per l'Europa, e soprattutto in Italia.

Se a ventidue anni si è già in condizioni così fortunate e piacevoli, cosa ci si può aspettare nei dieci anni successivi? Solo miglioramenti, anche perché si vive all'inizio di quel periodo storico che porterà il Regno Unito a diventare la maggiore potenza del pianeta; e infatti Henry amministra bene le sue potenzialità. Dal punto di vista professionale, mostra tutto il suo valore di ricercatore: si occupa di integrali ellittici, sviluppando il lavoro di predecessori illustrissimi quali Eulero[9], Legendre[10], Abel[11] e Jacobi[12]. Si fa notare tra gli astronomi, e diventa grande amico di John Herschel, figlio del vecchio William che aveva incrociato appena ottenne, e insieme si dedicano allo studio della luce. Dal punto di vista privato, incontra Constance e se la sposa nel 1833. Dal punto di vista pubblico, nel 1831 entra nel Parlamento in rappresentanza della contea del Wiltshire e della città di Chippenham. Che cosa può disturbare una simile perfezione? Ma è ovvio, l'irritazione di non riuscire a disegnare decentemente neppure con l'ausilio d'una camera lucida!

Dopo averla scaraventata in un angolo, Henry Talbot si sofferma a pensare "*…quanto sarebbe stato affascinante se fosse stato possibile che le naturali immagini della camera lucida si stampassero da sole e rimanessero fissate per sempre sulla carta*".

Il seguito, per certi versi, è quasi predeterminato: il nostro studia la luce come astronomo, matematico e fisico; il nostro vuole fissare le immagini sulla carta; al nostro la chimica piace abbastanza da fare esplodere provette nel laboratorio del liceo… e, soprattutto, il nostro è tenace. Per di più, trova in John Herschel un sodale entusiasta, che si dimostrerà, se non altro, bravissimo a coniare una terminologia tecnica abbastanza appropriata da durare nel tempo.

Fatto sta che già l'anno successivo alla sua memorabile vacanza sul lago di Como, Talbot è in grado di veder realizzato il suo desiderio sulle "immagini naturali che si stampano da sole". Capisce quasi subito che per i suoi scopi una "camera oscura" è assai più adatta d'una "camera lucida": costruisce un obiettivo, prepara chimicamente della carta in modo che diventi fotosensibile, la inserisce nella sua camera oscura e, in un bel pomeriggio assolato, lascia che la sua scatola rimanga a fissare un edificio di fronte. Tempo d'esposizione? Un'ora, più o meno: ma il risultato era soddisfacente già alla prima prova, perlomeno per le parti dell'edificio bene illuminate.



6 *Uno dei dagherrotipi più famosi (se non riconoscete il soggetto, filate subito dietro la lavagna!)*

Era la prima fotografia della storia? Oh, tutto dipende da cosa si intenda davvero per "fotografia", e anche per "prima", a ben vedere… Dall'altra parte della Manica, un francese chiamato Louis Daguerre sta, proprio nello stesso periodo, ottenendo dei gran bei risultati nello stesso campo, quello di far sì che le immagini si stampino da sole. Daguerre e Talbot usano composti chimici, e soprattutto metodi, diversi: se le immagini di Talbot richiedono una lunga esposizione, è anche vero che poi

[9] Ne parliamo in RM051, Aprile 2003, "*Di minuscole forme*".

[10] Ne parliamo in RM140, Settembre 2010, "*Le opere e le facce*".

[11] Ne parliamo in RM055, Agosto 2003, "*Rue Ste Marguerite, 51*".

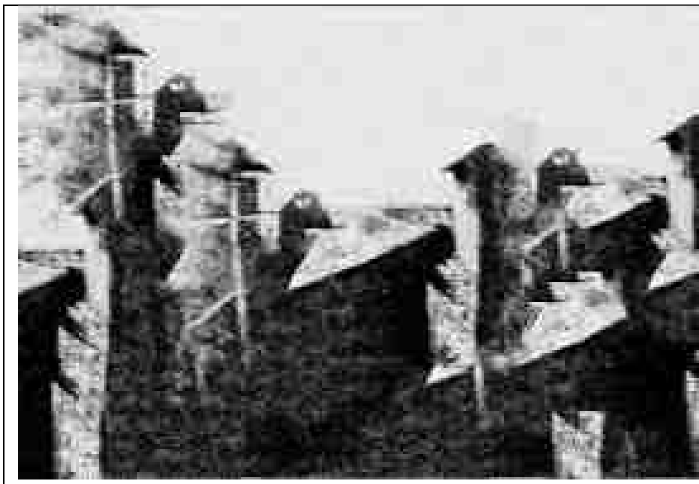
[12] Ne parliamo in… in… ma dai? Non ne abbiamo ancora parlato? Ma pensa…

sono direttamente leggibili senza ulteriori interventi; d'altro canto, il metodo di Daguerre, si basa sulla scoperta essenziale della "immagine latente", ovvero del fatto che anche con tempi d'esposizione relativamente brevi (ma sempre dell'ordine dei dieci minuti) la carta fotosensibile cattura un'immagine ancora quasi invisibile all'occhio umano, ma che può essere "sviluppata" facendola reagire chimicamente.

7 *Uno splendido talbotipo*

Ma anche Talbot ha delle frecce importanti al suo arco: il suo metodo consente l'invenzione del "negativo[13]", ovvero di quell'immagine impressionata dalla luce che consente, una volta ottenuta, di ottenere quante copie positive si vogliono, mentre i "dagherrotipi", come vengono presto chiamate le immagini di Daguerre, sono tutti esemplari unici e non ripetibili. Ed è poi sempre Henry Talbot che inventa il processo di "fissaggio", che rende il materiale fotosensibile inattaccabile dalla luce, una volta impressionato: e chissà, forse è sempre Talbot ad ottenere la prima fotografia.

L'Europa viene presto invasa dalle immagini stampate da Talbot e Daguerre, e saranno quest'ultime ad ottenere il maggior successo di pubblico: in parte perché Talbot impose una sorta di "costo di licenza" a tutti i laboratori che usavano il suo metodo, cosa che Daguerre si guardò bene dal fare; in parte perché le sue immagini erano effettivamente più nitide di quelle di Talbot.



8 *"Vista dalla finestra a Les Gras"*

D'altro canto, i dagherrotipi riuscivano bene i ritratti, ma le immagini di Talbot emanano un senso artistico superiore; e insomma, la diatriba rischia di essere infinita, soprattutto considerando la strettissima vicinanza dei tempi: già nel 1835 Talbot può rivendicare un metodo per ottenere fotografie basate sul cloruro d'argento; d'altro canto, Daguerre può rivendicare… il suo gran maestro, Nicéphore Niépce che col cloruro d'argento aveva lavorato addirittura un ventennio prima. Niépce morì proprio nel fatidico 1833, l'anno della "gita al lago" di Talbot, e durante la sua vita aveva fatto effettivamente disegnare alla luce delle immagini: è sua l'invenzione dell'eliografia, e per molti versi sua può davvero considerarsi l'invenzione della fotografia: del resto, la sua più antica immagine sopravvissuta, la "*Vista dalla finestra a Les Gras*", può ragionevolmente definirsi "fotografia", ed è del 1826.

Soprattutto, dichiarare vincitore Niépce consente a noi di risolvere pacificamente la diatriba tra Daguerre e Talbot, che dette vita effettivamente a qualche malanimo nella vita reale. Ma gli è che, come quasi tutte le grandi invenzioni moderne, la fotografia è figlia di molti ingegni e molti uomini al tempo stesso. È più importante aver scoperto il concetto di "immagine latente" o aver sviluppato il "negativo" e il processo di "fissaggio",

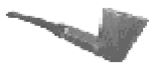
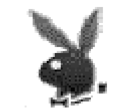
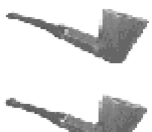
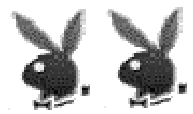
[13] …così chiamato appunto da John Herschel. Il processo basato su di esso Talbot lo chiama "calotype", calotipo, o anche direttamente talbotipo, se non altro per fare pari e patta col dagherrotipo.

visto che al momento, la fotografia moderna fa generalmente a meno di tutte e tre? È importante l'obiettivo composto di lenti, o è davvero solo un optional? Le lenti sono in fondo quasi l'unico oggetto fisico dell'antica arte fotografica che rimane ancor oggi presente, il resto è quasi tutto software… e quanto è servita, a Daguerre, l'invenzione della lente di Petzval, la prima lente della storia disegnata matematicamente, e studiata apposta per ridurre i tempi di esposizione dei suoi ritratti?

Troppo difficile, troppo complesso, dare un giudizio esaustivo finale. Forse la pensava così anche lo stesso Talbot, che infatti, negli ultimi anni di vita preferisce dedicarsi all'archeologia, diventando uno dei primi traduttori del cuneiforme, e alla botanica, dove due specie di piante portano il suo nome. Se a queste si aggiungono il cratere lunare che si chiama Talbot, la curva di Talbot in matematica e, naturalmente, un'unità di energia luminosa che sempre indossa il suo cognome, non si può negare che ci si sarebbe ricordati di lui anche se non avessimo sue fotografie.

Ma, perdinci, ce l'abbiamo.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Il gioco delle tre carte			
Il giardino (assolutamente non) Zen			

Niente tiro con l'arco! ...e vorrei vedere... Nonostante nella prima metà di gennaio[14] il termometro (con l'eccezione di un paio di giornate, almeno in quel di Torino città) indichi solo valori non negativi, non ci pare ancora il caso di riaprire il *Campo dei Chinotti*, anche perché le birre bevute all'aperto in questa stagione suscitano remore anche tra i più arrabbiati saunisti scandinavi, e il *vin brulé* non è bevanda da arcieri (pare i suoi vapori abbiano un influsso deleterio sui *riser*, portando il mirino ad indicare *ogni punto tranne il bersaglio*: non che questo rappresenti un problema, per Rudy e Doc, ma meglio non rischiare); per questo, posati archi e dardi in luogo sicuro ed asciutto e verificato il disgusto murrino (nel senso di *mus, muris*: Murano non c'entra niente) per il nuovo paglione di plastica, i nostri eroi si dedicano (separatamente) a problemi diversi ma simili.

Cerchiamo di chiarire il concetto: i più anziani frequentatori di questa rubrica hanno già incontrato questa tipologia di problemi. Sembrano scandalosamente poveri di dati, ma alla fine si arriva al risultato; di solito è necessaria una robusta (nel senso di *forza bruta*) strigliata all'insieme dei numeri (il che a Rudy non piace), ma all'inizio deve partire una scintilla che rappresenta la parte più interessante di tutto il problema, riducendo la parte da affrontare per *brute force* ad un sottoinsieme ragionevolmente ridotto dell'infinito. Non solo, ma abbiamo avuto svariate volte la gradevole sorpresa di vedervi passare alla soluzione per tentativi con insiemi di numeri *più ridotti* rispetto alla nostra soluzione; provate un po' con questi due...

2.1 Il gioco delle tre carte

Tutti sanno che, se Doc si impegnasse, con i proventi di questo gioco potrebbe tranquillamente finanziare borse di studio sino alla laurea in una qualsiasi università dell'Ivy League per l'intera popolazione di New York, lattanti, pensionati e teppisti analfabeti compresi: quindi, recentemente si è ritrovato nella spiacevole situazione di doversi inventare qualcosa di nuovo per intrattenere tre amici, e si è quindi esibito nella scenetta che segue:

[14] Sì, Rudy è in ritardo. Per una serie di motivi, alcuni piacevoli ed altri meno: nulla di grave, ma sono cose *time consuming*, e il famoso detto *don't drive and derive* fa sì che affrontando tornanti sia meglio non compulsare ebook di matematica. Sono comunque tutti problemi in via di soluzione anche se, come diceva un vecchio fumetto underground, ogni soluzione porta nuovi problemi, e tra il mese prossimo e quello dopo rischiamo di battere ogni record di uscita ritardata.

"Come ben sa questo onorevole consesso[15], i numeri naturali sono un insieme ordinato, ossia, dati alcuni numeri diversi tra loro (e già sul *diversi* il concetto è presente), è possibile decidere immediatamente quale sia maggiore e quale sia minore di un altro, o quali di loro siano minori o maggiori di un numero dato; per festeggiare questa felice proprietà, ho scritto tre numeri sul retro di questi tre foglietti riportanti sulla fronte le lettere x, y e z, e questi numeri hanno interessanti caratteristiche:

1) Sono tutti diversi tra loro
2) La loro somma è pari a tredici
3) Sono in ordine, ossia $x<y<z$.

Adesso, ciascuno di voi tre ha il permesso di guardare una e una sola carta, senza discuterla o mostrarla agli altri: vi chiederò, in seguito, di fare ipotesi sul valore delle altre carte."

Agnese guarda la carta x, ci pensa e, dopo un certo tempo, enuncia: "Non so il valore delle altre due carte".

Bruno guarda la carta z, ci pensa e, dopo un certo tempo, sostiene: "Non so il valore delle altre due carte".

Carla guarda la carta y, ci pensa e, dopo un certo tempo, afferma: "Non so il valore delle altre due carte".

A questo punto, quello che noi chiediamo a voi, lettori, è: *ma quanto vale la carta y?*

2.2 Il giardino (assolutamente non) Zen

Quando fuori nevica, un libro, una pipa e un *vin brulé* sono, per Rudy, un imperativo categorico. Ma siccome qui l'unica "neve" che si trova è sconsigliato frequentarla, visto che la vende a caro prezzo lo spacciatore all'angolo, il Nostro scende a più miti consigli, ricorda le spiagge dell'estate e fa disegni sulla sabbia contenuta in un vaso basso perfettamente circolare[16]. Quando si stufa, comincia a lavorare di legnetti e spago ma, per precauzione, tiene tutti i legnetti sul bordo.

I legnetti sono otto e di due colori e, con i quattro rossi, Rudy ha definito i vertici di un quadrato di area 4, e un pezzo di spago ne fa orgogliosamente da frontiera.

Adesso vorrebbe inserire nel disegno (seguendo le stesse regole) un rettangolo fatto con i legnetti verdi, *spagato* e avente area 5, in modo tale che sulla circonferenza ci sia un'alternanza di legnetti verdi e rossi.

...e sin qui, non ci vuole una grossa scienza. Il fatto è che adesso gli otto legnetti alternati rossi e verdi definiscono un ottagono, e Rudy (sempre perso in progetti che non realizzerà mai) sta pensando di passare uno spago lungo i legnetti nell'ordine, definendo una zona ottagonale onde realizzare un *bonkei* con muschio nella zona interna (quella ottagonale), lasciando sabbia nelle parti del vaso al di fuori dell'ottagono. E (qui sta l'inghippo), per dimostrare di non essere un torturatore di alberi, vorrebbe che l'ottagono avesse la *maggior area possibile*.

Riuscite a dargli una mano a realizzare il tutto prima che sia costretto a dire: "Oh, quelli? Sono dei *bonsai giganti*".

3. Bungee Jumpers

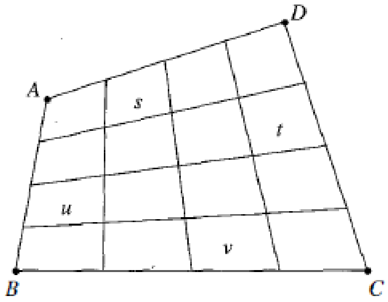
Se ogni lato di un quadrilatero convesso *ABCD* è diviso in n parti uguali e i punti corrispondenti dei lati opposti vengono uniti tra di loro, si ottiene una partizione in n^2 *sub-quadrilateri* che sono, in genere, di forma e area diverse tra loro.

---

[15] Altrove stiamo facendo le pulci a Chaucer, a Dudeney e ad alcuni traduttori: no, adesso la smettiamo.

[16] Il sunnominato vaso avrebbe dovuto essere il contenitore di un *bonkei* (che sarebbe un paesaggio bonsai) in cui gli alberi avrebbero dovuto essere i due *Giuseppi* dei quali abbiamo già parlato. Un po' per pigrizia, un po' per inettitudine, il vaso (con indubbia felicità dei due Giuseppi) è rimasto vuoto come una mente Zen.

Dimostrate che se però n di questi sub-quadrilateri sono scelti su tutte le trasversali della partizione, ossia se non ce ne sono due nella stessa riga o nella stessa colonna, allora la somma delle loro aree vale sempre $1/n$ ABCD ossia, con riferimento alla figura qui di fianco, $s + t + u + v = ¼$ ABCD.



La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Febbraio.

Il mese più corto dell'anno e anche se quest'anno ha un giorno in più, i nostri ritardi non migliorano. A dire il vero il ritardo più grande è sempre provocato dall'ultimo che finisce i suoi pezzi, e questo mese è proprio quello(a) che sta scrivendo queste righe, che risulteranno scarne e mal scritte. Pazienza: il resto è bellissimo, e la parte migliore di questa rubrica la scrivete comunque voi. Quindi bando alle ciance. Nel mese del compleanno di RM poche note, tante soluzioni.

4.1 [Calendario 2016]

Successone quest'anno! E vedrete che questo mese sono tutte dedicate all'estensore di queste note… Cominciamo con il riprendere uno di quelli già visti a gennaio.

4.1.1 Febbraio 2016 – Putnam 2001, A2

I testo del problema, per prima cosa:

> *Sono date le monete C_1, C_2, …, C_n. Per ogni k, C_k è truccata in modo tale che, se lanciata, abbia una probabilità* $1/(2k+1)$ *di dare testa. Se tutte le n monete vengono lanciate, qual è la probabilità che il numero delle teste sia dispari? Esprimete la risposta come funzione razionale di n.*

Il mese scorso avevamo citato la bella mail senza allegato del ***Panurgo***, che dedicava la sua soluzione a me (Treccia ☺), con tanto di poesia. Non sperate di risparmiarvi la ripetizione della dedica:

> Nannetta
> *Il labbro è l'arco.*
>
> Fenton
> *E il bacio è il dardo*
> *Bada! la freccia*
> *Fatal già scocca*
> *Dalla mia bocca*
> *Sulla tua* treccia
>
> Falstaff (A. Boito, G. Verdi)

Certo, non è scritta da lui (c'era scritto anche il mese scorso che era un verso del Falstaff), ma lui l'ha cercata e scelta pensando a *me*. Beh, comunque, è arrivato pure l'allegato:

> Sia P_n la probabilità cercata: ovviamente, con una sola moneta abbiamo $P_1 = 1/3$.
>
> Consideriamo il lancio della moneta n-esima: se le altre $n - 1$ monete presentano un numero pari di teste, il numero di teste totale è dispari se l'esito dell'ultimo lancio è testa con $p = 1/(2n + 1)$.
>
> Viceversa, se le altre $n - 1$ monete presentano un numero dispari di teste, il numero di teste totale è dispari se l'esito dell'ultimo lancio è croce con $1 - p = 2n/(2n + 1)$.
>
> Avremo dunque
>
> $$P_n = \frac{2n}{2n+1} \times P_{n-1} + \frac{1}{2n+1} \times (1 - P_{n-1})$$
>
> espressione che riarrangiamo nella forma

$$(2n+1)P_n = (2n-1)P_{n-1} + 1$$

prima di sostituire n con $n - 1$ e ottenere

$$(2n-1)P_{n-1} = (2n-3)P_{n-2} + 1$$

Continuiamo la sostituzione fino ad ottenere le n equazioni

$$\begin{array}{ccc} (2n+1)P_n & = & (2n-1)P_{n-1}+1 \\ (2n-1)P_{n-1} & = & (2n-3)P_{n-2}+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 5P_2 & = & 3P_1+1 \\ 3P_1 & = & 1 \\ \hline (2n+1)P_n & = & n \end{array}$$

Tali equazioni si sommano come sopra dato che tutti i termini P_k si cancellano tranne P_n che risulta così essere $P_n = n/(2n + 1)$.

Visto? Soluzione vera e presente del ***Panurgo***, con il commento "soldato che fugge, è buono per un'altra volta", che ci pare – soprattutto in ambito di RM – molto azzeccata. Ma andiamo avanti.

4.1.2 Aprile 2016 – Putnam 2001, A4

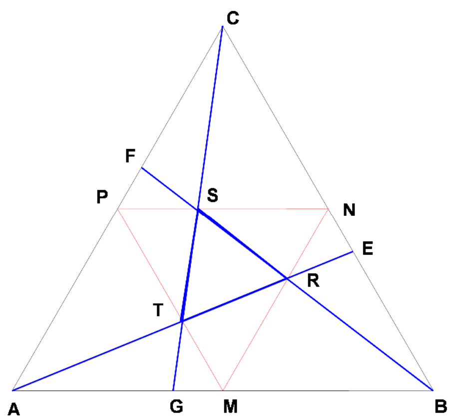
Anche qui, cominciamo a ricordare il problema:

Il triangolo ABC ha area 1. *I punti E, F, G giacciono rispettivamente sui lati BC, CA, AB in modo tale che AE biseca BF nel punto R, BF biseca CG nel punto S e CG biseca AE nel punto T. Trovate l'area del triangolo RST.*

La soluzione che segue è un bel regalo di compleanno (di RM, questo mese, ma indovinate di chi è il compleanno ad aprile?) da parte del nostro massimo solutore di problemi calendareschi, cioè ***Sawdust***. Lo so, non vedete l'ora di leggerla pure voi:

Visto che non è specificato nulla riguardo alla forma del triangolo, nulla vieta di provare con un caso particolare, tanto il problema dovrebbe essere valido qualunque sia il triangolo.

Cominciamo col disegnare quello che, forse, è il triangolo più semplice con area 1 e cioè un triangolo rettangolo con base 1 e altezza 2. Dalle informazioni che abbiamo sui punti R, S e T risulta che DEVONO trovarsi sulle parallele ai lati tracciate per i punti medi dei lati stessi, che dividono il triangolo originario in 4 triangoli uguali simili al "padre".



Proviamo ora a disegnare un triangolo equilatero.

La situazione chiaramente non è molto diversa da prima, ma è più evidente la proporzionalità tra i segmenti AT, TR ed RE.

Ma se questi 3 segmenti sono rispettivamente nella proporzione

$$\overline{AT} : \overline{TR} = \overline{TR} : \overline{RE}$$

e

$$\overline{AT} = \overline{TR} + \overline{RE}$$

l'unica possibilità è che stiano tra loro nel Rapporto Aureo, ossia

$$\overline{AT} = \Phi\overline{TR}$$

$$\overline{TR} = \Phi\overline{RE}$$

in cui Φ indica quello che è anche noto come Numero di Fibonacci ed è pari a

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

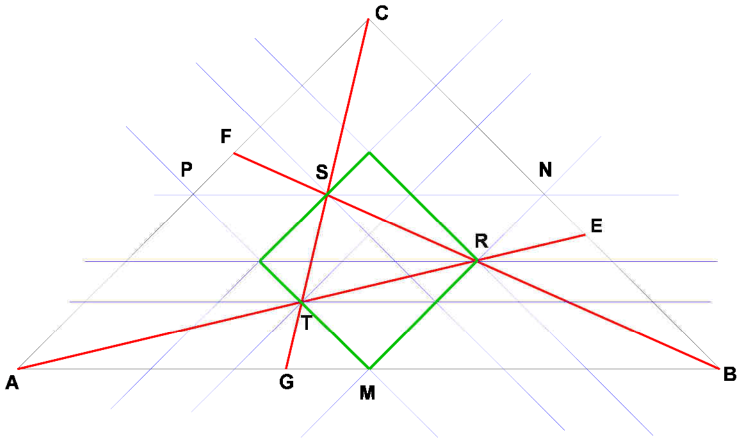
Ma allora anche

$$\overline{MR} = \Phi\overline{RN}$$

e, per similitudine, vale pure

$$\overline{GB} = \Phi\overline{GA}$$

Ancora meglio sembra la possibilità offerta da un triangolo rettangolo isoscele appoggiato sull'ipotenusa, che quindi avrà base 2 e altezza 1.



Tracciando per i punti R, S e T le parallele ai lati del triangolo originario si può riconoscere un quadrato (nel disegno evidenziato in verde).

Assodato che E, F e G sono i punti di Sezione Aurea dei lati su cui si trovano e che quindi anche le altre linee dividono tante parti del disegno col rapporto Φ, ne deriva che il lato del quadrato è $\frac{1}{\sqrt{2}\Phi}$ e quindi la sua area è $\frac{1}{2\Phi^2}$.

L'area del triangolo che ci interessa è uguale all'area del quadrato meno quelle dei 3 triangoli che hanno come estremi dell'ipotenusa rispettivamente i punti R, S e T.

Visto che anche questi si trovano nei punti di Sezione Aurea dei lati del quadrato le aree dei triangolini sono (indicando i triangolini solo con la loro ipotenusa per non mettere troppe lettere nel disegno)

$$S(RT) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\Phi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\Phi^2}\right)/2 = \frac{1}{4\Phi^3}$$

$$S(RS) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\Phi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\Phi^3}\right)/2 = \frac{1}{4\Phi^4}$$

$$S(ST) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\Phi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\Phi^3}\right)/2 = \frac{1}{4\Phi^5}$$

Di conseguenza l'area del triangolo RST è la seguente

$$S(RST) = \frac{1}{2\Phi^2} - \frac{1}{4\Phi^3} - \frac{1}{4\Phi^4} - \frac{1}{4\Phi^5} = \frac{2\Phi^3 - \Phi^2 - \Phi - 1}{4\Phi^5} = \frac{7-3\sqrt{5}}{4} \approx 0{,}07295$$

Ossia circa 1/13,708

Controlliamo se anche per il triangolo equilatero il risultato è lo stesso.

Il lato di un triangolo equilatero di area 1 è $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ e quindi nel nostro esempio il lato del triangolo MNP è $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. L'area di quest'ultimo è 0,25 ed è pari alla somma del triangolo RST e di tre triangoli uguali (TRM, RSN e STP).

Di questi ultimi conosciamo un angolo e possiamo facilmente trovare i 2 lati che lo formano.

$$\overline{RM} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}\Phi} \quad \overline{MT} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}\Phi^2}$$

per cui la loro area è

$$S(MRT) = \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt[4]{3}\Phi} * \frac{1}{\sqrt[4]{3}\Phi^2} * \sin 60° = \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{3}\Phi^3} * \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4\Phi^3}$$

Quindi il triangolo RST avrà un'area

$$S(RST) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4\Phi^3} = \frac{7-3\sqrt{5}}{4} \approx 0{,}07295$$

Ecco fatto. Andiamo avanti.

4.2 [204]

4.2.1 Allergie cervellotiche

Un'interessante ambientazione del Capo per inventarsi dei nuovi numeri ed entrare, prima o poi, nelle spiegazioni dell'inizio di un Carnevale della Matematica. A proposito, lo sapete, vero, che ogni anno ospitiamo noi il carnevale a febbraio? Quest'anno abbiamo scelto un tema eccezionale, preparatevi all'impossibile… come alla creazione dei numeri… *allergici*? Vediamo:

> *Definiamo numero allergico ai primi un numero composto tale che, quando si cambia una qualsiasi sua cifra con un'altra cifra, il numero resta composto. Riuscite a trovarne uno di dieci cifre? E, secondo voi, quanti sono i numeri di questo tipo? Abbiamo trovato un numero di due cifre allergico ai primi che, se lo scrivete in binario e cambiate una o due cifre (ammesso il cambio nei bit più significativi) il numero resta comunque composto, qual è? Quanti sono gli allergici binari, per il cambio di una o due cifre? E se permettessi di cambiare più cifre?*

Beh, mentre io pensavo di farmi venire una allergia al Capo (più che altro dovuta ad un problema che arriva dopo), sono arrivate parecchi contributi. Cominciamo con ***Valter***:

> *Riuscite a trovarne uno di dieci cifre?*
>
> - cerco un numero:
>
> - la cui prima cifra è 0
>
> - che sia = 0 MOD3 e MOD7
>
> - essendo pari basta che soddisfi quanto richiesto dal problema nella prima cifra (e con le due restrizioni che impongo al numero ciò accade)
>
> - lo cerco moltiplicando tra loro numeri primi che terminino per 9 (al fine di ottenere un numero = 1 MOD3 e MOD7 che termini per 1)
>
> - noto che:
>
> - 19 = 1 MOD3 e = 5 MOD7 mentre 59 = -1 MOD3 e 3 MOD7 (quindi moltiplicati tra loro due volte danno un numero = 1 MOD3 e MOD7)
>
> - 29 = -1 MOD3 e 1 MOD7 (anche qui moltiplicando due volte il numero ne ottengo uno = 1 MOD3 e MOD7)
>
> - calcolo ((19*59)^2)*(29^2) e ottengo 1056835081

- il numero cercato è quindi 1056835080

E, secondo voi, quanti sono i numeri di questo tipo?

Elevando a qualsiasi potenza pari maggiore di 2 il calcolo ne ottengo infiniti.

numero di due cifre se lo scrivete in binario e cambiate una o due cifre resta comunque composto

- cerco un numero di 2 cifre:
  - pari
  - divisibile per 3 e per 4
  - al quale se sommo 1 ottengo un numero composto
  - le cui cifre binarie di potenza dispari siano = 1 e quelle di potenza pari = 0
- anche qui devo verificare solo i casi in cui viene cambiata la prima cifra (altrimenti otterrei un numero pari e quindi composto)
- se cambio solo la prima cifra è composto per la condizione che impongo
- se cambio anche una qualsiasi altra cifra ottengo un numero divisibile per 3
- il mio numero è quindi 84 (in binario 1010100)

quanti sono gli allergici binari , per il cambio di una o due cifre?

siccome un algoritmo simile lo posso estendere a numeri più elevati direi infiniti

E se permettessi di cambiare più cifre?

Qui mi arrendo; riesco solo ipotizzare che, siccome: "Esistono intervalli arbitrariamente grandi che NON contengono primi", vi sono algoritmi che portano ad ottenere infiniti numeri anche per tale ipotesi (lo sottintendo anche per affermarlo nel caso dei numeri binari di cui sopra). Chiaramente vanno trovati caso per caso o almeno si dimostra che devono esistere.

A questo punto ci sentiamo abbastanza tranquilli sulle allergie di ***Valter***. Nel frattempo abbiamo anche esperienze peggiori, tipo quella di ***Camillo***, che dopo averci mandato una soluzione iniziale:

Se prendiamo un numero naturale e ne facciamo la divisione intera per 10 ed al numero ottenuto aggiungiamo le cifre 1, 3, 7 e 9 otteniamo 4 numeri (es. 201, 203, 207 e 209). Se dei 4 numeri ottenuti nessuno è primo possiamo stare certi che i 6 numeri rimanenti della decina (es. 200, 202, 204, 205, 206, 208) sono tutti allergici, invece dei primi 4 numeri vi sono buone probabilità siano anallergici.

Quindi se nei numeri di 10 cifre troviamo una decina che non ha al suo interno dei numeri primi possiamo stare certi che i 6 numeri di cui sopra sono allergici. Non avendo una lista dei numeri primi dal miliardo in su non so darvi un allergico da 10 cifre.

Da quanto detto precedentemente si evince che nei numeri di 2 cifre non esiste nessun numero allergico e per trovare il primo bisogna arrivare al 200.

Se consideriamo la notazione binaria i numeri allergici sono infiniti perché: "il numero prima dei multipli dispari dei numeri primi è allergico". Esso è pari per cui quando sostituiamo la cifra meno significativa diventa il dispari di cui sopra, la sostituzione di qualunque altra cifra lo fa rimanere pari e quindi composto.

Di allergici pari prima del 100 ce ne sono 25, a cui se ne aggiunge uno dispari l'ottantacinque (1010101), ne consegue che l'84 (che lo ha generato) sopporta 2 cambi.

Dopodiché il Nostro si è dato da fare con computazioni, con risultati piuttosto imprevedibili (perché non li abbiamo ancora ricevuti). Vi terremo aggiornati, se scopriamo qualcosa. Procediamo!

4.2.2 Il problema più odiato da Alice

Ebbene sì, si tratta ancora di probabilità. Il Capo spera che sia io a spiegarvi come mai non la sopporto, ma credo proprio che ve lo abbia spiegato benissimo lui con questo magnifico esempio:

1) *Rudy ha dato a Doc un pacco contenente un certo ammontare di denaro, e Doc lo ha aperto, verificato e richiuso. Adesso, Rudy estrae un secondo pacchetto, che sappiamo contenere (con probabilità* 50-50*) o il doppio o la metà del contenuto del primo pacchetto: supponendo che Rudy permetta a Doc, se vuole, di cambiare il pacchetto, a Doc conviene cambiare o no?*
2) *Sul tavolo ci sono due pacchi, e uno contiene il doppio di denaro rispetto all'altro; Doc ne sceglie uno, controlla il contenuto e quindi gli è offerta la possibilità di cambiare il pacchetto. In questo caso, gli conviene cambiare o no??*

Non è evidente? Tutto questo è solo un giochino per malati di mente, proprietari di casinò e Rudy d'Alembert. Vediamo di cavarcela il più in fretta possibile. ***Alberto R.*** scrive:

> Doc deve scegliere tra due pacchi sapendo che uno contiene X euro e l'altro che ne contiene 2X. Conosce il contenuto di uno dei due pacchi, ma non sa se si tratta del pacco più ricco o di quello più povero. I due casi descritti si differenziano solo perché in uno Doc sceglie quale pacco aprire, nell'altro apre il pacco indicato da Rudy. Questa differenza mi sembra irrilevante a fronte della totale indeterminatezza del problema.
>
> Il problema è indeterminato perché X è una variabile aleatoria di cui non si conosce la funzione di distribuzione, mancando qualunque indicazione circa le modalità con le quali il numero X è stato scelto.
>
> Esempio 1) Ipotizziamo che Rudy abbia estratto il numero X dal sacchetto della tombola mettendo X euro in un pacco e 2X nell'altro. Se Doc trova 100 euro nel pacco aperto farà ovviamente bene a tenerseli.
>
> Esempio 2) Ipotizziamo che X sia stato scelto "uniformemente a caso" da un insieme compatto di numeri reali (con successivo arrotondamento di X e di 2X) e che anche 2X e X/2 appartengano all'insieme. In tal caso Doc farebbe bene a cambiare perché perde X a fronte di una speranza matematica pari a $(X/2 + 2X)/2 = 1.25X > X$
>
> Esempio 3) Ipotizziamo che X sia stato scelto uniformemente a caso da un insieme di interi consecutivi contenente anche 2X. Se Doc trova nel pacco aperto 77 euro, osservando che 77 è dispari non avrà dubbi circa la convenienza di cambiare pacco.
>
> Esempio 4) Idem come sopra, ma Doc trova 70 euro. In tal caso la parità di 70 rende indifferente cambiare o non cambiare perché i numeri X sono metà pari e metà dispari mentre i 2X sono tutti pari, quindi per il teorema di Bayes il 70 è un 2X con prob 2/3. Se Doc cambia pacco perde 70 a fronte di una speranza matematica che vale $(2/3)(70/2)+(1/3)(2\cdot 70) = 70$
>
> Esempio 5) Rudy, che supponiamo nelle vesti di avversario di Doc, da quella volpe che è, si è subito attivato per evitare il disastroso (per Rudy) caso 3, per cui sceglie il numero X da un insieme di pari consecutivi. Come si comporterà Doc se trova 70? Dipende. Se non sospetta l'astuzia di Rudy agirà come nell'esempio 4, diversamente osserverà che 70 non è divisibile per 4 come dovrebbe essere se fosse il doppio di un numero pari e agirà come nell'esempio 3
>
> Potrei continuare con altri esempi, ma credo di aver dimostrato a sufficienza che la strategia ottimale per Doc dipende dalla scelta totalmente arbitraria tra le infinite ipotesi, tutte ugualmente plausibili, che si possono fare circa le modalità con cui X e 2X sono stati costruiti.
>
> Il fatto che il problema sia indeterminato non gli impedisce di essere molto divertente e interessante, e che Alice non lo voglia ammettere proprio con ci credo!

No, non ci siamo. Persino ***Alberto***, che normalmente è dalla mia parte… secondo il Capo questo non è indeterminato per niente, ma se lo fosse, la cosa non me lo renderebbe più simpatico! Vediamo la versione di ***Valter***:

> primo caso
>
> A mio avviso a Doc conviene cambiare pacchetto (considerato quando mediamente guadagnerebbe a giocata dopo che ne ha fatte un certo numero). Infatti, detto x l'ammontare di denaro, si ha che il guadagno medio è: ½ * ((1/2)*x€ + 2*x€) = (5/4)*x€ che è > di 1€ di guadagno se non cambia pacchetto (cambiando pacchetto metà delle volte mediamente incassa (1/2)x e l'altra metà 2x).
>
> secondo caso
>
> Dovrebbe essere indifferente non conoscendo il contenuto del secondo pacchetto (se non cambia metà delle volte guadagna x e l'altra metà 2x, idem se cambia). Diverso se un importo di valore dispari assicura che nell'altro pacco c'è il doppio. Un importo di valore dispari non può infatti essere il doppio di un altro importo. In questo caso a lungo andare conviene avere la possibilità di cambiare.
>
> Non so se il mio ragionamento è corretto per la teoria delle probabilità. L'ho pensata così: se giocando più volte mi conviene fare una certa scelta la stessa è più conveniente anche dovendo farla una sola volta. Forse bisognava trovare il rapporto fra casi favorevoli e casi totali. Mi pare però che anche l'ammontare che si incassa debba rientrare nel conteggio.

Meno male, anche lui ha i suoi dubbi. Chiudiamo qui, prima che io distrugga il Capo.

4.2.3 Teoria del Campo (dei Chinotti)

Questo era in offerta speciale. Siamo molto in ritardo:

> *La nuova area sulla quale vorremmo imbastire il campo di tiro è un quadrato di lato unitario (ettometri) del quale il contorno è perfettamente accessibile; il nostro primo problema è che vorremmo mettere cinque oggetti nel campo, e poi procedere secondo questo algoritmo:*
>
> 1) *Si sceglie un punto e lo si nomina P_1.*
> 2) *Da P_1, si valuta quale sia il punto più vicino ancora senza nome e lo si nomina P_2.*
> 3) *Da P_2, si valuta... eccetera.*
>
> *Raggiunto P_5, si torna a P_1: se due punti sono equidistanti dal punto nel quale vi trovate, potete scegliere quello che preferite. Quello che vorremmo è che il circuito abbia la lunghezza massima possibile.*

Cominciamo con la versione di ***Valter***. Vi prego di notare la prima frase: è probabilmente ancora alle prime soluzioni con noi, e non lo sa ancora che noi ignoriamo qualcosa solo se ce lo siamo perso[17].

> La butto giù velocemente provando, a grandi linee, a giustificarla (male che vada, se è tutto un assurdo, la ignorate).
>
> Mi sono detto che se gli oggetti fossero 4 la soluzione sarebbe piazzarli ai 4 angoli:
>
> - se fossero all'interno del campo non si dovrebbe riuscire ad ottenere un percorso più lungo (dover scegliere il punto più vicino mi pare non permetta di ottenere un quadrilatero concavo)
>
> - ugualmente mettendo gli oggetti sui lati del quadrato ma, almeno uno, non ad un suo vertice (l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, e in genere un lato, è < della somma degli altri 2).

[17] Questo mi porta a scrivere una noticina: se non vi vedete pubblicati e avete mandato una meravigliosa soluzione, sappiate che abbiamo avuto un blackout a inizio febbraio e alcune mail potrebbero essersi perse. Se non vi vedete pubblicati, rimandatele!

> Mi sono anche detto che con 5 punti il poligono non può essere concavo su due vertici (mi pare non si possa non unirli in quanto sono interni al triangolo formato dagli altri 3).
>
> Quindi devo solo trovare dove piazzare il quinto oggetto (qui è il punto dove ho più dubbi, ma anche sul resto non ho certezze).
>
> Il punto dovrebbe essere al centro del quadrato.
>
> I casi alternativi a quello che propongo sono due:
>
> - l'oggetto è sul di un lato del quadrato
>
> - l'oggetto non è al centro del quadrato
>
> In entrambi i casi mi pare si dimostri che la lunghezza del circuito è inferiore.
>
> Il percorso dovrebbe quindi essere a forma di: M (è il meglio che sono riuscito a fare per rappresentare il circuito).
>
> Per 3 oggetti dovrebbe essere un triangolo formato da 2 lati del quadrato e dalla diagonale (servendosi di alcune argomentazioni che ho utilizzato per il caso precedente).
>
> Per 6 oggetti i 2 aggiuntivi interni al quadrato dovrebbero essere:
>
> - simmetricamente opposti rispetto al centro dello stesso
>
> - la loro proiezione sui 2 lati nella direzione di simmetria è centrale
>
> - ad una distanza per cui non convenga mai passare dall'uno all'altro (ma passare al vertice successivo del quadrato come nel caso di 5 oggetti)
>
> Il percorso, quindi, dovrebbe essere (non è proprio un quadrato ma non ho trovato di meglio nei simboli):
>
> |∨|
>
> | |
>
> |∧|
>
> Viaggiando di fantasia mi immagino che il circuito al crescere dei punti tenda ad un frattale (dovrebbe progressivamente riempire tutta l'area del quadrato).
>
> Continuando a farneticare mi sono chiesto a che valore tenda la dimensione frattale (mi immagino che sia 1 in quanto i punti più vicini portano ad ottenere un percorso "liscio").

Benissimo! A questo punto vorremmo concludere lasciando spazio ad ***Alessio***, che ci scrive per la prima volta e merita di certo anche la sua introduzione:

> Questa è la prima mail che vi scrivo, avendo trovato il sito della Rivista quasi per sbaglio cercando uno dei vostri articoli per l'altra rivista.
>
> Breve sommario di me: sono uno studente del terzo anno del liceo scientifico Newton di Chivasso, gioco a pallavolo da quando avevo otto anni (attualmente ne ho 2^4), e ovviamente sono un fan della matematica.
>
> La soluzione trovata non è elegante, anzi, ma sicuramente è corretta. Non riuscendo a venirne a capo mi sono rivolto al lato oscuro, la tecnologia, e ho scritto il programma in Haskell in allegato (se non conoscete il linguaggio, dovreste fare qualche ricerca in merito, ne vale la pena). Comunque la soluzione ha dato come risultati i seguenti punti:
>
> (0,0) (1/2,sqrt(3)/2) (1,1) (0,1) (1,0)
>
> Più simmetrie e rotazioni varie.

Non vi pare eccezionale? No, ovviamente io non ne so niente, di Haskell, probabilmente i miei compari nemmeno. Ma lo stesso, la citazione, il numero dei suoi anni e l'entusiasmo fanno di ***Alessio*** un nostro nuovo lettore preferito. Del resto detto R l'insieme dei nostri lettori, e M l'insieme dei nostri lettori preferiti, $R \setminus M$ è l'insieme vuoto. Tanti auguri a noi, e anche a tutti i nostri fustigatori ed amici.

5. Quick & Dirty

Qui sapete la risposta *esatta* (insomma, quella giusta), ma vi si chiede altro:

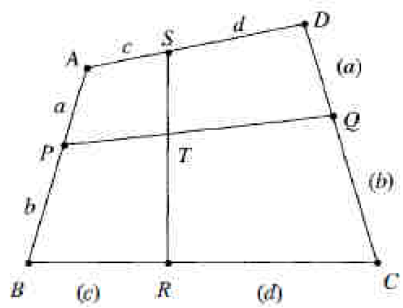
Rudy ha due figli; almeno uno è un maschio. Qual è la probabilità che entrambi siano maschi?

Rudy ha due figli; il più vecchio è un maschio. Qual è la probabilità che entrambi siano maschi?

6. Pagina 46

La dimostrazione procede attraverso diversi passi, evidenziati nel seguito.

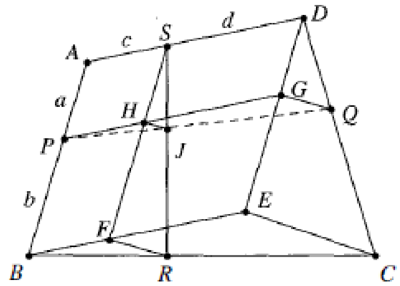
Il primo passo consiste nel dimostrare che **ogni segmento in *ABCD* viene diviso in *n* parti uguali dai segmenti che lo incrociano**. Questo è conseguenza della seguente proprietà:



Se P e Q dividono i lati opposti AB e CD nello stesso rapporto $a{:}b$ e R e S dividono l'altra coppia di lati opposti BC e AD nello stesso rapporto $c{:}d$, allora PQ e RS dividono ognuno l'altro nello stesso rapporto:

$$PT/TQ = c/d \quad \text{e} \quad ST/TR = a/b.$$

Il risultato è evidente se $ABCD$ è un parallelogramma; supponiamo quindi che $ABCD$ non lo sia.



In questo caso, completiamo il parallelogramma $ABED$ e partizioniamolo in quattro sub-parallelogrammi con le linee PG e SF parallele ai lati, come si vede in figura.

Supponiamo PG e SF si incrocino nel punto H e che HJ sia tracciato parallelo a FR per incrociare SR in J; tracciamo FR, EC e GQ, e supponiamo che le lunghezze di AP, PB, AS e SD siano rispettivamente a, b, c e d.

Iniziamo con il mostrare che J giace su PQ: Essendo i lati opposti di un parallelogramma uguali tra loro, allora SH = a e HF = b, e quindi:

$$SH/HF = a \,/\, (a+b).$$

Essendo poi HJ parallelo a FR, i triangoli SHJ e SFR sono simili, e quindi:

$$HJ/FR = SH/SF = a/(a+b).$$

Inoltre,

$$BF/FE = PH/HG = c/d,$$

ed essendo

$$BR/RC = c/d,$$

allora F e R dividono BE e BC nello stesso rapporto, ossia FR è parallelo a EC e i triangoli BFR e BCE sono simili: da cui,

$$FR/EC = BF/BE = c/(C+D).$$

Nello stesso modo, si vede che GQ è parallelo a EC e

$$GQ/EC = a/(a+b).$$

Quindi, siccome HJ, FR, EC e GQ sono paralleli, HJ e JQ sono paralleli, e il rapporto è:

$$\frac{HJ}{GQ}=\frac{HJ}{FR}\cdot\frac{FR}{EC}\cdot\frac{EC}{GQ}=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{c}{c+d}\cdot\frac{a+b}{a}=\frac{c}{c+d}\,.$$

Ma

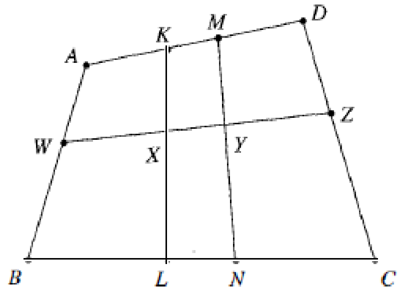
$$PH \,/\, PG = c \,/\, (c+d),$$

ed essendo gli angoli PHJ e PGO angoli corrispondenti per le rette *HJ e GQ*, ne segue che i triangoli *PHJ* e *PGQ* sono simili. Quindi

$$HPJ = GPQ,$$

da cui si conclude che *J* giace su *PQ*, ossia che *J* è di fatto il punto di intersezione *T* di *PQ* e *RS*.

Infine, essendo *HJ* parallelo a *FR*, *H* e *J* dividono *SF* e *SR* nello stesso rapporto a:b.Nello stesso modo, *HJ* è parallelo a *GQ* e *H* e *J* dividono *PG* e *PQ* nello stesso rapporto c:d, il che è la tesi della prima parte.



Si noti che, con riferimento alla figura qui a fianco, *KL* e *MN* sono segmenti *consecutivi* ed è semplice dimostrare che è $XY = 1/n\ WZ$: infatti, per un qualche intero positivo t abbiamo:

$$AK = t/n\ AD \text{ e } AM = (t+1)/n\ AD,$$

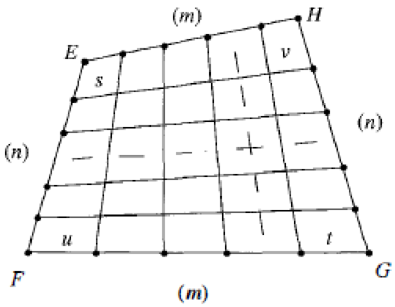
ed essendo i rapporti su *AD* riportati su *WZ*, allora deve essere:

$$WX = t/n\ WZ \quad \text{e} \quad WY = (t+1)/n\ WZ,$$

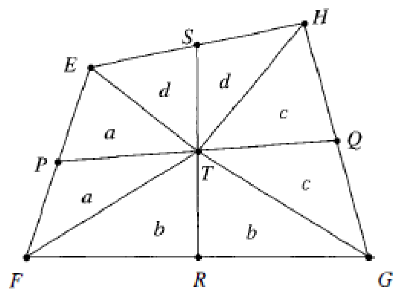
da cui

$$XY = WY - WX = 1/N\ WZ.$$

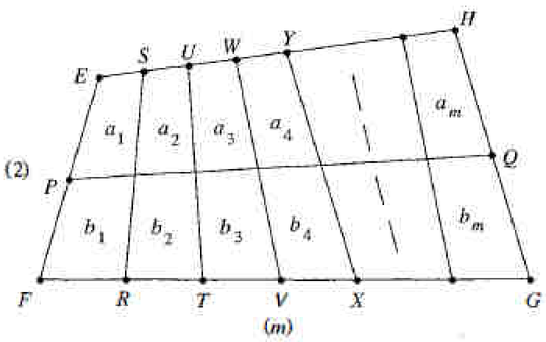
Quindi, ogni segmento che incrocia gli altri segmenti è anch'esso diviso in parti uguali dai segmenti che lo incrociano.



Come seconda parte, consideriamo un quadrilatero *EFGH* che sia stato partizionato in mn sub-quadrilateri da segmenti che uniscono i punti corrispondenti che dividono ogni lato di una coppia opposta in n parti uguali e ogni lato dell'altra coppia in m parti uguali: mostreremo che **la somma dei quadrilateri agli angoli opposti è la medesima per entrambe le coppie**, ossia che (con riferimento alla figura), $s + t = u + v$.



Per cominciare, consideriamo il caso di una partizione 2×2 come in figura: essendo *P*, *Q*, *R* e *S* i punti medi dei lati, *TP* è la mediana del triangolo *ETF* e quindi ne biseca l'area; nello stesso modo si comportano *TR*, *TQ* e *TS*, e quindi ogni coppia di quadrilateri negli angoli opposti ha area pari a $a + b + c + d$, e la nostra tesi risulta quindi valida nel caso di una partizione 2×2.



Consideriamo ora il caso di una partizione 2xm: ogni segmento appartenente a PQ ha lunghezza $1/m$ PQ e ognuno dei segmenti intersecanti, come *RS* e *PQ*, è bisecato da *PQ*. Quindi ogni coppia di colonne consecutive *EFTU*, *SRVW*, *UTXY*, ..., definisce un quadrilatero diviso da una partizione 2×2, e quindi:

$$a_1+b_2=b_1+a_2$$
$$a_2+b_3=b_2+a_3$$
$$\dots$$
$$a_{m-1}+b_m=b_{m-1}+a_m$$

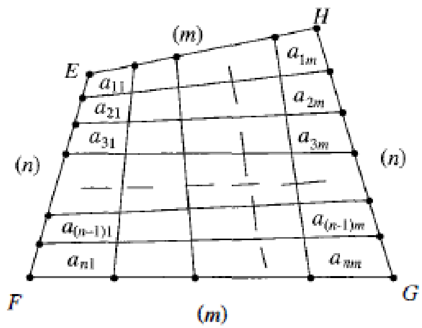
da cui, per addizione e sottrazione dei termini comuni otteniamo:

$$a_1 + b_m = b_1 + a_m$$

che è la tesi per il caso $2 \times m$.

Infine, consideriamo una partizione $n \times m$: ogni coppia di righe consecutive costituisce una partizione $2 \times m$ e abbiamo:

$$a_{11} + a_{2m} = a_{21} + a_{1m}$$
$$a_{21} + a_{3m} = a_{31} + a_{2m}$$
$$\ldots$$
$$a_{(n-1)1} + a_{nm} = a_{n1} + a_{(n-1)m} \quad ,$$

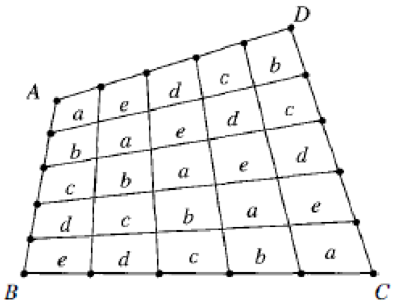


e quindi

$$a_{11} + a_{nm} = a_{1m} + a_{n1} \quad ,$$

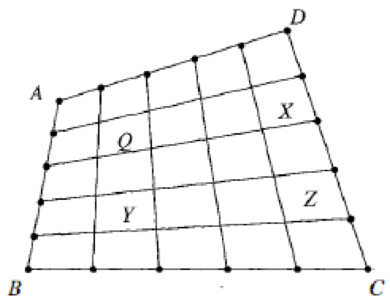
il che prova il caso generale.

Ovviamente, un'appropriata selezione di *n trasversali* (intendendo con questo termine e riferimento alla figura, le opportune diagonali orientate anche spezzate di sub-quadrilateri) ricopre *ABCD*; quindi, ora dimostreremo che **l'area totale lungo una trasversale è costante**. Da questo segue che ogni trasversale contiene un *n*-esimo dell'area totale.



Per fare questo, mostriamo che la somma delle aree lungo una trasversale *T* è la stessa della somma delle aree lungo la trasversale *M* determinata dalla diagonale principale (ossia quella non spezzata).

Supponiamo *T* sia una trasversale diversa da *M*; in questo caso, esiste un qualche quadrilatero *Q* sulla diagonale principale che non fa parte di *T* (si veda, in proposito, la figura); ora, *T* contiene un quadrilatero *X* nella stessa riga di *Q* e un qualche quadrilatero *Y* nella colonna di *Q*, e sia *Z* l'intersezione della *colonna* di *X* e della *riga* di *Y*; questo significa che *(Q; Z)* e *(X; Y)* sono coppie di angoli opposti in un sub-quadrilatero di *ABCD* partizionato e quindi possiamo esprimere l'uguaglianza delle aree:



$$X + Y = Q + Z.$$

Notiamo che *Z*, esattamente come *Q*, non può appartenere a *T*, in quanto *T* non può avere più di un quadrilatero in ogni riga o colonna. Inoltre, dato che *Q* giace sulla diagonale principale *M*, si ha che *X* e *Y*, essendo rispettivamente nella stessa riga e colonna di *Q*, non possono appartenere a *M*. Quindi, sostituendo *X* e *Y* con *Q* e *Z* non influenza le relazioni con *T* in quanto appartenente alla diagonale principale ma ne mantiene le relazioni attraverso il nuovo sub-quadrilatero *Q* (si noti che *Z* potrebbe non appartenere a *M*). Il risultato è una nuova trasversale *T'* con la stessa area totale di *T* che ha almeno un ulteriore quadrilatero su *M* rispetto a quelli che aveva *T*.

Procedendo nello stesso modo sin quando non rimangono spazi vuoti su *M*, segue che *T* e *M* hanno la stessa area, il che completa la dimostrazione.

7. Paraphernalia Mathematica

Come quasi tutti i lettori di RM sanno, i Rudi Mathematici sono tre. Come solo i lettori più affezionati e attenti forse ricordano, nessuno dei tre è un vero matematico: Alice è un brillante ingegnere delle telecomunicazioni, gli altri due si sono conosciuti calpestando gli accoglienti parquet dell'Istituto di Fisica dell'Università di Torino. Non si può dire che i due che mensilmente vi ammorbano con le loro chiacchiere abbiano messo pienamente a frutto i loro studi di fisica, visto che hanno scelto professioni abbastanza lontane dalla ricerca accademica e passatempi più vicini a Hilbert che a Einstein; ma non tutti i loro compagni di studi sono incorsi in cotanta intemperie. La compagnia dei giovani aspiranti fisici era, a quel tempo, ricca e variegata, e un tenace sottoinsieme degli studenti si frequentava con accanimento, al punto di darsi un impegnativo acronimo comune: CFV, Collettivo Fisici Volanti. Molti di loro hanno mostrato una coerenza d'intenti solida e durevole: c'è chi frequenta ancora le Equazioni di Maxwell lavorando nell'industria, chi spiega l'effetto Bernoulli ad attoniti liceali, e persino chi, anziché scordarsi termini astrusi come Entalpia o Energia Libera di Helmholtz subito dopo aver passato l'esame, è finito con l'usarli in laboratorio o addirittura dall'altra parte della cattedra. Ebbene, è accaduto che uno di questi (per salvaguardare la privacy di cui ci limiteremo a dire che si chiama Giampiero e che è da noi molto amato), giocando con misure d'entropia si sia imbattuto in quello che lui, con palese *understatement*, chiama "numero buffo". Distratto dal fatto che molti ci chiamano "matematici", e dimentico del fatto che agli scritti di Analisi eravamo noi che cercavamo di copiare da lui, e non viceversa, ci ha chiesto cosa ne pensassimo. Alice e Doc lo hanno letto (anche Rudy lo ha letto, ma dall'alto della sua prosopopea la chiama "*Peer Review*") e tutti e tre hanno prontamente risposto che non ne pensavano proprio niente, ma che se scriveva due paginette in un formato accettabile, le avremmo date in pasto ai lettori di RM, che loro di solito sanno benissimo cosa pensare. E così, eccovi qua un PM che, come solo rarissimamente accade, non è uscito dalla tastiera del GC.

7.1 Binomiali, Stirling e numeri buffi

L'entropia, questa sconosciuta. In genere tutti sappiamo darne una definizione sentimentale: una che va per la maggiore è "il grado di disordine di un sistema".

A questo punto sorge un problema: come si misura, o si calcola il grado di disordine? Possiamo associare, a un certo grado di disordine, un numero? Che cosa significa che in un metallo l'entropia è ad esempio 3k, mentre nella grafite è 16k? Forse varrebbe la pena di fare un giretto sulla tomba di Boltzmann, a Vienna nel Zentralfriedhof. Sulla sua tomba è stata incisa l'epigrafe: "$S = k \log W$" (con S entropia, k la costante di Boltzmann, e W la molteplicità dei microstati)[18].

Quindi l'entropia null'altro è che il logaritmo della molteplicità dei microstati che possono comporre lo stesso macrostato, a parte una costante moltiplicativa, che è peraltro la famosa costante di Boltzmann, cioè il rapporto tra la costante dei gas perfetti e il numero di Avogadro. Vediamo ora cosa intendiamo per "molteplicità dei microstati che compongono lo stesso macrostato".

"*I cristalli sono come le persone: sono i difetti a renderli interessanti*". Se abbiamo tra le mani un cristallo perfetto di ossido di alluminio, abbiamo un oggetto di scarso interesse. Ma se il nostro cristallo contiene difetti, ad esempio impurezze[19] di cromo o di titanio, ecco che abbiamo uno splendido rubino, o uno zaffiro.

[18] Qualora il viaggio a Vienna vi risultasse d'incomodo, potete sempre ripiegare nel nostro archivio, magari al numero RM061, Febbraio 2004. Lì potete trovare il compleanno di Boltzmann ("*Le parole per dirlo*") e dentro il compleanno anche la foto della tomba citata.

[19] Noi, cialtroni dilettanti, avremmo scritto "impurità", e stavamo per correggere. Ma temiamo che i professionisti le chiamino proprio così, e ci guardiamo bene dal cambiare quello che, con ogni probabilità, è un termine tecnico.

Le impurezze sono difetti, i difetti fanno crescere l'entropia. E l'entropia dipende non solo da quante impurezze ci siano, ma anche da come sono disposte. Tutti i modi equivalenti di disporre le impurezze in un cristallo rappresentano un microstato. Tutti i possibili microstati danno un macrostato. Quindi, se il nostro macrostato è un bellissimo rubino, abbiamo un numero grandissimo di combinazioni che ci permettono di ottenere lo stesso risultato finale.

Questo numero può essere calcolato come

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)! \cdot n!}$$

[*che molti avranno riconosciuto essere la distribuzione binomiale, NdRM*] dove N è il numero di atomi che compongono la struttura "ospitante" e n quello delle impurezze, cioè gli "ospiti", per nulla indesiderati, se si prende perlomeno in considerazione l'opinione di una gentile signora.

Ora, basta fare il logaritmo del numero ottenuto e l'entropia è servita; ma il fatto è che in una mole di materiale ci sono un numero di Avogadro di atomi, e il calcolo qui sopra diventa improponibile. Consideriamo infatti un piccolo numero di atomi, diciamo 100, e calcoliamo le combinazioni possibili per 1, 2, 3, ..., 100 impurezze: evidentemente da 50 in poi, sarà l'impurezza a diventare "ospitante" e il vecchio ospitante diventerà "impurezza"…

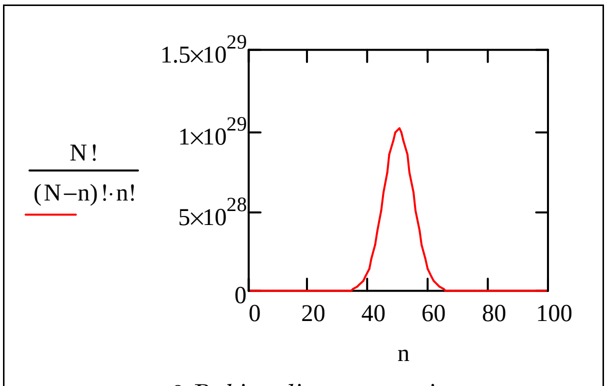
$$N := 100$$

$$N! = 9.333 \times 10^{157}$$

(prego notare qui l'ordine di grandezza)

$$n := 1 \ldots N-1$$

Quindi per due popolazioni equivalenti di "ospitanti" e di "ospiti", abbiamo circa 10^{29} combinazioni (microstati) che danno lo stesso rubino. Il fatto è che questo numero enorme di combinazioni viene fuori da un misero rubino di 100 atomi.



9 *Rubino di cento atomi*

Quindi dobbiamo imparare a maneggiare numeri grandissimi. E la forma $N!$ non è il modo più comodo per farlo. Il fattoriale non è una funzione continua, ma discreta, vale solo per i numeri naturali. Quindi è necessario trovare una forma per descrivere, anche approssimativamente, la funzione in figura, ma attraverso una funzione "tradizionale", continua, che si possa derivare o integrare.

Stirling propose la sua famosa approssimazione per il fattoriale, che dice:

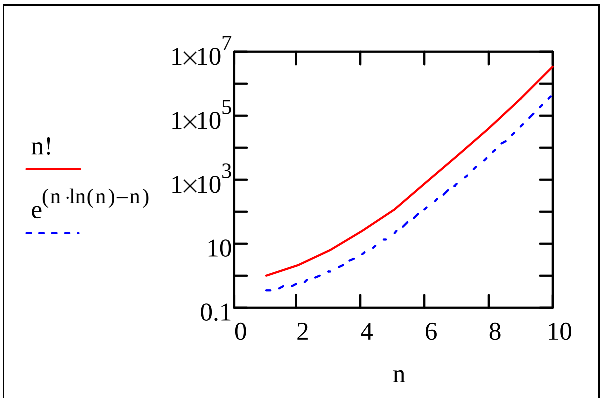
$$n! = e^{(n \cdot \ln(n) - n)}$$

Vediamo che succede per n :=10:

(l'asse delle y ha la scala logaritmica). Non male, vero? A questo punto, ci basterebbe applicare la stessa approssimazione al binomiale: basta in effetti sostituire ai tre fattoriali che compongono il binomiale le corrispondenti espressioni di Stirling, e vedere cosa succede.

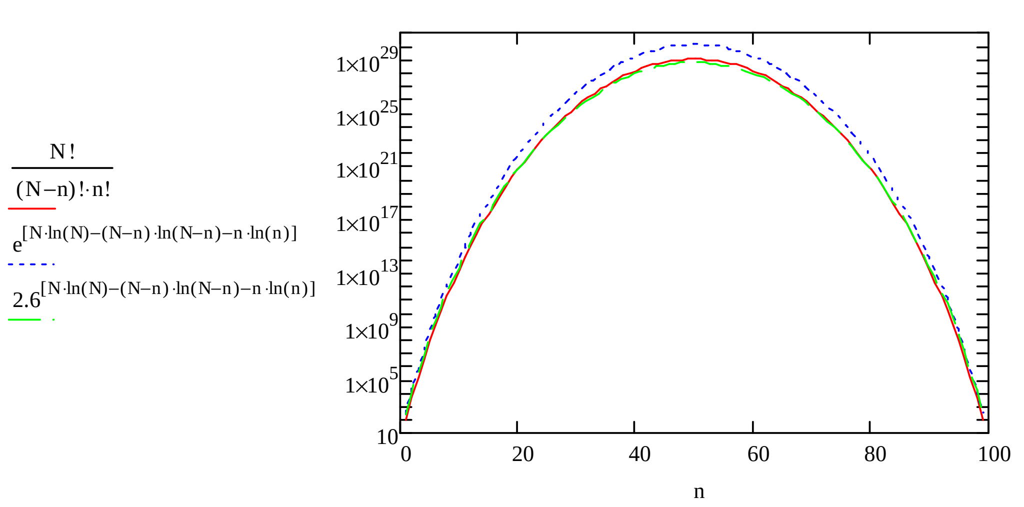
$$n := 1 \ldots N-1$$

questi sono gli stessi dati di prima, quelli del rubino da cento atomi, ma messi in scala logaritmica per notare



10 *Stirling approssima bene…*

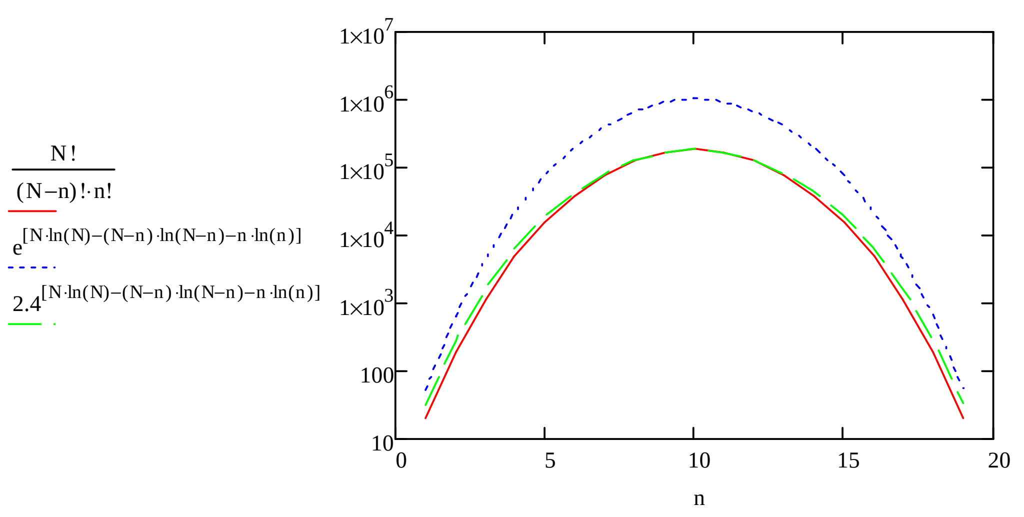
meglio le differenze:



11 *Stirling approssima molto bene nelle code, ma…*

In rosso il binomiale, in blu la curva di Stirling: funziona bene sulle code, ma sul massimo sbaglia di un paio di ordini di grandezza. Quella che va meglio è una curva dove al posto del numero di Nepero *e* abbiamo messo 2.6. Problema di calcolo con i numeri troppo grandi? Verrebbe da pensare così: in fondo tutti gli elaboratori fanno delle approssimazioni che diventano sempre più pesanti quando i numeri si gonfiano. Rifacciamo il conto per un numero di microstati molto più piccolo:

$$N := 20$$
$$N := 1 \ldots N-1$$



12 *C'è qualcosa che approssima meglio di e….*

Le differenze diventano ancora più evidenti, tra la curva di Stirling e il binomiale: adesso, per descrivere bene quest'ultimo, il numero migliore sembrerebbe 2.4. Insomma, non sembra un problema dovuto alla capacità di calcolo dell'elaboratore.

Sta di fatto che se vogliamo fare il calcolo con il nostro rubino, che ha un numero di Avogadro di atomi e un numero circa 1000-10000 volte più piccolo di impurezze, la formula di Stirling è sicuramente l'ideale. Ma su sistemi poco numerosi, l'approssimazione fallisce e occorre trovare una nuova base per la funzione esponenziale.

Quindi, se volete calcolare, secondo Boltzmann, l'entropia di un'aula dove gli studenti possono, in modo del tutto casuale, occupare i posti liberi, non conviene calcolare le possibili configurazioni equivalenti con Stirling: se il numero degli studenti è circa la metà della capienza dell'aula potreste sovrastimare il numero di configurazioni equivalenti anche di un ordine di grandezza, o forse più: stimando così un valore eccessivo dell'entropia del sistema. E dire che gli studenti ne producono così poca…

Il numero magico che varia tra 2.4 ed *e* può esservi d'aiuto.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms