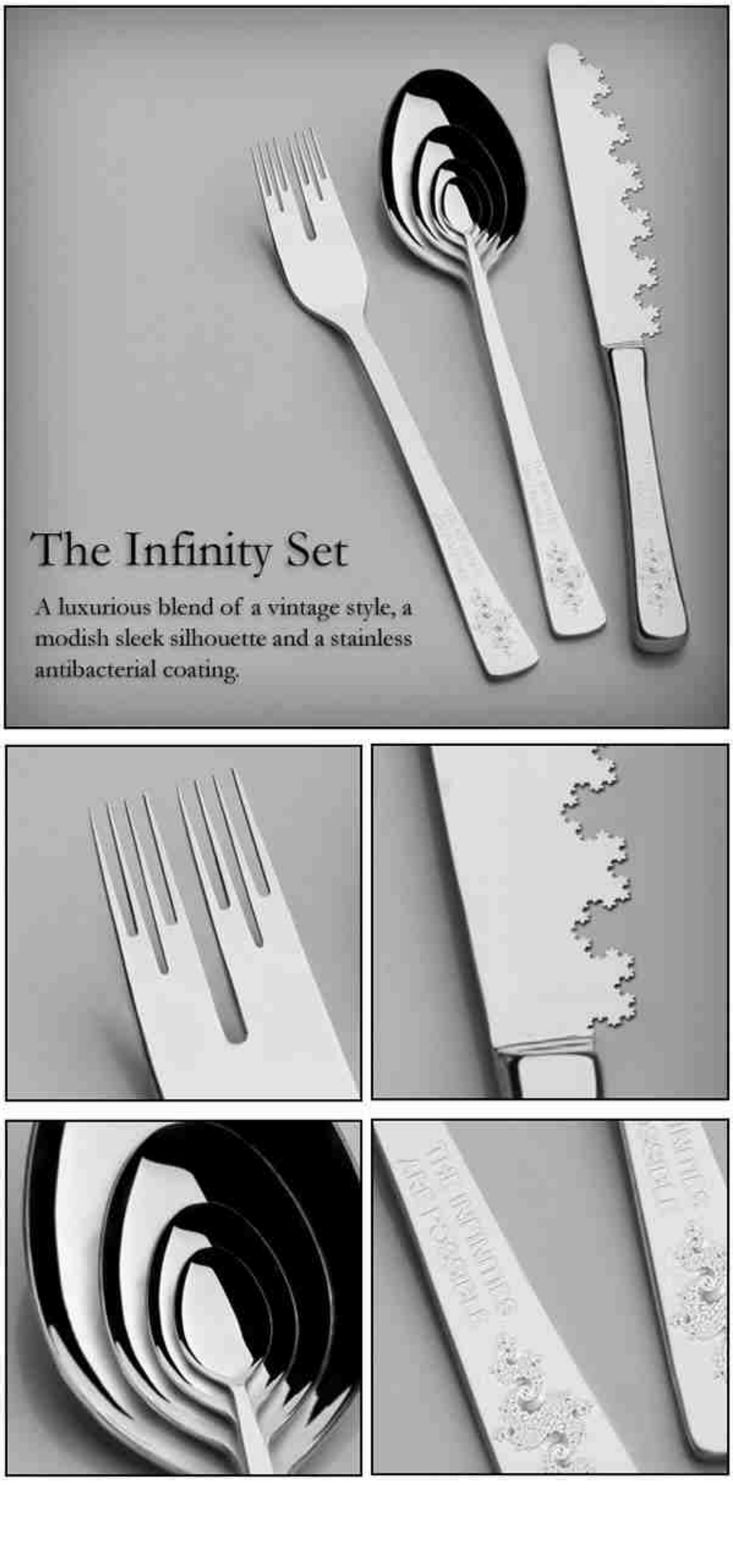
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 204 – Gennaio 2016 – Anno Diciottesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM203 ha diffuso 3'033 copie e il 10/01/2016 per Google eravamo in 8'810 pagine.

No, non ci ricordiamo dove le abbiamo prese. E se proprio le volete, potete cercarvele da soli. Quando le abbiamo viste, la prima cosa che ci è venuta in mente è il pensiero della nostra infanzia: "*Questa minestra non finisce mai...*".

1. Faust

"Il Signore Dio diede questo comando all'uomo: «Tu potrai mangiare di tutti gli alberi del giardino, ma dell'albero della conoscenza del bene e del male non devi mangiare, perché, quando tu ne mangiassi, certamente moriresti». Poi il Signore Dio disse: «Non è bene che l'uomo sia solo: gli voglio fare un aiuto che gli sia simile». Allora il Signore Dio plasmò dal suolo ogni sorta di bestie selvatiche e tutti gli uccelli del cielo e li condusse all'uomo, per vedere come li avrebbe chiamati: in qualunque modo l'uomo avesse chiamato ognuno degli esseri viventi, quello doveva essere il suo nome. Così l'uomo impose nomi a tutto il bestiame, a tutti gli uccelli del cielo e a tutte le bestie selvatiche, ma l'uomo non trovò un aiuto che gli fosse simile. Allora il Signore Dio fece scendere un torpore sull'uomo, che si addormentò; gli tolse una delle costole e rinchiuse la carne al suo posto. Il Signore Dio plasmò con la costola, che aveva tolta all'uomo, una donna e la condusse all'uomo."

(Genesi II, 16-22 –Bibbia CEI)

Il rapporto tra scienza e religione – o meglio ancora sui concetti di verità dimostrata e verità rivelata – ha generato una tale quantità di libri, scritti, argomentazioni e diatribe (nonché un discreto numero di morti ammazzati) che certamente non richiede ulteriori contributi da parte di una dilettantesca, ancorché Prestigiosa, Rivista Italiana di Matematica Ricreativa. La conclusione più asettica che ci sentiamo di condividere è che i punti di partenza, potremmo dire gli assiomi, delle due posizioni sono semplicemente incompatibili, e di conseguenza non vale la pena di esaminare le relative conclusioni, le quali saranno non soltanto diverse, ma anche non confrontabili, non commensurabili l'una sull'altra, proprio come la diagonale e il lato d'un quadrato.

È comunque curioso notare che l'urgenza di dimostrare la validità del proprio approccio alla conoscenza è solitamente attribuito ai partigiani della Scienza, e per diverse buone ragioni: innanzitutto, la Scienza ha nella "conoscenza" il proprio interesse principale; anzi, l'unico, almeno in teoria: non per niente "scienza" e "conoscenza" sono etimologicamente sinonimi. Per la religione, invece, la spiegazione degli eventi naturali è solo uno dei vari temi portanti, e forse neanche il più significativo. Non è impossibile immaginare una religione che, pur avendo tutte le caratteristiche che la rendono tale, si disinteressi della spiegazione dei fenomeni fisici, e perfino anche della creazione del mondo nonché della (eventuale) relazione di causa-effetto fra la divinità e l'universo. Non c'è nulla che impedisca l'autoconsistenza di una religione che adori un dio pur senza ritenerlo creatore di alcunché.

Poi, probabilmente, c'è di mezzo anche la fatica della coerenza logica: gli scienziati sono costretti dal loro metodo caratteristico (quello scientifico, appunto) a costruire ipotesi che siano coerenti con fatti o principi che sono già stati riconosciuti come dimostrati o assunti come validi, e questa è una fatica mortale, perché costruire un sistema totalmente non contraddittorio è estremamente laborioso: per di più, non hanno mai la soddisfazione di essere certi al cento per cento delle loro conoscenze, visto che dietro l'angolo è sempre possibile trovare un fenomeno nuovo in grado di demolire in un niente la più elegante delle teorie. È insomma davvero frustante, per uno scienziato serio, dover spiegare il lavoro di una vita ad un uditorio dicendo sempre che "quasi certamente" le cose stanno come lui le immagina, perché ci sono svariate migliaia di eventi che lo confermano, e magari vedere gli astanti che scuotono la testa increduli, solo perché la loro dottrina ha un libro sacro vecchio di secoli dove c'è scritto, da qualche parte, che le cose stanno in modo diverso. Soprattutto considerando che il "modo diverso" è inevitabilmente del tutto assurdo, dal punto di vista scientifico.

Per molto tempo, lo scienziato che contestava le affermazioni della religione dominante, oltre a rischiare spesso e volentieri la pelle, faceva nella migliore delle ipotesi la figura del ragazzino petulante che, con fare inquisitorio, irrita l'adulto impegnato in compiti ben più significativi e ardui (ad esempio, decidere sul contrasto tra consustanziazione e transustanziazione, o sull'opportunità o meno del "*Filioque*"), segnalandogli trascurabili dettagli di incoerenza logica o etica nelle Scritture; incoerenza che poteva sempre essere risolta dal fedele demandando alla volontà divina la ragione ultima delle cose.

Con il tempo, e soprattutto con il rinnovarsi e rinforzarsi dei successi del metodo scientifico, l'atteggiamento di una buona parte degli scienziati – probabilmente quelli più disposti all'idea d'una separazione netta tra Scienza e Fede, ma coniugata da una coesistenza pacifica, e non armata – è caratterizzato da domande incisive ma non aggressive, del tipo: "Ma cosa cambia per la religione, in fondo, se è la Terra a girare attorno al Sole e non viceversa?", o: "Siete proprio sicuri che la grandezza del Creatore sia sminuita dall'esistenza dell'evoluzione delle specie?", che sono in fondo offerte di pace, e quasi dei riconoscimenti del possibile ruolo alternativo della religione: se per la Fede la Conoscenza è solo accessoria, beh, lasciatela agli scienziati, no?

Ed è a questo punto che vecchie reminiscenze (vecchissime, a dire il vero: roba da scuola elementare, o forse ancora precedenti) possono tornare alla memoria. Perché si scopre (anzi, si ricorda) che in realtà per la religione la Conoscenza è invece importante, importantissima: e basta sfogliare la prima pagina della Bibbia, per accorgersene.

È certo possibile che altre religioni non siano così interessate al concetto di conoscenza, ma le confessioni giudaico-cristiane non possono davvero negare di riservarle un ruolo di prim'ordine. Anche accettando l'idea che quanto scritto nella Bibbia non debba essere preso alla lettera, né per difenderne né per denigrarne il valore, resta il fatto incontrovertibile che la primissima frase che Dio rivolge all'Uomo riguarda la Conoscenza: e, ahimè, non è una certo un'esortazione a perseguirla, ma un chiaro e preciso divieto di ricercarla. Le prime parole che il Creato rivolge alla sua Creatura non sono un saluto, non un'istruzione assertiva, non una domanda, macché: Adamo deve quasi ancora aprire gli occhi, deve ancora scoprire a cosa servono le orecchie, che queste già gli veicolano il preciso divieto divino – non devi conoscere.

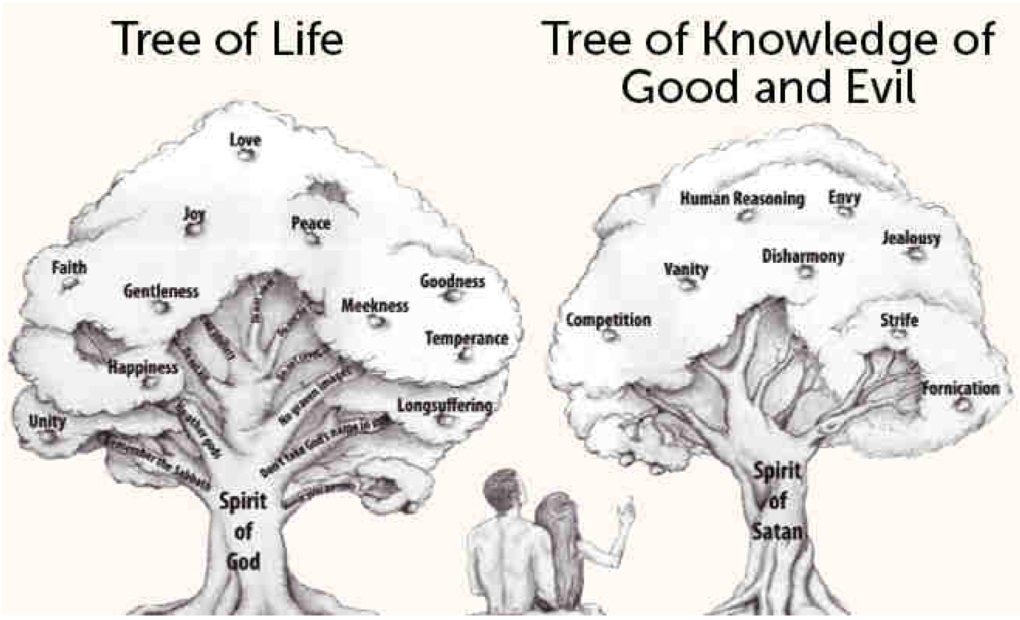
Certo, si può discettare all'infinito su cosa intenda davvero la Bibbia con "conoscenza": tanto per cominciare, il famoso frutto proibito è quello che reca la "Conoscenza del Bene e del Male", e questa può ragionevolmente essere qualificata come qualcosa di diverso dalla conoscenza tout-court, e a maggior ragione dalla conoscenza scientifica. Tant'è vero che pochi versetti dopo lo stesso termine "conoscenza"[1] viene usato per indicare l'avvenuto congiungimento carnale tra Adamo ed Eva, quindi è abbastanza evidente che il concetto biblico di "conoscenza" è di portata decisamente ampia. È però altrettanto evidente che, in ogni senso, conoscere è attività talmente cruciale da essere chiamata in causa prima di ogni altra: prima delle fondamentali istruzioni veicolate dai Dieci Comandamenti, prima che l'uomo scopra di saper parlare, e prima ancora della stessa creazione della donna, che spunta dalla costola di Adamo solo dopo che lui è stato istruito sulla pericolosità della conoscenza, e dopo che si è esercitato a battezzare tutti gli animali.

La conoscenza prima della classificazione, che pare un'attività (conoscitiva?) permessa, anzi, quasi obbligata: inoltre, la conoscenza gode nella Bibbia di un lignaggio pari a quello della stessa vita, visto che gli unici due alberi nominati nell'Eden sono proprio l'Albero della Vita[2] e l'Albero della Conoscenza del Bene e del Male. Una lettura un po' libera e

[1] Almeno, nella versione italiana CEI 2008, il verbo che si usa ("conobbe") è lo stesso che riconduce a "conoscenza"; non sappiamo se in ebraico, o in altre lingue, o in altre versioni, il verbo e il sostantivo usati siano diversi. Ne dubitiamo, visto l'uso invalso di usare l'espressione "conoscenza carnale" per indicare l'avvenuto rapporto sessuale.

[2] Come? No, non quello di Expo 2015, no. Almeno, crediamo di no, ma con le cose di fede non si sa mai bene…

ingenua potrebbe concludere che vivere e conoscere sono le attività cruciali del mondo, ma che per avere meritatamente il dono di una, la Vita, occorre pagare con l'obbligo di rinuncia all'altra, la Conoscenza. Del resto, di letture un po' ingenue e affrettate sono piene le messi, come mostra la figura qua sotto.



1 *La Philadelphia Church of God (www.pcog.org) non ha dubbi sul significato dei due alberi dell'Eden*

Siamo consapevoli che non è verosimilmente legittimo considerare la "Philadelphia Church of God", di cui non sappiamo nulla, come elemento rappresentativo dei fedeli seguaci della Bibbia, ma è comunque significativo notare come sia possibile, almeno per alcuni estremisti della Fede, attuare una manichea e botanica separazione tra "Spirito di Dio" e "Spirito di Satana", e ritrovare tra le fronde e i frutti di quest'ultimo, insieme all'Invidia, alla Vanità, al Conflitto (e ovviamente insieme alla Fornicazione) anche la Ragione.

La cosa può intristire, forse anche irritare chi all'umano ragionamento è affezionato, ma in ogni caso non dovrebbe sorprendere troppo; uno dei capisaldi della letteratura mondiale, un capolavoro riconosciuto come tale da tutta l'umanità, in fondo non fa altro che ribadire in forma artistica la triste equazione: se vuoi avere la conoscenza, o Uomo, devi chiederla al diavolo, non a Dio.

2 *Dr.Fausto, secondo Jean Paul Laurens*

Quella di Faust, prima ancora di diventare un'opera letteraria, è una leggenda popolare tedesca. Seppur, come tutte le leggende, tramandata con variazioni e dettagli che possono essere di volta in volta diversi, la trama è sempre chiara e ben definita, e tutto sommato molto lineare: un sapiente, Faust, annoiato e depresso dal mondo, desidera più d'ogni altra cosa la conoscenza; Satana gli manda pertanto un suo emissario, Mefistofele, con il quale Faust sottoscrive un contratto: avrà la conoscenza per il resto della sua vita, e in cambio Satana avrà la sua anima una volta morto. Nella maggior parte delle versioni della storia, Faust utilizza i poteri soprannaturali anche per sedurre una giovane e innocente fanciulla, Gretchen, che comunque riesce a mantenere l'innocenza e a meritarsi il paradiso, cosa che invece a Faust è, quasi sempre, negata, proprio in virtù del diabolico patto.

Il primo a dare dignità alla leggenda di Faust è stato Christopher Marlowe, nel 1604, con il suo dramma "La tragica storia del Dottor Faustus", in cui presenta al pubblico inglese il leggendario e irrequieto sapiente tedesco. Il massimo poeta della Germania, Johann Wolfgang von Goethe, due secoli dopo farà tornare Faust entro i confini della sua patria naturale con la più famosa delle versioni della leggenda, che è ancora considerata una delle massime espressioni della letteratura tedesca. Il Faust descritto da Goethe è un uomo più moderno, evidentemente un accademico, frustrato dall'incompletezza del suo sapere e in qualche modo anche conscio che la conoscenza perfetta e completa non è raggiungibile. A differenza di quanto accade nella versione di Marlowe, quella di Goethe mostra un Faust inizialmente restio ad accettare la proposta di Mefistofele, e soprattutto raggiunto, alla fine, dal perdono di Dio.

Ma così come sono tante le versioni popolari della leggenda, tante sono anche le rivisitazioni letterarie: è un sofisticato Faust russo anche "Il Maestro e Margherita" di Bulgakov, con il demone Azazello che imperversa in un'innevata Mosca sovietica, e naturalmente il moderno Doktor Faustus di Thomas Mann del 1947. Non mancano poi di certo le rivisitazioni della storia fatte dal cinema e nuovamente da autori teatrali: del resto, quello di essere continuamente e riproposti e rinnovati è il prestigioso destino dei grandi classici.

Forse non troppo nota ai critici letterari e cinematografici, esiste anche una versione del Faust assolutamente particolare ed eccezionale scritta e messa in scena (probabilmente una sola volta) nel 1932, a Copenaghen. Gli "autori" (con l'eccezione del grande Goethe che, essendo morto svariati anni prima, non poteva opporsi), rimasero ignoti, e la sua unica rappresentazione fu presentata da studenti. Ma erano certo studenti d'alto livello, visto che si presentavano con il nome collettivo di "Gruppo d'Assalto dell'Istituto di Fisica Teorica di Copenaghen": e infatti, quello che rende del tutto eccezionale questo Faust in salsa danese sono i personaggi, che ad un tempo rivestono i ruoli della storia faustiana e quelli dei grandi fisici dell'Istituto diretto da Niels Bohr[3].

Gli anni che vanno dal 1900 al 1930 sono quelli che rivoluzionano integralmente l'approccio conoscitivo delle scienze fisiche, e di fatto costituiscono la cesura fondamentale tra "fisica classica" e "fisica moderna": è in questo periodo che prendono forma la Teoria della Relatività e soprattutto la Teoria dei Quanti, e il luogo geografico che è l'epicentro di questo grandioso sisma concettuale è proprio l'Istituto di Fisica Teorica di Copenaghen, sito al numero 15 di via Blegdamsvej[4] nella capitale danese. Il miglior racconto possibile sul quel periodo eroico resta il bellissimo, ancorché forse troppo breve, libro di George Gamow, "Trent'anni che sconvolsero la fisica"[5].

La "scuola di Copenaghen" raccoglieva una pletora di scienziati che hanno lasciato il segno nella storia della scienza: a titolo di esercizio per il lettore, riportiamo di seguito una foto del "congresso di primavera" del 1932, in occasione del quale venne

[3] (anche) di lui si parla nel compleanno di RM063, "Una vita da mediano".

[4] Il numero civico è stato inseguito cambiato, e il 15 è diventato un 17, e l'Istituto, che esiste ancora, ha preso ovviamente il nome di "Niels Bohr Institute". Come tutti gli elementi dell'intersezione tra gli insiemi tra "Amanti della Scienza" e "Amanti della Birra" sanno benissimo, l'edificio che ha rivestito un ruolo così importante nella storia della fisica moderna è stato donato all'Accademia delle Scienze Copenaghen dal signor Carlsberg, fondatore di uno dei birrifici più famosi del mondo, che aveva stabilito che il suo palazzo residenziale fosse eletto a dimora del maggior scienziato danese esistente.

[5] Libro che per fortuna è stato pubblicato – e continua ad esserlo – anche in lingua italiana, grazie alla benemerita casa editrice Zanichelli. Si trova nella collana BMS (Biblioteca di Monografie Scientifiche), costa 16 euro, e leggerlo dovrebbe essere reso obbligatorio per legge. Non lo diciamo solo perché buona parte di quest'articolo lo saccheggia in maniera indecorosa (anche per le immagini) e cerchiamo di così di indulgere la Zanichelli a non querelarci per violazione di copyright, ma proprio perché è un libro assai bello, scritto da uno come Gamow che non si capisce bene se sia più grande come scienziato o come intrattenitore: e sì che, come scienziato, era un grande davvero.

rappresentato il "Faust di via Blegdamsvej". I signori in prima fila sono ancora oggi le gioie e i dolori degli studenti di fisica di tutto il mondo:

3 *Dopo aver indovinato i primi tre (da sinistra a destra) della prima fila, per favore, non tralasciate l'unica signora del gruppo, all'estrema destra: la Reale Accademia Svedese delle Scienze ancora si vergogna, per non averla mai premiata con quello che sarebbe stato uno dei Premi Nobel più meritati della storia.*

Il 1932 è l'anno in cui James Chadwick scopre il neutrone, quella che in breve è diventata una delle particelle elementari più note, e che dà un senso a tutta la Tavola degli Elementi: priva di carica elettrica, ma con una massa di poco superiore a quella del protone, giustificava finalmente la ripartizione dei numeri e dei pesi atomici, oltre a dare, di fatto, l'inizio ufficiale a quella disciplina che di lì a poco si sarebbe connotata come "fisica nucleare". Ciò non di meno, il neutrone di Chadwick portò inizialmente qualche problema nella nomenclatura delle particelle: le particelle neutre sono quelle che è più difficile rilevare, perché di fatto "invisibili" a tutti i rilevatori che, specialmente ai tempi eroici dell'inizio del XX secolo (ma in gran parte ancora oggi), si basavano essenzialmente sulle caratteristiche elettromagnetiche dei costituenti della materia; ciò non di meno, prima ancora della scoperta del neutrone era stata teorizzata da Wolfgang Pauli un'altra particella neutra, per salvaguardare i principi di conservazione del Decadimento Beta[6].

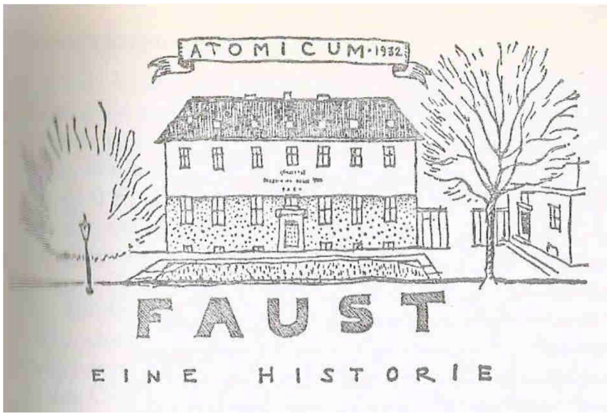
Il problema di nomenclatura fu rapidamente risolto grazie ai fisici di lingua italiana: Edoardo Amaldi, conversando con Enrico Fermi, usò l'italico "neutrino" per la particella di Pauli, per distinguerla con il suffisso diminutivo "-ino" dal neutrone di Chadwick, che in italiano sembra essere dotato del suffisso accrescitivo "-one". A Fermi il nome piacque tanto che non esitò ad adoperarlo anche in scritti e conferenze ufficiali, e dopo che lo stesso Pauli cominciò ad adottarlo non ci furono più problemi di fraintendimento.

Ma, in fondo, i problemi dell'accettazione scientifica del neutrino trascendevano di gran lunga i problemi di nomenclatura: il neutrino previsto da Pauli non solo non possedeva carica elettrica, ma era supposto avere anche massa pari a zero. È notorio che la gran parte dei fisici hanno una fiducia estrema nei principi di conservazione, specialmente i fisici teorici: e Wolfgang Pauli era il più teorico tra i fisici dell'epoca[7]. Ma per molti grandi

[6] I decadimenti beta sono le reazioni che avvengono quando un neutrone si trasforma in un protone (o viceversa). Oltre alle due particelle massive suddette, sono generati un elettrone (o un positrone, antiparticella dell'elettrone) e un antineutrino (o un neutrino). È curioso – o per meglio dire ammirevole – che Pauli abbia teorizzato l'esistenza del neutrino per spiegare il decadimento beta nel 1930, due anni prima dell'effettiva scoperta del neutrone, e che la sua volatile particella sia stata effettivamente rilevata un quarto di secolo dopo, nel 1956, da Cowan e Reines.

[7] L'unico che forse poteva stargli alla pari, in "teoreticità" era Paul Adrien Maurice Dirac; ma, del resto, PAM si considerava probabilmente assai più matematico che fisico, non per niente è protagonista di un nostro compleanno in RM103, "Non dire gatto…".

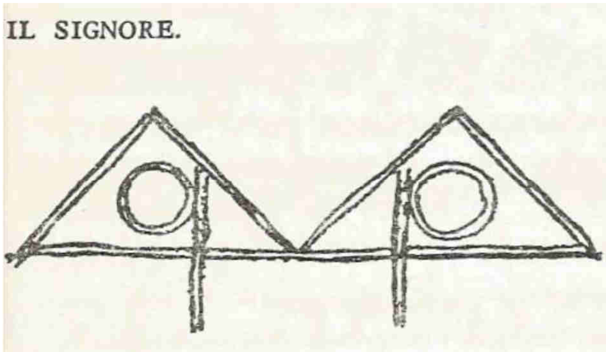
della fisica, l'accettazione di una particella mai vista, priva di massa[8] e priva di carica, e pertanto praticamente impossibile da rivelare, era oggettivamente troppo: somigliava troppo ad una accettazione per fede, non corroborata da prove sperimentali.



4 *Il Faust di via Begdamsvej (sì, l'edificio disegnato è proprio quello)*

Ed è probabilmente per questo imprevisto rinnovarsi dell'eterna diarchia metodologica tra Scienza e Fede che gli ignoti autori hanno avuto l'idea di scherzarci su, nel metter in scena il Faust di via Blegdamsvej.

Nella storia, il ruolo di Mefistofele è ovviamente assegnato a Pauli, che tenta di convincere lo scettico Faust dell'esistenza di Gretchen, ovvero il neutrino. A Niels Bohr spetta il ruolo che solo il patriarca della Scuola di Copenaghen poteva ricoprire, ovvero quello dell'Onnipotente, contornato da una schiera di "arcangeli" che altro non sono che grandi astrofisici della fisica britannica, quali Jeans, Eddington e Milne. Ma sul palcoscenico trovano posto quasi tutti i componenti dell'Istituto: con il loro autentico nome vengono rappresentati Landau, Dirac, Oppenheimer, e molti altri, e perfino lo stesso Gamow, che però era stato impossibilitato ad essere presente al convegno, perché trattenuto dalle autorità sovietiche[9].



5 *Un bel mix tra Scienza e Fede*

Naturalmente, il dramma giocoso è strapieno di riferimenti sulla fisica del tempo, anche assai specialistici e non facilmente godibili dai non iniziati. Del resto, il pubblico che assisteva alla rappresentazione era decisamente e altamente qualificato; e in alcuni casi alcuni artifici erano davvero notevoli, di geniale ironia e fruibili anche da chi avesse solo un'infarinatura della fisica dell'epoca: ad esempio, non può non suscitare ammirazione la coniugazione realizzata tra l'immagine canonica di Dio, l'occhio contornato dal triangolo, con la forma sintetica del Principio di Indeterminazione di Heisenberg, che è spesso scritta come $\Delta q \Delta p \geq h$.

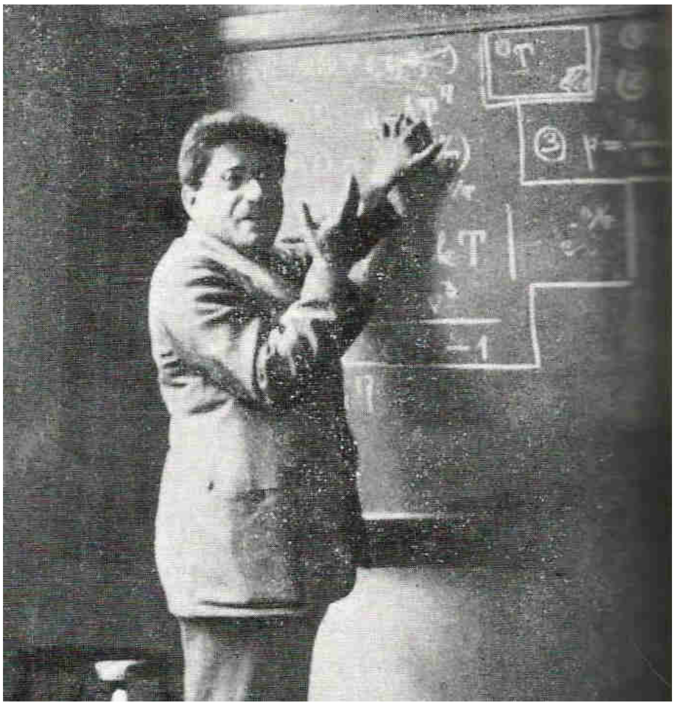
Il "Signore" del Faust dell'Istituto di Fisica di Copenaghen, Niels Bohr, in realtà era, almeno inizialmente, tra gli scettici riguardo all'esistenza del neutrino, al punto che aveva proposto una teoria alternativa per il Decadimento Beta. Non era una teoria molto convincente, per ammissione dello stesso Niels Bohr; però è curioso notare che il grande fisico aveva le caratteristiche giuste anche per ricoprire il ruolo dello stesso Faust, visto che il sapiente lusingato da Mefistofele-Pauli allo scopo di essere convinto dell'esistenza di Gretchen-Neutrino doveva per necessità essere riservato ad un fisico di vaglia

[8] Alla fine si è scoperto che il neutrino una massa, per quanto piccolissima, probabilmente ce l'ha: comunque minore di 0,2 eV/c², e normalmente considerata come somma dei tre "sapori" dei diversi tipi di neutrino, e rilevata sostanzialmente solo nelle fasi di "oscillazione" degli stessi. Ma ci stiamo addentrando in un campo dove fa fatica a dar conto delle cose anche il Modello Standard, quindi è bene che i cialtroni redattori di queste note comincino a tacere.

[9] Nel testo (riportato integralmente nel citato "Trent'anni che sconvolsero la fisica") si vede il disegno di Gamow dietro le sbarre che dice: "Non posso andare a Begdamsvej (la barriera di potenziale è troppo alta)."

dell'Istituto che fosse scettico al riguardo della sfuggente particella. Ma a Bohr, come si è visto, era riservato il ruolo sommo, che nessun altro poteva ricoprire; inoltre, il carattere aperto, ottimista e particolarmente entusiasta verso tutto e tutti che aveva, mal si confaceva ad un personaggio tormentato e in ultima analisi tragico come quello di Faust.

Per fortuna degli ignoti autori del dramma, in Blegdamsvej 15 lavorava un personaggio che si attagliava perfettamente al protagonista del capolavoro di Goethe: uno scienziato di vastissime capacità, con una capacità didattica sorprendente che lo avrebbe qualificato come "grande saggio" in qualsivoglia laboratorio, e che pure non ha raggiunto la popolarità dei suoi compagni di Istituto; era inoltre fragile nell'autostima, tormentato, e sempre pronto a mettersi in discussione, nonostante non ci fosse nessuno che non lo stimasse con assoluta convinzione. Insomma, un Faust perfetto, soprattutto considerando che l'idea del neutrino non gli andava davvero a genio.



6 *Paul Ehrenfest (sì, c'era già nella foto precedente del convegno: quarto in prima fila dopo Niels Bohr, P.A.M. Dirac e Werner Heisenberg; seguito da Max Delbrcük e da Lise Meitner)*

Paul Ehrenfest nasce a Vienna il 18 Gennaio 1880, ultimo di cinque figli di Johanna e Sigmund, un ebreo moravo nato povero che riuscì a dare una dignitosa esistenza alla sua famiglia avviando a Vienna un negozio di frutta e verdura.

Passa un'infanzia con alti e bassi: viene dileggiato dai compagni perché ebreo, ed è di salute cagionevole e non particolarmente robusta: d'altro canto viene protetto dai fratelli, tutti più grandi di lui, che lo difendono e lo istruiscono con giochi e indovinelli: forse anche per questo Paul si rivela essere un ragazzino prodigio, che prima ancora di andare a scuola, sa già scrivere, leggere e far di conto. Conclude naturalmente con straordinario rendimento il ciclo primario, ma ben presto la sua statura tragica comincia a rivelarsi: sua madre muore di cancro quando lui ha solo dieci anni, nel 1890. Il padre si risposa con la sorella minore, la zia di Paul, ma egli entra in un periodo di depressione. Il suo rendimento al ginnasio è tutt'altro che buono, con la sola eccezione della matematica, in cui continua ad eccellere; poco tempo dopo, quando è appena sedicenne, muore anche papà Sigmund, e Paul decide di abbandonare gli studi; per fortuna il suo fratello maggiore, Arthur, che ha il doppio della sua età, si fa carico della famiglia e lo convince a non abbandonare la scuola.

Anche se Ehrenfest non mantenne mai dei bei ricordi del suo periodo ginnasiale, l'università gli riserva esperienze migliori. Nel 1899 entra al Politecnico di Vienna, e stringe amicizia con personaggi destinati a diventare famosi; ma soprattutto segue le lezioni di Boltzmann[10], che riescono a fargli cambiare rapidamente la cattiva idea che aveva maturato sulle lezioni scolastiche. Dopo Vienna, com'era usuale per gli studenti tedeschi del tempo, che non restavano mai in una sola università, Ehrenfest si trasferisce

[10] Di lui si parla in "Le Parole per Dirlo", RM061.

a Göttingen, dove insegna il gotha della scienza europea: Abraham, Nerst, Schwarzschild, Zermelo, per non parlare di Felix Klein e David Hilbert[11].

È probabile, però, che più ancora di questi luminari a colpire la fantasia di Ehrenfest sia stata, in quell'anno e mezzo che passò a Göttingen, una studentessa ucraina: Tatyana Alexeyevna Afnassjewa. Stupito di non vederla agli incontri del "club di matematica", scoprì che la ragione era l'esistenza di una regola che ne impediva l'ingresso alle donne; il giovane Paul rimase scandalizzato da una regola così sessista, e si dette da fare perché venisse abolita. E ci riuscì: forse anche per questo Tatyana riuscì a diventare una delle più grandi matematiche del suo tempo[12], e certamente anche per questo tra i due si stabilì quell'intesa e simpatia che li condusse al matrimonio.


7 *Tatyana e Paul*

Si sposarono a Vienna il 21 dicembre 1904: Paul ebreo, Tatyana ortodossa, trovarono difficoltà nel loro desiderio di celebrare un matrimonio essendo di religioni diverse. Risolsero il problema alla fonte, rinunciando entrambi alle loro religioni. Poco prima Paul aveva ottenuto il dottorato con una tesi con Boltzmann come relatore: a dimostrazione della scarsa stima che Ehrenfest sempre ebbe verso sé stesso, nonostante fosse considerata degna di pubblicazione, si rifiutò di darla alle stampe. La prima cosa che pubblicò fu una memoria sulla radiazione del corpo nero di Planck, l'anno successivo, che preannunciò il suo interesse nella fisica quantistica.

Ma gli alti e bassi continuano: Paul ha dimostrato d'esser un fisico di vaglia, ma resta pur sempre senza una cattedra; torna a Göttingen in cerca di lavoro, quando lo raggiunge la notizia del suicidio di Boltzmann, che lo colpisce in modo sconvolgente. Si fa carico di scrivere il suo necrologio. Il lavoro comunque non si trova, anche se la cittadina tedesca ferve di attività scientifica; Klein chiede ad Ehrenfest di scrivere un articolo di meccanica statistica, e Paul inizia a scriverlo insieme a Tatyana. Lo completeranno solo cinque anni più tardi.

Sempre nella speranza di trovare un posto fisso, Tatyana e Paul si trasferiscono a San Pietroburgo, dove Tatyana è di casa e dove Paul si adatta a prendere una laurea russa, di grado inferiore a quella già in suo possesso, nella speranza di trovare una cattedra: tutto inutile. Nessuna delle molte domande d'assunzione riceve risposta, né dall'Unione Sovietica né dal resto d'Europa. Per colmo di sfortuna, il soggiorno nell'isolata San Pietroburgo finisce con il giocare un brutto tiro a Paul: pubblica nel 1911 una memoria importante sulle caratteristiche della teoria quantistica, e durante un viaggio in Germania scopre che Poincaré[13] ha pubblicato un articolo che giunge alle sue medesime conclusioni. La fama e il prestigio del francese sono tali da aprire le porte a Ehrenfest, se l'articolo di Poincaré facesse credito ad Ehrenfest del suo lavoro precedente, ma il

[11] Non per niente tanti di loro sono già comparsi in queste pagine: Schwarzschild in RM153, Zermelo in RM090, Hilbert in RM060.

[12] Non è solo un modo di dire: Tatyana Ehrenfest-Afanassjewa pubblicò importanti lavori di meccanica statistica insieme al marito Paul, e soprattutto fu un innovatrice nella didattica della matematica, sia in Unione Sovietica, sia nei Paesi Bassi, patria d'adozione. Il sito di matematica della St.Andrews University le dedica una biografia.

[13] Celebrato in RM075, "Matematica per Porcini".

matematico francese non lo cita, per la semplice ragione che non ne aveva sentito parlare. Ehrenfest era troppo isolato, per il suo campo di studio.

Dopo un altro periodo di depressione, finalmente un colpo di fortuna: Ehrenfest è malgrado tutto diventato abbastanza famoso da aver colpito il grande Hendrik Antoon Lorentz, che sta cercando un successore per la sua cattedra a Leiden: l'olandese raccomanda Ehrenfest, che finalmente ottiene l'agognata cattedra. Corre l'anno 1912, Paul ha trentadue anni.

8 *Nel Faust di Blegdamsvej*

Da questo momento in avanti, Paul Ehrenfest diventa un punto di riferimento per i grandi nomi della fisica, per i suoi studenti, e per la fisica stessa. È tra i primi a capire la natura dei fotoni e la legge di radiazione di Planck; applica la meccanica rotazionale alla meccanica quantistica; determina l'incompatibilità tra le correnti di Ampere e la meccanica statistica classica; fa scoperte importanti in termodinamica, sviluppa le teorie di Boltzmann; classifica le transizioni di fase. Tutto questo mentre diventa famoso, tra i fisici, soprattutto per le sue straordinarie capacità didattiche, e il suo metodo rivoluzionario: nessun problema posto agli studenti, aspettava invece che fossero gli studenti a porsene qualcuno di loro interesse. A quel punto, ogni studente veniva seguito individualmente, praticamente un pomeriggio alla settimana solo per lui. E questo nonostante le sue difficoltà con la matematica implicata dalla fisica quantistica fossero tutt'altro che lievi, e lo tormentassero con un senso di inadeguatezza.

Era amico fraterno sia di Albert Einstein[14] sia di Niels Bohr, e quando i due grandi si scontrarono nella loro famosa diatriba sull'interpretazione della meccanica quantistica, visse il confronto come una malattia personale. Invitò entrambi nella sua casa di Leiden nel Dicembre del 1925, sperando che i due potessero ritrovarsi d'accordo. Non accadde, e solo dopo molte insistenze confessò a chi glielo chiedeva che, in ultima analisi, riteneva che fosse Bohr ad avere ragione. Ciò non influenzò minimamente l'affetto che il padre della Relatività aveva per lui, nelle sue parole: "*Ehrenfest non era solamente il miglior insegnante che io abbia mai conosciuto in tutta la mia carriera; era anche appassionatamente preoccupato dello sviluppo e del destino degli uomini, specialmente dei suoi studenti. La capacità di comprendere gli altri, di guadagnarsi la loro amicizia e fiducia, di aiutare chiunque fosse tormentato da problemi professionali o personali, di incoraggiare i giovani di talento: queste erano veramente le sue specialità, ancor più che la brillantezza nell'affrontare i problemi scientifici.*"

L'unica persona che non aveva di Ehrenfest un giudizio favorevole era Ehrenfest stesso: quasi fosse davvero condannato al tormento eterno di Faust, era disperatamente affetto da bassa autostima, che spesso, quando affiancata da difficoltà economiche o private, volgeva in autentica disperazione. Tatyana e Paul avevano due figli, Paul, nato nel 1915, e Vassily, nato nel 1918; Vassily, che i genitori chiamavano con il diminutivo Wassik, era affetto dalla sindrome di Down, e presentava molti problemi fisici e psichici.

Nel 1931, Paul è ormai convinto di non essere più in grado di lavorare. Scrive a Bohr dicendo di aver ormai "*perso completamente il contatto con la fisica teorica,*" e di sentirsi incompetente.

[14] Certo, anche di lui abbiamo parlato, in RM074.

L'ultima sua lettera, pur se mai spedita, è diretta a Bohr, Einstein e ad altri suoi pochi amici scienziati. È un saluto straziante e terribile: vi si legge, tra l'altro: "*Negli ultimi anni è diventato sempre più difficile per me seguire e comprendere gli sviluppi della fisica. Dopo aver provato e riprovato, sempre più frustrato e innervosito, mi sono finalmente arreso alla disperazione. Tutto ciò mi rende la vita insopportabile… mi sento condannato a continuare a vivere solo per garantire la sicurezza economica dei figli. Ho provato a distrarmi, ma funziona solo per pochissimo tempo. Così, ho cominciato a concentrarmi sempre di più sui dettagli del mio suicidio; non ho davvero nessuna reale alternativa al suicidio, e solo dopo che avrò prima ucciso Wassik. Perdonatemi…*"

Paul Ehrenfest mantenne la sua ultima promessa. Il 25 settembre del 1935, uccise il figlio Vassily nella sala d'attesa del Professor Watering Institute ad Amsterdam, dove Wassik veniva curato. Subito dopo, volse la pistola contro sé stesso.

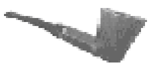
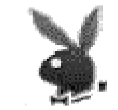
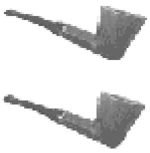
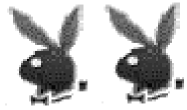
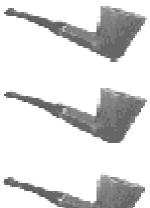
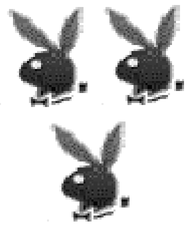
Gran parte degli scienziati si dichiarano agnostici. È una posizione quasi standard, serve a chi passa la vita a cercare di dimostrare razionalmente la natura delle cose, e che pertanto si vede costretta a sospendere il giudizio su questioni non affrontabili razionalmente. Altri sono atei, alla maniera di Laplace: affascinanti dalla grandiosità e dalla bellezza del cosmo, ritengono Dio un'ipotesi non necessaria in un universo così meravigliosamente autoconsistente. Altri ancora, come Einstein, dichiarano di credere "nel Dio di Spinoza", una sorta di entità universale che giustifica l'esistenza del mondo, ma ben distante dalle piccolezze umane e certo assai poco probabilmente fatto a nostra immagine e somiglianza. E molti altri ancora sono credenti, ordinatamente fedeli e seguaci di qualche religione, che in qualche maniera riescono a conciliare Fede e Ragione, probabilmente stupendosi, dentro di loro, di quanto sia più complesso e affascinante l'universo che viene man mano dipinto dalle conoscenze scientifiche rispetto alla visione un po' ingenua dei libri sacri.

È però probabile che tutti, in fondo, sentano una forte distonia nel dover leggere una vita come quella di Paul Ehrenfest nel quadro ottimista di una divinità ottima e perfettamente sollecita nell'aver cura delle proprie creature. È difficile farlo sempre, nelle quotidiane tragedie che ogni giorno vengono registrate e raccontate: chi crede nella giustizia divina, deve necessariamente concludere che il disegno di Dio, se è giusto, non è conoscibile dagli uomini; chi crede nella capacità della ragione, non può trovare nessuna causa buona, o giusta, in simili effetti.

È una sconsolata conclusione cui si è costretti a cedere, nel tentativo di coniugare Fede e Scienza. Forse persone particolarmente bigotte e grette possono anche credere che Ehrenfest si sia meritato tutte le sue personali tragedie perché ha rinunciato alla sua religione per sposare la donna che amava o forse, chissà, proprio per essere stato scherzosamente paragonato un personaggio blasfemo come Faust: ma siamo confidenti che la maggior parte dei partigiani della Fede non siano davvero così poveri di spirito.

Ma l'angoscia resta: perché non vi è alcuna giustificazione etica o razionale per la quale un uomo palesemente buono, altruista e modesto come Paul Ehrenfest abbia avuto una vita piena di sofferenze come quella che ha effettivamente avuto, fino al punto di ridursi ad uccidere un figlio e sé stesso. Non vi è davvero nessuna ragione conoscibile: e se davvero ci fosse una ragione divina, e come tale inconoscibile, beh… si tratterebbe, una volta tanto, di una conoscenza di cui saremo disposti a fare serenamente a meno.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Allergie cervellotiche			
Il problema più odiato da Alice			
Teoria del Campo (dei Chinotti)			

2.1 Allergie cervellotiche

Alcuni di voi (non noi tre, che andiamo avanti fino a giugno escluso. E neanche molti nostri conterranei, con le "Feste del Fagiolo Grasso" che si preannunciano...) sono reduci da epiche mangiate nelle quali sono state ingurgitate (quasi[15]) tutte le possibili permutazioni degli aminoacidi del DNA vegetale ed animale più svariate combinazioni del Sistema Periodico appartenenti al regno minerale ("NaCl" dovrebbe fornirvi alcuni spunti in merito).

Ora, abbiamo (e abbiamo avuto, ma con qualcuno ci siamo persi di vista) alcuni amici celiaci, per i quali mettiamo e mettevamo la massima cura nello studio dei piatti; quello che non sopportiamo, sono quelli che arrivano alla mangiata e annunciano "Sono *leggermente* allergico...". Il più maleducato di noi *[RdA speaking, clearly]* di solito si esibisce (sottovoce) in un "...come avere una figlia *leggermente* incinta...".

Insomma, o sei allergico (e allora rischi grosso, ti capisco e me ne curo), o stai solo rompendo le scatole[16]. Non digerisci la pasta in bianco, ma lo zampone con le lenticchie te lo sei strafocato tranquillo, vero?

"...e questo cosa c'entra con la matematica?" Semplice, qualcuno si è appena inventato i *numeri allergici*. Vi lasciamo liberi di fare ricerche nel campo, ma vorremmo, per

[15] "Quasi" nel senso che quello umano di solito è considerato disdicevole comprenderlo (vale mangiarsi le unghie).

[16] *Excusatio non petita, accusatio manifesta*: Rudy è "leggermente allergico" alle barbabietole (nel senso che proprio non gli piacciono). Il che, data la moda imperante da qualche tempo nell'Europa centro-orientale, gli impedisce di mangiare un *goulash* decente.

cominciare, ne analizzaste qualcuno con un'allergia piuttosto peculiare, presente in alcune (qui ne studiamo due) subvarietà.

Stiamo parlando delle *allergie primitive*: non nel senso che sono molto vecchie, ma nel senso che sono riferite ai numeri primi.

[Rudy sta cercando qualche battutaccia su un primo allergico ai primi, ma "numeri vampiri in bagna caôda" non suona bene]

Torniamo ai nostri numeri: definiamo *numero allergico ai primi* un numero composto tale che, quando si cambia una qualsiasi sua cifra con un'altra cifra, il numero resta composto. Riuscite a trovarne uno di dieci cifre? E, secondo voi, quanti sono i numeri di questo tipo?

Se pensate che per trovare certe allergie si debba passare da numeracci superiori al miliardo, siamo pronti a smentirvi; visto che secondo noi la logica delle allergie è "o lo sei, o non lo sei: *'leggermente'* non vuol dire nulla", ci pare giusto coinvolgere il sistema binario: abbiamo trovato un numero di due cifre talmente allergico ai primi che, se lo scrivete in binario e cambiate una o due cifre (da 0 a 1 o da 1 a 0: ammesso il cambio nei bit più significativi) il numero resta comunque composto!

Questo ultimo problemino ci porta naturalmente alle abituali espansioni, per le quali come al solito non abbiamo risposta (che sia una *leggera* forma di allergia?): quanti sono gli *allergici binari* , per il cambio di una o due cifre? E se permettessi di cambiare più cifre?

...e nel (difficile) caso una certa persona stia leggendo queste parole: sì, stiamo pensando proprio a te. Che al primo antipasto hai annunciato di essere "leggermente allergica" ai gamberetti, ma successivamente non hai avuto nessun problema a spolverarti da sola mezza aragosta...

2.2 Il problema più odiato da Alice

Conoscete ormai tutti il tormentone che la nostra Treccia preferita odia il Calcolo delle Probabilità; pochi di voi, però conoscono il *motivo* per il quale le sta antipatico (ve lo dirà lei, con l'abituale levità in grado di far arrossire un cavallo, nelle soluzioni e note del prossimo numero); ora, secondo noi questo problema (triplo) ne rappresenta appieno il motivo.

Allora, ***primo caso***: Rudy ha appena dato a Doc un pacco contenente un certo ammontare di denaro, e Doc lo ha aperto, verificato e richiuso. Adesso, però, Rudy estrae un secondo pacchetto, che sappiamo contenere (con probabilità 50-50) o il doppio o la metà del contenuto del primo pacchetto: supponendo che, magnanimamente, Rudy permetta a Doc, se vuole, di cambiare il pacchetto, a Doc conviene cambiare o no?

Passiamo ora al ***secondo caso***: sul tavolo ci sono due pacchi, e uno contiene il doppio di denaro rispetto all'altro; Doc ne sceglie uno, controlla il contenuto e quindi gli è offerta la possibilità di cambiare il pacchetto. In questo caso, gli conviene cambiare o no?

"Rudy, avevi detto 'triplo'..." Certamente. Ma il terzo ve lo costruite da soli. Io ne ho già un altro, consistente nello sfuggire alla Furia.

2.3 [Offerta speciale] Teoria del Campo (dei Chinotti)

Offerta speciale in quanto, come al solito, abbiamo le risposte, ma non le soluzioni, o meglio, abbiamo le costruzioni delle soluzioni ma nessuna dimostrazione che effettivamente siano le soluzioni "giuste"... Insomma, ci abbiamo capito poco.

L'Algido Inverno, a giudicare dal ritardo, deve aver preso il treno sulla Torino-Aosta: abbiamo ormai estinto nell'apposito cassonetto (che l'anno prossimo dovrebbe sparire, tra l'altro, almeno qui a Torino) tutti i pacchi e pacchetti dei regali di Natale, ma in città non si è ancora vista una minima inferiore allo zero; previsioni sul medio termine (delle quali fidarsi piuttosto poco) promettono una discesa delle temperature e qualche sana nevicata all'inizio dell'anno e quindi, pur presumendo una riapertura del *Campo dei Chinotti*, non ci fidiamo ancora a mettere in atto grandi sconvolgimenti dell'area di tiro; nulla vieta, però, che si possa meditare su nuove disposizioni lavorando con carta e matita davanti ai sunnominati (due problemi fa) zampone e lenticchie.

La nuova area sulla quale vorremmo imbastire il campo di tiro è un quadrato di lato unitario (stiamo misurando in ettometri) del quale il contorno è perfettamente accessibile (e quindi potete posarci sopra delle cose, se volete); il nostro primo problema (ma gli altri sono molto simili) è che vorremmo mettere ***cinque*** oggetti nel campo[17], e poi procedere secondo questo algoritmo:

1. Si sceglie un punto (quello che preferite) e lo si nomina P_1.
2. Da P_1, si valuta quale sia il punto più vicino ancora senza nome e lo si nomina P_2.
3. Da P_2, si valuta... eccetera.

Raggiunto P_5, si torna a P_1: se due punti sono equidistanti dal punto nel quale vi trovate, potete scegliere quello che preferite. Quello che vorremmo è che il circuito abbia la lunghezza massima possibile, e le regole secondo noi fanno una discreta confusione.

"...e perché lo metti in offerta speciale?" Semplice: abbiamo una costruzione elegantissima, ma *ci manca la dimostrazione che sia giusta*, nel senso che non siamo riusciti a dimostrare che il circuito abbia la lunghezza massima!

Non solo, ma abbiamo anche le generalizzazioni a sei e sette punti (appena meno eleganti, ma molto belle anche loro) e uno scarabocchio (senza costruzione) per gli otto punti che promette bene. Ma *non siamo sicuri*!

Ora, siccome a noi sembra un bel problema, potreste provare a darvi da fare...

3. Bungee Jumpers

Sia R un rettangolo inscritto nel cerchio C; siano inoltre α il rapporto tra l'area di C e l'area di R e β il rapporto tra il perimetro di C e il perimetro di R. Provare che α e β non possono essere entrambi numeri algebrici.

[Si definisce numero algebrico un numero che sia lo zero di un polinomio a coefficienti razionali].

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Gennaio.

Questo inizio spumeggiante del duemilasedici ci sembra arrivato sotto un'ottima stella, se credessimo a queste cose. Non fosse altro che siamo ancora qui ed il nostro fantastico calendario di RM[18] è uscito in tempo perché ognuno di voi ne potesse appendere uno in casa. Come dite? Che preferireste che noi si uscisse anche in tempo? Mah, mica si può avere tutto. Per esempio queste Soluzioni e Note hanno pochissime Note e molte più Soluzioni, che è una buona cosa. L'unica cosa che vi scrivo qui, con affetto, è un grazie di cuore per esserci. Buon duemilasedici. E a proposito, da parte di ***Alan*** il quasi consueto augurio annuale, questa volta in forma di *serie di cambi in versi liberi con acrostico*:

Dom*a*ni dòm*i*ni
*U*n nostrano *a*nno strano
E le ge*n*ti elega*n*ti
Man*o* mano m'an*i*mano
I radi versi *o*ra diversi.
L*i*mpidi l*a*mpi di

[17] Bersagli, secondo me e Doc; alberi, secondo le nostre mogli; entrambe le cose, secondo i nostri figli. Questi ultimi sostengono che sin quando tiriamo io e Doc, la co-locazione di alberi e bersagli fa sì che entrambi ne escano indenni.

[18] Va bene, può succedere, non l'avete ancora scaricato. Ma adesso non perdete tempo… lo trovate da scaricare qui: http://www.rudimathematici.com/archivio/calendari/RM_2016_Calendar.pdf

Affetto - effetto
Solido, solito,
Estremo - e saremo
Di scarsi discorsi
In rime intime.
Core capace ci reca pace
In ugual emissione, inusuale missione.

Bellissimo, vero? Pare che in FB stiano passando tutti i modi di scriverlo, ma ci pare che questo – soprattutto perché ci è stato regalato – sia uno dei migliori. E con questo, passiamo alle soluzioni, che sono molte e di diversa natura.

4.1 [Calendario 2016]

Bene, sappiate che ho deciso di far cadere la regola di avere solo soluzioni dei mesi passati, perché mi dimentico poi di averle ricevute e non le pubblico (per fortuna i più preparati di voi mi hanno mandato soluzioni più di una volta…). Comunque ecco qui, il calendario appena andato in onda ha già svegliato l'interesse di alcuni, vediamo.

4.1.1 Gennaio 2016 – Putnam 2001, A1

Cominciamo ovviamente con il testo:

> *Si consideri un insieme S e un'operazione binaria * interna a S. Si dimostri che, se $\forall a, b \in S$ $(a*b)*a=b$, allora $\forall a, b \in S$ $a*(a*b)=b$.*

La soluzione è di ***Alice M.*** (no, non sono io) a cui diamo il benvenuto, visto che ci sembra questa sia la sua prima soluzione:

> (hp) Sia S insieme; * operazione binaria interna ad S; se per ogni a, b in S si ha che $(a*b)*a=b$ --> (ts) per ogni a, b in S si ha che $a*(a*b)=b$
>
> Dato che * è un'operazione binaria:
>
> $(a*b)=a$ (1)
>
> oppure
>
> $(a*b)=b$ (2)
>
> -Se * è commutativa:
>
> (1) $(a*b)=a$ --> $(a*b)*a=(a*a)=b$ (verifica la prima condizione, se fosse $(a*a)=a$ non sarebbero rispettate le ipotesi)
>
> $a*(a*b)=a*a=b$ (verifica seconda condizione)
>
> (2) $(a*b)=b$ --> $(b*a)=b=(a*b)*a$ (prima condizione)
>
> $a*(a*b)=(a*b)=b$ (seconda condizione)
>
> -Se * non è commutativa:
>
> (1) $(a*b)=a$ --> $(a*b)*a=(a*a)=b$ (prima condizione, come sopra)
>
> $a*(a*b)=(a*a)=b$ (seconda condizione)
>
> (2) $(a*b)=b$ --> $(b*a)=a=(a*b)*a$ (non significativo in quanto non sono rispettate le ipotesi).

Ecco. Poco dopo arriva un piccolo *addendum*:

> (…) volevo rettificare la mia dimostrazione di ieri in quanto mi son resa conto di aver tralasciato il generico caso in cui $a*b=c$ appartenente ad S. In questo caso si nota che ipotesi e tesi sono verificate solo se * è commutativa.

Ottimo lavoro! Andiamo avanti.

4.1.2 Febbraio 2016 – Putnam 2001, A2

Anche qui riprendiamo il testo:

> *Sono date le monete C_1, C_2, …, C_n. Per ogni k, C_k è truccata in modo tale che, se lanciata, abbia una probabilità $1/(2k+1)$ di dare testa. Se tutte le n monete vengono*

> *lanciate, qual è la probabilità che il numero delle teste sia dispari? Esprimete la risposta come funzione razionale di n.*

Abbiamo ricevuto una bella mail del ***Panurgo***, che dedicava la sua soluzione a me (Alice ☺), con tanto di poesia ma senza allegato. Ecco la dedica:

> Nannetta
> *Il labbro è l'arco.*
>
> Fenton
> *E il bacio è il dardo*
> *Bada! la freccia*
> *Fatal già scocca*
> *Dalla mia bocca*
> *Sulla tua* treccia
>
> Falstaff (A. Boito, G. Verdi)

La sottoscritta ha pensato bene che la poesia andasse pubblicata in tutti i casi, ma Rudy, nella sua classica tendenza a complicare tutto, ha commentato che probabilmente la poesia era già la soluzione:

> (…) se "la freccia" è l'induzione, "la bocca" è il primo termine, "la treccia" è la frazione $(2n-1)/(2n+1)$ (palesemente "intrecciata")…

Mah, nel dubbio lo chiedo a voi, che ne pensate? Si capisce qual è la soluzione dalla poesia? E voi, come lo risolvereste?

4.2 [202]

4.2.1 Chiusura di stagione

Qualcuno ha sentito le urla di disperazione del Capo a non veder risolto uno dei suoi problemi di novembre… Di cosa si trattava? Ecco:

> *L'idea è di partire definendo un triangolo ABC, del quale prendiamo il cerchio inscritto, avente centro I, e statuiamo che tocca i lati del nostro triangolo secondo la corrispondenza: $\{BC, CA, AB\} \Rightarrow \{A_1, B_1, C_1\}$. La retta A_1I taglia la mediana AA' del triangolo ABC al punto P. La perpendicolare da I alla retta AA' incontra la parallela tirata per A al lato BC nel punto Q. La bisettrice dell'angolo in C del triangolo ABC taglia la parallela tirata per A' al lato AC nel punto R. La bisettrice dell'angolo in B taglia il cerchio di diametro BC in un ulteriore punto S.*
>
> *La nostra linea di tiro è PQRS, non necessariamente in quest'ordine; ma siamo sicuri che siano sempre sulla stessa retta?*

Il Capo aveva anche qualche altra questioncina aggiuntiva:

> *Come variano i punti PQRS a seconda del tipo di triangolo? Abbiamo dei comportamenti strani, dei casi particolari?*

Per fortuna che ***Trentatré*** si tiene sempre informato e risponde a tono. Più che la soluzione, che segue, ci ha fatto impazzire il commento iniziale:

> Come puro esercizio ho risolto la cosa in coordinate baricentriche; una pagina compatta, astratta, elegante, senza figure. Ma non si spara alle anatre con il bazooka, e ho ripiegato su Eucide; classico, dettagliato (tre pagine), molte figure.
>
> Invece che una soluzione in *GeoGebra* ne allego una in *Geometer's Sketchpad*, con cui ho fatto i disegni.

Ecco, risparmiate le anatre ed il bazooka, ma non proprio: il Capo ha dichiarato che se non passa la soluzione in baricentriche gli toglie il saluto (e gli raddoppia l'abbonamento, visto che la cancellazione non può essere considerata punizione). Comunque, come promesso, la soluzione di ***Trentatré***:

> In fig. 1 gli elementi del problema : ABC il triangolo; I : il centro del cerchio inscritto; A', B', C' i punti medi dei lati; A_1, B_1, C_1 i punti di contatto dell'incerchio con i lati ; AI, BI, CI le bisettrici; $A'C'$, $A'B'$, AL : le rette parallele ad

AC per *A'*, ad *AB* per *A'*, a *BC* per *A*; *QI* : la retta ⊥ ad *AA'* per *I*; *w* il cerchio di diametro *BC*.

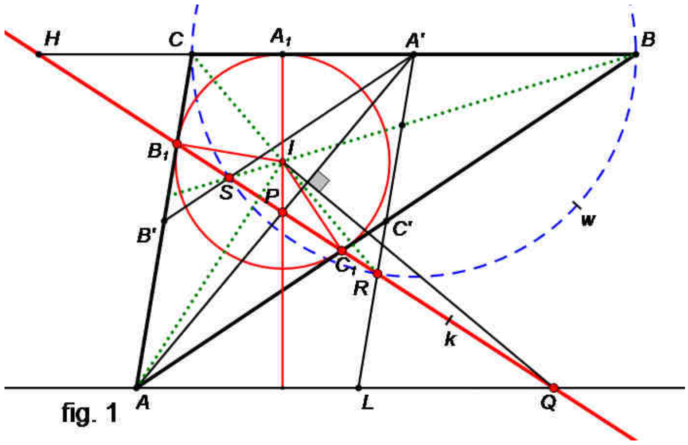


fig. 1

Indico con $(\mathbf{g}), (\in)$ l'incidenza (punto su due rette o retta fra due punti), e l'appartenenza fra punti e rette.

I quattro punti del problema sono definiti da

- $P = AA'\,\mathbf{g}\,A_1I$
- $Q = retta \perp AA'\ per\ I\ \mathbf{g}\,AL$
- $R = A'C'\,\mathbf{g}\,bisett\ CI$
- $S = bisett\ BI\ \mathbf{g}\,cerchio\ w$.

Occorre verificare che stanno sulla "retta di tiro". Questa è poi anche la retta $k = B_1\,\mathbf{g}\,C_1$ e si può dimostrare che

- $P \in AA', A_1I, k$
- $Q \in AL, \perp AA'\ per\ I, k$
- $R \in A'C', bisett\ CI, cerchio\ w, k$
- $S \in A'B', bisett\ BI, cerchio\ w, k$

quindi tutti i quattro punti sono su *k*.

punto *P* - fig. 2

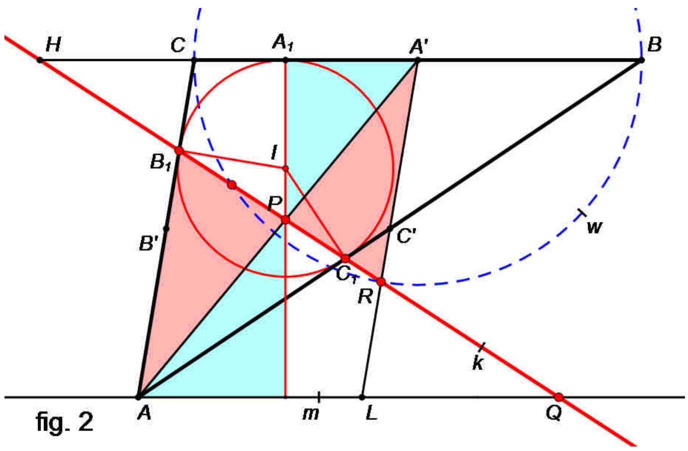


fig. 2

- i triangoli azzurri sono simili
- *P* è vertice comune ai due triangoli → $P \in AA', A_1I$
- i triangoli rosa sono simili → $P \in AA', k$

riassumendo $\boxed{P \in AA', A_1I, k}$.

punto *R* - fig. 3

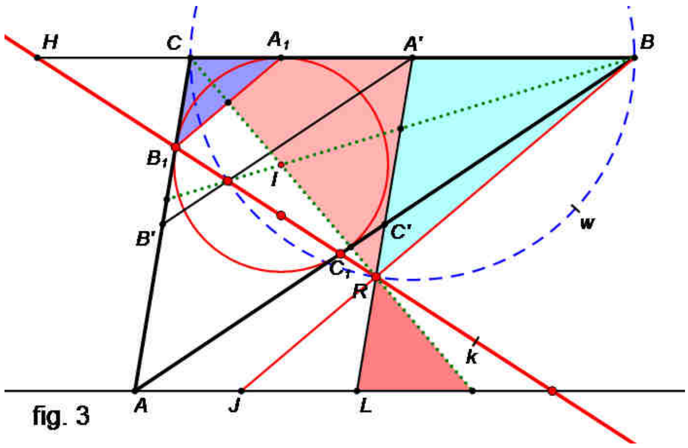


fig. 3

- BJ è la retta parallela ad A_1B_1 per B, e definiamo $R = BJ \cap k$
- i triangoli blu e azzurro sono simili (proiettati da H) e <u>isosceli</u> $\rightarrow$ $R \in A'C', cerchio\ w, k$
- i triangoli rosa+blu e rosso sono simili $\rightarrow$ $R \in A'C', bisett\ CI$

riassumendo $\boxed{R \in A'C', bisett\ CI, cerchio\ w, k}$.

punto *S* - fig. 4

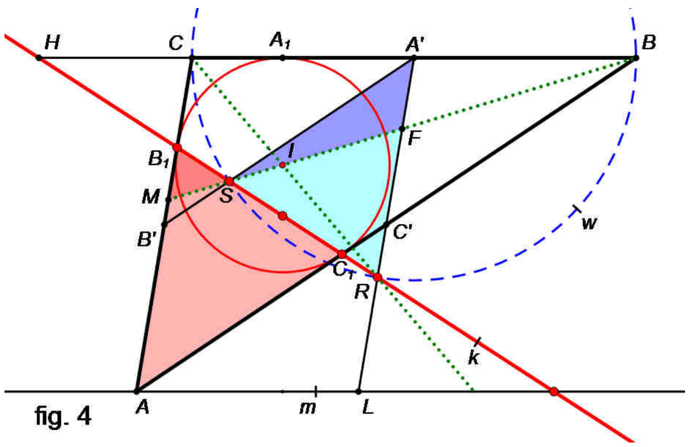


fig. 4

- i triangoli rosa+rosso e azzurro+blu sono simili e <u>isosceli</u> $\rightarrow$ $S \in A'B', k$
- $R \in cerchio\ w$ $\rightarrow$ $S \in cerchio\ w$
- i triangoli rosso e azzurro sono simili $\rightarrow$ $S \in bisett\ BI, k$

riassumendo $\boxed{S \in A'B', bisett\ BI, cerchio\ w, k}$.

punto *Q* - fig. 5

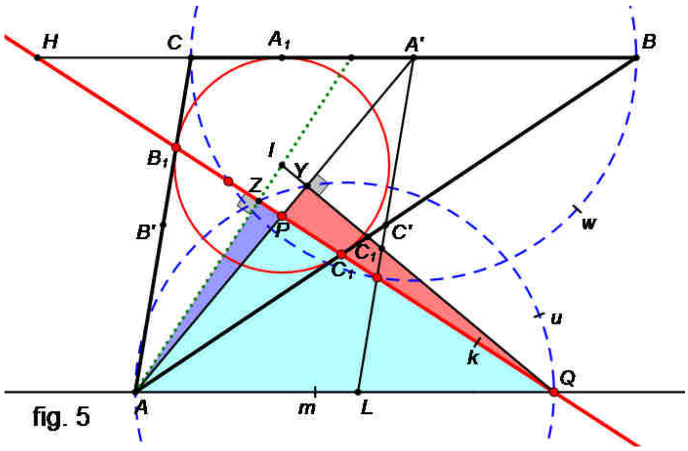


fig. 5

- per definizione $Q = AL\,\mathbf{g}\perp AA'\ per\ I$

- il triangolo azzurro+blu è retto in $Z = bisett\ AI\,\mathbf{g}k$

- il triangolo azzurro+rosso è retto in $Y = AA'\,\mathbf{g}\perp AA'\ per\ I$

- Q è vertice comune dei due triangoli $\rightarrow$ $Q \in k$

riassumendo $\boxed{Q \in AL, \perp AA'\ per\ I, k}$

nb. con u : cerchio di diametro AQ (ipotenusa) $\rightarrow$ $X, Y \in cerchio\ u$ e i triangoli blu e rosso sono simili.

Per "come gira il fumo" le cose sono semplici; la retta di tiro $k = B_1\mathbf{g}C_1$ è definita per ogni triangolo; se questo è isoscele in A (o equilatero) , k è parallela al lato BC e il punto Q è all'infinito.

Con i nostri esperti non si scherza. ***Trentatré*** è sempre pronto. Andiamo avanti!

4.3 [203]

4.3.1 Bungee Jumpers

Prima di partire con le soluzioni, abbiamo ricevuto una versione alternativa alla "Pagina 46" del numero precedente da parte di ***Gian Paolo***. Vediamola:

Th. Se a e b sono interi positivi tali che $a^2 + b^2$ sia divisibile per $1+ab$,

$$k = (a^2 + b^2) / (1+ab)$$

deve essere un quadrato perfetto.

Dim. (In tutto quel che segue a e b possono essere scambiati tra loro). Perché valga l'ipotesi dovrà essere:

$$a^2 + b^2 = k + kab$$

$$a^2 - kab + b^2 - k = 0$$

$$a = ½\ (kb\ \mathrm{sqrt}(k^2b^2 - 4b^2 + 4k))$$

Perché a sia un intero, il termine sotto radice deve essere un quadrato perfetto pari a

$$(kb - 2\mathrm{sqrt}(k))^2 = k^2b^2 - 4k\ \mathrm{sqrt}(k)\ b + 4k$$

e perché questo accada dovrà essere $4b^2 = 4k\mathrm{sqrt}(k)\ b$

da cui

$$b = k\mathrm{sqrt}(k)$$

Ma perché anche b sia un intero, anche k dovrà essere un quadrato perfetto. C.V.D.

La sua versione non ci sembra faccia una piega, che ne dite? No, non è una affermazione di correttezza, solo una sfida al vostro commento. Benvenuto a ***Gian Paolo*** tra i fustigatori del Capo. Del resto una versione alternativa, con molti *disclaimer*, è stata proposta anche da ***Valter***:

> Qui la sparo grossa ma siccome mi avete fatto "tribolare" espongo la mia pensata (bello il metodo della "discesa infinita"). Confido nella vostra pazienza per la stupidaggine che sto per esporre. Ho scomodato i numeri complessi da cui:
>
> $$(a + ib) * (a - ib) = k[(ab)^{1/2} + i)] * [(ab)^{1/2} - i)]$$
>
> mi sono detto quindi che deve essere:
>
> $$a = b * [(ab)^{1/2}] \longrightarrow a^2 = (b^2 * ab) \longrightarrow a = b^3.$$
>
> Quindi k deve essere uguale a b^2 in quanto l'equazione del problema diventa:
>
> $$b^6 + b^2 = b^2 * (b^4 + 1).$$
>
> Ho verificato con $b = 2$ (e quindi $a = 8$):
>
> $$64 + 4 = 4 * (16 + 1).$$
>
> Non so se il tutto ha un senso e se, anche lo avesse, siano contemplate tutte le soluzioni.

Non vi aspetterete mica che lo diciamo noi, vero? Andiamo avanti finalmente con i problemi del mese scorso.

4.3.2 Girotondo virtuale mediamente numerato

Siamo un po' di corsa a questo punto, brevemente il testo:

> *Abbiamo un gruppo di amici dei nostri VAdLdRM, ordinati in un circolo virtuale in ordine alfabetico (da A a J). Ciascuno di loro ha pensato un numero e lo ha comunicato ai suoi due vicini (ma non agli altri); indi, ognuno dei partecipanti ha calcolato la media (aritmetica) dei due numeri ricevuti e l'ha comunicata all'intero gruppo, con questi risultati: Alberto: "Uno". Beatrice: "Due". Carlo: "Tre". Daniela: "Quattro". Enrico: "Cinque". Fred: "Sei". Gigi: "Sette" Hymen: "Otto". Ilaria: "Nove". Jean: "Dieci". Che numero ha pensato Fred?*

Pare il problema fosse facile. O no. Ci scrive ***Alberto R.***, arguto come sempre:

> Si tratta banalmente di risolvere un sistema di dieci equazioni, che, pur lineari e semplici, sempre dieci sono! Quindi un compito decisamente quaresimale e non adatto al periodo natalizio.
>
> Ma, per fortuna, esiste il computer.

	j	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	a
Media dei numeri ricevuti dai vicini	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
Numeri comunicati ai vicini	5	6	-3	-2	9	10	1	2	13	14	5	6

Liquidati in una tabella. Il Capo non sarà contento per niente, anche se sono d'accordo sull'idea del compito quaresimale. Da parte sua, ***Valter*** ci scrive:

> Ho due sistemi di equazioni:
>
> A+C=4 C+E=8 E+G=12 G+I=16 I+A=20
>
> B+D=6 D+F=10 F+H=14 H+J=18 J+B=2
>
> che risolte danno:
>
> A=6 C=-2 E=10 G=2 I=14
>
> B=-3 D=9 **F=1** H=13 J=5

Ci sembra corrispondere tutto. Andiamo avanti.

4.3.3 Attacco a Tattoine!

Secondo problema. Visto che il numero di dicembre era appena celebrativo della prossima uscita delle nuove puntate della saga di Star Wars, Tattoine doveva richiamare uno dei mondi abitati… peccato che l'abbiamo scritto sbagliato. Pazienza, è l'intenzione che conta, quindi non perdiamo tempo con ridicoli errori di battitura e veniamo al problema:

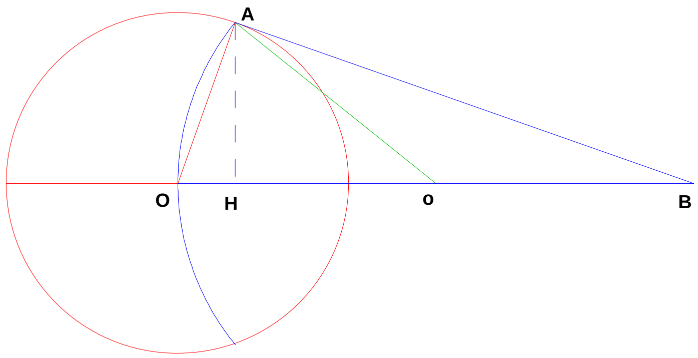
La Morte Nera può generare un CSD (Campo Sferico Distruttivo) attorno a sé stessa (considerata puntiforme); quando il CSD incontra il centro di un oggetto formato da materia solida, lo distrugge, spendendo una quantità di energia proporzionale alla superficie di contatto tra il bordo del campo e (l'interno del)l'oggetto, nel momento stesso nel quale il campo arriva al centro dell'oggetto.

Se R è il raggio di Tattoine e r è il raggio del CSD, con r>1/2 R. Per distruggere il pianeta, spendete un'energia equivalente alla superficie di sfera del CSD inclusa nel pianeta nel momento in cui il CSD passa per il centro del pianeta.

Vostro compito è trovare la distanza ottimale tra i centri della Morte Nera e di Tattoine per garantire il minimo dispendio di energia, con una distanza maggiore di metà raggio di Tattoine.

Indipendentemente dall'ambientazione guerrafondaia, il problema è piaciuto moltissimo. Partiamo subito da ***Sawdust***:

La superficie di una calotta sferica è $2\pi r h$. Tanto per cominciare in maniera semplice facciamo un po' di calcoli di esempio.



Assumiamo come raggio di Tattoine 4 UA. Con un CSD di raggio 6 UA potremmo calcolare facilmente la lunghezza del segmento AH sfruttando la formula di Erone, visto che il triangolo AoO è isoscele e ne conosciamo tutti i lati

$$S(AoO)=\sqrt{8(8-6)(8-6)(8-4)}=8\sqrt{2}$$

$$AH=\frac{16\sqrt{2}}{6}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$OH=\sqrt{4^2-\left(\frac{8}{3}\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{16-\frac{128}{9}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$$

oppure sfruttare il fatto che il triangolo OAB è rettangolo e quindi un cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la sua proiezione su di essa

$$12/4=4/OH \quad \text{da cui } OH=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

Quindi in questo caso la superficie per cui spendiamo energia è pari a

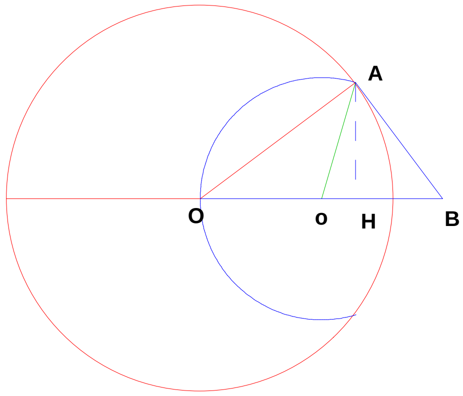
$$2\pi 6\frac{4}{3}=16\pi$$

Ma se il raggio del CSD fosse mooooolto grande la superficie per cui si spende energia coinciderebbe con quella del cerchio massimo che divide Tattoine a metà

$$4^2\pi=16\pi$$

Invece nel caso in cui il centro del CSD fosse all'interno di Tattoine, proviamo a vedere il caso limite in cui il raggio del CSD è appena superiore a $1/2R$, ossia un niente maggiore di 2. Questa volta praticamente tutta la superficie del CSD è dentro Tattoine, per cui l'energia spesa è quella equivalente a

$$4\pi\, r^2 = 16\,\pi$$



Quindi Darth Vader può tranquillamente crearsi un CSD a piacere, tanto il costo della bolletta sarà sempre uguale! Messo in modo un po' più formale il tutto dovrebbe essere all'incirca così (usando solo Euclide e tralasciando Erone)

$$2r/R = R/OH \quad \text{da cui } OH = \frac{R^2}{2r}$$

$$S(CSD) = 2\pi\, r\, \frac{R^2}{2r} = \pi R^2$$

da cui si nota chiaramente che il raggio del CSD è ininfluente, anche nel caso in cui R=r, infatti si avrebbe

$$2R/R = R/OH \quad \text{da cui } OH = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

$$S(CSD) = 2\pi\, R\, \frac{R}{2} = \pi R^2$$

Benissimo! Di simile opinione il nostro ***Panurgo***:

Abbiamo l'intersezione di due sfere quindi la superficie in questione è una calotta sferica di area $S = 2\pi r h$. Sappiamo quanto valgono 2 e π mentre r è il nostro parametro aggiustabile: per trovare h, dato che la congiungente il centro del pianeta con la Morte Nera è un asse di simmetria, è sufficiente considerare Flattoine (vedi figura, a sinistra).

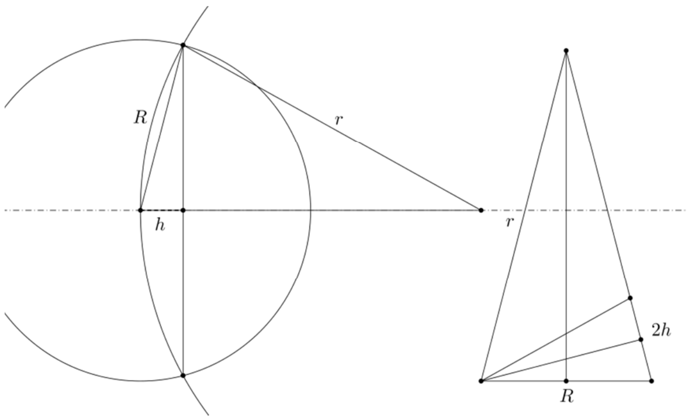


Figura 1: Flattoine, un istante prima del botto, e la triangolazione isoscele

R è una corda per cui il triangolo che vedete è isoscele: l'ho riportato in figura a destra, in una posizione più usuale; tracciata l'altezza relativa ad un lato obliquo e la simmetrica di R rispetto ad essa osserviamo che il secondo triangolo, isoscele per costruzione, è simile al primo dato che hanno l'angolo alla base in comune.

Vale quindi la proporzione $2h : R = R : r$, ovvero $S = \pi R^2$ indipendentemente (povera la mia tiroide) da r.

Comunque, il caso $r < R/2$ non può verificarsi perché già per $r = R$ anche una Morte Nera puntiforme andrebbe a sfracellarsi sulla superfice del pianeta (Tattoine o Flattoine che sia) scatenando le ire dell'Imperatore e del suo irascibile (povera la mia tiroide) Luogotenente.

Riportiamo anche a soluzione di ***Gavrilo*** (bentornato tra le nostre pagine!) che ha un approccio diverso:

Ho incominciato ad analizzare il problema partendo da due casi limite (che rappresentano gli estremi del campo di variabilità di r):

1. quando il centro A della Morte Nera (MN) è infinitamente lontano da Tattoine ed è $r = \infty$;
2. quando il centro A della MN si trova esattamente sulla superficie di Tattoine e si ha $r = R$.

Nel **caso 1.** (rappresentato in sezione in Fig. 1) il CSD diventa un CPD (Campo Piano Distruttivo) e la sua superficie inclusa nel pianeta (quando ne raggiunge il centro) è semplicemente uguale a quella del cerchio massimo di Tattoine, cioè:

$$S_1 = \pi R^2$$

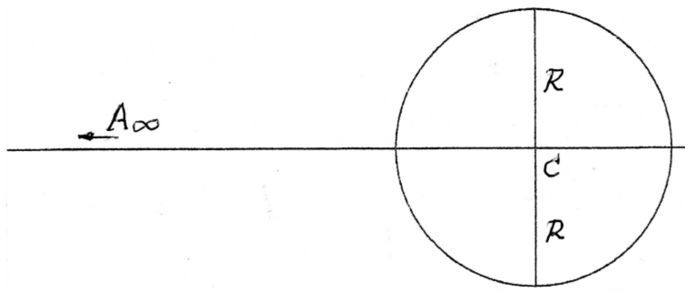


Fig. 1. $r = \infty$

Nel **caso 2.** (rappresentato in sezione in Fig. 2) la MN, con centro in A, ha raggio $r = R$ quando passa per il centro C del pianeta. Perciò il punto B (intersezione dei cerchi sezione di MN e di Tattoine) forma il triangolo $\Delta(ABC)$ che è equilatero (ha tutti i lati uguali a R) ed ha gli angoli uguali a $\pi/3$.

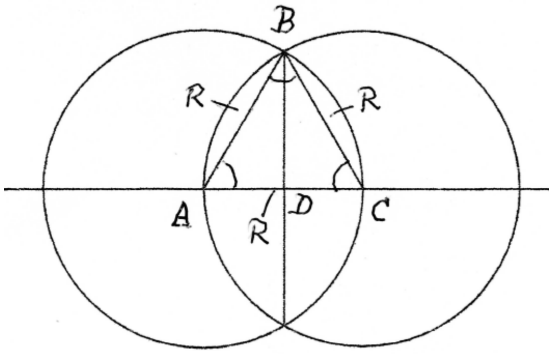


Fig. 2. Caso $r = R$

Quindi la superficie della sfera della MN inclusa nel pianeta è quella di una calotta sferica di raggio R e di altezza $h = DC$:

$$S_2 = 2\pi\, R\, h$$

e si ha: $h = DC = BC \cos(\pi/3) = ½\, R$, quindi:

$$S_2 = 2\pi\, R\,(½\, R)\,,$$

$$S_2 = \pi\, R^2$$

Risulta quindi che, nei due casi estremi, la superficie della sfera emessa dalla MN ed inclusa nel pianeta (quando ne raggiunge il centro) è uguale. Ho quindi affrontato il **caso generale** ritenendo che, poiché S assume valori uguali agli estremi dell'intervallo stesso, debba avere almeno un punto di derivata nulla (massimo o minimo) all'interno dell'intervallo.

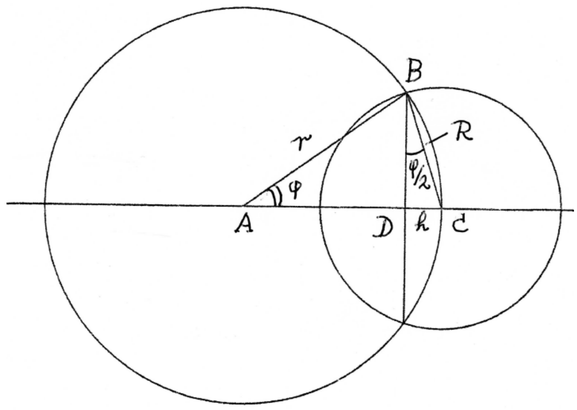


Fig. 3. Caso generale

Nel **caso generale** (rappresentato in sezione in Fig. 3) la MN, con centro in A, ha raggio r quando passa per il centro C del pianeta. Perciò il punto B (intersezione dei cerchi sezione di MN e di Tattoine) forma il triangolo $\Delta(ABC)$ che è isoscele (ha i lati $AB = AC = r$). Se poniamo l'angolo $\hat{}(BAD) = \varphi$, dal triangolo $\Delta(ABC)$, isoscele, risulta:

$$\hat{}(ABC) = \hat{}(BCA) = ½\,(\pi - \varphi)$$

e, dal triangolo $\Delta(BCD)$, rettangolo in D, si ha:

$$\hat{}(DBC) = \pi - \pi/2 - ½\,(\pi - \varphi) = \varphi/2\,.$$

Segue che: $h = DC = BC \sin(\varphi/2)$.

Dobbiamo ora trovare la relazione tra r e R. Dalla Fig. 3 risulta:

$$AC = AD + DC\,,$$

$$r = r\cos\varphi + R\sin(\varphi/2)\,,$$

cioè:

$$r\,(1 - \cos\varphi) = R\sin(\varphi/2)\,,$$

da cui:

$$r = R\sin(\varphi/2)\,/\,(1 - \cos\varphi).$$

E l'area della calotta risulta:

$$S = 2\pi\, r\, h = 2\pi\, R^2 \sin^2(\varphi/2)\,/\,(1 - \cos\varphi) =$$

$$= 2\pi\, R^2 \sin^2(\varphi/2)\,/\,[1 - (\cos^2(\varphi/2) - \sin^2(\varphi/2))] =$$

$$= 2\pi\, R^2 \sin^2(\varphi/2)\,/\,(\sin^2(\varphi/2) + \sin^2(\varphi/2)) =$$

$$= 2\pi\, R^2\, ½\,,$$

$$S = \pi\, R^2\,.$$

Si vede quindi che la superficie della sfera del CSD inclusa nel pianeta nel momento in cui il CSD passa per il centro del pianeta ha sempre lo stesso valore

> qualunque sia la distanza tra la Morte Nera e Tattoine (e si conferma anche che il punto di derivata nulla cui abbiamo accennato è non uno ma tutti!).

Belle le figure, vero? Altro che Geogebra… C'è anche un piccolo *addendum*:

> Nella trattazione precedente avevo assunto per r come valore limite inferiore il valore R. Probabilmente ciò era dovuto alla considerazione inconscia che il centro A della Morte Nera dovesse rimanere fuori dal pianeta al momento della distruzione (cosa che mi sembra sensata).
>
> Comunque ovvio ora all'*errore* con la seguente appendice.
>
> **Caso 2 bis.** $r = R/2$ (rappresentato in Fig. 2 bis.) La superficie da considera è l'intero volume del CSD ed è:
>
> $$S_{2\ \mathrm{bis}} = 4\pi\ (R/2)^2 = \pi\ R^2.$$
>
> **Caso generale bis.** $R > r > R/2$ (rappresentato in Fig. 3 bis.). Si applica completamente quanto affermato per il precedente **caso generale** (ove si assumeva $R > r$.
>
> Le conclusioni precedenti sono quindi confermate.

Questa volta sono d'accordo tutti sulle conclusioni, e i metodi sono piuttosto simili. Anche ***Valter*** scrive:

> Sbaglio ma a me il dispendio di energia viene sempre πR^2 (l'area del cerchio con raggio R).
>
> Ho ragionato così:
>
> - equazione cerchio con raggio R: $x^2 + y^2 = R^2$
> - equazione cerchio con raggio r: $(x–r)^2 + y^2 = r^2$
>   - (è spostato di $–r$ sull'asse x per toccare il centro di Tatooine all'origine)
> - dalla seconda equazione ottengo: $y^2 = 2xr – x^2$
> - sostituendo nella prima equazione ho: $x = R^2 / 2r$
> - l'area di un segmento di sfera è $A = 2\pi rh$
>   - (nel nostro caso $h = x$)
> - sostituendo ho $A = \pi R^2$
>
> Per $r=R/2$ e r=infinito mi pare che funzioni.

Pare anche a noi che funzionino tutti i metodi. E siamo arrivati al fondo. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Ho scritto alcuni numeri (interi positivi), e ognuno di essi è la metà della somma dei restanti; quanti sono i numeri, e come sono?

> *I numeri sono tre e devono essere uguali tra loro. Se fossero più di tre, il più piccolo sarebbe minore della metà della somma dei restanti; se fossero due, il maggiore sarebbe più grande della metà dell'altro; se ce ne fosse uno solo, sarebbe maggiore di zero (somma degli "altri"). Inoltre, se uno deve essere pari alla media degli altri due, devono essere uguali tra loro.*

6. Zugzwang!

Due giochi, questa volta. E non per scusarsi di qualcosa, ma perché sono strettamente imparentati tra loro, e tirarla lunga due puntate non ci sembra il caso.

Cominciamo con le cose strane: una volta tanto, non li ha trovati Rudy, ma Doc, che si chiede come mai non se ne sia mai parlato, e ipotizza complotti[19] da parte mia:

[19] ...a complotto, complotto e mezzo: ha mandato la mail *l'undici settembre*.

"*Perché sono famosi*": no, abbiamo proposto dei giochi famosi, dalle "elle" di DeBono a "Amazon" di Conway, per tacere delle variazioni sul "Solitario alla francese" e della "Fanorona" borgesiana.

"*Perché sono di carte*": ma neanche per sogno, a parte i succitati solitari, "Secondi scivolosi" e "King of the Hill" sono basati sulle carte.

"*Perché se giochiamo contro Treccia ci straccia alla grande*": nego. Se la *ratio* fosse questa, giocheremmo solo a dadi. E neanche tutti e due[20].

In realtà, le ragioni alla base del "non parlarne" sono molto più semplici: la principale è che *non li conoscevo*. Per la seconda, dovrete leggervi la spiegazione almeno del primo gioco.

A proposito del "famosi": mica tanto. Sono voci di Wikipedia inglese ma, per motivi che vi saranno crocianamente evidenti in seguito, in quella italiana non compaiono (e anche le altre... solo Giapponese per il primo, Spagnolo, Russo, Thai e Cinese per il secondo...).

6.1 Krypto

E il nome è già tutto un programma, visto che il cane di Superman non c'entra niente.

Per prima cosa, vi serve un ***mazzo da 56 carte***, che dovete costruirvi o (posto che sia ancora in vendita, visto che risale al 1963) acquistare da Parker Brothers o MPH Games, le quali saranno ben felici di pagare le opportune royalties a ***Daniel Yovich***, che lo ha inventato; il mazzo ha le carte numerate (anzi, ci sono *solo* i numeri, sulle carte. Niente semi): diciotto hanno i numeri da 1 a 6 (triplice copia), sedici hanno i numeri da 7 a 10 (quadruplice copia), otto hanno i numeri da 18 a 25 (copia singola); per motivi che vi saranno chiari in seguito (legati al punto che non piace a Rudy), sconsigliamo "foglietti volanti scritti con pennarello scarico": molto meglio prendere un paio di mazzi inutilizzabili per perdita di qualche valore e incollare sopra (se usate colle assorbibili – tipo il "Vinavil", per non fare nomi – attenzione: dosi omeopatiche!) i foglietti con i numeri scritti in grossissimo, tinte brillanti e font dotato di grazie.

E incollateli bene, che non facciano "gobbe", visto che la prima cosa da fare è *mescolare* il mazzo.

Indi, si procede alla ***distribuzione***: vengono capovolte *sei* carte, tutte visibili a tutti, e una di queste[21] è definita l'*obiettivo*. Scopo del gioco è, utilizzando le quattro operazioni applicate alle altre cinque carte utilizzate ciascuna *una ed una sola volta*, ottenere il valore obiettivo. Il primo che ci riesce, grida "***Krypto!***" e vince il giro.

Esempio? Ma certo, lo stesso (il secondo: il primo non ci piace) di Wikipedia. Con un piccolo cambio di notazione, che a noi pare più chiara.

Carte estratte: 1, 3, 7, 1, 8.

Obiettivo: 1

[20] Questa ve la racconto. Sapete che io e Doc siamo stati invitati al convegno dell'UMI, a Siena (dove, giustamente, l'Istituto di Matematica ha conservato la vecchia insegna, recitante "Ospedale Psichiatrico"); ciascuno di noi ha acquistato una copia dei tre gadget disponibili (maglietta, tazza e grembiule da cucina che Doc si ostina – a ragione, ma questi sono dettagli – a chiamare "zinale"); il Nostro ha velocemente inventato un modo sicuro per giocare a dadi da remoto (Alice – non Treccia, l'altra: l'amica di Bob – e Bob si stanno divertendo da matti e ringraziano) e Treccia ha vinto lo "zinale". La cosa a Rudy non piaceva per due motivi: tanto per cominciare pareva il gadget "di valore minore" (e sin qui, questione di opinioni opinabili...), ma soprattutto Rudy è sempre stato convinto che 6/3=2, quindi fornire a Treccia un gadget solo non pareva giusto; ha quindi organizzato una partita a dadi contro Alice a sua insaputa. Preparando anticipatamente una tabella casuale e decidendo che "il lancio" di Treccia sarebbe valsa non solo sulla tabella di Doc, ma anche per quella generata da lui (sorvoliamo sul caso ci fosse coincidenza di oggetti: era comunque gestito). E Treccia, pur avendo "perso" (IMHO: Rudy speaking) contro Doc, ha "vinto" (a sua insaputa) contro Rudy, e il mug fa orgoglioso sfoggio di sé in quel di Zurigo.

[21] Le regole non spiegano come scegliere questa carta: noi opteremmo per la prima o l'ultima, con una (leggera) preferenza per la seconda ipotesi. Soprattutto se il mazziere è un tipo lento.

```
3   -   1   =   2
                2   +   7   =   9
                            9   /   1   =   9
                                        9   -   8   =   1
```

"Krypto!"

E, a questo punto, si contano i punti.

Il gioco si basa su dieci "mani": per ogni mano vinta, ricevete un punto, con la nota che *se vincete più mani consecutivamente, ogni volta raddoppiate il punteggio della mano precedente*. Quindi, se vincete quattro mani di fila, alla prima prendete un punto, alla seconda due punti, alla terza quattro e alla quarta otto; totale, quindici. E se gridate "Krypto" ma c'è un errore di calcolo, perdete un punto, la mano viene rigiocata ma in questo ri-gioco voi siete fuori: questa regola sembra cattiva, ma con quindici punti all'inizio della quinta mano, la tentazione di bruciarne cinque gridando Kripto!" senza neanche guardare le carte per lasciare gli altri a zero e vincere diventa forte... No, non si può. Fate i bravi, su.

"Rudy, non si è ancora capito cos'è che non ti piace". Certo, perché non ve l'ho detto. Da quando le carte sono visibili, avete *tre minuti* per dare la soluzione, impiegando non più di trenta secondi per esporla: se ci mettete più tempo, è come se aveste sbagliato, e se dopo tre minuti nessuno dice niente, si rifà la mano. Siccome io a pensare sono un diesel, la cosa non mi piace. E "preferisco" che l'obiettivo sia l'ultima carta perché in questo modo ho più tempo per pensare.

"Vuoi che ci giochiamo?" In alternativa, potreste meditare su quanto scrive Wikipedia: "*...detailed analysis of the game can raise more complex statistical questions...*". E lo dice anche per il prossimo, quindi non fatemelo ripetere.

6.2 24

Sì, lo abbiamo fatto apposta. Il gioco si chiama "Ventiquattro", e non abbiamo messo le virgolette per complicarvi la vita.

Qui, la spiegazione (sempre Wikipedia inglese) difetta di chiarezza e di linearità; non prendetevela con noi, *relata refero* (anzi, *referimus*: l'ha trovato Doc, dicevamo): infatti, vi serve un mazzo di carte dal quale togliete le figure, e dovete arrivare oltre la metà spiegazione per trovare un anodino "*...played with a standard* 52-*card deck...*", il che fa pensare che comunque vi servano i numeri da 1 a 10, ma la cosa non sia obbligatoria. Non solo, ma questa dichiarazione è seguita da un calcolo sospetto: c'è dentro un 13, e la deduzione logica è che abbiano lasciato dentro le figure, con valori da 11 a 13. Insomma, si capisce poco.

"...e allora perché stai a parlarne?" Beh, tra le varie dimenticanze c'è anche quella del *tempo massimo*: visto quanto dicevamo sopra, la sua inesistenza potrebbe essere un punto a favore, secondo Rudy. Ma veniamo alle regole, che tratteremo abbastanza alla svelta.

Si mettono sul tavolo ***quattro*** carte scoperte e, usando le quattro operazioni *più le parentesi* (non ci risulta fossero ammesse in Krypto), dovete ottenere esattamente 24; chi ci riesce per primo, prende le quattro carte dal tavolo, e si ricomincia sino ad esaurimento mazzo.

Cosa ci piace: oltre al fatto che si possono usare le parentesi, la faccenda che si vada ad esaurimento del mazzo: per il *black jack*, nei casinò è vietato il *counting*, ma qui (*pun intended*) il vietarlo farebbe ridere i polli.

Cosa non ci piace: mah, più che altro la voce di Wikipedia. Poco chiara. A sua discolpa, va detto che in paesi meno *mathematically challenged* del nostro era diffuso un gioco molto simile (*Math24*), quindi probabilmente le regole le conoscono tutti.

Fateci sapere, per la parte statistica (seeh... come no...).

7. Pagina 46

Sia r il raggio di C e x e y i lati del rettangolo R; deve essere:

$$\alpha = \frac{\pi r^2}{xy} \text{ e } \beta = \frac{2\pi r}{2x+2y} = \frac{\pi r}{x+y}.$$

Da cui,

$$xy = \frac{\pi r^2}{\alpha} \text{ e } x + y = \frac{\pi r}{\beta}.$$

Essendo la diagonale di R il diametro di C, abbiamo

$$(2r)^2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

ossia

$$4r^2 = \frac{\pi^2 r^2}{\beta^2} = \frac{2\pi r^2}{\alpha}.$$

Da cui,

$$4\alpha\beta^2 = \alpha\pi^2 - 2\beta^2\pi$$

e quindi π diventa radice di:

$$\alpha z^2 - 2\beta^2 z - 4\alpha\beta^2 = 0\ .$$

Quindi, se α e β fossero numeri algebrici, lo sarebbe anche π, il che è assurdo.

8. Paraphernalia Mathematica

Come ben sa chiunque riesca ad arrivare alla fine della nostra *newsletter* mensile, abbiamo sempre amato i paradossi, soprattutto se a margine del discorso principale.

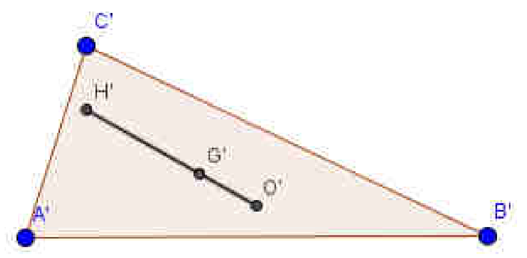
In questo senso, dovrebbe essere l'ultimo, ma speriamo non sia l'ultimo: nel senso che con lo stesso titolo potremmo far partire un'altra sequenza di pezzi (mooolto più lunga), di argomento completamente diverso.

Estote Parati.

8.1 Oltre Euclide [005 – Final He(- - e)ro]

Pezzo breve, questa volta: parliamo di poche cose, ma che fanno un mucchio di cose.

Lo scrivente (che è sempre il solito) spera di essere ormai riuscito a convincervi che in un triangolo ci sono più punti *interessanti* che punti, e che la cosa andrebbe in un qualche modo inserita nell'ambito del programma scolastico della scuola dell'obbligo. Persiste in noi (plurale majestatis) il vago dubbio che ci sia un motivo, per il quale la geometria debba fermarsi a Euclide, ma francamente non convince neppure noi: "*Che sia perché quella era in greco e latino, mentre il seguito era (ben che vada) in tedesco?*". No, non funziona: ci pare di ricordare che Boezio abbia tradotto in latino gli *Elementi* di Euclide *ignorando bellamente tutte le dimostrazioni*, e facendo quindi un lavoro piuttosto inutile. Non solo, ma siamo sempre in attesa del fatto che uno (quello più "classicoso") dei VadLdRM si decida a tradurre un pezzo intitolato "*Methodus Facilis Computandi Angulorum Sinus ac Tangentis tam Naturalis quam Artificialis*", anche se abbiamo poche speranze in merito[22]. Quindi, il problema resta aperto. E la trattazione, in merito, resta affidata ad emeriti incapaci (*c'est nous*).



9 …*And then, a miracle happens*…

Torniamo a qualcuno dei punti "facili": nel caso specifico, proviamo a considerare il centro *H* delle altezze (o *ortocentro*), il centro *G* delle mediane (o *centroide*) e il centro *O* del cerchio circoscritto (o *circocentro*); in figura, per un triangolo, trovate i punti.

"Rudy, sicuro di non aver barato?" Sicurissimo. Al più [***SPOILER!***] ha barato un signore di nome Eulero.

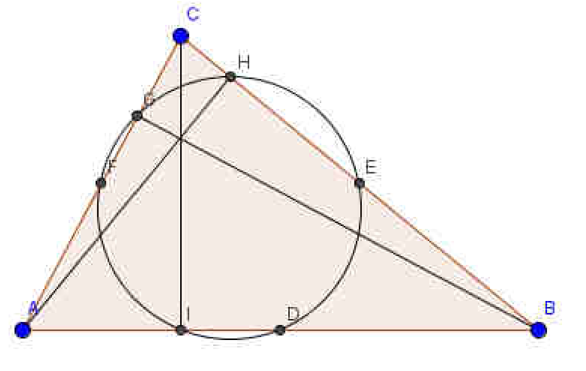
Infatti, a lui si deve la dimostrazione che *questi tre punti sono sempre* (tranne nel caso del triangolo equilatero, per il quale coincidono) *allineati*.

Ora, siamo d'accordo che la cosa risulti piuttosto strana; non solo, ma la dimostrazione con i metodi "euclidei" è decisamente complessa, e anche il buon Leonhard ha faticato notevolmente nella dimostrazione. Noi non abbiamo provato, ma a occhio e croce, si potrebbe provare attraverso la *geometria analitica*: probabilmente, questa è la dimostrazione più semplice[23]. E, se qualcuno vuole provare a trovare i *luoghi geometrici di un qualchecosa*, tenendo fisso qualche pezzo e facendo variare qualche altro, saremmo di sicuro interessati.

Se la frase qui sopra vi sembra un'asinata, potremmo anche essere d'accordo; ma i Grandi non si perdono d'animo, ed Eulero è riuscito a dimostrare che il centroide *G* non solo è collineare, ma *triseca il segmento HO*. E scusate se è poco...

[22] L'autore non ve lo diciamo, ma sarà evidente prima della fine di questo pezzo. Comunque, *Ms. E128*. Ecco, se qualcuno volesse darsi da fare...

[23] *Disclaimer*: come già detto, e qui reiteriamo, parliamo da ignoranti: è un'ipotesi, la nostra.



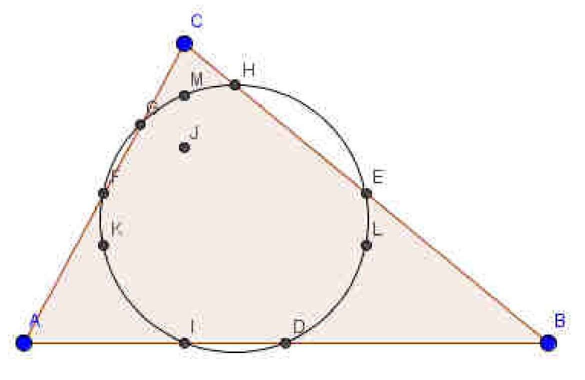
10 *Due cerchi. Anzi, uno.*

I punti collineari, in realtà, sono anche altri: non stiamo a disegnarveli, ma potreste provare a dimostrare (noi come sopra consigliamo la geometria analitica, ma *your mileage may vary*) che anche altri punti sono collineari: giusto per tirare in ballo qualche nostro vecchio amico, il *Punto di Nagel* (cfr PM202: quello che abbiamo sudato a trovare[24]) è allineato con l'*incentro* e con il *centroide*. Qui, ha l'aria di esserci un mucchio di lavoro interessante, con un punto che si trova su due rette diverse. Come si muovono, al variare di *qualcosa*, le due rette e i vari punti?

La collinearità sarà sicuramente una caratteristica interessante, ma anche la *non-collinearità* può dare dei risultati; quando avete tre punti non collineari, di sicuro potete definire un cerchio[25] e, se riuscite a trovare qualche altro punto "interessante" che si trovi sullo stesso cerchio, la cosa può assurgere al livello di teorema: qui, il record potete decidere se attribuirlo al genio di Eulero o alla potenza del lavoro di gruppo, ma il risultato è comunque interessante. Cerchiamo di procedere con calma e con metodo, visto che la situazione è piuttosto complicata.

I punti medi dei lati di un triangolo, non essendo evidentemente collineari, vi permettono di definire un cerchio; per la stessa ragione, i tre piedi delle altezze definiscono un cerchio, ma dobbiamo aspettare il 1765 perché Eulero riesca a dimostrare che questi due sono lo stesso cerchio, come si vede in figura: i punti D, E ed F sono i punti medi dei tre lati, mentre i punti G, H ed I sono i piedi delle tre altezze (che abbiamo lasciato indicate). Grazie al valido aiuto di GeoGebra, ci è bastato chiedere di tracciare il cerchio passante per i primi tre, e il secondo è arrivato gratis: anche in questo caso, la dimostrazione sarebbe cosa gradita, fateci sapere.

Adesso, la faccenda si complica: infatti, dobbiamo aspettare il 1820 perché ***Brianchon*** e ***Poncelet*** pubblichino un articolo nel quale discutono di tre ulteriori punti del triangolo: il loro interesse volge verso i tre punti definiti per ogni altezza come il punto medio tra l'ortocentro e il vertice di partenza: per lo stesso triangolo qui sopra, li vedete indicati nella figura a fianco, indicati come K, L ed M (J è l'ortocentro). Come ci si aspettava, sono anche loro sullo stesso cerchio di prima. E qui nascono i problemi filologici.



11 *Altri tre punti, ma continuiamo a girare in tondo.*

Dopo una scoperta del genere ci si aspetta che tutti gli strilloni dell'epoca affollino le strade al grido di "*Edizione straordinaria! I punti di Brianchon e Poncelet sono sul cerchio di Eulero!*". E invece no.

[24] Un grosso GRAZIE! A tutti quelli che ci hanno spiegato come disegnare i cerchi exscritti.

[25] ...e questo è *interessante* solo in un vecchio pesce d'aprile matematico che io e Doc ci portiamo appresso da svariati anni, ancora con un certo successo.

I nostri due geometri, in un impeto di modestia, chiamano i tre punti appena ottenuti *Punti di Eulero* e questi, trovandosi sul *Cerchio di Eulero* (quello dei sei punti trovati da Eulero) trasformano quest'ultimo nel *Cerchio dei Nove Punti di Eulero*.

E non è finita qui (ma questa ve la raccontiamo solo, per motivi che vi saranno evidenti nel seguito: niente disegno).

Due anni dopo (quindi nel 1822), ***Karl Wilhelm Feuerbach*** pubblica un lavoro sui tre cerchi exscritti e il cerchio inscritto in un triangolo: questi cerchi hanno in comune svariate cose, non ultima la definizione, infatti sono cerchi tangenti ai *tre lati* del triangolo (in tre di questi si tratta di prolungamenti, ma non staremo a sottilizzare). Il risultato che trova, senza le premesse precedenti potrebbe sembrare abbastanza insignificante: infatti, dimostra che *Il cerchio passante per i piedi delle altezze è tangente ai quattro cerchi dati*.

Essendo i cerchi dati quattro, si arriva all'interessante conclusione che *Il Cerchio dei Nove Punti di Eulero contiene Tredici Punti Notevoli*. Fortunatamente, Feuerbach si tiene ben stretto i suoi punti di tangenza e quello scritto sopra, noto come ***Teorema di Feuerbach*** a quanto ci risulta è l'unico risultato importante da lui raggiunto nella sua non lunga vita (1800-1834).

Il Cerchio di Eulero può sembrare una divertente mostruosità matematica, ma riesce ad avere alcune interessanti caratteristiche alla cui dimostrazione potreste impegnarvi:

1. Il centro del Cerchio di Eulero è il punto medio del segmento congiungente l'ortocentro al centro del cerchio circoscritto al triangolo;
2. ...quindi, il centro del Cerchio di Eulero è sulla Linea di Eulero *[...e poteva essere altrimenti?]*.
3. Il raggio del Cerchio di Eulero è la metà del raggio del cerchio circoscritto;
4. ...quindi, tutti i triangoli inscritti nello stesso cerchio e aventi lo stesso ortocentro, hanno lo stesso Cerchio di Eulero.
5. Le tangenti al Cerchio di Eulero nei punti medi dei lati del triangolo sono parallele ai lati del triangolo ottenuto congiungendo i piedi delle altezze;
6. ...quindi, le medesime tangenti sono parallele alle tangenti al cerchio circoscritto nel vertice opposto al lato in oggetto.

E poi basta, che fa tutto lui (peggio di Eulero)!

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms