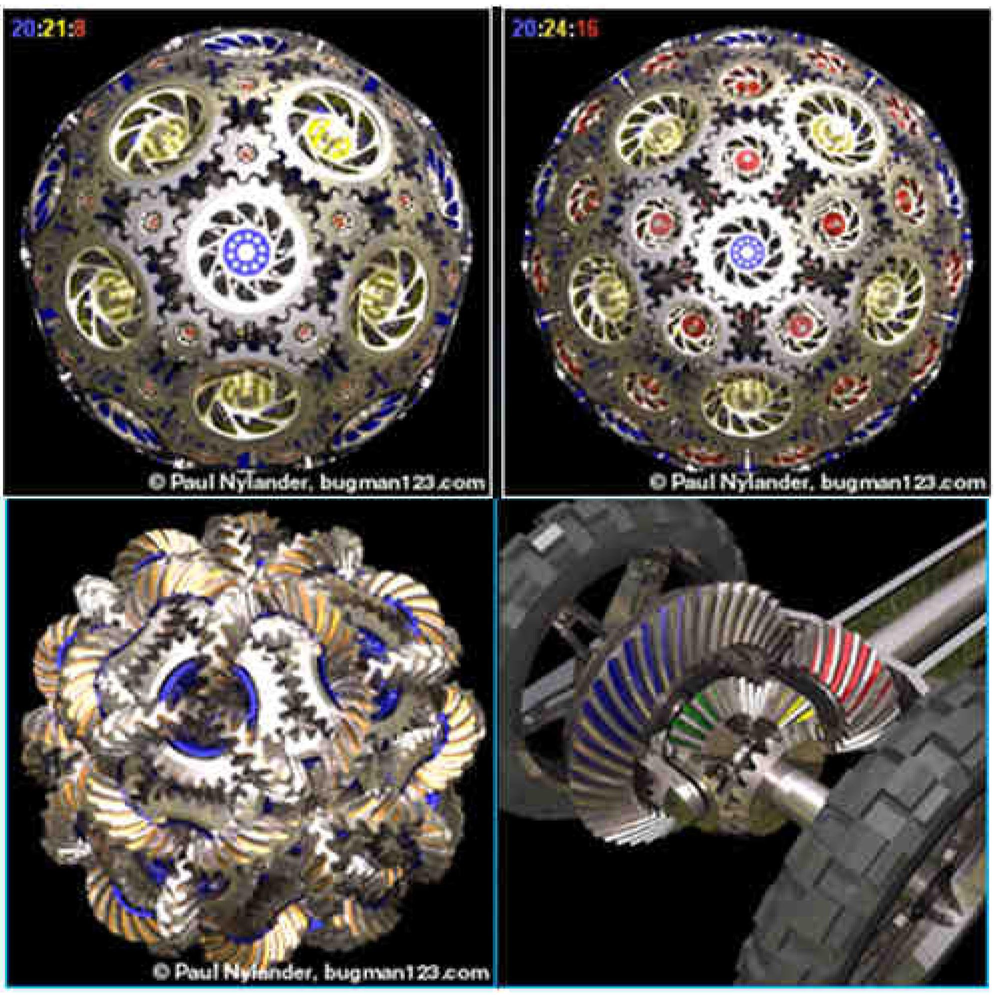
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 191 – Dicembre 2014 – Anno Sedicesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM190 ha diffuso 3'161 copie e il 15/12/2014 per Google eravamo in 12'000 pagine.

Se andate sul sito di ***Paul Nylander***, http://bugman123.com/Gears/index.html, trovate un mucchio di altre cose. Per quanto riguarda queste immagini, ad esempio, le trovate *animate* e disponibili in PoVRay. Sulle prime due, il grande John Baez ha sviluppato l'interessante problema "...ma quante ruote ci sono?", mente la quarta animazione ha chiarito a Rudy finalmente un dubbio giovanile su come possa funzionare un differenziale (posto che vi interessi, con riferimento alla figura, i conici giallo e rosso *non* sono collegati: vi sfido a trovare un disegno dove questo fatto sia evidente, e si capisca che i due gialli ruotano. Certo, altrimenti cosa li chiamavano "satelliti" a fare?). La terza è lì solo perché animata fa venire un incredibile mal di testa.

1. Emmatematica

"Nelle nostre scuole conduciamo gli studenti ad idolatrare una perfezione che è illusoria, anziché incoraggiarli a lavorare con le approssimazioni

Non ci si pensa quasi mai, ma i numeri hanno una caratteristica che li rende davvero peculiari, nel loro rapporto con le parole. Ognuno di noi ha una relazione del tutto speciale con almeno una parola: il proprio nome. È un possesso, più ancora che una proprietà: avere un nome è una caratteristica così importante che è perfino stabilito come diritto dalla legge.

1 *Alcuni numeri hanno nomi strani e recenti, e danno il nome a oggetti diventati molto, molto familiari*[1]

Anche i numeri hanno un nome: quando diciamo "uno, due, tre..." stiamo chiamando per nome i primi numeri naturali. E fin qui non c'è niente di speciale, siamo d'accordo. Tutte le cose hanno un nome, e se per caso scoprissimo (o anche se inventassimo) qualche cosa che un nome ancora non ce l'ha, abbiamo tutto il diritto di attribuirgliene uno d'ufficio. Gli scienziati lo fanno continuamente: quasar, quaternione, laser, frattale, bosone, DNA,… una scoperta non è quasi neppure una vera scoperta, se non implica la necessità di inventare qualche nome nuovo.

Quel che però i numeri hanno di speciale è che sono infiniti, e a prima vista sembra davvero impossibile inventare un numero infinito di nomi; eppure anche un bambino sa che ogni numero, per quanto grande possa essere, ha comunque un nome. Un nome magari lunghissimo, quando il numero è lunghissimo (12.000.000.000.325.800.003? "Dodici miliardi di miliardi trecentoventicinque milioni ottocentomila tre") e certo complicatissimo, ma un nome c'è.

La cosa particolarmente buffa è che quel nome è esatto: tutti concordano, anche senza consultarsi, nel chiamarlo proprio così. Perfino persone di lingua diversa: userebbero suoni e di lettere diverse, ma ogni lingua genererebbe un nome che sarebbe puntualmente uno la traduzione dell'altro. Ma la magia vera è ancora un'altra, e cioè che quel nome su

[1] Traduzione delle prime due vignette: "Schroeder, quali credi che siano le probabilità che io e te ci sposeremo, un giorno?" – "Oh, direi circa un googol a 1" – "Quant'è un googol?", etc. Il nome "googol" per esprimere 10^{100} è stato ideato da Milton, novenne nipotino del matematico Edward Kasner. Eh sì, certo… Google ha preso il nome dal googol, ovvio.

cui tutti concorderebbero, quasi sicuramente non è mai stato pronunciato nella storia dell'umanità.

Per fare qualcosa che nessuno al mondo ha mai fatto prima, non serve lanciarsi col paracadute da cinquantamila metri d'altezza, o bere sessanta litri di birra in un'ora, basta scrivere venti o trenta cifre a caso, una dietro l'altra, e leggere il numero a voce alta: sarà relativamente facile farlo in maniera corretta, e la probabilità che qualcun altro abbia mai pronunciato il nome di quel numero è così infima che è molto, molto più probabile essere colto da un meteorite nello stesso giorno in cui avete fatto sei al Superenalotto. Un vero record, un'autentica azione da Guinness dei Primati, e si può farla in cinque minuti, anche senza allenamento.

Per contro, anche se la maggior parte dei numeri ha un nome che non è mai stato pronunciato, alcuni numeri sono così familiari che sono invece pronunciati, chiamati e nominati molte volte al giorno da ciascuno di noi. Imparare a contare è una cosa che si fa da molto piccoli, e la filastrocca "uno, due, tre…" si impara quasi sempre prima ancora del primo giorno di scuola. E i nomi si imparano nel giusto ordine, per forza: prima l'uno, poi il due, e così via. Ma se ci si pensa un attimo, c'è un numero prepotente che, per la fretta di comparire, si presenta con il suo nome alle orecchie dei bambini prima del suo turno naturale. Subito dopo aver contato da uno a dieci, di solito, non aspetta che arrivino gli altri ottantanove nomi, e si presenta subito: cento.

È il primo acceleratore verso l'infinito: …otto, nove dieci; cento, mille, un milione, un miliardo.

È davvero speciale, in questo senso. Porta il significato di "tantissimo", nella testa dei bambini, che una volta che hanno finito le dita delle due mani si trovano all'improvviso a dover affrontare un numero che non si può "toccare" appoggiando un polpastrello sul naso: è qualcosa che si tocca solo con la mente, perché non si sono mai visti squadre di dieci bambini mettere in relazioni biunivoca cento cose con cento polpastrelli. "Cento" è un nome nuovo, misterioso: non si "vede" come invece è possibile vedere il dieci, due mani aperte, ma si capisce lo stesso che esiste, che deve esistere. In questo senso, molto matematico anche se poco aritmetico, cento è molto più vicino ai successivi mille, milione, miliardo di quanto lo sia al familiare dieci che si tocca poggiando un mignolino sulla punta del naso.

E la testa dei bambini è un luogo importante, importantissimo. Per molti versi, la matematica ha il difetto di essere una scienza adulta: adulta non nel senso che occorra essere anziani per capirla, anzi: è notorio che, seppur con qualche eccezione storica, l'età più produttiva per la matematica è quella della giovinezza. Ma adulta nel senso che richiede delle astrazioni che, quasi di necessità, sono realizzabili solo quando si è superata l'infanzia. Un bambino raccoglie dati: e li raccoglie con esperienze dirette, continue, intense. Ha fiducia nelle cose che scopre, fiducia nella sua capacità di meravigliarsi e nella sua sfrenata curiosità. Il suo senso critico è giovane, timido: preferisce stupirsi e accumulare informazioni, più che giudicare. Le astrazioni, per loro stessa natura, sono tali solo perché riescono ad estrarre – meglio ancora: ad astrarre – dei principi generali da molti casi particolari che hanno caratteristiche in comune. Di conseguenza, le menti dei bambini, occupatissime come sono a raccogliere dati e a tesaurizzare esperienze, arriveranno alle astrazioni solo in seguito.

La testa dei bambini. Un luogo prezioso, da coltivare con cura e attenzione.

Emma avrebbe compiuto gli anni proprio in questi giorni. Invece, la scorsa primavera se ne è andata in silenzio, senza clamore, nel sonno. Se avesse deciso di farci compagnia fino ad oggi, avrebbe avuto centouno candeline da spegnere sulla torta: ma chissà, forse perché centouno è un numero troppo poco evocativo per i ragazzi delle scuole medie inferiori, quelli che lei ha sempre tanto amato, ha deciso di fermarsi alla cifra tonda. Cento anni di vita: un numero facile per una vita che proprio facile non è stata, ma in compenso è stata decisamente fruttuosa.

2 *Emma Castelnuovo*

Emma Castelnuovo era nata a Roma il 12 Dicembre 1913; è morta il 13 Aprile 2014, dopo aver vissuto un secolo complicato all'insegna della didattica della matematica. Ma il suo ambiente d'origine non si interessava solo di didattica, anzi: se anche in matematica valesse il concetto di "figlio d'arte", pochi altri studiosi potrebbero vantare quarti di nobiltà migliori dei suoi. Il padre di Emma era Guido Castelnuovo, uno dei nomi più brillanti della matematica italiana del Novecento: tra i fondatori della fiorente scuola della Geometria Algebrica italiana, Guido Castelnuovo fu il presidente del Quarto Congresso dei Matematici, quello che si tenne a Roma nel 1908: e gli International Congress of Mathematics (ICM) sono tutt'ora la più alta delle istituzioni matematiche del pianeta, quelle in cui, tanto per intenderci, vengono assegnate le Medaglie Fields.

Guido Castelnuovo fu anche nominato senatore a vita per meriti scientifici; non è stato certo l'unico ad arrivare ad occupare uno scranno a Palazzo Madama per ragioni di scienza: basti pensare a Rita Levi Montalcini, o a Carlo Rubbia. Ma Castelnuovo è stato in assoluto il primo senatore a vita della Repubblica Italiana[2], ed è ancora il solo ad essere stato nominato per meriti in campo matematico.

il Resto del Carlino

Gli insegnanti e gli alunni ebrei esclusi dalle scuole a datare dal 16 ottobre

3 *Leggi razziali del 1938*

Moglie di Guido era Elbina Enriques, sorella del grande Federigo Enriques[3], che era pertanto zio di Emma; è facile concludere che Emma sia cresciuta a pane e matematica fin dalla più tenera età.

Emma si iscrive al corso di laurea di Matematica dell'Università di Roma, e nel 1936 ottiene la laurea. Due anni dopo, nel 1938, vince il concorso statale per l'abilitazione all'insegnamento nelle scuole pubbliche, ma non avrà la possibilità di insegnare: il 1938 è infatti l'anno in cui entrano

[2] Fu nominato il 5 dicembre 1949, dal presidente Luigi Einaudi, insieme ad Arturo Toscanini, che però rinunciò alla carica.

[3] Federigo Enriques si è meritato un compleanno: lo celebriamo in RM084, Gennaio 200, "Mente minuta".

in vigore le legge razziali, e queste proibiscono agli ebrei di esercitare l'insegnamento nelle scuole pubbliche.

4 *Lapide sulla scuola israelitica*

L'intenzione di Emma non era quella di intraprendere una carriera accademica: lei voleva insegnare ai ragazzi delle scuole medie. Messa nell'impossibilità di farlo a causa del razzismo di stato, comincia ad insegnare nella scuola ebraica di Roma, a ragazzi ovviamente ebrei, i quali, per le medesime ragioni, non potevano più seguire i corsi delle scuole statali. Durante questo periodo pubblicherà anche un libro di testo di geometria, ma sotto falso nome.

La sua carriera di professoressa in una scuola pubblica cominciò solo nel 1945, presso la scuola media "Torquato Tasso" di Roma. Nonostante il suo nome, e soprattutto nonostante il suo contributo alla didattica della matematica fosse negli anni divenuto di importanza mondiale, Emma non lasciò mai il suo lavoro alla media Tasso fino al 1979, dopo 35 anni di insegnamento, e solo per andare in pensione.

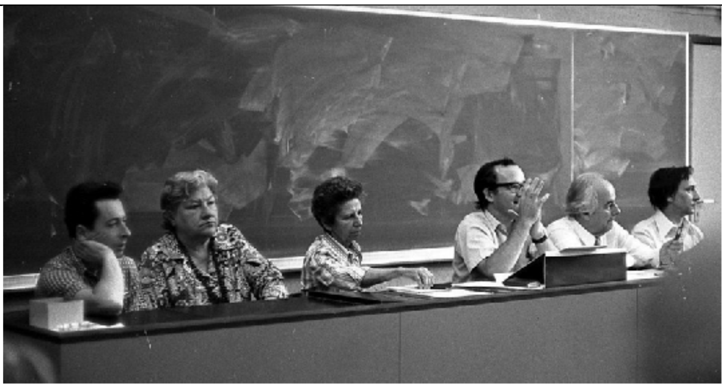
Fin dall'inizio della sua carriera di educatrice e insegnante, Emma puntò il dito sui metodi di insegnamento della matematica. Fu una sostenitrice del testo di Claude Clairaut, "*Élements de géometrie*" che pur mantenendo i contenuti euclidei li proponeva agli studenti in una maniera assai più diretta e immediata di quanto facessero gli "Elementi" del padre fondatore della geometria. Le linee guida della sua didattica – sempre orientata verso le giovani menti dei ragazzi dagli 11 ai 14 anni – sono sempre state il concetto di intuizione e di realtà, almeno per quanto concerne il significato di quest'ultima nella didattica, ovvero la possibilità di applicare le conoscenze matematiche.

Primo frutto di questa sua visione didattica è stato il libro di testo "Geometria intuitiva per le scuole medie inferiori", sul quale si sono formati molti studenti degli anni '50 e '60, e non soltanto italiani. C'è da augurarsi che questi studenti abbiamo avuto la possibilità non solo di avere la guida del libro di testo, ma anche insegnanti in grado di applicare i metodi di insegnamento che Emma propugnava: oggetti matematici da costruire, in modo da poterli poi toccare, scoprire, capire; e questo non per insegnare ai giovani a non perseguire il rigore che è una caratteristica fondamentale della conoscenza matematica, ma proprio per evitare che il rigore fosse un ostacolo iniziale, e diventasse invece un punto d'arrivo.

Per le medesime ragioni, Emma Castelnuovo ha continuamente esortato allo studio della storia della matematica, in modo che essa potesse apparire come una costruzione, un'evoluzione continua, e non certo come una sorta di verità rivelata.

La didattica della matematica è una cosa complessa: probabilmente, la matematica è una delle scienze in cui è più profonda la separazione tra gli oggetti trattati dalla sua ricerca più avanzata e gli approcci iniziali indispensabili alla formazione dei futuri matematici. Gli oggetti della matematica superiore sono astrazioni complesse, ma per formare una mente in modo che possa infine padroneggiarle occorre un addestramento specifico e graduale verso l'astrazione, che non è né facile né immediato per i ragazzi.

E che la didattica della matematica sia un tema importante da sviluppare divenne chiaro alla comunità internazionale dei matematici proprio negli anni in cui Emma esercitava il suo metodo e il suo approccio. Se gli ICM erano le conferenze principali del mondo della matematica, il 1969 vide la nascita dei paralleli e specifici ICME, International Congress on Mathematical Education, ovvero i congressi per l'educazione matematica. Fu il primo passo che elevava esplicitamente "l'insegnamento della matematica" a disciplina specifica. Ovviamente, l'interesse iniziale e maggiore era orientato verso l'insegnamento a livello universitario, ma ben presto ci si rese conto della necessità di puntare l'attenzione sull'insegnamento secondario. Si creò pertanto una commissione specifica, la Commissione per lo Studio e il Miglioramento dell'Insegnamento Matematico (CIEAEM[4]): tra i soci fondatori spicca il nome di Jean Piaget, ma non sono da meno nomi non altrettanto noti, come Choquet, Dieudonné, Freudenthal e altri. E, naturalmente, Emma Castelnuovo, che del CIEAEM sarà anche presidente, dal 1979 al 1981.



5 *Emma alla presidenza del CIEAEM*

Emma va in pensione nel 1979, lasciando i suoi allievi della media "Tasso" ad altri insegnanti, sicuramente terrorizzati dal peso dell'eredità didattica che devono assumersi; ma di certo Emma non smette di lavorare. Oltre ai suoi impegni con il CIEAEM, Emma si impegna su quasi ogni fronte possibile: scrive libri – lo ha sempre fatto, continuerà sempre a farlo – vola per quattro volte in Niger, prima su invito dell'Istituto Francese per le Ricerche Matematiche, poi direttamente dell'Unesco; dove naturalmente insegna, e insegna a ragazzi della solita fascia di età, dagli 11 ai 14.

L'anno scorso, nel 2013, l'ICMI (Commissione Internazionale per l'Istruzione Matematica) ha istituito un prestigioso premio destinato a chi raggiunge particolari traguardi nella pratica dell'educazione matematica. Un premio davvero prestigioso, che si affianca al Premio Klein e al Premio Freudenthal, i maggiori nella Didattica della Matematica. Questo premio porta il nome di Emma Castelnuovo.

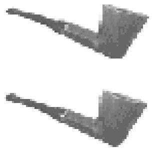
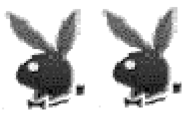
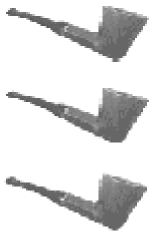
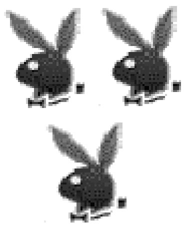
C'è solo una cosa più grande che vincere un premio prestigioso: ed è dare al quel premio il proprio nome.[5]

[4] Acronimo francese; Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques.

[5] La rete è strapiena di riferimenti ad Emma Castelnuovo: è davvero impossibile citarli tutti, ma quantomeno è consolatorio sapere che la ricerca in merito darà facilmente buoni frutti. Noi dobbiamo però ugualmente ringraziare esplicitamente almeno Fulvia Furinghetti, che ha scritto la biografia di Emma per il McTutor dell'Università Saint Andrews, che da sempre è una delle nostre fonti principali, e Paola Gario, a cui abbiamo rubato parte delle notizie e immagini dalla sua bella presentazione dedicata ad Emma in occasione del XXXI Convegno Nazionale dell'UMI-CIIM.

6 *Emma*

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Ci sarebbe servito prima			
Regalo di Natale			

2.1 Ci sarebbe servito prima

È facile ambientare una storia nel passato (anzi, fior di *editor* consigliano di utilizzare questo come tempo narrativo), e la coniugazione dei verbi in questo tempo non rappresenta certo un problema; quindi, per mostrare la *nonchalance* con la quale ci destreggiamo attraverso i meandri della consecutio temporum italiana, la affrontiamo in un modo un po' particolare[6].

I VAdLdRM, ormai, hanno raggiunto un'età nella quale iniziano delle scelte più responsabili e pacate (e ciò è bene, visto che uno è patentato e l'altro lo sarà a breve), ma ricordiamo ancora gli anni giovanili in cui, con la spensierata giocosità di un vitello al primo pascolo di primavera[7], prima chiedevano al genitore di gonfiare un (ir)ragionevole numero di palloncini (sufficiente a ricoprire l'intero pavimento della loro camera), per poi lanciarvisi sopra con i loro sodali e farli scoppiare tutti: tempo del "caricamento", mezz'ora abbondante, tempo dello "scoppio" al massimo tre minuti: neanche i vecchi archibugi ad avancarica mostravano una tale inefficienza.

Recentemente, Rudy si è imbattuto in un problemino piuttosto interessante e, per tornare al titolo, ha cominciato a pensare al fatto che gli sarebbe effettivamente stato molto utile conoscerlo prima: non solo, ma gli avrebbe forse anche permesso di affrontare con maggior eleganza un problema che avrebbe successivamente presentato ai pochi affezionati lettori di una rubrica su una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa.

L'idea che avrebbe portato indubbi vantaggi all'epoca è quella dei palloncini corazzati, o meglio irrobustiti. E il problema che vi è [*Giusto il modo? Sì, mondo reale*] stato presentato (e risolto agilmente: era un "Quick & Dirty"[8]3) ha, secondo Rudy, una certa parentela con questo; o meglio, almeno nella prima parte, ne avrebbe presentato un'estensione.

---

[6] Ci pregiamo di farvi notare che siamo riusciti a inserire in questa frase *quattro* parole in lingua diversa dall'italiano.

[7] Siamo debitori della citazione verso la nonna (paterna) di Rudy: questa sta avendo (la frase, non la nonna) un discreto successo sul luogo del lavoro-che-paga.

[8] Siccome *non* occupa molto spazio, ve lo ripetiamo. E siccome non è il problema, lo mettiamo in nota: "Meglio un tappo rotondo in un buco quadrato o un tappo quadrato in un buco rotondo?".

L’estensione del Q&D sarebbe potuta consistere nel provare a gonfiare un palloncino (sferico) all’interno di un cubo: prima di iniziare a deformarsi per il contatto con gli spigoli del cubo (essendo dovuto essere un “buco”, non si sarebbe dovuto parlare di “facce”, ma solo di “spigoli”), avrebbe raggiunto un certo volume, che sareste stati in grado di calcolare facilmente. Un’estensione all’estensione sarebbe potuta essere quella di non fermarvi al *tappo quadridimensionale* (se il buco/tappo tridimensionale fosse stato rotondo, quello sferico sarebbe dovuto essere quadridimensionale, no?), ma di procedere alle dimensioni superiori: questo vi avrebbe garantito, ci sarebbe potuto parere di ricordare, interessanti sorprese dalle parti dei tappi decadimensionali.

Ma non sarebbe stato questo il problema: esso dovrebbe arrivare infatti nelle prossime righe.

Saremmo stati tutti perfettamente d’accordo che usare il metodo del “tappo rotondo in buco quadrato”, anche se fosse stato applicato nello spazio quadridimensionale nel quale viviamo [*Giusto: mondo reale, quindi indicativo. Per approfondimenti sulla quadridimensionalità, chiedete ad Albert (Einstein)*], avrebbe causato danni non irrilevanti ai Validi Assistenti, visto che i palloncini sarebbero stati circondati da spigoli rigidi; l’idea avrebbe dovuto essere quella di utilizzare non dei solidi rigidi, ma delle strutture equivalenti *deformabili*: per intenderci, restando all’esempio dato, un qualcosa piuttosto simile ad un cubo fatto di spago con i vertici rigidamente definiti da nodi, all’interno del quale avremmo voluto gonfiare il nostro palloncino, raggiungendo il massimo volume pur mantenendo il suddetto palloncino sferico non deformato (e qui, ci sarebbe dovuta sovvenire la citazione “per semplicità, consideriamo una mucca perfettamente sferica...”).

A questo punto, avremmo piazzato intrepidamente il nostro palloncino alla bocca e avremmo soffiato dentro senza indugio 9200 centimetri cubi del nostro afflato, giungendo a gonfiarlo al suo massimo volume pur mantenendone la forma perfettamente sferica.

Se tutto ciò fosse vero, avreste dovuto essere, ormai, perfettamente in grado di individuare il problema: quanto sarebbe dovuto valere il lato del nostro cubo di spago?

Data la vostra abilità, sicuramente lo avreste risolto e avreste potuto dare una mano ad una nota casa di costruttori di palloni da calcio per progettare quello degli ultimi Mondiali, che ci risultano essere stati a struttura cubica (gonfiata).

...ma torniamo al nostro tempo. Oggi, non ci fermiamo a domande così semplici, quali il chiedervi quanto sia *vantaggioso* il gonfiare una sfera in una struttura deformabile piuttosto che in una rigida (anche perché sappiamo il risultato), ma ci stiamo chiedendo (no, non ci rispondiamo da soli) cosa succeda con gli altri solidi platonici. E con gli archimedei?

Alice, sempre pronta a generalizzare, si sta chiedendo come funzioni nelle dimensioni superiori (OK, la quarta prevede più casi, ma quelle dopo meno); qui abbiamo qualche dubbio sul fatto che la cosa sia fattibile con le vostre capacità toraciche, ma potreste provare con le vostre capacità teoretiche.

2.2 Regalo di Natale!

No, non è il solito tre per due: ed è pure un problema facile, ma a noi è piaciuto molto; diciamo che qui il problema più grosso l’ha avuto Rudy (e gli pare di averlo risolto in modo piuttosto insoddisfacente... Vedete voi: è dalle parti della “acca”).

Stiamo preparando un bellissimo pacchetto con un regalo di Natale; siccome è destinato ad un apprezzatore del vino italiano che si trova da lungo tempo all’estero [*Alice, giù le mani dal cavaturaccioli! Non sto parlando di te! (RdA)*], abbiamo deciso di regalargli una accurata selezione di vini italiani: l’unico problema è che la sola scatola a disposizione, pur avendo esattamente la lunghezza di una bottiglia (tutte uguali, così anche da vuote fanno la loro figura) è un po’ più larga di tre bottiglie ma un po’ più stretta di quattro bottiglie; senza farci prendere dal panico [*Ciao, Sam!*], cominciamo a caricare il tutto.

Con ordine: **A**glianico, **B**arbera e **C**erasuolo li mettiamo sul fondo, con la prima e la terza che toccano i bordi verticali: tra le bottiglie avanza spazio (oltretutto, da come le abbiamo messe, disuguale), e quindi mettiamo il **D**olcetto e l'**E**rbaluce nei due buchi: le ultime due bottiglie non toccano il fondo e non sono allo stesso livello, Eulero e la sua Congettura si stanno rivoltando nella tomba, ma procediamo. **F**reisa, **G**rignolino e C**H**ianti[9] vanno al loro posto, con primo e ultimo anche qui a toccare i bordi, e il secondo nel "buco" centrale. Avanzano due buchi nei quali inseriamo **I**nzolia e **J**esi... Siamo quasi alla fine. Mancano tre bottiglie, che sistemiamo nei buchi, con prima e ultima a toccare i bordi...

L'idea, adesso, è quella di cominciare a spostare il Barbera (bottiglia centrale in basso) in modo tale da avere le ultime tre bottiglie "in piano", per chiudere la scatola e ottenere un sistema bloccato.

Secondo voi, ce la faremo? Che rapporto deve esistere, tra le distanze tra le tre bottiglie in basso e il lato della scatola?

...e trovate qualcosa di meglio, per la acca? E la kappa? A **L**ambrusco e **M**arzemino ci arriviamo da soli, grazie.

3. Bungee Jumpers

Due cerchi uguali tra loro, O_1 e O_2, sono tangenti tra loro e ai lati *AB* (O_1), *BC* (entrambi) e *CD* (O_2) del quadrato *ABCD*.

La tangente per *A* ad O_1 incontra la tangente per *D* ad O_2 in *E*: provare che il cerchio O_3 inscritto nel triangolo *AED* ha lo stesso raggio di O_1 e O_2.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Dicembre.

No, non è vero, dicembre molto avanzato, RM molto in ritardo e non una riga di questa rubrica pronta per l'uscita di RM. E allora facciamo così, ve ne dobbiamo una. La rubrica di gennaio sarà ricchissima vedrete.

Tanti auguri, ragazzi.

5. Quick & Dirty

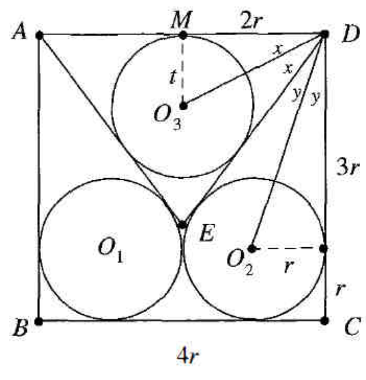
È un nostro tormentone ormai assodato che ad Alice non piace il Calcolo delle Probabilità per il fatto che "è troppo facile fregare con le parole": a giudicare da un grazioso problemino che abbiamo trovato, ci sentiremmo di darle ragione.

Se avete una moneta perfettamente onesta, scommettere a "testa o croce" di sicuro non vi permette di mantenervi nell'agio. Quindi, su, ad esempio, 100 tiri, ci aspettiamo che ottenere 50 volte testa abbia una probabilità un mezzo.

Sicuri?

6. Pagina 46

Sia la lunghezza del lato del quadrato pari a $4r$: in questo caso, il raggio dei due cerchi dati è pari a r. Se il raggio di O_3 è pari a t, il nostro scopo è di dimostrare che $r = t$.



Consideriamo la figura a lato: chiaramente, DO_3 e DO_2 bisecano gli angoli *ADE* e *EDC*, e questo ci dice che $2x + 2y = 90°$ e quindi che $x + y = 45°$.

Deve essere:

$$\tan y = 1/3,$$

e, dato che O_3 è tangente ad *AD* nel suo punto medio M,

[9] ...ve l'avevo detto, che avevo un problema con l'acca. Non mi piace (la scappatoia: sul vino, non si discute neanche), ma non ho trovato di meglio.

$$\tan x = t / (2r).$$

Da questo si ricava che:

$$1 = \tan 45° = \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

$$\Rightarrow \tan x + \tan y = 1 - \tan x \cdot \tan y \quad .$$

Ossia che:

$$\frac{t}{2r} + \frac{1}{3} = 1 - \frac{t}{6r} \Rightarrow 3t + 2r = 6r - t \quad .$$

Da cui:

$$t = r,$$

che è la tesi.

7. Paraphernalia Mathematica

Nonostante il vostro tonante silenzio, chi scrive è fermamente convinto che quanto raccontato nel numero 183 di una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa vi abbia lasciati tutti e due perplessi[10].

7.1 Utile per le feste

Che, per alcuni di noi, sono già cominciate, visto che stiamo scrivendo questo nella sera che gli americani del nord chiamano Thanksgiving. E a dicembre c'è il Natale, a gennaio compie gli anni un VAdLdRM, a febbraio festeggia la rivista, eccetera, eccetera, eccetera, eccetera *[Quattro in quanto ci sono altri quattro festeggiamenti, che per innata modestia non stiamo ad elencarvi]*. Capite che comincia a diventare piuttosto importante acquisire una certa *expertise* nel taglio delle torte, in modo da garantire l'assenza di sanguinari duelli per combattersi la fetta più grande.

Partiamo dal caso semplice, con *due* persone: qui, dai tempi della Bibbia, sappiamo benissimo che il modo migliore è quello noto come "Tu tagli, io scelgo": questo sembra molto onesto, in quanto chi taglia cercherà di essere più onesto possibile, visto che la scelta sarà poi del successivo. Ma la risposta classica (visto che tutti subodoriamo un tranello, anche dove non c'è) è "No, *tu* tagli e *io* scelgo!", visto che chi sceglie è, evidentemente, in una posizione migliore, pronto ad approfittare del minimo errore di chi taglia.

Se usciamo un attimo dalla matematica e pensiamo a coltelli e torte reali, con la sempre presente Dannazione di Avogadro, ci rendiamo conto che il secondo ha perfettamente ragione a voler scegliere: ma anche sorvolando sulla grigia e quantistica atomicità del mondo reale, se supponiamo l'utilizzazione di un coltello *matematico*, è facile rendersi conto che chi sceglie ha comunque l'*opportunità* di scegliere la fetta *che lui ritiene* più grande, visto che lavora su una scelta non modificabile dal primo *[e qui, Nash e Pareto ci sguazzano..]*.

Comunque, questo metodo risulta sempre il migliore, forse aggiungendo (con grande dispiacere di Alice) un scelta casuale di chi debba essere il detentore del matematico coltello; ma come comportarsi, nel caso che i Crostativori siano più di due? Non solo, ma potremmo pensare (e questo lo abbiamo, almeno in parte, già analizzato: andate a ripassare!) il caso nel quale i nostri abbiano differenti obiettivi (ad esempio, Rudy adora il bordo – senza mele – della torta di mele di sua suocera): nel seguito, esamineremo qualche problema di taglio delle torte ma, più che sulle soluzioni generali (visto che ci occupiamo di matematica *ricreativa*, e non vorremmo mai toglervi la *ricreazione* di una simpatica rissa con gli amici) ci focalizzeremo sui diversi casi piuttosto sorprendenti che possono nascere lungo la strada.

Tanto per cominciare, statuiamo le regole.

Supponiamo che n persone debbano condividere una *torta matematica*[11], e che siano tutti *ragionevoli*: con quest'ultima espressione, richiediamo che nessuna porzione della torta possa acquisire o perdere valore agli occhi di un qualsiasi giocatore per il solo fatto di essere intera o tagliata in un numero finito di pezzi.

Siccome dobbiamo dividere in n pezzi una torta e distribuirla tra n partecipanti, possiamo definire un *criterio di soddisfazione* che, in un afflato di originalità, chiameremo:

> **Criterio 1**: *Ogni* partecipante è convinto di aver ottenuto *almeno* $1/n$ della torta, secondo la *sua* misura.

---

[10] **Non** vi dico l'argomento, così almeno per curiosità siete obbligati ad andarvelo a cercare. E il numero dei lettori, pari ad un dodicesimo di quelli di Alessandro, è esattamente pari al numero di persone che leggono, correggono e approvano *[...e vorrei vedere!]* le mie bozze *[RdA]*.

[11] Nelle immortali parole di Kenneth Rebman, che ci rifiutiamo di tradurre: "*A mathematical cake enjoys wathever remarkable properties we may require during the course of the discussion*". Quando si dice il genio... Se scopriamo la data di nascita, garantito che finisce tra le citazioni del Calendario.

...vorremmo attrarre la vostra attenzione sul fatto che ci sono un mucchio di parole scritte in corsivo.

Esistono svariati modi per implementare il concetto generalizzato ma, anche se piuttosto elaborati da punto di vista matematico, non sono altro che generalizzazioni del "Tu tagli, io scelgo". Quindi, non preoccupatevi.

Per semplicità, cominciamo con il supporre di avere tre persone: Alberto (A_1), Aldo (A_2) e Azazel (A_3): uno di questi (supponiamo il primo) viene scelto casualmente come Operatore al Coltello: quindi, procederà a tagliare la torta in tre pezzi P_1, P_2, P_3 che *lui* ritiene ciascuno esattamente un terzo della torta unitaria.

Ma siccome dobbiamo seguire il C*riterio* 1, gli altri due mangiatori dovranno semplicemente specificare quale pezzo (o meglio, per restare sulle generali, *quali pezzi*) considerano valere almeno un terzo; per l'ipotesi della ragionevolezza, deve essercene almeno uno[12] che soddisfa il criterio.

Un buon metodo per raccogliere i dati è quello di usare una *matrice di scelta*: nella casella a_{ij} (i è la riga, j è la colonna) metteremo il valore "1" se il mangiatore A_i ritiene *accettabile* la fetta P_j. Ad esempio, potrebbe nascere la matrice di questo genere:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nel quale la riga indica la persona, e la colonna indica la fetta accettabile: a questo punto, potremmo effettuare una distribuzione del tipo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix},$$

dove le scelte sono indicate in grassetto.

Avremmo, però, potuto ottenere una matrice di questo genere:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

dove la distribuzione non sembra immediata. Ciò nonostante, una volta che il pezzo P_1 (o il pezzo P_3) sia assegnato ad A_1, entrambi gli altri contendenti sono d'accordo che *il restante contiene più dei due terzi dell'intera torta*, e quindi potrebbero applicare un metodo di scelta del tipo "tu tagli, io scelgo" con reciproca soddisfazione: delle 49 (sicuri? Verificate!) matrici che si possono generare, solo tre presentano questo problema aggiuntivo, ma sono tutte risolubili con piena soddisfazione del Criterio 1.

Generalizziamo il concetto: se sono coinvolte n persone, evidentemente utilizzeremo una matrice $n \times n$ con al suo interno valori 0 o 1 che, per comodità, chiameremo matrice *binaria* (in realtà il nome non è corretto, ma a noi fa comodo): posiamo un attimo la torta per studiare qualche proprietà di queste matrici.

Definiamo come *diagonale* generalizzata della nostra matrice l'insieme di n elementi della matrice data per due qualsiasi dei quali nessuno origini dalla stessa riga o dalla stessa colonna[13].

Chiaramente, sono possibili $n!$ diagonali di questo tipo, e per ogni diagonale possiamo calcolare il prodotto di tutti i termini che la compongono; se sommiamo poi tutti i valori ottenuti, quello che otteniamo è noto come il ***permanente*** della matrice; sembra complicato, ma se ci pensate un attimo il permanente non è altro che il determinante senza quella noiosissima regola dell'alternare i segni positivi e negativi: tutti positivi, qui.

L'unico modo che ha un permanente di una matrice di valere zero è quello di avere almeno uno zero per ogni diagonale, e la cosa sembra piuttosto facile; in realtà il valore

[12] E se a qualcuno di voi sta venendo in mente l'Assioma della Scelta, ha perfettamente ragione: ma visto che stiamo parlando di un numero finito di persone che scelgono, non ci occupiamo di questo.

[13] Come molte definizioni matematiche, la sua efficacia è superata solo dalla sua astrattezza.

zero si ottiene *se e solo se* nella matrice ci sono *un mucchio* di zeri: formalizzando un pochino la cosa, otteniamo il:

> **Teorema di Frobenius–König**: il permanente di una matrice binaria $n \times n$ vale zero se e solo se la matrice data contiene una sottomatrice $r \times s$ composta unicamente di zeri, con $r + s = n + 1$.

E questo teorema dall'aria innocua non è altro che la chiave di volta per generalizzare il metodo "Tu tagli, io scelgo" ad n persone.

Scelto a caso il tagliatore e fattagli dividere la torta con il coltello matematico, abbiamo che secondo lui tutti i pezzi sono ugualmente accettabili (è convinto di essere stato onesto) e ogni altro mangiatore è convinto che esista almeno un pezzo secondo lui accettabile: quindi possiamo rappresentare il tutto con una matrice binaria in cui la prima riga (quella di chi taglia) è composta tutta di 1 mentre le altre righe hanno tutte almeno un 1 (e 0 in tutte le altre posizioni).

Una qualsiasi diagonale generalizzata composta tutta di 1 rappresenta quindi una divisione accettabile da tutti per la torta: il problema nasce quando *ogni* diagonale contiene almeno uno zero: ma in questo caso, il Teorema F-K (applicato al contrario) ci garantisce l'esistenza di una sottomatrice $r \times s$ composta tutta di zeri con $r + s = n + 1$.

Supponiamo di scegliere tra le tante sottomatrici quella con r massimo: il fatto che la prima riga sia composta tutta di 1 ci garantisce comunque che $r \leq n - 1$.

Supponiamo di aver ottenuto la sottomatrice con $r = n - 1$, il che significa $s = 2$: dalla condizione di F-K e grazie al fatto che possiamo "riarrangiare" righe e colonne (non significa altro che cambiare l'ordine dei partecipanti o la numerazione delle fette. A ognuno, comunque, resta sempre la stessa scelta) possiamo ottenere quindi la matrice:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & 0 & x & \cdots & x \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & x & \cdots & x
\end{pmatrix},
$$

dove le x rappresentano delle componenti che possono essere zero o uno: la matrice $r \times 2$ che "frega" è quella in basso a sinistra.

Il primo pezzo (la prima colonna) possiamo darlo a chi ha tagliato la torta: a questo punto, però, i restanti $n - 1$ convitati, essendo ragionevoli, devono essere convinti che sul tavolo ci sono *più* di $(n - 1) / n$ parti di torta, e quindi si può ricominciare da capo con un giocatore in meno e arrivare sicuramente ad una divisione che soddisfa tutti.

Supponiamo però di aver ottenuto la nostra sottomatrice $r \times s$ di zeri ma, questa volta, con $r < n - 1$. Possiamo riarrangiare la matrice[14] come:

$$
\begin{array}{c@{}c}
 & \overbrace{\hphantom{1\ \ 1\ \ \cdots\ \ 1}}^{s-1} \\
\begin{array}{r} s-1\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\A\end{array}}\right. \\ r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\\vdots\\0\end{array}}\right. \end{array} &
\left[\begin{array}{cccc|c|cccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hline
 & & A & & * & & & * & \\ \hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & * & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & &
\end{array}\right] \\
 & \underbrace{\hphantom{0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 0}}_{s}
\end{array}
$$

dove gli asterischi hanno il ruolo delle x della matrice precedente.

Consideriamo una qualsiasi sottomatrice di zeri di dimensione $p \times q$ che si possa trovare nella sottomatrice B di dimensione $(s - 1) \times (s - 1)$ nell'angolo in alto a sinistra:

[14] Sì, è un disegno. Siamo in ritardo e a costruire una cosa del genere con il Formula Editor finiamo l'anno prossimo.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & & & \\ & & A & & \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

Questa matrice, combinata con la matrice $r \times s$ di zeri, produce una sottomatrice della matrice $n \times n$ di dimensione $(r + p) \times q$. Ora, se $(r + p) + q \geq n + 1$, allora possiamo trovare una sottomatrice di zeri le cui due dimensioni sommate valgono $n+1$ e che ha più righe della sottomatrice $r \times s$ che avevamo selezionato: ma avendo scelto r massimo, abbiamo:

$$(r + p) + q < n + 1,$$

ossia:

$$(p + q) < n + 1 - r = s.$$

Il che significa che la matrice B non contiene una sottomatrice di zeri di dimensione $p \times q$ con $p + q = (s - 1) + 1$. E quindi, dal Teorema F-K, non tutte le diagonali di b contengono uno zero, e una qualsiasi di queste diagonali senza zeri rappresenta un modo accettabile per distribuire $s - 1$ pezzi di torta: come prima, i restanti r festaioli sono convinti che sia rimasta più torta di quanto spetterebbe loro: quindi, sempre per il principio di induzione, ce la faremo a sfamare tutti gli imbucati alla festa.

Sin qui tutto bene, ma dopo lo scontro frontale tra il matematico e la realtà sappiamo benissimo chi andare a trovare al reparto Traumatologia: farebbe comodo un metodo, diciamo così, "reale", e che non richieda di spiegare teoria delle matrici a un branco di affamati che si ostinano a gridare "Viva gli sposi!" ad una festa di laurea.

Per semplificare il concetto (ma senza perdere in generalità) supponiamo la nostra torta sia rettangolare (il passare dalle coordinate cartesiane a quelle polari non dovrebbe essere un problema): muoviamo perpendicolarmente ai lati maggiori il nostro coltello, e quando qualcuno grida "Stop!" tagliamo, consegniamo la fetta a quello che ci ha stoppato e riprendiamo a muoverci, sino a quando qualcuno... e avanti così.

Adesso, pensateci un attimo, supponendo di avere un "goloso" che ritarda il più possibile lo "stop" in modo da accaparrarsi la fetta più grossa: rischia di prendersi la fetta più piccola, quindi in questo gioco l'onestà paga, visto che vi garantisce la fetta "vantaggiosa" (virgolette per ovvii motivi) o, quantomeno, quella secondo voi "onesta" (virgolette per motivi altrettanto ovvii). E, se applicate ad ogni giocatore il Criterio 1, vedete che tutti sono contenti visto che lo "stop" per il taglio della fetta lo hanno dato loro.

A questo punto, potremmo ritenerci soddisfatti, almeno, sin quando il solito rompiscatole se ne esce con: "Certo, io ho ricevuto almeno un ennesimo di torta, ma la sua fetta è più grande della mia!". In pratica, qui stiamo discutendo di dare un valore *frazionario* alla scelta, anziché un valore zero (inaccettabile) o uno (accettabile).

Qui, anche se sembra una stupidaggine, dobbiamo espandere il nostro concetto di *ragionevolezza*: per dirla semplice, assumiamo che per ogni persona, una qualsiasi fetta di torta non cambi il suo valore quando venga tagliata in una quantità *numerabile* di pezzi *[Certo, Assioma della Scelta: altrimenti, troppo facile fare guai, come con i dolci al Ristorante dell'Albergo di Hilbert (RdA)].*

Posiamo pensare di dividere la nostra torta in n pezzi (eventualmente disgiunti: insomma, un pezzo può essere formato da più pezzettini...): a questo punto, possiamo costruire la nostra solita matrice con una modifica: l'elemento m_{ij} indica secondo l'i-esimo mangiatore, che parte del tutto sia la j-esima fetta[15].

In questo modo, una data partizione in n fette produce una matrice $n \times n$ che, supponendo una certa lucidità da parte degli astanti, ha la caratteristica di avere ogni riga che

[15] Si noti che abbiamo detto "*secondo lui*": ognuno può quindi avere la sua personale metrica.

assomma a 1: se indichiamo con Ω l'insieme di tutte le partizioni di una torta, allora vale il:

> **Teorema L**: Se $M_1, M_2, \ldots, M_k$ sono matrici in Ω e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sono numeri non negativi tali che $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, allora anche $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i M_i \in \Omega$.

Poco chiaro? Certo, tant'è che non vi ho messo il nome dello scopritore, per non spaventarvi[16]. Ma cerchiamo di lavorarci sopra (no, non lo dimostriamo: come sempre, la dimostrazione è più complicata del teorema stesso, quindi...).

Prendiamo n matrici in Ω piuttosto speciali: nella fattispecie, la matrice M_j ha tutte le fette pari alla *fetta vuota* tranne la j-esima, che equivale all'*intera torta*: è evidente che queste matrici saranno composte tutte da zeri, tranne la j-esima colonna che sarà composta tutta da uni: per quanto balorde e inaccettabili possano essere queste suddivisioni, sono di sicuro possibili, e quindi saranno in Ω.

Ma allora, sarà in Ω anche la matrice:

$$M = \frac{1}{n}M_1 + \frac{1}{n}M_2 + \ldots + \frac{1}{n}M_k ,$$

che dà origine alla "matrice di preferenze":

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}:$$

ossia, tutti i partecipanti sono convinti che la suddivisione sia perfettamente onesta secondo le loro metriche!

Quindi, esiste una partizione che soddisfa il:

> **Criterio 2**: Ogni partecipante è convinto che, *secondo la sua metrica*, *ognuno* ha ricevuto la parte corretta di torta.

Cioè la divisione perfetta esiste. Ma trovarla è tutto un altro paio di maniche.

Auguri!

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[16] Lyapunov. Ossia, il miglior sinonimo di "incomprensibile".