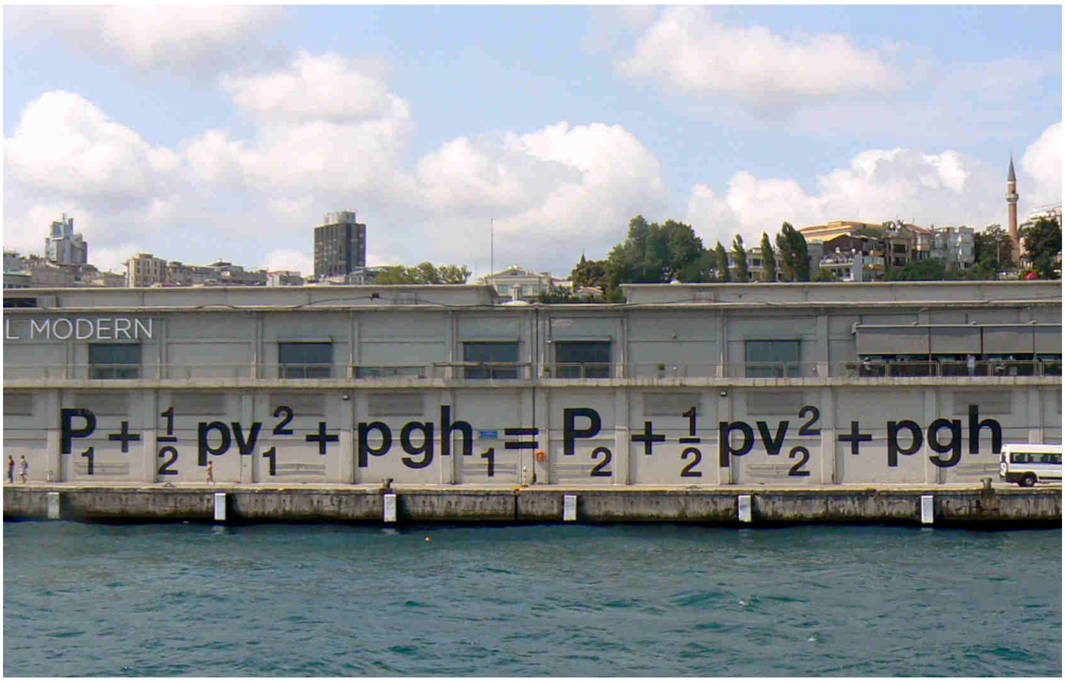
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 201 – Ottobre 2015 – Anno Diciassettesimo



Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM200 ha diffuso 3'003 copie e il 03/10/2015 per Google eravamo in 8'420 pagine.

Nonostante disperate ricerche in rete, non siamo riusciti a trovare quale sia la "***formula più grande del mondo***". Dubitiamo di essere stati così fortunati di incapparci per puro caso durante le vacanze estive, ma resta il fatto che la formula nell'immagine ha davvero dimensioni di tutto rispetto (e sì, confermiamo: si tratta proprio di una "foto delle vacanze" di uno dei redattori). Il lettore è pregato (a meno che non lo abbia scoperto vagolando sulla nostra pagina FB) di provare a scoprire sia il luogo ove la foto è stata scattata, sia la formula medesima, che è famosa anzichenò: indizi ce ne sono abbastanza già nella foto; aggiungiamo solo che, probabilmente, il lettore ha già trovato la formula con almeno una lettera greca, che invece qui è stata sostituita da una lettera dell'alfabeto latino. E siccome questo implica una certa diffidenza verso le cose elleniche, ecco che il suggerimento notazionale diventa anche un suggerimento geografico…

1. Confini

"Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet"[1]

Se c'è una cosa che la geografia e la geometria hanno in comune, sono i confini.

Certo, probabilmente è persino più evidente la parentela data dall'etimologia, o meglio ancora la persistente somiglianza, sia nel suono sia nel significato, dei nomi stessi: non per niente il prefisso "geo" riconduce entrambe le scienze tra le accoglienti braccia di madre Terra, e perfino le differenze articolate dai suffissi "metria" (misura) e "grafia" (scrittura) non sembrano particolarmente differenzianti: se si misura qualcosa, non vale la pena poi scriverne i risultati? E se si descrive qualcosa, non è necessario, per farlo in maniera compiuta, riportare anche dimensioni e misure dell'oggetto descritto?

Del resto, la tradizione vuole che la geometria sia nata essenzialmente per ragioni geografiche, cosa che riconduce entrambe, di fatto, ad una nascita comune: la necessità di ricostruire i campi dell'antico Egitto dopo le stagionali e benefiche inondazioni del Nilo. Una ragione quanto mai concreta, piena di necessità ed esigenze umane, come genitrice della più astratta delle scienze; ma è un bel salto qualitativo, quello che si perpetra nei secoli successivi: dall'estensione dei campi coltivati (c'è qualcosa di più pragmatico del cibo?) alle figure geometriche (oggetti puramente mentali) il passo non dev'essere stato affatto breve.

Resta il fatto che sono i confini, in entrambi i casi, a rendere maneggevoli, praticamente e mentalmente, sia gli appezzamenti di terra che le figure geometriche: e nel caso specifico di quest'ultime, che sono solo forme prive di contenuto, ne definiscono di fatto tutta l'essenza.

Nel caso dei confini reali, quelli marcati su terra, la loro importanza è sempre cruciale, ma variabile come lo è la natura umana. In questi tempi, i confini sono tornati drammaticamente di moda: in Europa, negli scorsi decenni, si sono fatti dei tentativi per cancellarne un buon numero, ma recentemente c'è stata una brutale inversione di tendenza. Le linee immaginarie che separano stato da stato stanno acquistando una concretezza drammatica, con muri costruiti in fretta per dare consistenza fisica e reale a quelle linee che fino a pochi anni fa sembravano destinate a diventare solo virtuali e relegate in vecchie carte geografiche. Dal punto di vista matematico, è come se una leggera linea monodimensionale, disegnata con tratto leggero su una superficie bidimensionale, decidesse improvvisamente di alzarsi lungo l'asse zeta, per assaporare l'ebbrezza della consistenza spaziale fino a poco prima negatale; dal punto di vista umano, non è altro che l'ennesimo tentativo di differenziare, separare, distinguere. Tutte azioni che, quasi inevitabilmente, producono una bella messe di sofferenze.

A ben vedere, è perfino curioso come diversi concetti si siano storicamente evoluti per portare a una situazione del genere. Viviamo in tempi in cui tutte le terre emerse del pianeta sono accuratamente attribuite, senza più nessuna zona (a parte forse la molto teorica sopranazionalità dell'Antartide) che non sia riconducibile ad uno stato sovrano. Gli stati sono quindi proprietari di territori, e fanno uso abbondante di confini ben marcati atti a separare gli uni dagli altri. Territori che, anche grazie a questa ben definita separazione geografica, sono riconducibili a nazioni, popoli, governi, al punto che tutta una serie di concetti assai diversi tra loro (nazione, stato, territorio) tendono ormai a sovrapporsi nell'immaginario collettivo, e a suonare come sinonimi.

In realtà, la suddivisione del mondo in "stati nazione" ai quali dovrebbe corrispondere una sorta di comunanza etnica, linguistica, o magari anche culturale e religiosa, è un'invenzione abbastanza recente. Il termine stesso di "nazione" ha una storia ambigua e

[1] Ma che c'entra? C'entra davvero? No, non tanto. O meglio, solo un po'. Ma un po', appena un po', sì…

travagliata: curiosamente, nell’antichità recava con sé un significato, se non proprio negativo, quantomeno seriamente distintivo. Nella Bibbia si parla di “nazioni[2]” non tanto per definire il Popolo Eletto, ma gli “altri”, i popoli non-ebrei. Nell’Antica Grecia, ogni città rivendica una sua propria specificità, e il concetto di “nazione greca” non prende forma se non quando l’intera Ellade viene minacciata dall’Impero Persiano: e anche in quel caso di particolare emergenza non è che lo spirito nazionale si affermi poi in maniera matura e duratura. Peggio ancora per quel che riguarda l’antica Roma: è qui che nasce il termine “nazione” vero e proprio, con riferimento diretto (“*natio*”) al luogo di nascita, ma è un termine usato esclusivamente per riferirsi ai popoli esterni all’Impero, insomma riservato alle sole “nazioni barbare”. Non esiste il concetto di “nazione romana” perché Roma è l’*Urbs*, la città; o più direttamente la *civitas*, che poi genera il termine civiltà; o, più esplicitamente ancora, la “*patria*”.

1 *La “nazione” greca ai tempi d’Omero*

Già, patria: un altro termine quasi sinonimico, ma ad altissima connotazione emotiva, che pertanto viene spesso chiamato in causa nelle emergenze: sempre, inevitabilmente quando tira aria di guerra, ma talvolta torna buono anche per giustificare l’erezione di muri sui confini per impedire che dei disperati fuggitivi entrino nel territorio nazionale, che rapidamente assurge al titolo di “sacro suolo patrio”.

Il punto è, probabilmente, che i concetti che concorrono nella piena definizione di frasi apparentemente naturali e innocue come “sono italiano”, “i francesi sono simpatici”, “non mi fido dei messicani” sono talmente tanti e complicati – e spesso contraddittori – che sarebbe auspicabile (anche se probabilmente irrealizzabile) una revisione generale con metodologia matematica delle proprietà e degli attributi di ogni concetto. Anche perché non esiste virtualmente relazione logica tra i concetti coinvolti che non abbia, nel mondo reale, qualche evidente eccezione.

[2] O quantomeno si usa un termine che, con un certo grado di approssimazione, può essere ricondotto a quello di “nazione”.

L'approccio ingenuo presuppone che, nel definire le caratteristiche di appartenenza di una persona, siano verificate una serie di coincidenze: dire che Manuel è spagnolo implica, in prima approssimazione, che sia nato in Spagna, che la Spagna abbia un territorio, che questo territorio e i suoi abitanti siano regolamentati da leggi comuni, organizzati in qualche forma amministrativa, che condividano aspetti culturali fondamentali come la lingua, gli usi, un certo numero di valori etici, eccetera, eccetera, eccetera. Tutte cose che in qualche modo finiscono col darci di Manuel un'immagine ricca, anche se quasi certamente fallace in molti punti. Del resto, ognuno di questi aspetti concettuali è talmente complicato da risultare l'argomento centrale di una messe di corsi di laurea, dal Diritto Internazionale all'Antropologia Culturale, passando attraverso la Storia, l'Economia, le Scienze Politiche e un'altra mezza dozzina di facoltà universitarie. Ma resta il fatto che l'idea ingenua di mettere in relazione biunivoca un Popolo con una Nazione, uno Stato, un Governo, una Lingua, una Cultura e magari anche con una Religione, è assolutamente inefficace.

Esistono popoli senza territorio; la storia è piena di popolazioni nomadi. Esistono popoli che hanno un territorio, e forse questo potrebbe bastare, insieme all'identità culturale, linguistica ed etnica, a definirli "nazione", ma che non sono uno Stato: curdi, tibetani, palestinesi e decine di altre comunità umane rivendicano ancora oggi il diritto di assurgere ad entità statali. Esistono stati evidentemente sovranazionali, e un tempo erano la maggioranza: tutti gli imperi del storia, per definizione, sono tali. Esistono lingue comuni a più nazioni e stati, e molti stati che hanno più d'una lingua ufficiale. Esistono stati che non si pongono minimamente il problema del culto dei propri cittadini, e stati teocratici in cui la religione è totalmente identificata con la legge dello stato, al punto che questo trova la sua ragione fondante proprio nella religione. Esistono stati che sopravvivono serenamente per anni senza governo, e stati in cui due o più autorità si proclamano detentori dell'autentico potere esecutivo. Esiste perfino almeno uno stato, la Città del Vaticano, che in una certa misura si può ragionevolmente definire uno stato senza popolo, visto che tutti i suoi abitanti nascono presumibilmente fuori dai suoi confini, e per la maggior parte di essi non si prevede una naturale discendenza atta a modificarne l'andamento demografico.

La storia è piena di "nazioni" che erano tali prima ancora di diventare stati: Italia e Germania erano parole pregne di significato anche prima della seconda metà dell'Ottocento, quando diventano stati unitari; e in quello stesso periodo era però ben evidente la differenza tra stato e nazione. Le pulsioni nazionali che hanno generato il Risorgimento erano viste come fumo negli occhi da parte di Francesco Giuseppe d'Austria, che era a capo d'un immenso impero formato da tanti popoli e tante etnie diverse, e non risultavano tanto simpatiche neppure a Karl Marx, che vedeva nella formazione degli stati nazionali uno dei maggiori ostacoli alla formazione di comunità proletarie accomunate dal ruolo sociale, e non dal luogo di nascita o residenza, al punto di chiamare

2 Le "nazioni" dell'Impero Austro-Ungarico nel 1911[3]

---

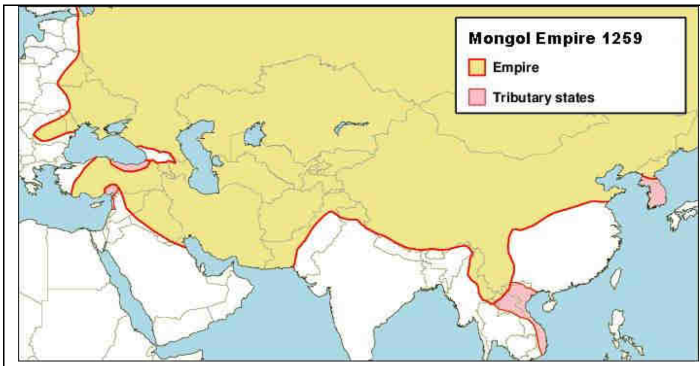
[3] Per quelli che si chiedono: ma nel 1911, il Piave non era linea di confine? No, il Piave che mormorava il 24 maggio non è stato confine, il 24 maggio. Il confine era sempre dalle parti dell'Isonzo. Diventa "fronte", e quindi in un certo senso confine, solo dopo Caporetto, quando gli austriaci si prendono il Friuli e mezzo Veneto. Tant'è che nella prima guerra mondiale il motto era "Trento e Trieste devono essere italiane!", mica "Trento, Trieste, Udine, Pordenone, Conegliano, Monfalcone devono essere italiane!"

"Internazionale" la sua più significativa creatura politica.

Sia come sia, la Storia del ventesimo secolo ha finito con il far sedimentare confini nazionali – o quantomeno statali – su tutto il pianeta: in parte per decisioni politiche, come la volontà degli USA dopo la Prima Guerra Mondiale; o storiche ed economiche, come la fine degli imperi coloniali; o per altre mille ragioni altrettanto significative.

Così, i confini resistono. Probabilmente, è proprio la loro maneggevolezza a garantirne la longevità. I contadini egiziani misuravano con gli occhi i loro campi, i re misuravano le dimensioni dei loro regni sulla distanza che dovevano percorrere i loro feudatari, e in qualche modo trattavano quei dignitari come confini umani: non è un caso se le province più remote d'un regno venivano chiamate "marche" e "marchesi" i nobili che le controllavano; un confine va ben segnato, marcato. Con una "marca", appunto.

La maneggevolezza dei confini implica anche una caratteristica che non è probabilmente evidente ad un primo sguardo, e che spietatamente segna un'ulteriore curiosa relazione tra geografia e geometria: la facilità di utilizzo della gomma per cancellare. Naturalmente, le guerre sono la gomma più efficace per cancellare i confini: a cavallo tra Duecento e Trecento, lo strapotere mongolo di Gengis Khan e dei suoi figlioli aveva di fatto ripulito l'intera Asia dalle fastidiose linee di demarcazione, ma a volte non sono neppure necessari troppi spargimenti di sangue.



3 *Impero Mongolo*

La povera Polonia, dal punto di vista meramente geometrico, ha avuto una quantità di disavventure: complete sparizioni (che, in ambito storico e geopolitico, vengono crudelmente e asetticamente chiamate "spartizioni", e la singola lettera supplementare ricorda come le "sparizioni" erano dovute a Prussia, Russia e Austria che, di concerto, l'hanno sbocconcellata); rinascite, ridimensionamenti (a volte su territori neanche connessi) e infine addirittura delle traslazioni, quasi a voler ribadire come persino il più stabile dei concetti coinvolti, il territorio, possa all'occasione mostrare di non essere affatto un punto fermo e solido.

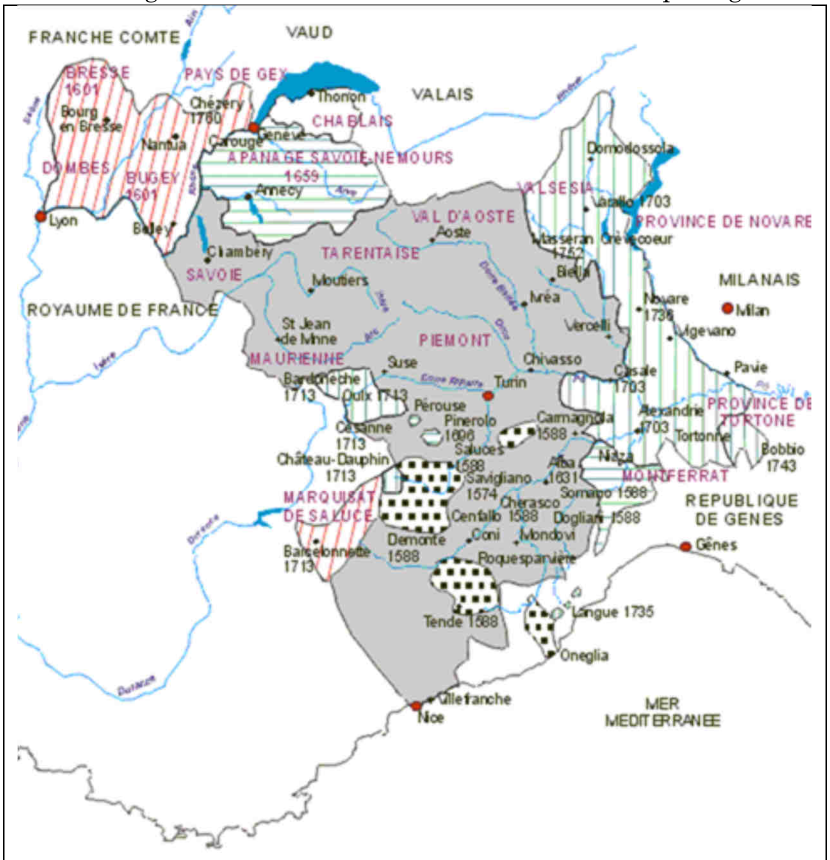
Le ragioni politiche riescono anche a violare gli altri elementi che dovrebbero garantire quell'unità etnica e culturale che, almeno in teoria, dovrebbero costituire gli elementi fondanti di una nazione. Un popolo di montanari che si trova a suo agio tra le vette innevate e con tutti gli usi e costumi che un paesaggio alpino comporta, difficilmente riuscirà a trovare un'identità culturale con un popolo marinaro che trae il suo sostentamento dai traffici marini e dalla pesca. Se il concetto di "cultura nazionale" fosse davvero così forte e pregnante, sarebbe lecito aspettarsi che le catene montuose, anziché essere usate come "confini naturali", dovrebbero finire per essere elemento aggregante tra i due versanti delle montagne, e contribuire alla distinzione tra "popoli di montagna" e "popoli di pianura"; tanto più se da entrambe le parti della catena montuosa si parla la stessa lingua, magari diversa da quella parlata in pianura.

Da questo punto di vista, è significativa la storia – ma forse ancor più la geografia – di uno stato che ha avuto un'importanza cruciale nella storia d'Italia. La Savoia è inizialmente un territorio che non bada troppo ai confini naturali: si estende sia nelle regioni cisalpine che in quelle transalpine, tracima nelle pianure italiane e in quelle francesi, e si permette persino di arrivare fino al mare, dalle parti di Nizza.

Tutto comincia con Umberto Biancamano, conte di Moriana, a cavallo tra il primo e il secondo millennio: il nostro riesce a schierarsi bene nelle lotte dinastiche tra i vari re e imperatori, e in premio ottiene nuove terre e la benevolenza di Corrado II di Germania. Le terre sulle quali impera acquisiscono così la natura di "contea" a tutti gli effetti e il nome “Savoia” assurge a dinastia; a differenza di quanto si tende talvolta a credere, la sua dipendenza formale è quindi verso il Sacro Romano Impero, e non verso il Regno di Francia. Seguono quattrocento anni di eventi complicati e contorti come solo i secoli medievali sanno produrre, e il passo successivo, dal punto di vista della denominazione del territorio, avviene nel 1416 con l’elevazione a Ducato. Il protagonista della promozione è Amedeo VIII detto il Pacifico, figlio dell’assai meno pacifico Conte Rosso.

Fino al 1847 la Savoia resterà formalmente un ducato, ma in realtà è fin dal 1720 che ha acquisito un intero regno, quello di Sardegna. Carlo Alberto nel 1847 afferma la totale identità tra la parte insulare e quella ducale del suo territorio, e poiché è più prestigioso essere re che duca, chiamerà in via definitiva i suoi possedimenti col nome di Regno di Sardegna. In poco più d’un decennio, quel piccolo domino crescerà fino a trasformarsi in Regno d’Italia, ma è evidente che casa Savoia tiene molto al suo titolo originario, se Vittorio Emanuele, primo Re d’Italia, non cambierà il suo numero ordinale “Secondo”, che numera i nomi dei Re di Sardegna, per passare al “Primo” al quale avrebbe diritto, come re italiano.

Fin dalle elementari gli scolari italiani sanno bene che, per poter estendersi in tutta l’Italia, i monarchi sabaudi hanno però dovuto rinunciare a tutti i loro domini d’oltralpe. “Nizza e la Savoia” passano a Napoleone III, in cambio dell’aiuto cruciale nelle battaglie del Risorgimento[4]. È curioso e significativo sia il fatto che entrambi i protagonisti dell’incontro di Teano abbiano costruito una patria rinunciando ai loro territori d’origine, essendo Garibaldi nizzardo e la casata Savoia originaria dei territori transalpini, sia il fatto che per “Savoia”, almeno dal punto di vista geografico, già a quel tempo si intenda ormai solo quella parte del feudo originario situata in territorio francese.



4 *La migrazione geografica della Savoia*

Il guadagno però è grande: l’intera penisola, tutta dentro quelli che una volta si chiamavano “confini naturali”. In verità, anche il concetto di confini naturali è un po’ una mezza truffa nazionalistica: lo spartiacque alpino non coincide né con i confini politici del vecchio Regno d’Italia, né con quelli attuali della Repubblica Italiana: sono italiani alcuni territori transalpini (il Sudtirolo), sono straniere delle terre cisalpine (il Canton Ticino), per non parlare di elementi di difficile collocazione geografica, come l’Istria. Ma forse è nelle isole la maggiore distonia: la Corsica francese è stata vissuta a lungo come un vero e proprio furto, visto che è più vicina all’Italia che alla

[4] Definirlo “aiuto” è in realtà un po’ riduttivo: a parte quelli italiani, quasi tutti gli storici chiamano “conflitto franco-austriaco” quella che noi ci ostiniamo a chiamare “Seconda Guerra d’Indipendenza”.

Francia: ma quelli che con più veemenza sostengono la "ragione della prossimità" dimenticano sempre di citare la Sardegna, che se tale principio valesse dovrebbe essere tunisina, visto che la distanza tra Capo Teulada e l'Africa è minore di quella che c'è tra Olbia e Civitavecchia.

In realtà, comunque, la "migrazione" della Savoia verso la penisola comincia assai prima del periodo risorgimentale. La principale piazza di Torino, piazza San Carlo, celebra con uno dei monumenti più famosi della città il duca Emanuele Filiberto, che nel 1563 spostò la capitale da Chambery a Torino: era già un'azione evidentemente programmatica, che poneva la parte italiana del Ducato al centro degli interessi della casata. Ma se Chambery resterà sabauda ancora a lungo, già nel 1601 le propaggini più occidentali della Savoia si perdono. Durante tutto il sedicesimo secolo il Ducato toccava Lione, oltre a giungere fino a Ginevra, ma sotto Carlo Emanuele I, che pure riesce ad allargare i confini ducali con le acquisizioni del Monferrato e di Saluzzo, il trattato di Lione sancisce definitivamente il passaggio al regno di Francia delle regioni della Bresse, del Bugey, del Valromey e del Gex.

Ed è quindi proprio all'inizio del diciassettesimo secolo che la città di Bourg-en-Bresse, capoluogo della regione omonima, cessa di essere connazionale della città di Torino. Di questa perduta fratellanza potrebbe esserci ragione di dolersi: la cittadina, di quarantamila abitanti, è graziosa e sembra accogliente, e vanta figli illustri. Il più noto è forse Jérôme Lalande, che a Bourg vide la luce nel 1732: pur facendo l'avvocato, Lalande risulterà essere tra i maggiori astronomi del suo tempo, autore di uno dei più monumentali cataloghi stellari e andando davvero vicino alla scoperta di Nettuno. Ma il grande astronomo non è l'unico cittadino di cui Bourg-en-Bresse può andar fiera.

5 *Claude Gaspar Bachet de Méziriac*

Vi nacque anche, il 9 ottobre 1581, Claude Gaspar Bachet de Méziriac. A conferma dell'altalenarsi dei poteri in quella regione, il nonno paterno, Pierre, era un consigliere del re di Francia, Enrico II, mentre il padre, Jean, era un consigliere del Duca di Savoia. Se si aggiunge che la madre, Marie de Chavanes, era di nobili origini, è facile concludere che il piccolo Claude non era certo nato in ristrettezze economiche. Ma, per quanto importanti, le fortune e i beni materiali non sono tutto: alla tenera età di sei anni Bachet perde sia la madre sia il padre, e si ritrova pertanto sotto le cure dei Gesuiti. La Compagnia di Gesù lo istruisce, e lo fa viaggiare tra Lione, Padova e Milano: quando scocca l'anno fatidico 1601, in cui il suo borgo natio passa definitivamente alla Francia, Claude prende gli ordini ed entra nell'Ordine.

Non ci resta molto a lungo, però: pur essendo nel fiore degli anni, viene colto da una lunga malattia, e già nel 1602 lascia l'abito talare. I suoi possedimenti a Bourg-en-Bresse sono abbastanza ricchi da garantirgli una rendita considerevole, e in buona sostanza Claude Gaspar si stabilisce definitivamente nella sua città natale: salvo un breve periodo a Parigi e a Roma, e uno ancora più breve a Milano, non lascerà più Bourg per tutta la vita.

Si sposa tardi, quasi quarantenne: ma riesce comunque a dare al mondo sette figli, a dimostrazione della sua vita agiata e tranquilla. È molto amico di Claude Favre Vaugelas, una figura centrale della lingua e letteratura francese: è un periodo in cui le lingue nazionali devono ancora assestarsi, e Vaugelas è uno dei più solerti normalizzatori del francese. L'Académie Française, che nasce proprio con la missione di salvaguardare, proteggere e diffondere la lingua transalpina, fa proprie le osservazioni e direttive di Vaugelas; e buona parte di queste sono il frutto dei dialoghi che i due Claude, Vaugelas e Bachet, tengono con regolare assiduità. L'Académie viene istituita da un decreto del cardinale Richelieu nel 1634, e certo non stupisce che un dei suoi quaranta seggi (il numero 32) abbia proprio Vaugelas come primo occupante della storia. È forse però più sorprendente notare che il seggio numero 13, quello su quale sedette Racine, quello che in questi giorni è riservato a Simone Veil, ebbe come primo ospite proprio Claude Gaspar Bachet[5].

Essere tra i primi accademici di Francia dovrebbe essere sufficiente a ben definire gli interessi principali del soggetto: Bachet era innanzitutto un uomo di lettere, uno scrittore di versi, un filologo, un poeta; persino un traduttore. Scrisse poesie in francese, italiano e latino. Tradusse Salmi della Bibbia e le epistole di Ovidio; pubblicò un'intera antologia di poesia francese, "*Délices*"; e, inevitabilmente, era anche molto religioso, come mostra la sua storia e formazione, e scrisse una raccolta di canti religiosi, la "*Chansons dévotes et saintes sur toutes les principales fêtes de l'année*".

Un letterato a tutto tondo. Ma non soltanto un letterato; al punto che, al giorno d'oggi, il suo nome è probabilmente ricordato più spesso (e meglio) dai matematici che non dagli uomini di lettere.

In un ipotetico processo in cui i cultori della Matematica Ricreativa, per definizione i matematici meno seri di tutta la famiglia matematica[6], fossero chiamati dai veri matematici a giustificare il loro ruolo e perfino la loro esistenza, la linea di difesa più efficace sarebbe verosimilmente quella di richiamare alla mente dei giudici e dei pubblici ministeri la storia del più famoso tra tutti i problemi di matematica: l'Ultimo Teorema di Fermat. Cosa ha reso celeberrimo questo Teorema, che non per niente veniva chiamato "teorema" anche quando non era altro che una congettura? La sua importanza cruciale nello sviluppo della matematica? Ma neanche per idea; non è mica l'Ipotesi di Riemann, non ha neanche un centesimo del ruolo che ha l'Assioma della Scelta; il suo contenuto matematico, se non proprio fine a sé stesso, è oggettivamente di valore limitato. Però ha convogliato attenzioni e passioni per quattro secoli, indotto migliaia di distratti a dedicarsi alla matematica, fatto versare i proverbiali fiumi di inchiostro, creato dal nulla centinaia di libri, appassionato grandi e piccini, professionisti e dilettanti. E tutto questo, perché?

Si dovrà convenire che tutto sta nella sceneggiatura[7]: nel porre la questione come fosse un indovinello, nel raccontarla senza davvero raccontarla, nell'usare le tecniche del thriller, nel confondere volutamente le acque. In altre parole, tutto sta nel fatto che il vecchio Pierre de Fermat ha presentato la sua congettura alla stregua di un indovinello di matematica ricreativa. L'annotazione a margine dell'Aritmetica di Diofanto, l'apparente disdetta di non avere un margine abbastanza ampio per riportare la dimostrazione/soluzione, l'utilizzo del latino che ha un fascino intellettuale e una capacità di sintesi negata a tutte le lingue volgari: "*Hanc marginis exiguitas non caperet…*". Insomma, se si sono affannati per quattrocentocinquant'anni scienziati e calzolai, se un matematico vero come Wiles è diventato famoso e lo resterà in eterno, se è impossibile parlare per più di dieci minuti di storia della matematica senza citare l'UTF, il merito (o

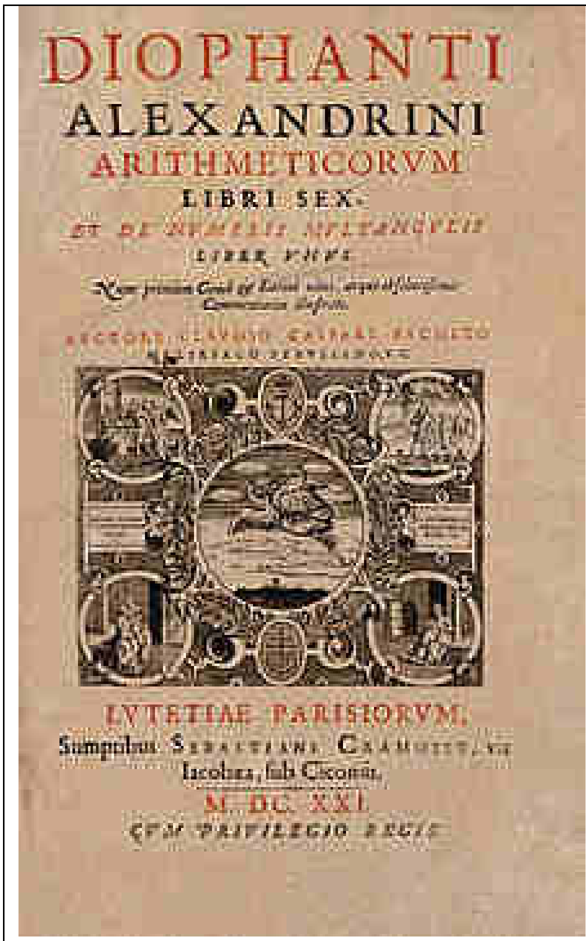
[5] La sua salute, evidentemente assai cagionevole, gli impedì la soddisfazione di partecipare alla cerimonia di inaugurazione presieduta da Richelieu.

[6] …e, a dirla tutta, spesso neanche matematici in senso stretto, come dimostrano grandi nomi come Martin Gardner e miseri arruffoni che non citeremo per innata modestia.

[7] Sceneggiatura che abbiamo ovviamente già raccontato in "Polenta d'estate", RM091.

la colpa) è tutta del dilettantismo istrionico di Fermat, che da dilettante trasformava la matematica in ricreazione.

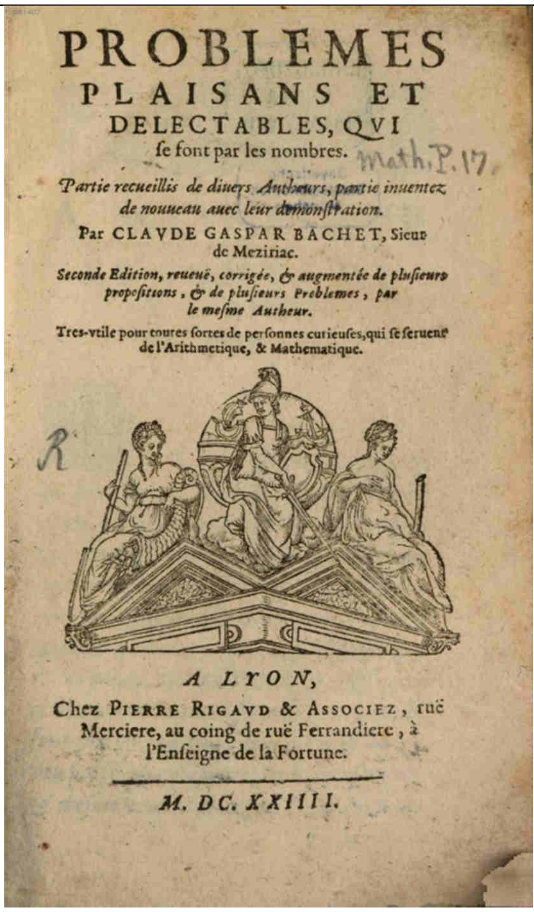
E se l'arringa in difesa della matematica ricreativa avesse successo, un po' del merito Fermat dovrebbe cederlo anche a chi rese l'Aritmetica di Diofanto disponibile ai saggi di quel tempo. L'opera di Diofanto, ovviamente in greco, sopravviveva grazie agli Arabi: in occidente era stata trattata solo approssimativamente; prima da Maximus Planudes, che commentò sommariamente solo i primi due libri; poi dal Bombelli, che riassunse i problemi diofantini dei primi quattro libri nella sua opera "Algebra"; e soprattutto da Wilhelm Holzmann, meglio noto con nome di Xylander, e finalmente, ma sempre parzialmente, da Stevino. Ognuno di questi interventi era incompleto o approssimato. Colui che finalmente rende pienamente in latino l'Aritmetica, arricchendola di un copioso commentario, correggendo errori dei primi traduttori e, soprattutto, arricchendo e completando le osservazioni dello stesso Diofanto, è proprio Claude Gaspar Bachet.



6 *Diofanto e Bachet per la gloria di Fermat*

Durante uno dei suoi soliti e tormentati attacchi di febbre, Bachet affronta Diofanto, corregge molti errori di Xylander, completa le vastissime omissioni, dimostra teoremi che lo stesso Diofanto si limita a citare, e giunge perfino a produrre qualche nuovo risultato teorico nella teoria dei Numeri. È su questa opera, finalmente completa, commentata e disponibile a tutti, che Pierre de Fermat si bea della lettura di Diofanto. È su una copia di questo libro, che scrive lamentandosi della ristrettezza del margine.

Ma la traduzione di Diofanto è soltanto uno dei meriti di Bachet, e in ultima analisi non è neppure il maggiore. Non era solo un letterato disposto a prestare le sue arti ai testi classici della scienza, era anche un vero appassionato. Da non professionista qual era, trovava divertenti alcuni problemi di natura matematica, specialmente quelli in cui i quesiti matematici potevano essere convertiti in problemi quotidiani: aveva una vera passione per i problemi con i pesi, ad esempio, ma non solo. Passione che prende forma in quello che è certamente il più famoso dei suoi libri, che egli mise alle stampe nel 1612. Il titolo originale è "*Problèmes plaisans et delectables qui se font par les nombres*", e la facile e immediata traduzione suona gioiosa agli orecchi dei cultori dei giochi matematici: Problemi Piacevoli e Divertenti che si fanno con i Numeri. Il titolo mantiene quel che promette: oltre ad una messe di problemi con pesi e bilance, vi si trovano trucchi da fare con le carte, utilizzo di numeri in base diversa da dieci, variazioni sui temi di attraversamenti come il classico di lupo, capra e cavolo, e naturalmente quasi tutto ciò che la giovane Matematica Ricreativa aveva prodotto sino ad allora, indovinelli sullo stile di Alcuino da York, i quadrati magici e la loro costruzione, il celebre problema di Giuseppe Flavio sulla terribile conta che erano costretti a fare Turchi e Cristiani, e così via.



7 *I “Problemi piacevoli e divertenti”*

Più ancora che il contenuto, quello che Claude Gaspar Bachet de Méziriac rende immortale è lo stile della narrazione: tutti i testi che possono essere classificati come appartenenti al genere della Matematica Ricreativa, nei secoli successivi, non faranno altro che seguire la struttura, lo stile, le regole implicite ed esplicite del trattato di Bachet. Non è esagerato affermare che, nonostante indovinelli matematici e giochi logici, numerici o geometrici fossero certo già presenti in letteratura, è proprio a Claude Bachet che si deve la creazione di un vero e proprio genere.

Letterato, poeta, accademico, e pronto a giocare con la matematica: e, a dire il vero, non solo a giocarci. Oltre alla traduzione di Diofanto, che è opera meritoria per la matematica *tout-court*, Bachet ha anche prodotto della matematica vera, di tutto rispetto. Come si è visto, la sua è assai più che una mera traduzione di Diofanto, e i suoi risultati nella Teoria dei Numeri sono del tutto originali. Al pari del suo più celebre lettore, enuncia anche una congettura “Ogni numero intero può essere scomposto nella somma di quattro quadrati, dei quali almeno due diversi da zero”. A dimostrarlo ci penserà, qualche secolo dopo, un altro savoiardo: Lagrange[8].

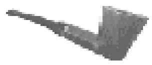
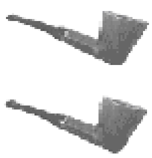
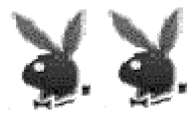
Ancora più significativo, forse, è l’approccio usato da Bachet nell’analisi delle equazioni indeterminate: in questo campo fu il primo ad utilizzare le frazioni continue[9].

Erano i primi anni del Seicento: a quel tempo, non c’era certo ancora l’annosa questione delle Due Culture, la divisone artificiale e artificiosa tra arti delle lettere e conoscenze scientifiche. La conoscenza era una sola, vasta e già incontenibile per un solo essere umano, ma almeno senza confini fittizi. Anche perché, ogni tanto bisognerebbe ricordarlo, i confini sono sempre e soltanto fittizi.

[8] Protagonista del primissimo “compleanno” di RM intitolato “Torino 1750”, RM048.

[9] Frazioni continue che, per combinazione, sono anche il soggetto del primo, storico numero dei Paraphernalia Mathematica, rubrica principe di questo giornalino. A questo punto si impone un riepilogo: nato nell’ex Ducato di Savoia; appassionato di matematica pur senza avere una laurea specifica della materia; legato a Fermat e soprattutto al suo margine; iniziali dei nomi che sono C e G, insomma, bene o male, GC; amante dei giochi matematici al punto da scriverci sopra un libro. Da bravi razionalisti, continuiamo a non credere nella reincarnazione o nella metempsicosi ma, se mai fossero un giorno dimostrate scientificamente, abbiamo in mente già un bel caso da sottoporre a test. Se poi consideriamo che Bachet ha preso gli ordini religiosi, e quindi, anche, se per un tempo limitato, è stato a tutti gli effetti un “clerico”…

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Anticipiamo la fine dell'anno			
Vagamente Orwelliana			

2.1 Anticipiamo la fine dell'anno

In realtà, ricicliamo un problema dell'anno scorso. Ma ve lo generalizziamo prima della fine.

Sapete tutti che Rudy è un avido e attento collezionista di pezzi da un centesimo: quelli italiani va sul quantitativo, per gli altri tende al qualitativo (insomma, la differenza tra *gourmand* e *gourmet*).

Recentemente, costretto da Paulette d'Alembert *(mia moglie, ormai dovreste saperlo [RdA])* a mettere ordine nella collezione, si è accorto di avere ben 40 euro e 29 centesimi in "pezzi italiani" da un cent; vogliamo sperare siate sobbalzati all'enunciazione della cifra, accorgendovi *illico et immediate* che è possibile organizzare due mucchi, uno da 2014 e l'altro da 2015 centesimi (capita adesso la faccenda dell'anno?).

Organizzati questi due mucchi, visto che tutti i vostri amici sono fuggiti non appena vi hanno visto fissare pensosamente le monete, procedete a giocare un solitario: avete due possibilità.

1. Levate lo stesso numero di monete da ciascuno dei mucchi
2. Raddoppiate il numero delle monete da uno (a scelta vostra) dei gruppi.

...a questo punto la famiglia, che sarebbe intenzionata a cenare, vi chiede di sbarazzare il tavolo di tutte le vostre asinate, e voi vi chiedete se, seguendo le due regole enunciate, ce la farete mai.

OK, questo era facile. Ma se la seconda regola vi chiedesse di *triplicare* le monete?

Facile generalizzazione: se avete due mucchi *m, n* di monete, e la seconda regola vi chiede di *k*-uplicarle *[Siamo dolorosamente consci che come verbo fa schifo, scusate]*, quale regola deve legare i tre parametri perché il gioco sia fattibile? OK, basta risolvere l'ultimo e li avete risolti tutti... ma forse qualcuno preferisce procedere *lento pede*...

2.2 Vagamente Orwelliana

Nel senso che c'entra 1984. "Vagamente" in quanto non riusciamo a connettere George Orwell al 62 (che autobus prendeva per tornare a casa? Nah, non può funzionare).

Questo problema (che abbiamo stiracchiato abbastanza da poterlo connettere a Orwell), nonostante noi non si riesca assolutamente ad ambientarlo, ci piace perché sembra costruito *al contrario*, rispetto ai problemi normali: quello che è di solito un dato iniziale manca, mentre viene dato quello che di solito è il risultato.

Tra tutte le combinazioni degli interi da 1 a n, presi a blocchi di 62, in media il termine maggiore vale 1984 *[Visto, che Orwell c'entrava?]*. Quanto vale n?

Oh, se non vi piace Orwell, potreste provare con Clarke... No, non abbiamo fatto il conto. Lo abbiamo buttato lì perché è l'unico che a quest'ora ci viene in mente con un numero nel titolo. Anzi, tre.

Visto che se non parliamo di noi non siamo contenti: a proposito di titoli, tempo fa Rudy e Doc avevano inventato un giochetto: "Se una notte d'*inverno* un viaggiatore", "L'*autunno* del patriarca", "La bella *estate*", ... e con la primavera nel titolo, non c'è niente?

Se volete farlo più difficile, provate con i mesi: noi ci fermiamo a "Dopo Marx, aprile". Non valgono i versi, altrimenti con Guccini avete la soluzione pronta, se siete abbastanza anziani. Un'altra possibilità è quella di trovare i numeri, nei titoli: "I ribelli dei cinquanta soli" *[Williamson? Non sono sicuro (RdA)]* vale, e la giochiamo noi. Voi trovate gli altri.

3. Bungee Jumpers

ABC è un triangolo retto in A, e AD è la sua altezza da A. Se E è il punto medio di DC e sull'estensione di AB da B prendiamo un punto F tale che $AB = BF$, mostrare che FD e AE sono perpendicolari.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Ottobre.

Come anticipavo il mese scorso, solo questo mese la rubrica delle S&N compie duecento numeri, e quindi è ora di festeggiare, per esempio con gli auguri che ci sono arrivati in diverse forme durante settembre. Una divertente è di ***Carmine***:

$$200 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 + (1 + 2 + 3 + 4) \times 5 + 1 + 2 \times 3 \times 4 + 5$$

Un numero rotondo, no? Un altro lettore, ***Giorgio***, ispirato dal problema del mese scorso sugli alberi genealogici, ci ha promesso un trattato sul sistema di numerazione delle genealogie ***Sosa-Stradonitz***, che speriamo di poter aggiungere presto al nostro Bookshelf (http://www.rudimathematici.com/bookshelf/bookshelfdb.php).

Nessuno ha commentato la copertina con effetto Droste, che ci è costata un bel po' di lavoro: l'idea era del Capo, che però quando l'ha vista sviluppata si è preoccupato che i lettori potessero pensare che dopo il duecento non ci sarebbe stato un altro numero. Non avendo ricevuto nessun commento, né positivo né negativo, andiamo avanti senza ulteriori preoccupazioni. Del resto i miei compari erano appena tornati dalla loro comparsa al congresso dell'UMI (http://umi.dm.unibo.it/congresso2015/), e le code di pavone per aver partecipato ad una tavola rotonda con la *crème de la crème* dei blogger matematici italiani fanno danni in giro per la nostra Redazione virtuale a distanza di un mese.

Rudy ha aperto due bottiglie di spumante: una perché alla fine del mese scorso era il compleanno del (MG)VAdLdRM, l'altra perché *finalmente qualcuno ha analizzato uno Zugzwang!* Solo la prima è stata bevuta in compagnia, ma della seconda ne parliamo alla fine.

Ma basta, parliamo di soluzioni, basta note.

4.1 [200]

4.1.1 Il triangolo di Laxap

Il primo problema del mese scorso era raccontato in maniera complicatissima, chissà se riesco a riassumerlo…

Ci sono tre tipi di pianta (A, B, C). Partiamo a porne una riga a disposizione casuale; a partire da questa, costruendo un "Triangolo di Pascal al contrario", si ottiene una seconda riga con una pianta in meno, secondo queste semplici regole:

1. *Se le due essenze al piano di sopra sono uguali, metti la stessa essenza;*
2. *Se le due essenze al piano di sopra sono diverse, metti la terza essenza.*

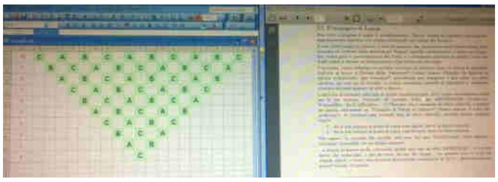
Andando avanti finché non si ottiene una sola pianta. Che struttura occorre dare alla prima fila per avere una determinata pianta al vertice del triangolo?

Divertente però l'idea, i ragazzi stanno crescendo veramente piantine, che producono effettivi chinotti. Prima o poi devo andare a vedere un torneo e il luogo mitico che da mesi ospita problemi geometrici di tutti i tipi… anche se adesso arriva l'autunno, e comincerà a fare freddino.

Bene, vediamo qualche soluzione. Cominciamo da ***Bluemonday***, che per fortuna non si scoraggia:

> Carino questo problema, ricorda un po' un automa cellulare. La stessa cosa mi spaventa alquanto dato che questo tipo di sistemi possono notoriamente diventare maledettamente complessi molto facilmente.
>
> Per tale motivo, se le uniche "*costraints*" sono che l'ultima riga debba essere l'essenza cercata e che la riga di partenza non sia la soluzione banale, ossia una ripetizione dell'essenza desiderata, possiamo risolvere facilmente (barando) in questo modo:
>
> Per ottenere l'essenza A si tronchi la stringa ABBACCABBACCABBA…, per la B si tronchi la stringa BCCBAABCCBAABCCB… e per la C si tronchi la stringa CAACBBCAACBBCAAC… , in modo da avere la stringa iniziale della lunghezza desiderata.
>
> In questo modo alla seconda "*evoluzione*" si otterrà un stringa composta da una alternanza delle due essenze diverse da quella cercata che darà infine nelle successive evoluzioni sempre l'essenza cercata.
>
> Quindi, pur avendo nascosto la ripetizione banale all'inizio, in questo modo la riotteniamo dopo solo due passi, il che spiega perché mi sembra di barare: forse quel che cercavate veramente era una soluzione generale che non comporti mai una ripetizione, tranne magari il penultimo passo?
>
> Questo mi sembra più complesso, lascio lo spazio agli altri solutori , certamente più pazienti e capaci :-)

Fior di Redattori sono arrivati a conclusioni simili, come si vede da una foto rubata grazie alle moderne tecniche di telefonia digitale, non saprei che cosa sia veramente facile. Del resto la soluzione di ***Alberto R.*** contiene parecchie critiche mica tanto velate:



> Aperta parentesi: *"...avete una graziosa disposizione triangolare di 10+9... Quarantacinque, giusto? Giusto, 45 piante.*" Giusto? Mica tanto! Chiusa parentesi.
>
> Con le regole assegnate, il boschetto triangolare con lati formati da file di 10 alberi ha una strana proprietà: ogni vertice è determinato soltanto dai due vertici sul alto opposto. Quindi l'essenza dell'ultimo albero che sarà piantato dipende dal primo e dall'ultimo albero della prima fila, gli 8 intermedi non contano nulla.

Oltre che per $N = 10$ questa strana proprietà vale anche per $N = 4$ e per $N = 28$. Ciò mi fa sospettare che valga per tutti gli N del tipo $3^k +1$, e mi piacerebbe tanto che qualcuno me lo confermasse e mi spiegasse il perché. Io non ne ho la più pallida idea.

L'esistenza di questi "numeri magici" 4, 10, 28, ... permette di trovare il vertice opposto di un grande bosco, data la prima fila, senza dover costruire l'intero triangolone. Supponiamo, ad esempio, di avere un bosco con la prima fila di 40 alberi, numerati da 1 a 40. Usando il magico 28 e combinando:

1-28 2-29 3-30 ... 13-40

otteniamo direttamente la 28esima fila composta di 13 alberi che numeriamo (*in corsivo*) da *1* a *13*. Abbiamo così trasformato il problema di trovare il vertice terminale di un bosco triangolare con lato 40 in quello di un boschetto di lato *13*. Adesso usiamo il numero magico 10 combinando in questo modo la prima fila del nuovo boschetto:

1-10 2-11 3-12 4-13

abbiamo così ottenuto la quartultima fila formata da soli 4 alberi. Ma, essendo 4 un numero magico, il vertice terminale si ottiene semplicemente combinando il primo e l'ultimo albero di questa fila.

In sintesi, il vertice terminale di un bosco lato 40 (adesso la numerazione è di nuovo riferita alla prima fila da 40) è

[(1-28) - (10-37)] - [(4-31) - (13-40)]

cioè dipende solo dal 1°, 4°, 10°, 13°, 28°, 31°, 37° 40° albero della prima fila.

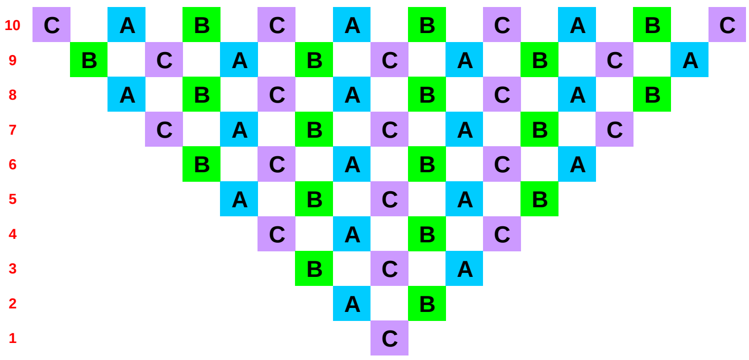
Se, ad esempio, le essenze di detti 8 alberi fossero rispettivamente C,B,B,C,B,C,A,B, l'albero al vertice opposto sarebbe

[(C-B) - (B-A)] - [(B-C) - (C-B)] = [A-C] - [A-A] = B-A = C

P.S.: A me, sessant'anni fa hanno insegnato il triangolo di Tartaglia. Non per sciovinismo, ma Pascal viene oltre un secolo dopo!

Il nostro caro ***Sawdust***, che non ha apprezzato di essere chiamato *veterano di RM* (ma ben pochi ci sopravvivono tanto a lungo e hanno ancora voglia di continuare a correggerci ed aiutarci...) ci scrive:

Senza stare a ripetere il testo del problema, ritengo che il procedimento più semplice sia quello di partire dal fondo, ossia dalla riga con solo il Chinotto. Ovviamente, visto che è già stata cassata in partenza l'idea di una piantagione di soli Chinotti, la riga successiva (o precedente?) sarà formata da una querciA e un giuseBbe. Procedendo in questo modo il risultato della piantagione sarà il seguente



Questo procedimento può chiaramente essere esteso all'infinito e da qui si vede che la piantina che compone la fila da un elemento ha delle sorelle al centro di ogni fila in cui le piante sono dispari, così come non ha sorelle tra i due elementi centrali delle file composte da un numero pari di piante.

Però le scelte iniziali possono essere varie. Partendo ad esempio da una disposizione come questa, che è anch'essa abbastanza neutrale,

```
A A B B C C A A B B
```

si perviene a questo risultato

```
10 A A B B C C A A B B
 9  A C B A C B A C B
 8   B A C B A C B A
 7    C B A C B A C
 6     A C B A C B
 5      B A C B A
 4       C B A C
 3        A C B
 2         B A
 1          C
```

che, oltre a ottenere sempre un Chinotto come unico rappresentante dell'ultima fila, ha la particolarità di presentare le file successive alla più lunga esattamente speculari rispetto alla disposizione presentata per prima.

Più strana ancora è questa formazione, partendo in questo caso da 15 piante,

```
15 A A A B B B C C C A A A B B B
14  A A C B B A C C B A A C B B
13   A B A B C B C A C A B A B
12    C C C A A A B B B C C C
11     C C B A A C B B A C C
10      C A C A B A B C B C
 9       B B B C C C A A A
 8        B B A C C B A A
 7         B C B C A C A
 6          A A A B B B
 5           A A C B B
 4            A B A B
 3             C C C
 2              C C
 1               C
```

Nella quale, in mezzo a tanti gruppi di 6 piantine uguali a quelli di partenza, si trovano gruppetti di 3 piantine diverse (evidenziate dalla lettera in colore rosso), disposte sempre in senso orario tra loro, che nelle stesse 2 file in cui si trovano ruotano in senso antiorario.

Non vi è venuta voglia di piantare chinotti? Non ancora? Peccato. Io personalmente ho un olivo, ma non credo che passerà l'inverno svizzero… almeno la sua foto su RM potrebbe restare più a lungo.

Però prima di fermarci vorrei passarvi la soluzione di ***BR1***:

> Tanto per non mancare la partecipazione al *glorioso N°200 della Rivista*, mi sono divertito un po' col *Triangolo di Laxap*; formulerei però le *regole del gioco* come segue (mantenendo intatte – così come sono state espresse nel testo del problema – quelle di composizione delle file del *Triangolo* successive alla prima):
>
> - Vi sono inizialmente N buchette nel *Campo dei Chinotti*, vuote ed allineate
> - Piotr e Rudy pongono a turno N alberelli nelle buchette – per costituire la prima fila del *Triangolo* – posizionandoli in una qualsiasi buchetta rimasta libera a loro scelta
> - Le altre N-1 file di alberelli successive nascono spontaneamente ed istantaneamente, non appena l'N_{mo} virgulto della prima fila viene piantato

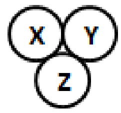
- Assumendo che i tre tipi di alberelli siano rispettivamente di colore rosso ●, verde ● e blu ●, il giocatore che inizia la piantumazione vince se l'ultimo alberello in basso, vertice finale del *Triangolo*, è rosso[10] ●
- Il secondo giocatore vince invece se l'ultimo alberello è verde ● o blu ●

La domanda a cui rispondere diventa allora: *esiste una strategia di posizionamento degli alberelli nella prima fila che consenta ad uno dei due giocatori di vincere? Se sì, quale?*

● ● ●

Per cominciare, assegniamo i valori 0, 1 e 2 ai tre colori, o tipi (*essenze*) di alberelli; le regole di colorazione delle file di alberelli successive alla prima sono riassunte nella tabellina che segue:

X	Y	Z
0	0	0
0	1	2
0	2	1
1	0	2
1	1	1
1	2	0
2	0	1
2	1	0
2	2	2



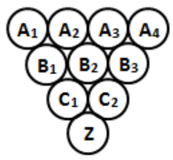
Si verifica facilmente che vale la relazione:

$$1)\ Z = (2X + 2Y)_{mod\ 3}$$

Adesso, proviamo ad applicare iterativamente la 1) ad una configurazione semplice – ad esempio quella relativa al caso N=4 – dopo aver ricordato le seguenti relazioni che valgono per l'*algebra modulo 3*:

$$2)\ \begin{cases} \forall K \epsilon Z \\ (3KX)_{mod\ 3} = 0 \\ [(3K+1)X]_{mod\ 3} = X \\ [(3K+2)X]_{mod\ 3} = (2X)_{mod\ 3} \end{cases}$$

Si ha allora:



$$3)\ \begin{cases} B_1 = (2A_1 + 2A_2)_{mod\ 3} \\ B_2 = (2A_2 + 2A_3)_{mod\ 3} \\ B_3 = (2A_3 + 2A_4)_{mod\ 3} \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} C_1 = (2B_1 + 2B_2)_{mod\ 3} = (4A_1 + 4A_2 + 4A_2 + 4A_3)_{mod\ 3} = (A_1 + 2A_2 + A_3)_{mod\ 3} \\ C_2 = (A_2 + 2A_3 + A_4)_{mod\ 3} \end{cases}$$

$$5)\ Z = (2C_1 + 2C_2)_{mod\ 3} = (2A_1 + 4A_2 + 2A_3 + 2A_2 + 4A_3 + 2A_4)_{mod\ 3} = (2A_1 + 6A_2 + 6A_3 + 2A_4)_{mod\ 3} = (2A_1 + 2A_4)_{mod\ 3}$$

Immaginando di estendere il calcolo ad un numero arbitrario di righe, si può dire che il valore di ogni cella – cioè il colore di ciascun alberello – è dato dalla combinazione lineare (*modulo 3*) dei valori delle celle della prima riga, pesati con coefficienti che possono assumere i soli valori 0, 1 e 2. Detto Z il valore riguardante l'ultima pianticella, si può quindi scrivere:

$$6)\ \begin{cases} Z = \left(\sum_{m=1}^{N} \alpha_m A_m\right)_{mod\ 3} \\ \alpha_m, A_m \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

Nell'esempio N=4 di cui sopra (vedere la relazione 5), risulta α_1=α_4=2, α_2=α_3=0.

[10] Perché proprio ***rosso*** ●? La scelta è arbitraria; poteva essere altrettanto legittimamente verde ● o blu ●, indifferentemente. Il problemino è ampiamente simmetrico: basta sostituire un colore con l'altro in tutta la trattazione, e la sostanza non cambia.

Se ora elenchiamo i valori dei coefficienti a_m che possono presentarsi al variare di N, viene fuori la tabella che segue[11]:

N=1	1																			
N=2	2	2																		
N=3	1	2	1																	
N=4	2	0	0	2																
N=5	1	1	0	1	1															
N=6	2	1	2	2	1	2														
N=7	1	0	0	2	0	0	1													
N=8	2	2	0	1	1	0	2	2												
N=9	1	2	1	2	1	2	1	2	1											
N=10	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2										
N=11	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1									
N=12	2	1	2	0	0	0	0	0	0	2	1	2								
N=13	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1							
N=14	2	2	0	2	2	0	0	0	0	2	2	0	2	2						
N=15	1	2	1	1	2	1	0	0	0	1	2	1	1	2	1					
N=16	2	0	0	1	0	0	2	0	0	2	0	0	1	0	0	2				
N=17	1	1	0	2	2	0	1	1	0	1	1	0	2	2	0	1	1			
N=18	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2		
N=19	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
N=20	2	2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2	2

Per comprendere cosa significhi la tabella qui sopra, consideriamo il caso N=10 (in giallo), che è quello del *testo standard* del problema: si vede che con questo valore di N si ha a_1=a_{10}=2, e a_m=0 per tutti gli altri alberelli della prima fila. Se allora un alberello viene piazzato in una qualsiasi buchetta dalla 2ª alla 9ª, di qualsiasi *essenza* si tratti questa non avrà nessuna influenza sull'alberello finale Z, essendo i relativi coefficienti a_m tutti nulli (chiamiamo queste buchette "*inessenziali*"…). Posizionando invece in 1ª o 10ª posizione una delle tre *essenze* opportunamente scelta, si può invece influenzare a piacimento il valore di Z, e quindi la natura dell'ultimo alberello (queste due le chiameremo ovviamente buchette "*essenziali*"…).

Stando così le cose, il primo giocatore (poniamo sia Piotr) è destinato a perdere sempre (se Rudy non commette errori):

- fin quando Piotr utilizza buchette *inessenziali*, a Rudy è sufficiente rispondere facendo altrettanto: dopo ciascuna coppia di piantumazioni non cambierà nulla circa l'influenza complessiva sull'alberello Z, che resterà (in prospettiva) rosso
- non appena Piotr si azzarda ad utilizzare una delle due buchette *essenziali*, a Rudy basta rispondere con l'altra simmetrica, il che gli consente di decidere a piacimento la natura dell'alberello Z…

Questa tattica può essere applicata per tutti i valori *pari* di N: il giocatore che riempie l'ultima buchetta *essenziale* vince scegliendo il tipo opportuno di pianticella della prima fila che lo porta a colorare come lui desidera l'*essenza* Z. Data la simmetria della tabella, il numero di buchette *essenziali* (con N pari) è sempre pari, per cui il secondo giocatore può vincere sempre.

Con N *dispari*, invece, la situazione è diametralmente opposta. Stavolta Piotr può piazzare il primo alberello nella buchetta centrale (*essenziale* o meno che sia), e poi giocare "*come giocava Rudy con N pari*". Occupando la posizione centrale alla prima mossa, infatti, il numero di buchette *essenziali* residue sarà ancora pari per simmetria, e quindi a Piotr basterà rispondere a tutte le mosse con lo stesso tipo di buchette scelto via via da Rudy.

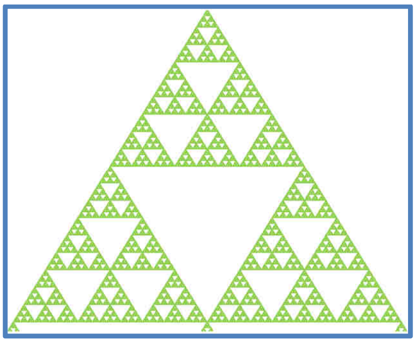
Pari o dispari che sia N, il primo e l'ultimo coefficiente a_1 e a_N (per come sono costruiti) non sono mai nulli, quindi esiste sempre almeno una coppia di buchette *essenziali*. Quelli intermedi possono essere tutti nulli (come nel caso N=10), tutti non nulli (ad esempio N=18), o ancora di valori misti, ma comunque simmetrici.

[11] *Attenzione*: la tabella triangolare qui mostrata *non è* il *Triangolo di Laxap* degli alberelli, bensì il *Triangolo dei Coefficienti* a_m al variare di N…

Se si osserva la tabella qui sopra relativa al *Triangolo dei Coefficienti*, ci si rende conto che nel complesso somiglia molto anch'essa ad un *Triangolo di Pascal* (o di *Tartaglia*), dove il valore di ciascun coefficiente a è dato da:

$$7)\ \begin{cases} \alpha_{N,1} = \left(2\alpha_{N-1,1}\right)_{mod\ 3} \\ \alpha_{N,m} = \left(2\alpha_{N-1,m-1} + 2\alpha_{N-1,m}\right)_{mod\ 3} \\ \alpha_{N,N} = \left(2\alpha_{N-1,N-1}\right)_{mod\ 3} \end{cases}$$

Estendendo poi la tabella fino ad N=500 (e colorando le buchette *essenziali* tutte in verde – prescindendo dal valore 1 o 2 di a_m), viene fuori quanto segue (grazie ad *Excel*™…), il che ricorda infine il *Triangolo di Sierpiński*:



Saluti triangolari.

Che meraviglia, vero? Andiamo avanti.

4.1.2 Giallo matematico

Ed è effettivamente un giallo, con tanto di crimine e di sospetti:

> *Efferato crimine al Dipartimento di Matematica! Dalla sala professori, è stato rubato l'intero contenuto del salvadanaio per comprare il caffè: a seguito delle indagini, risulta che nella mattinata nella quale è stato commesso il furto, solo sei professori (e nessuno studente) sono entrati nella stanza; ciascuno una volta sola, restandoci per un certo tempo e poi uscendosene: ogni volta che due qualsiasi si trovavano nella stanza, almeno uno di loro vedeva l'altro.*
>
> *L'indagine raggiunge rapidamente le seguenti conclusioni: Abel dice di aver visto nella stanza Bernoulli e Erdos, Bernoulli dice di aver visto Abel e Fermat, Cauchy dice di aver visto Descartes e Fermat, Descartes dice di aver visto Abel e Fermat, Erdos dice di aver visto Bernoulli e Cauchy, Fermat dice di aver visto Cauchy e Erdos.*
>
> *Evidentemente, uno ed uno solo di loro sta mentendo, fornendo false informazioni (non omettendo informazioni) per dare la colpa ad un altro: chi sta mentendo, e qual è la bugia?*

Ecco, questo il problema. A dire il vero, quando ho letto il tentativo di soluzione di ***Bluemonday*** ho pensato che il Capo avesse ancora una volta tolto o aggiunto qualche dato al problema rendendolo irrisolvibile. Poi è arrivata la soluzione di ***Alberto R.***:

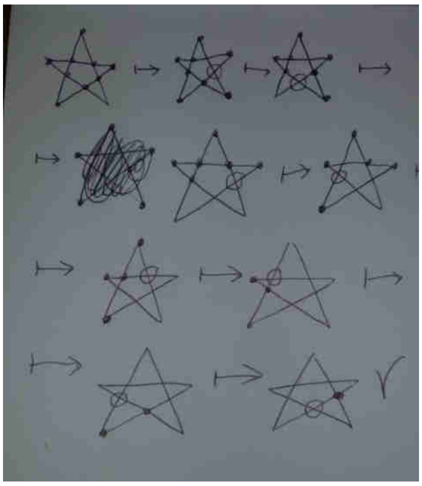
> L'ipotesi è: Una e una sola delle 12 affermazioni fatte dai 6 matematici è falsa.
>
> Ho trovato solo due successioni che soddisfano tale ipotesi.
>
> 1. Entrano ABE; esce A; entra F; esce B; entra C; esce E; entra D
> 2. Entrano DCF; esce D; entra E; esce C; entra B; esce F; entra A
>
> In entrambi i casi D avrebbe mentito dicendo di aver visto A.
>
> Però non sono riuscito a dimostrare che non esiste nessun'altra successione compatibile con l'ipotesi. Pertanto Descartes è assolto per insufficienza di prove.

Assolti sono tutti i matematici, perché sono notoriamente svampiti e se hanno rubato qualcosa è perché credevano di averlo perso in precedenza. No, non lo so se è questa la soluzione che il Capo si aspettava, se volete scoprirlo dovete mandare la vostra.

4.1.3 Lam-Turki/Pentalfa(Zugwang)

Ebbene sì, finalmente qualcuno ha inviato l'analisi di uno dei giochi del Capo. O almeno ci ha provato, si tratta di ***Bluemonday***, che scrive:

> Cosa bisogna analizzare? Che vuol dire analizzare un gioco?
>
> Questo non lo so, ma al primo tentativo ho trovato una serie di 9 mosse che risolvono il Lam-Turki (e andando a ritroso, anche il Pentalfa). Vi allego la foto della soluzione.



Ecco, il Capo ha scritto qualche PM in proposito, sulla teoria dei giochi, gran parte del quale si è trasformato in un libro, e in una serie di articoli sul blog, per cui non lo diciamo, che cosa è l'analisi di un gioco. Però la soluzione è bella, no? Forza ***Bluemonday***, ce ne sono tanti di analizzabili, tra gli Z!

Ci fermiamo qui. Duecento S&N, adesso. Più di quattrocento problemi risolti, quasi tutti da voi. Grazie.

Alla prossima!

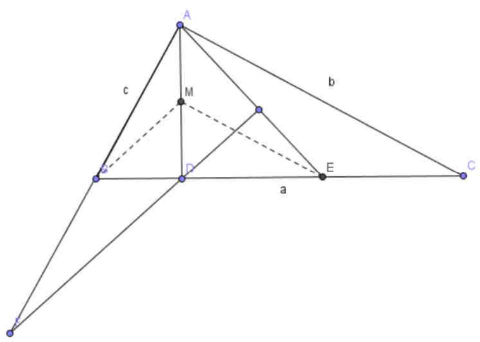
5. Quick & Dirty

Si fa ruotare (senza che scivoli) un cerchio di un metro di circonferenza all'esterno dei lati di un quadrato di un metro di lato: quanti giri avrà fatto il cerchio quando sarà tornato alla posizione iniziale?

Se quello qui sopra vi pare troppo facile, fate ruotare lo stesso cerchio all'esterno dei lati di un poligono convesso (non necessariamente regolare) di n lati e perimetro di p metri.

6. Pagina 46

Riassumiamo la situazione nella figura a fianco, aggiungendo M punto medio di AD.



1 *Situazione iniziale.*

Essendo il segmento EM congiungente i punti medi di due lati del triangolo ADC, esso sarà parallelo al terzo lato AC.

Ma AC per definizione è perpendicolare ad AB, e quindi anche EM è perpendicolare ad AB e, passando per il vertice E, giace quindi sull'altezza del triangolo ABE. Ma in ABE, AD è l'altezza per il vertice A, e quindi M è ortocentro del triangolo ABE.

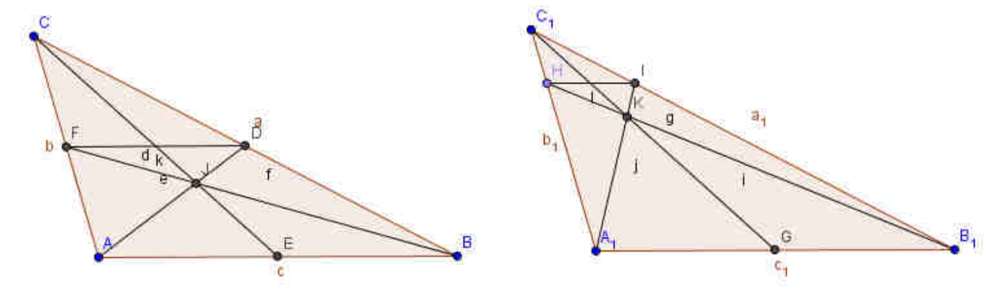
Quindi, BM, passante per B e M, giace sull'altezza relativa al vertice B, e quindi BM è perpendicolare ad AE. Ma essendo M e B i punti medi dei segmenti AF e AD, lati del triangolo AFD, risulta che BM è parallelo a FD, e quindi anche quest'ultimo sarà perpendicolare ad AE.

7. Paraphernalia Mathematica

Cominciamo con un po' di *outing*: Rudy si è finalmente deciso a usare Geogebra. Per il momento ancora da niubbo (gli serve solo come riga e compasso), ma abbiamo speranze che, con il tempo, si appassioni allo strumento.

7.1 Oltre Euclide [002 – Il lavoro di uno]

Nel raccogliere il materiale per questa serie, un pensiero ci è venuto spontaneo alla mente: è abbastanza probabile che sia possibile ricompilare il calendario di RM inserendo unicamente gente che ha dato il nome a punti notevoli di un triangolo: ormai, cominciano ad essere più interessanti i punti che non significano nulla.



2 *Tre mediane, anzi una.*

Bene, andiamo ad incominciare. Partiamo dalle mediane, che sono più facili. La prima parte della figura qui sopra rappresenta il nostro triangolo con le sue mediane; inoltre, abbiamo tracciato il segmento ***FD*** che unisce i due punti medi di ***CA*** e ***CB***: non dovreste avere problemi a dimostrare che ***FD*** è parallelo a ***AB***, applicando il Teorema di Tolomeo. E sin qui, niente di nuovo.

Nella seconda parte del disegno abbiamo spostato verso l'alto ***FD*** (che qui diventa ***HI***), mantenendolo sempre parallelo ad ***AB***: quindi,

$$\frac{C_1H}{HA_1}=\frac{C_1I}{IB_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{C_1H}{HA_1}\cdot\frac{IB_1}{C_1I}=1.$$

Siccome C_1G è la mediana, abbiamo $A_1G = GB_1$, e quindi $A_1G/GB_1 = 1$; moltiplicando quest'ultima espressione per quella ottenuta precedentemente, abbiamo:

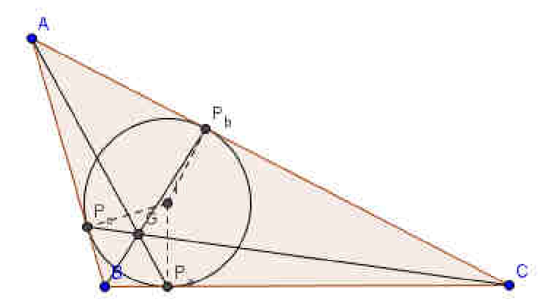
$$\frac{C_1H}{HA_1}\cdot\frac{IB_1}{C_1I}\cdot\frac{A_1G}{GB_1}=1,$$

e quindi, per il Teorema di Ceva, *continuano ad essere concorrenti*.

Andiamo un po' più nel difficile. Dato il cerchio inscritto nel nostro triangolo[12], consideriamo le rette passanti per il vertice e il punto di tangenza sul lato opposto.

Dal fatto che le bisettrici sono ceviane e che i lati del triangolo sono tangenti al cerchio, otteniamo che:

$$\frac{AP_c}{AP_b}\cdot\frac{BP_a}{BP_c}\cdot\frac{CP_b}{CP_a}=1.$$



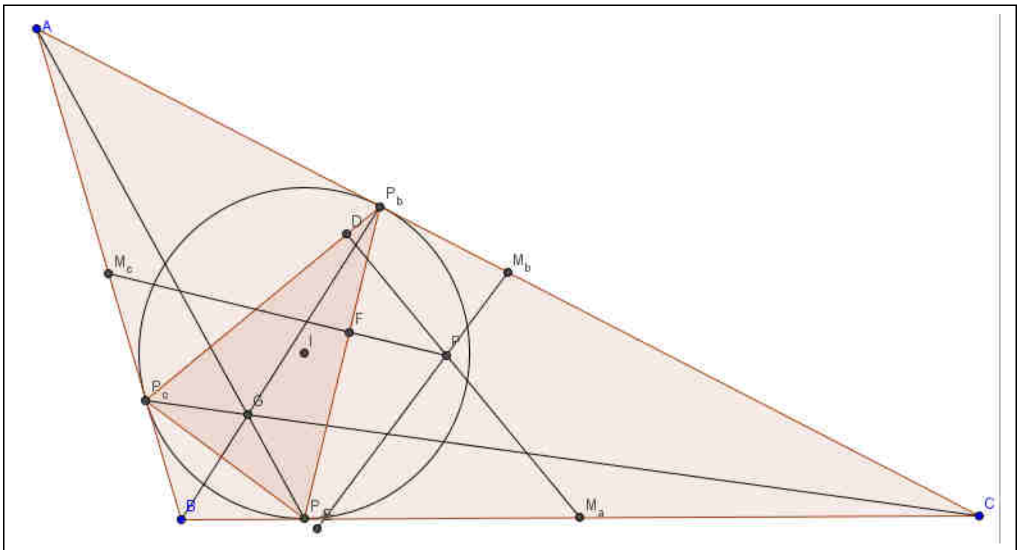
3 *Questi non hanno nome.*

e, con pochi passaggi:

[12] Per i curiosi: abbiamo tracciato le bisettrici, trovato l'incentro, oscurato le bisettrici, tracciato le perpendicolari ai lati passanti per l'incentro, tracciato il cerchio passante per tre punti. Un incapace (ad esempio Rudy) ci mette dieci minuti: non voglio neanche pensare a cosa sarebbe stato farlo con PowerPoint.

$$\frac{AP_c}{BP_c}\cdot\frac{BP_a}{CP_a}\cdot\frac{CP_b}{AP_b}=1$$
,

da cui, via Teorema di Ceva, possiamo stabilire che i tre segmenti si incontrano in ***G***. Anche se i tre segmenti non ci risulta abbiano un nome ben preciso, lo ha il loro punto di intersezione, noto come ***Punto di Gergonne***.



4 *A puro titolo di curiosità.*

Anche il triangolo che unisce i tre punti di tangenza ha un nome, visto che è noto come ***Triangolo di Gergonne*** e, come tutti i triangoli, ha i suoi punti notevoli; alcuni, però, sono strettamente legati al nostro triangolo originale: se prendiamo i tre punti medi dei lati del triangolo originale e da questi tiriamo le perpendicolari[13] ai corrispondenti lati del Triangolo di Gergonne, vediamo che queste si intersecano nel punto ***P*** (che non ci risulta abbia un nome); siccome questa ve la diamo come "curiosità", non la dimostriamo (anche perché le tre perpendicolari non sono ceviane di nulla, visto che non passano per nessun vertice).

Visto che siamo sulle "curiosità non ceviane", vi diciamo anche che se anziché i punti medi dei lati prendete i punti medi degli *archi* del cerchio *circoscritto* al triangolo e fate lo stesso conto, anche qui ottenete tre rette collineari; non solo, ma quest'ultimo punto è *collineare* con il centro del cerchio inscritto e del cerchio circoscrivente. E, giusto per fare tre al prezzo di due, se provate a tracciare tre corde *concorrenti* passanti rispettivamente per i punti P_a, P_b, P_c e tracciate le rette passanti per i vertici del triangolo originale e per i nuovi punti individuati sul cerchio inscritto, anche queste sono concorrenti[14].

"Beh, stai usando punti medi e cerchi inscritti, è *evidente* che qualche *simmetria* prima o poi devi trovarla..." Cos'è, una sfida? Per punizione il disegno lo fate voi.

1. Prendete un triangolo
2. Disegnate tre ceviane qualsiasi (concorrenti, mi raccomando)
3. Tracciate il triangolo avente come vertici i piedi delle tre ceviane
4. Tracciate il cerchio inscritto a questo triangolo
5. Dai punti di tangenza, tracciate le rette che vanno all'angolo del triangolo originale più vicino.

Visto? Concorrono anche queste.

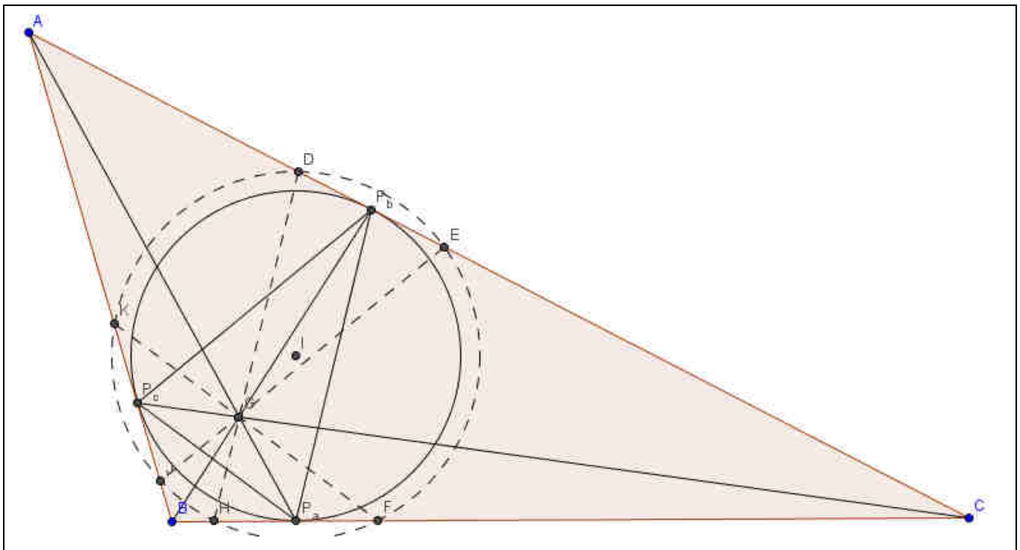
---

[13] Notate che una di queste cade nel punto E, al di fuori del segmento: nulla impone che un *punto notevole* di un triangolo sia obbligatoriamente anche *punto del triangolo* (tant'è che per tracciare un altro segmento abbiamo barato).

[14] Due appunti assolutamente inutili: la cosa evidentemente funziona anche se tracciate i diametri (che sono di sicuro concorrenti) al posto delle tre corde. Inoltre, a rigore queste rette appena tracciate sarebbero delle ceviane, visto che passano per un vertice e intercettano il lato opposto.

Una vecchia battuta che ci è sempre piaciuta è che "per tre punti passa una sola retta, se usi una matita abbastanza spessa"; volendo essere più seri, come capitato poco sopra, lo scoprire che tre punti sono collineari porta in noi sempre un certo stupore, visto che per tre punti siamo abituati a vederci passare un cerchio; lo stupore aumenta quando troviamo che più di tre punti si trovano sullo stesso cerchio.

Torniamo al nostro Triangolo di Gergonne, che le sue caratteristiche strane non sono ancora finite.



5 *Ingorgo sul Ring.*

Se tracciamo le parallele ad ogni lato del Triangolo di Gergonne attraverso il Punto di Gergonne come in figura, dove $KF \parallel P_bP_a$, $DH \parallel P_aP_b$, $EJ \parallel P_bP_c$, se prolunghiamo queste rette sino ad incontrare i lati del triangolo originale, otteniamo sei punti; questi sei punti si trovano tutti sullo stesso cerchio, il che non è cosa da poco (in figura lo vedete tratteggiato).

Non molto stranamente, questo cerchio *non* si chiama "Cerchio di Gergonne", visto che non lo ha trovato lui, ma ***Cerchio di Adams***, visto che lo ha trovato il matematico tedesco Carl Adams (1811-1849).

Per adesso basta, che sui punti *conciclici* ci sono un mucchio di cose da dire: rimandiamo al mese prossimo, con qualcuno che dovreste conoscere.

Certo che se devo trovare un difetto a Geogebra, è quello di spoilerare tutte le grandi notizie: col fatto che prima metto il disegno, scoprite tutto prima...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms