Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 190 – Novembre 2014 – Anno Sedicesimo

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell’altro millennio da

Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM189 ha diffuso 3’156 copie e il 16/11/2014 per Google eravamo in 11’600 pagine.

Nonostante lo scrivente non sia un grande apprezzatore degli ombrelli, quando vede certe cose considera l’ipotesi del cambiare idea. Molto apprezzabile il tocco vagamente *steampunk* delle punte laterali, sottintendente “Indovina cosa succede alla tua macchina se passi nella pozzanghera vicina?”. Ma secondo voi, si apre “in un colpo solo” o vanno aperti cinque ombrelli? Certo che, se si “rivolta” per il vento, è più facile risolvere un cubo di Rubik, a occhio…

1. Costruttori di sogni

"Erit qui demonstret aliquando in quibus partibus cometae currant, cur tam seducti a ceteris errent, quanti qualesque sint"[1]

(Lucio Anneo Seneca
Naturales Quaestiones,
Libro VII)

Forse, tanto per cominciare, potrebbe essere opportuno prendere un po' di misure. Un po' perché vale sempre l'ammonimento supremo di Renato Caccioppoli ("*Se qualcosa ti spaventa, misurala; vedrai che dopo la paura passerà"*), un po' perché è effettivamente molto, molto facile perdere il senso delle proporzioni quando si parla di oggetti astronomici. E, visto che gli oggetti astronomici sono difficili da maneggiare, cominciamo con qualcosa di molto più terra terra.

I due zuzzerelloni redattori maschi di questa e-zine, da qualche tempo, sono stati colti da un ritorno di fiamma per una antica passione giovanile, il tiro con l'arco. Si ritrovano in un giardino sufficientemente appartato, lontano da occhi indiscreti che potrebbero essere esperti, in modo da non dover essere sottoposti a facili dileggi o commenti falsamente compassionevoli; e lì scoccano. Il bersaglio è un cerchio di 60 centimetri di diametro, regolarmente suddiviso in dieci corone circolari di eguale spessore: il punteggio massimo, che vale dieci punti e la gloria sempiterna per l'arciere che lo coglie, è pertanto assegnato quando la freccia coglie il piccolo cerchio centrale del raggio di 3 centimetri. I nostri due eroi si pongono solitamente a dodici metri di distanza dal bersaglio[2], e quando riescono a colpire il centro del festeggiano a lungo, perché saggiamente considerano l'evento del tutto eccezionale.

Ebbene, dal punto di vista strettamente geometrico, a cosa corrisponde questa "eccezionalità"? Non ci vuole molto a farsene un'idea: basta disegnare un triangolo rettangolo con un cateto lungo 1200 e uno lungo 3, e vedere quanto è ampio l'angolo sotteso: arcotangente di 3/1200, poco più di otto minuti d'arco[3].

Il 20 luglio 1969, a fare la parte della freccia sono stati tre uomini; la distanza era fissata in circa 400'000 chilometri, e il bersaglio era la Luna. Ad essere del tutto onesti, c'erano anche altre differenze al contorno, e non si può negare che "colpire il bersaglio" non era esattamente l'obiettivo principale di quell'esercizio; per non parlare dell'arciere, che era senz'altro qualcosa di più complesso di qualsiasi atleta, foss'anche olimpionico. Ma, visto che stiamo giocando con le misure, tanto vale continuare. Il raggio della Luna vale circa 1738 chilometri, che sottesi da una distanza di quattrocentomila chilometri valgono circa 15 minuti d'arco. Tzè. Dal punto di vista della mira, fare "dieci" nel nostro giardino è difficile il doppio.

---

[1] "E verrà un giorno chi saprà mostrare per quali sentieri le comete corrano, perché lo facciano in maniera così singolare, e quante siano, e che natura abbiano". (La traduzione è talmente poco accurata che è quasi inutile precisare che è fatta in casa, nevvero?)

[2] A scanso equivoci: una distanza di dodici metri e un bersaglio da 60 centimetri non sono oggettivamente delle misure olimpiche, come ben saprà chi di arcieristica si diletta. La distanza minima in gare ufficiali (indoor) è solitamente di 18 metri, e per tale distanza il target ufficiale è di soli 40 centimetri. Le distanze standard per il tiro all'aperto sono 30, 50, 70 e 90 metri, e per le due distanze maggiori il diametro del bersaglio è di 122 centimetri.

[3] Circa 8,6 secondi d'arco, se non abbiamo fatto confusione con la trigonometria e con i fogli elettronici. Un "dieci" ottenuto a 90 metri di distanza su bersaglio standard da 122 centimetri implica un angolo inferiore ai 2,33 secondi d'arco.

1 *Una specie di guanto di sfida*

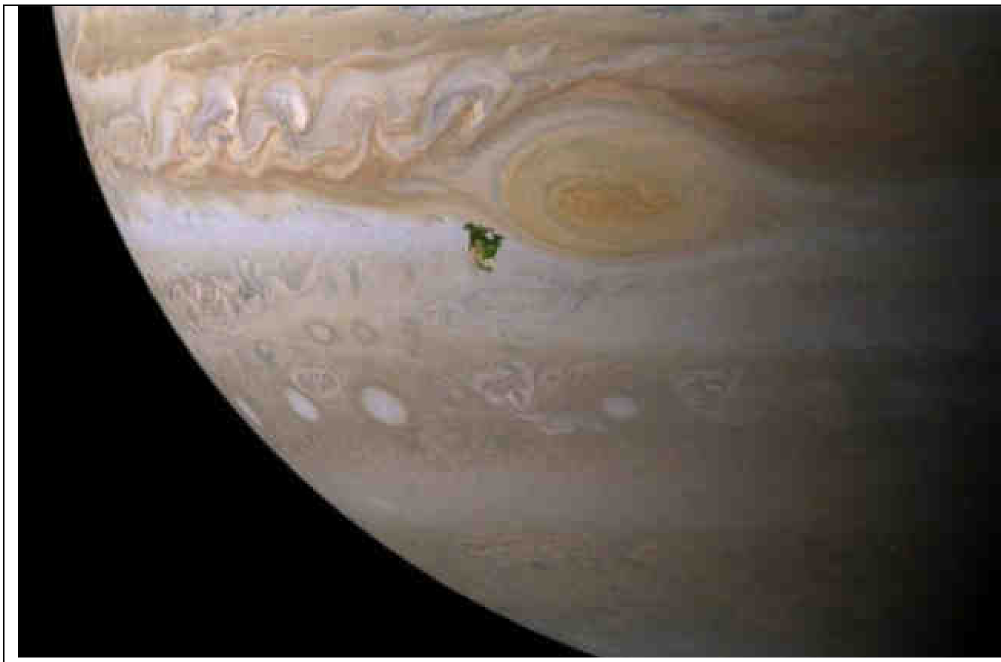
Ci sono sfide peggiori, però; ad esempio, quella sintetizzata da manifesto qua a fianco. Nella traduzione perde un po', ma quel che ci è scritto sopra suona, più o meno: "*Bello*, noi lanceremo questa scatola nello spazio e la faremo atterrare gentilmente su una cometa che viaggia a più di trentamila miglia all'ora, che dista più di trecento milioni di miglia, con un lancio che durerà più di tremila giorni. Firmato: gli Umani". La sola cosa che viene da pensare, di fronte ad una sfida del genere, è che è piacevole fare parte della stessa genia dei firmatari, piuttosto che di quella dei destinatari.

Il manifesto saggiamente descrive anche la velocità dell'obiettivo, quelle trentamila miglia all'ora (13500 metri al secondo, se preferite), ma trascura di specificare le dimensioni del bersaglio, che non supera i 4 chilometri nella sua estensione maggiore. Nella nostra equivalenza col tiro con l'arco da giardino, otteniamo… beh, è difficile anche solo scriverlo… i minuti d'arco sono unità troppo grandi, e anche i secondi sono un'esagerazione. Millesimi? Sempre troppo… bisogna scendere ancora, arrivare ai milionesimi, e fermarsi al valore di due. Due milionesimi di secondo d'arco. Visto che quello della "mira" è stato verosimilmente tutt'altro che il problema principale, non si può non rimanere a bocca aperta, e sottoscrivere il manifesto di sfida. Già, "*bello*"… visto che siamo in grado di fare, noi umani?

Misure. Difficile parlare seriamente di alcunché, senza tirarle in ballo. E proprio per questo bisognerebbe fare ogni sforzo possibile per cercare di capirle, capirle davvero, al meglio possibile. Cos'è davvero un "milionesimo di secondo d'arco"? Già gli angoli non sono tra le entità più familiari da visualizzare; resistono ancora, imperterrite, al sistema metrico decimale, cosa che le rende ancora più ostiche del normale; e in mezzo a tutto questo, ecco il milionesimo di secondo d'arco. Un giro, 360 gradi: mezzo giro, 180°; e quindi una svolta a destra o a sinistra, 90°, e va bene. Pertanto, un novantesimo di "svolta" è un grado: un sessantesimo di quel novantesimo è un primo; un sessantesimo (ancora) di quel primo, ed ecco il secondo d'arco. Un niente. E di quel niente, bisogna prenderne la milionesima parte.

Sono difficili, davvero difficili, certe misure astronomiche. Tornando ai 400'000 chilometri del viaggio Terra-Luna; quanti sono, in realtà? Come immaginarceli? Sono tanti? Pochi? Niente? Su scala astronomica, sono davvero pochi: però sono abbastanza per incastrarci, comodamente allineati, tutti i pianeti del Sistema Solare, e non si può dire che i pianeti siano piccoli, specialmente alcuni di loro.

Qua sotto, ad esempio, potete vedere un primo piano del primogenito, Giove. La macchietta verde che non è facile scorgere a prima vista assomiglia all'America del Nord perché è proprio l'America del Nord: o meglio, è un grazioso artificio grafico che mostra le proporzioni relative di Giove e del NordAmerica. Il Cristoforo Colombo di lassù avrebbe avuto vita dura a scoprirla, specialmente se se ne andasse in giro a cercare tutt'altro, come faceva quello che abitava il nostro pianeta.



2 *Come sarebbe il Nord America su Giove*

Insomma, i 400'000 chilometri della distanza Terra-Luna sono allo stesso tempo tanti e pochi; e in un certo senso anche i miseri quattro chilometri della cometa più famosa di questi giorni sono – allo stesso tempo – tanti e pochi. Di quanto siano pochi, non serve parlare ulteriormente: provate ad immaginarveli sulla macchietta verde nordamericana che galleggia vicino alla Grande Macchia Rossa di Giove, nella figura precedente. Ma non bisogna neppure sottovalutarli troppo, specialmente qualora alla cometa proprietaria dei quattro chilometri in questione saltasse il ghiribizzo di venire a salutare la Terra un po' troppo da vicino. Sempre fedeli al principio che un'immagine vale più di mille parole, ecco un esempio dei suddetti quattro chilometri molto, molto malposizionati:

3 *La cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko sopra Los Angeles*[4]

[4] Tutte le immagini usate fino a questo punto provengono dal sito http://www.iflscience.com/, che sta rapidamente diventando il nostro sito di riferimento per gli aggiornamenti scientifici.

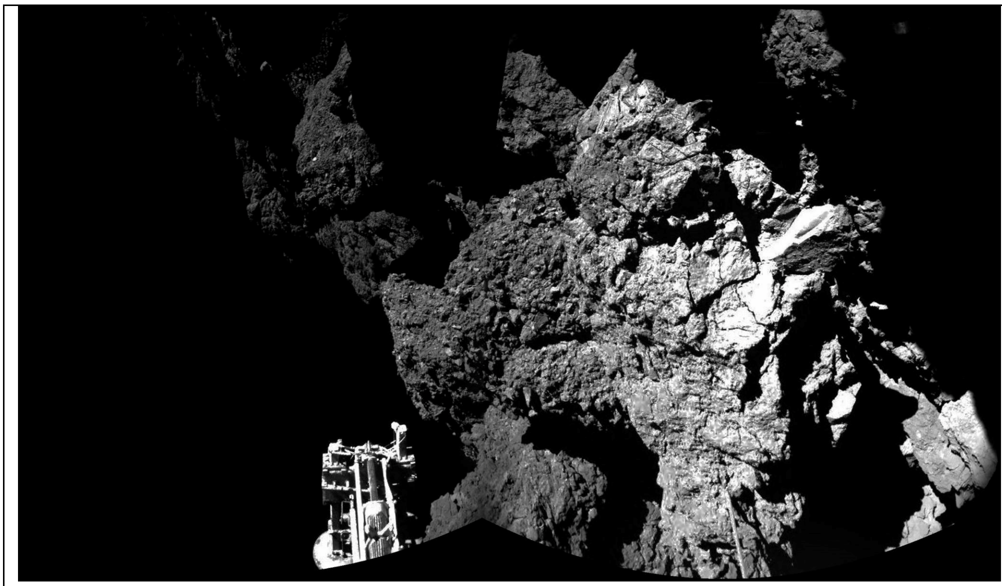
Misure. Davvero stupefacenti a volte, ma sempre e comunque assolutamente necessarie: altrimenti è impossibile capire la reale importanza di ogni impresa. E l'impresa coronata in questo novembre 2014 è oggettivamente eccezionale. Era il 2 marzo 2004, quando la sonda spaziale europea Rosetta ha preso il volo su un razzo Ariane 5: più di dieci anni fa. In questi dieci anni ha inseguito la cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko. Cometa scoperta nel 1969, che come molte consorelle porta due nomi: quello di Klim Ivanovič Churyumov, che la notò per primo su una fotografia astronomica, e quello di Svetlana Ivanovna Gerasimenko, che quella foto scattò, mentre era all'inseguimento di un'altra cometa.

È una cometa non particolarmente brillante, non particolarmente grande, con un periodo orbitale non particolarmente lungo, di soli sei anni e mezzo: il che significa che Rosetta, nel suo inseguimento decennale, le ha lasciato compiere quasi due orbite intere.

Dal canto suo, Rosetta ha un nome che riesce ad essere al tempo stesso estremamente impegnativo e disarmante, almeno per gli italiani. Disarmante perché poche cose sembrano più familiari della rosetta del panettiere, o del bocciolo del fioraio, quando non addirittura del nome della compagna di classe, e "Rosetta" è termine che si adatta perfettamente a tutte. Ma il nome della sonda discende invece – naturalmente – dalla Stele, da quel preziosissimo dizionario trilingue che consentì la decifrazione dei geroglifici. Perché l'idea è quella di toccare le comete – le comete non si toccano mai, a differenza delle meteoriti – toccarle e capirle, e con esse capire i misteri del Sistema Solare. Un dizionario cosmico, questo cercano gli scienziati. E per toccare la cometa, Rosetta ha portato nella sua pancia Philae. Philae è un nome originale, e coerente con quello di Rosetta: deriva dall'omonima isola del Nilo dove furono scoperti degli obelischi con duplice iscrizione, egizia e greca, che contribuirono anch'essi alla decifrazione dei geroglifici. È stata una ragazza italiana, Serena Vismara, a battezzare così il modulo di atterraggio di Rosetta: dieci anni fa, al momento del lancio dalla base di Kourou, Serena aveva solo quindici anni, e vinse il concorso bandito in rete per dare il nome al piccolo figlio di Rosetta. Adesso Serena è una donna di venticinque anni, ha quasi concluso il suo ciclo di studi in ingegneria (aerospaziale, naturalmente), ed è verosimilmente una delle persone più emozionate dall'avventura lanciata dall'Agenzia Spaziale Europea.

Rosetta ha seguito e accarezzato la cometa. Pochi giorni fa, ha lasciato andare Philae, raccomandandogli di toccare quel piccolo astro. In quello spazio lontano, il balletto a tre non ha direzioni familiari a noi poveri umani, ancorati alla gravità di madre Terra. Non c'erano razzi a guidare Philae, ed è difficile capire il verbo migliore per descrivere le sue sette ore da orfana, non più legata a Rosetta, non ancora legata alla cometa. La gravità è l'unica forza che poteva mutare i loro cammini, ma tra oggetti così astronomicamente piccoli, la gravità è più leggera e delicata d'una brezza. Philae aveva zampe da ragno, per toccare la cometa, ma non conosceva la consistenza della sua meta: morbida, dura come diamante, polverosa? Aveva arpioni, per ancorarvisi, piccole unghie da gatto per tenerla stretta. Aveva perfino un piccolo asso nella manica, una specie di razzo piccolo piccolo, che doveva schiacciarla verso la cometa, impedendole di rimbalzare via. Philae è leggera, non arriva a pesare un quintale, ma sulla cometa è leggerissima, pesa un grammo; dalla cometa è quasi più facile decollare che cadere.

E Philae è scesa, sulla cometa. In una danza lenta e magnifica come possono essere solo le danze nel silenzio dello spazio. Sotto gli occhi di Rosetta e della Terra, ha toccato la materia di cui sono fatte le stelle, quella materia che, fra qualche mese, disegnerà una coda luminosa e lunghissima quando la pressione del sole si farà sentire con più forza. L'umanità cavalca le stelle, con Philae, e lo fa come ha sempre fatto: con coraggio e fortuna, con impegno e paura, scommettendo contro l'ignoto per il puro gusto di renderlo un po' meno ignoto. Philae ha toccato la cometa. Il suo piccolo razzo che doveva tenerla più incollata non si è acceso, ma non è rimbalzata via. Le sue zampette di ragno non si sono trovate in condizioni tali da poter arpionare più stretta la cometa, ma le resta comunque attaccata. I pannelli solari che devono tenerla in vita non sono finiti in posizione ideale, e Philae ha dovuto presto smettere di trasmettere le sue impressioni di turista cometario, ma per un po' ha scritto, ha mandato dati e cartoline illustrate dallo spazio, come questa:



4 *Saluti e baci dalla 67P!*

E adesso dorme, stanca a provata dal viaggio. Forse si risveglierà, quando la cometa la porterà nelle regioni più calde della sua orbita. Forse no. Ma ci ha portato a cavallo d'una cometa, e cavalcare una cometa è un sogno talmente incredibile che anche da bambini si temeva di esagerare, a sognarlo.

Naturalmente, c'è anche chi non sa sognare per niente. Peggio ancora, c'è chi è convinto che i sogni siano fermi e sacri, regolamentati, e fruiti secondo precise disposizioni. C'è chi ha detto che Rosetta è costata troppo, e soprattutto che ha rovinato i sogni che tutti avevano da bambini. Perché tutti ricordano la cometa – anzi, la "stella cometa" – della Natività, o quantomeno quella dei film catastrofisti dove ci sono eroi pronti a farla saltare per proteggere la Terra. In un caso o nell'altro, la cometa è "magica", e invece Rosetta ha fatto scoprire al mondo che non si tratta altro che di un sasso. Niente magia, niente disastri hollywoodiani, solo un sacco di soldi spesi, per poi trasformare un sogno mistico in un sasso.

Non vale la pena di soffermarcisi troppo. Giusto il tempo necessario per notare come sia pericoloso comprare anche i sogni a scatola chiusa. La scienza non uccide i sogni, li crea. La "fredda" scienza, nell'ultimo secolo, ha messo in comunicazione virtuale tutti gli abitanti del pianeta, cosa che neppure la più grande delle poesie, o la maggiore delle opere d'arte, o la più fraternizzante delle religioni è mai riuscita a fare. Negli ultimi cento anni ha costretto gli esseri umani a far fronte ad una dimensione dell'Universo che è miliardi di volte più grande di quella che si pensava un secolo fa: solo una questione di misura, in fondo, ma sarebbe necessario che tutti coloro che provano a denigrare la scienza prima provassero almeno per cinque minuti a rendersi conto di quanto è cresciuta la visione dell'Universo rispetto a quella dell'Uomo, se non altro per fare un esercizio minimo di modestia.

Ogni europeo ha pagato 20 centesimi di euro all'anno per cavalcare una cometa. Non riusciamo ad immaginare sogni più grandi e più economici. Gli scienziati non è che lo facciano apposta: lo fanno per passione e per mestiere, senza troppo clamore: ma, che lo sappiano o meno, consapevolmente o meno, sono i veri costruttori di sogni, con buona pace dei bigotti.

Anche perché non era necessaria Rosetta per scoprire che le comete sono sassi celesti. Lo si sapeva da un bel po'. Un sacco di esseri umani sono stati col naso all'insù a guardare il cielo, facendosi domande. Seneca, come dimostra la citazione all'inizio di questo pezzo, aveva una consapevolezza del cosmo molto maggiore dei denigratori odierni, pur non avendo nessuna delle migliaia di informazioni che i denigratori suddetti hanno a portata di mano. E che le comete non fossero "stelle comete", ma qualcosa di diverso, è cosa risaputa da tempo, perché ha quel minimo di curiosità del mondo che lo circonda.

E guarda caso, uno di quelli che ha chiarito all'umanità alcune caratteristiche sorprendenti delle comete è nato proprio in Novembre.

5 *Edmond Halley*

Edmond Halley nacque l'otto Novembre 1656 nei pressi di Londra, a Haggerston. Di famiglia benestante, non ebbe però vita troppo agiata perché suo padre perse quasi ogni suo avere nel grande incendio di Londra del 1666. In ogni caso, Edmond ebbe una buona educazione, che ripagò ampiamente mostrando ottimo profitto sia nelle materie classiche sia in quelle scientifiche.

Entrò nel celebre Queen's College di Oxford nel 1673, appena diciassettenne ma già ben formato come astronomo, e con una preziosa collezione di strumenti astronomici che suo padre aveva acquistato per lui.

La sua carriera – ma forse è più corretto dire la sua vita – da astronomo è già iniziata e definita: appena due anni dopo l'ingresso al College lo troviamo assistente di Flamsteed, che si fregia del titolo di Astronomo Reale. Prima ancora di laurearsi, decide di interrompere gli studi accademici per imbarcarsi verso l'isola di Sant'Elena: con ogni probabilità, questo era dovuto al desiderio ci completare le mappe del cielo australe, in accordo e sinergia con lo stesso Flamsteed, che proprio in quei tempi aveva seguito l'apertura del grande osservatorio astronomico di Greenwich, nel quale avrebbe iniziato la mappatura del cielo boreale.

La missione era senza dubbio importante, e certo avventurosa: Sant'Elena era a quel tempo il possedimento britannico più meridionale, e Halley ottenne il supporto e l'investitura massima possibile: quella del sovrano Carlo II. Rimase nell'isola diciotto mesi, e il tempo inclemente non gli fu d'aiuto: ma riuscì comunque a catalogare più di trecento stelle dell'emisfero meridionale e a migliorare gli strumenti che aveva in dotazione.

Tornato a Londra, scoprì d'essere diventato abbastanza famoso nell'ambiente degli astronomi, pur non essendo neppure laureato: laurea che comunque ottenne presto, al suo ritorno, senza neppur dover discutere una tesi, su ordine diretto del re d'Inghilterra; contestualmente, fu eletto membro della Royal Society. Era il 1678, Halley aveva appena ventidue anni.

La rapida fama ebbe però i suoi lati negativi: Flamsteed, che pure lo apprezzava molto come collaboratore, divenne presto un concorrente e avversario. Piuttosto che confrontarsi con l'Astronomo Reale, Halley decise di intraprendere un viaggio di studio e formazione attraverso l'Europa.

Il periodo seguente fu denso di avvenimenti, non solo di natura scientifica: viaggiò prima in Francia, dove insieme a Cassini cominciò a seguire i movimenti di alcune comete provando a determinarne le orbite; quindi in Italia, poi di nuovo in Inghilterra, dove prese moglie. Poco dopo, nel 1684, suo padre morì, e la gestione del patrimonio familiare lo assorbì per un lungo periodo. In quei tempi, Halley stava seguendo una sua illuminazione della quale cercava disperatamente una dimostrazione, ovvero che la Terza Legge di Keplero implicasse la legge di attrazione gravitazionale secondo l'inverso del quadrato della distanza. Nei suoi tentativi ne parlò con i maggiori dotti del tempo: Wren, Hooke[5] e altri. Finalmente, nel 1682, riuscì a fare una visita a Newton, a Cambridge, scoprendo che il grande Isaac aveva già dimostrato la sua congettura e molti altri risultati notevolissimi, pur non avendo ancora intenzione di pubblicarli. Ancorché intristirsi della cosa, Halley supplicò Newton di pubblicare quei lavori[6], offrendosi di pagare lui stesso i costi di stampa, visto che la Royal Society era momentaneamente a corto di fondi.

Offerta che venne accettata: Halley pagò tutte le spese, revisionò tutte le bozze, e fece solerti pressioni presso lo stampatore affinché il lavoro vedesse la luce il più presto possibile. Forse è eccessivo pensare che senza Halley la più grande opera della filosofia naturale non avrebbe mai visto la luce, ma è verosimile che qualcosa del genere sarebbe anche potuta accadere.

Halley si candidò alla cattedra saviliana di astronomia a Oxford, ma non l'ottenne per l'opposizione di Flamsteed: abbastanza curiosamente, gli argomenti che Flamsteed usò contro la candidatura di Halley non furono di natura scientifica, ma di dottrina religiosa. Halley non veniva considerato sufficientemente "osservante" per un posto di così alto prestigio.

Senza una cattedra a cui badare, Edmond continuò a lavorare soprattutto per conto della Royal Society, occupandosi perfino di studi statistici, assolutamente nuovi per l'epoca. Verso il 1695, torna ad occuparsi delle orbite delle comete: il suo idolo, Newton, riteneva che le orbite delle comete potessero essere solo paraboliche, ma Halley era convinto che potessero esistere anche delle orbite ellittiche. Forte di quest'idea e immergendosi nelle ricerche e nei calcoli, giunse alla conclusione che la cometa apparsa una dozzina d'anni prima, nel 1682, potesse essere lo stesso oggetto celeste che era stato visto nel 1531 e nel 1607. Convinto delle sue idee, giunse a pubblicare, nel 1705, una memoria in cui prediceva il ritorno della stessa cometa nel 1758, dacché riteneva che fosse un corpo celeste con orbita ellittica del periodo di 76 anni.

Edmond Halley non ebbe la fortuna di vedere dimostrata la sua teoria, perché morì – e non certo giovane – nel 1742; avrebbe dovuto raggiungere i 102 anni di età per vedere la notte di Natale del 1758 illuminata da quella cometa che oggi porta il suo nome.

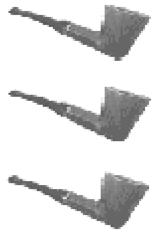
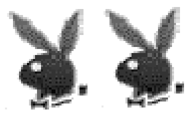
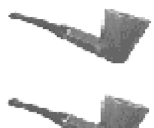
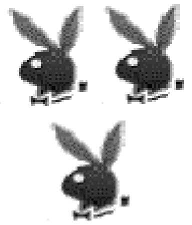
Anche Halley fu un distruttore di sogni? Tolse fascino alla magia della cometa, prevedendone il ritorno? È più affascinante un mondo ove ogni tanto si accendono delle luci senza causa, o un universo che è indagabile, conoscibile, con stelle e galassie leggibili attraverso i loro spettri, con comete piccole, veloci, luminose, alcune che tornano, altre che fuggono per sempre, ma in ogni caso tracciabili dalle equazioni scritte dalla natura?

Quali sogni sono migliori?

[5] Protagonisti rispettivamente di "Fuoco", RM105, e "Il brutto anatroccolo", RM114.

[6] Quei "lavori", ovviamente, altro non erano che i "Principia Mathematica". E di Newton parliamo diffusamente in "Il Tempo e il Denaro", RM071.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Questa è dura			
Non finisco mai i carnevali!			

2.1 Questa è dura

In entrambi i sensi: il problema è complicato (ci dicono, in particolare, per il valore "7"), ma anche l'aggancio non è facile; il fatto è che volevamo parlarvi di una cosa, che contiene un intrigante problemino matematico: non vi chiediamo di risolverlo, ma almeno di pensarci e, *si parva licet*, di collegarlo alle elezioni presidenziali americane, visto che hanno presentato alcune volte la stessa anomalia.

Al momento, nonostante lo scrivente si trovi ampiamente confinato nella seconda metà di ottobre, un tiepido solicello fa ben sperare sulla possibilità, nel prossimo fine settimana, di replicare il tiro con l'arco alla *Steppa dei Chinotti*.

Sabato scorso, Rudy si è presentato con una novità: conscio del fatto che avrebbero tirato solo lui e Doc (il VadLdRM Fred era impegnato con l'amica[7]), aveva deciso di sperimentare il nuovo metodo di conteggio dei punti della Federazione Internazionale di Tiro con l'Arco, che andiamo a spiegarvi.

Si tirano tre frecce a testa, e si contano i punti (...e sin qui...); sui punti di questa volée, si attribuiscono i *match point*: due a chi ha fatto più punti, zero a chi ne ha fatti meno, in caso di parità un punto a testa.

Il *match* finisce quando qualcuno arriva a *sei* punti o quando si sono fatte *cinque* volée; nel caso di parità (sui match point) dopo la quinta volée, si fa un'ulteriore volée di una sola freccia e si vede chi vince: se punteggio pari anche questa volta, si misura la distanza dal centro di ogni freccia (solo di questi ultimi tiri) e si vede chi è andato più vicino.

Se la cosa vi sembra cervellotica, sappiate che si sono anche inventati un *ranking* mondiale (insomma, come dice Fred: "Se mettono da qualche parte delle racchette, si potrebbe chiamarlo tennis"), e il metodo di calcolo fa sembrare il sistema ELO una tranquilla passeggiata ai giardini pubblici[8].

[7] Articolo determinativo voluto per palesi motivi. Rudy l'ha soprannominata (per motivi che vi terremo nascosti) "la Neutrina".

[8] Non ve lo spieghiamo per il semplice motivo che è *moltiplicativo* e se siete in meno di nove incapaci va tutto a zero: capite che, tirando in due...

Questa volta, almeno nelle opinioni dello scrivente, Rudy ha perso con onore: 6-0, 6-0, 6-4, 6-4; ma nel corso dell'ultimo match, è successa una cosa strana[9]: sulla sinistra Rudy, sulla destra Doc.

	1	2	3	Tot	Sum	MP	MP		1	2	3	Tot	Sum
1	3	7	6	16	16	0	2	1	6	8	8	22	22
2	8	8	7	23	39	2	0	2	6	8	8	22	44
3	7	8	10	25	64	2	0	3	7	7	7	21	65
4	4	5	10	19	83	0	2	4	7	9	9	25	90
5	4	6	8	18	101	0	2	5	9	10	10	29	119

OK, Doc tira meglio di me (sia come μ che come σ), ma sono contento per una cosa (a parte l'aver superato il 100): dopo la terza volée, ero in vantaggio per 4-2! Ma, se guardate bene, dovreste accorgervi di un grazioso paradosso: *non sono mai stato in vantaggio ai punti*: era sempre davanti Doc.

Neanche da dire, un sistema di punteggio che permetta simili interessanti diatribe dialettiche è il nostro: d'ora in poi, sempre e solo questo, a costo di trasformare in numero pari i partecipanti.

Bene, questo era quanto volevamo dirvi e che non c'entrava niente: ulteriori notizie sui tiri della settimana prossima li avrete eventualmente con il numero di dicembre. E adesso, veniamo al problema.

In occasione della chiusura del *campo di tiro* (che, per l'occasione, è stato definito come un quadrato 20x20, bordi inclusi), Doc sta studiando una decorazione per l'inverno: fermo restando che il fondo resta a prato inglese, intende mettere un certo numero[10] $k = \{6, 5, 8, 7\}$ di alberelli pseudo-bonsai, e poi considerare tutti i triangoli costruibili con vertici in questi punti; di questi, sceglierà quello con l'area minore, e l'intero triangolo scelto verrà piantumato ad erica (bianca, per i fanatici delle notizie inutili).

L'aver già scelto il triangolo di area minore fa sì che, per evitare facili scelte a crescita zero, si intenda selezionare quello di area *massima*: quindi, il vostro scopo è quello di posizionare i punti (nel numero dato) in modo tale che il triangolo minore abbia l'area massima possibile.

"...E per quale motivo dovremmo fare una stupidaggine simile?" Semplice: Doc vorrebbe sapere, in funzione del numero k di punti, quante piantine di erica, ciascuna coprente area unitaria, comprare.

Tranquilli, quando si ricomincia a tirare le togliamo. A Rudy l'erica è simpatica, ed è dolorosamente conscio delle sue capacità di tiro.

2.2 Non finisco mai i Carnevali!

Nel senso di finire di leggerli: per fortuna, di solito siamo gli ultimi e quindi le ultime cose le so già. Lungi da noi l'idea di lamentarmi della loro lunghezza, anzi. Quel che mi frega è l'inizio.

Quando compare il CdM numero n, si parte con la spiegazione che è un numero di Pinkopallino, difettivo (o abbondante: mai che vi vada bene, vero?) e cose di questo genere; va regolarmente a finire che mi perdo a leggere le definizioni e non mi resta il tempo per leggere gli ultimi articoli linkati: come dicevo, di solito siamo gli ultimi e quindi non mi perdo troppo, ma ammetterete che la cosa è seccante (...e poi Treccia si

[9] Rudy non resiste all'idea di mostrarvi il suo primo (e, probabilmente, ultimo) "cento" della stagione, quindi vi diamo tutto lo scorepad.

[10] Il modo balordo di inserire i valori non è dato da scelta sadica: secondo alcuni, sono in ordine di difficoltà.

lamenta che non vado mai a rispondere sul blog... Certo, sono perso tra Numeri Licantropi e Margheritisti[11]!).

Ho quindi la precisa intenzione di vendicarmi.

Ho appena scoperto l'esistenza dei *Numeri Trapezici* (visto che "trapezoidali" risulta occupato, sono "trapezici"): se n è un Numero Trapezico, deve essere possibile inserire i numeri da 1 a n in un trapezio, in modo tale che ogni numero sia pari alla differenza (in valore assoluto) tra i due numeri sopra di lui: per intenderci, 14 è un Numero Trapezico (di *base* 5 e *altezza* 4):

9		13		1		11		14
	4		12		10		3	
		8		2		7		
			6		5			

Un Numero Trapezico n, insomma, deve ammettere tutti i numeri tra 1 e n in una costruzione con le righe formate da L, L-1, L-2, …, L-H numeri: se L=H, il trapezio diventa un triangolo e il numero si dice *Numero Tringolo*, visto che "Triangolare" è occupato *[Treccia, "Tringolo" non è un typo con la solita "a" caduta]*[12].

Adesso, alcune domande.

Tanto per cominciare, potreste determinare quali numeri dispari o quali potenze di 2 sono Trapezici. Oppure, potreste procurare una lista di Numeri Trapezici e, quando vi tocca il Carnevale, mettere l'opportuno sviluppo: a quel punto, Rudy potrebbe essere fiero di sé, saltare il pezzo e, una volta tanto, arrivare alla fine del post...

3. Bungee Jumpers

Sono dati sei punti su un cerchio: l'ortocentro del triangolo definito da tre di questi punti è unito da un segmento al centroide del triangolo formato dagli altri tre punti.

Provate che i venti segmenti che possono essere definiti in questo modo sono tutti concorrenti.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Novembre!

Ebbene sì, c'è anche RM a novembre, anche quest'anno. Non sappiamo come e quando, ma arriva. I vostri redattori sono sempre più provati, sempre più evanescenti, ma alla fine sono ancora qui. Per fortuna che ci siete voi a leggerci, o avremmo gettato la spugna tanto tempo fa.

Ma bando alle ciance, vediamo quali soluzioni ci sono giunte in questo difficile ottobre. Ma prima, una piccola nota dolente che riguarda l'estate.

4.1 [187]

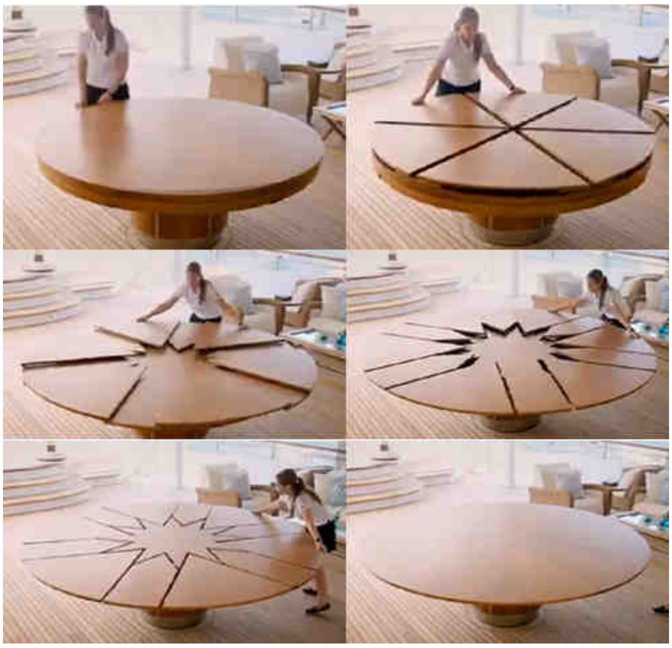
4.1.1 Summer Contest

È vero che il summer contest è stato presentato ben tardi, ma io ho aspettato novembre per pubblicare i risultati… e non posso nemmeno permettermi di usare il plurale perché ne è arrivato solo uno, del solito grande ***Sawdust***. Comunque vediamo di cosa si parlava:

> *Ispirato da un bel video (https://www.facebook.com/photo.php?v=448967958528455) passato in rete, Rudy chiede di capire se esiste una "dimensione limite" per la versione grande rispetto a quella piccola, quali debbano essere le dimensioni dei vari pezzi. Vi ritagliamo i passi fondamentali del video in foto.*

[11] Se esistono, mi arrabbio. Nelle mie intenzioni vorrebbe essere un gioco di parole piuttosto stupido.

[12] *La nota la lascio di proposito, così capite che cosa mi tocca leggere ogni mese… (NdA)*



Bene, come detto, l'uomo più adatto a rispondere a un quesito del genere era senz'altro ***Sawdust***, e così ha fatto, in una insonne notte estiva:

> Ormai è da un po' (forse anche troppo!) che vi lascio tranquilli, ma visto che si parla di tavoli mi sento in dovere di intervenire anche se ultimamente ho dovuto dedicarmi ad altro.
>
> Premesso che avevo già visto l'oggetto in questione (sì, va bene, solo il video su facebook) poiché un amico mi aveva passato i link a un paio di cose di quel genere e stabilito rigorosamente che non ho nessuna intenzione di provare a riprodurlo, veniamo al problema.
>
> Chiaramente in una delle due posizioni non può essere rotondo, visto che i pezzi che lo compongono si spostano, ma non cambiano la loro forma. Credo che sia preferibile averlo rotondo nella posizione più grande per cui, ipotizzando un "raggio" di 60 cm quando è ristretto, penso che, rimanendo anche in questo caso a livello teorico e trascurando gli spazi necessari a lasciar passare i supporti dei vari pezzi (facciamo conto anche qui di essere in una situazione ideale, con supporti che pur essendo sottilissimi hanno la rigidità necessaria), si possa raggiungere un raggio massimo di 90 cm.
>
> In realtà è un po' meno di 90 cm e andiamo a vedere perché.
>
> I vari pezzi che concorrono alla costruzione hanno queste forme:
>
> - 6 pezzi costituiti ognuno da 1 triangolo equilatero di lato 60 cm in cui un lato ha in realtà andamento curvilineo. Se la curvatura di questo lato fosse con raggio 60 cm nella posizione aperta si avrebbe un contorno con una forma troppo a "fiore" che non mi pare carina; con la curvatura di raggio 90 cm per prima cosa nella posizione chiusa il contorno avrebbe una forma troppo esagonale, ma soprattutto non riuscirebbe a coprire gli altri pezzi, per cui ho provato con una curvatura di 80 cm e la cosa potrebbe quasi essere passabile. Quindi la forma è quella di un triangolo equilatero a cui è stato aggiunto un segmento circolare di raggio 80 cm e ampiezza circa 44°.
> - 6 pezzi costituiti ognuno da un quadrato di lato 29,82 cm unito ad un triangolo isoscele i cui lati sono lunghi 30,18 cm e a un segmento circolare sempre di raggio 80 cm e ampiezza di 21,6° circa.
> - 1 pezzo a stella con 12 punte in cui il raggio interno è 30,18 cm e il raggio esterno è 58,12 cm.

In questo modo nella versione chiusa il "raggio" varia da 60 cm (nei vertici dei triangoli) a 57,79 cm nel punto medio del lato curvo con un valore (che è quello che ci interessa perché è lì che finiscono le punte della stella) di 58,32 cm a ¼ della curva.

Nella versione aperta invece il "raggio" varia da 87,28 cm (sempre nei vertici dei triangoli) a 87,79 a metà della curva, per cui il rapporto richiesto tra i "raggi", se dividiamo tra loro i 2 minimi e i 2 massimi, varia tra 1,46 e 1,51.

Se invece rapportiamo i "raggi" misurati negli stessi punti (vertice con vertice, punto medio con punto medio della curva) il rapporto varia da 1,45 a 1,52.

Per una volta non ti metto disegni perché con tutte le righe di costruzione nella fretta sono venuti un po' incomprensibili, ma penso che si capisca anche solo così.

Beh. Questo è tutto. Del resto l'inverno è arrivato e di estate non si può più parlare. È già tempo di strenne e di calendari, e dobbiamo darci da fare a occuparci del nostro, che – come avete già capito – è in ritardo. Ah, a proposito di calendari…

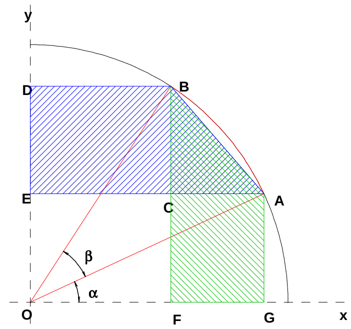
4.2 [Calendario 2013]

Beh, la soluzione viene – come quasi tutte quelle calendaristiche – da ***Sawdust***, e si era persa nel mio caos l'anno scorso. Bene, arriva adesso, più avanti vedrete perché.

4.2.1 Febbraio 2013 – Putnam, 1998, A-2

Sia s un qualsiasi arco del cerchio unitario giacente interamente nel primo quadrante. Sia A l'area della regione giacente sotto s e sopra l'asse delle x; sia B l'area giacente alla destra dell'asse y e alla sinistra di s.

Dimostrare che $A + B$ dipende solo dalla lunghezza di s e non dalla sua posizione.



Il problema è raffigurato qui a fianco. Visto che non dobbiamo calcolare il valore dell'area, ma solo verificarne la costanza, possiamo tralasciare il segmento circolare delimitato dalla corda AB che ha comunque un'area costante e limitarci a considerare le aree dei 2 trapezi rettangoli e quindi:

$$A_1 = \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta))(\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta))(\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta))$$

che sommate danno:

$$2A = (\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta))(\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha) + (\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta))(\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)) =$$
$$= 2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta) - 2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$$

E tralasciando ancora il coefficiente 2:

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = \\
&= \cos\alpha(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) - \sin\alpha(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \\
&= \cos^2\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + \sin^2\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta = \\
&= \sin\beta(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \sin\beta
\end{aligned}$$

4.3 [189]

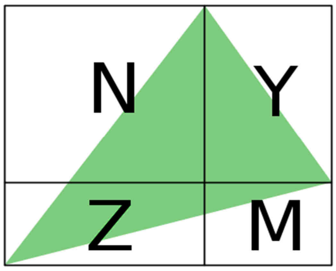
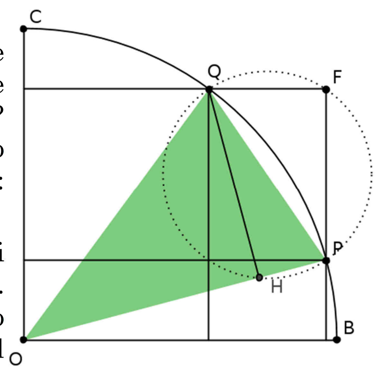
Finalmente le soluzioni del mese passato. Purtroppo ad un problema solo, ma noi siamo già molto felici così.

4.3.1 La "STEPPA DEL CHINOTTO"!

Adesso che il Capo ha trovato un altro nome in codice per i suoi tormentoni a comprensione limitata ai pochi eletti (in molti casi solo lui), non lo teniamo più. Per fortuna che i problemi dei tiratori con l'arco hanno un successo incredibile. Vediamo questo:

> *Nella SdC, ci è avanzato un quadrante di cerchio da decorare con gli opportuni fiori. Doc ha intenzione di coprire un arco (PQ) del bordo del quadrante con un dato numero di begonie: non ha deciso dove sia di preciso PQ sull'arco, ma è sicuro sul numero di begonie e quindi sulla sua lunghezza. Inoltre ha deciso di tracciare alcune righe:*
>
> 1. *Da P verso l'asse delle ascisse che limita il quadrante*
> 2. *Da P verso l'asse delle ordinate che delimita il quadrante*
> 3. *Da Q verso l'asse delle ascisse che delimita il quadrante*
> 4. *Da Q verso l'asse delle ordinate che delimita il quadrante.*
>
> *A questo punto, a parte un rettangolo con un vertice nell'origine che non considereremo, dovreste avere un paio di rettangoli, con i vertici "in alto a destra" rispettivamente in P e Q. Qual è l'area di questi due rettangoli in funzione di PQ?*

La rima soluzione è quella di ***Gnugnu***:

> *Evidenti ragioni di simmetria* ci porterebbero a ricercare i valori 'interessanti' dell'area da seminare agli estremi delle possibili posizioni dell'arco PQ e nel punto in cui questo è centrato rispetto al quadrante, ma esageriamo e prendiamola da lontano, cercando di evitare la goniometria, altrimenti mi si irrita lo stomaco,
>
> Un rettangolo di area S viene diviso da due secanti. parallele ai lati e perpendicolari fra loro, in quattro rettangoli di area M, N, Y e Z.
>
> 
>
>
> Un vertice qualsiasi del rettangolo e le intersezioni dei lati uscenti dal vertice opposto con le due secanti sono i vertici di un triangolo (in verde nella figura) di cui si vuole conoscere l'area T.
>
> Possiamo pensare il rettangolo iniziale scomposta nel triangolo verde e nei tre triangoli non colorati, procedendo dal basso in senso antiorario troviamo,
>
> $$S=T+(Z+M)/2+Y/2+(N+Z)/2,$$
>
> che moltiplicata per 2 diventa
>
> $$2S=2T+2Z+M+N+Y.$$
>
> E ancora, visto che S è la somma dei quattro rettangoli più piccoli, S=2T+Z, ma anche e per lo stesso motivo,
>
> $$M+N+Y=2T \textbf{ [1]}.$$
>
> Vabbè! T lo abbiamo trovato, ma cosa ce ne facciamo?
>
> 
>
>
> Consideriamo la circonferenza con centro nel vertice del triangolo in comune con quello del rettangolo e passante per gli altri due. Non ci passa? Aggiustiamo il rettangolo: allunghiamo un lato o accorciamo l'altro! Oggi però, siamo molto fortunati: ci passa, senza problemi.
>
> OBC è il quadrante da decorare, sull'arco PQ ci stanno le begonie, M+N è l'area da seminare. Epperò, se PQ è costante anche l'area del triangolo non cambierà, se tracciamo la sua altezza QH, il doppio di T sarà sempre OP·QH e la **[1]** ci dice che

M+N=2T–Y dipenderà solo da Y, che è a sua volta un rettangolo di diagonale PQ costante.

Mentre PQ si sposta lungo l'arco BC, F starà sempre sulla circonferenza di diametro PQ, e Y raggiungerà il suo valore massimo quando F appartiene alla bisettrice del quadrante, cioè quando Y diventa un quadrato la cui area è $PQ^2/2$. Due minimi, di uguale area, si hanno invece quando un lato del triangolo verde si appoggia ad un lato del quadrante, in questo caso sarà Y=PH·QH.

Il prode arciere dovrà acquistare semenza per un'area non minore di OP·QH – $PQ^2/2$ e non maggiore di OP·QH – PH·QH = OH·QH.

Volendo esprimere (l'utilità è dubbia!) M+N in funzione del raggio r del quadrante e degli angoli POQ=β e BOP=x, visto che l'angolo FPQ è uguale a $\beta/2+x$, si trova:

$$M + N = 2T - Y = r^2\left[\sin\beta - (1-\cos\beta)\sin(\beta + 2x)\right].$$

Benissimo. Vediamo ora che ne dice ***Sawdust***:

Il quesito mi ricorda molto un problema "da Calendario" (Febbraio 2013) del quale dovrei avervi inviato una soluzione a gennaio del 2013, ma visto che era in anticipo sul mese, forse avete aspettato a pubblicarla e poi… [*vedete nella parte dei calendari… (NdA)*]

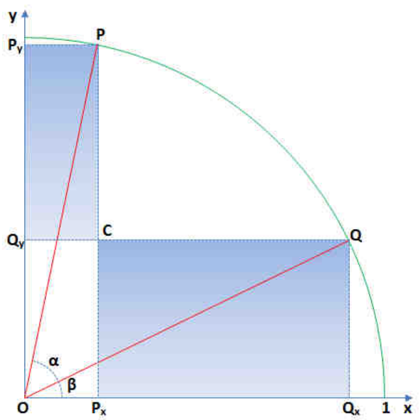
Per tornare al problema di RM189, la differenza è che in questo non sono comprese le aree del triangolo ABC e del segmento circolare sotteso dalla corda AB (quest'ultima, data la sua costanza veniva tralasciata anche prima).

Ma l'area del triangolo varia di molto tra quando l'arco di riferimento si trova al centro del quadrante (e quindi il triangolo è isoscele) e quando l'arco stesso è posto ad una estremità (e in questo caso i lati del triangolo sono molto diversi).

Perciò l'area che Doc vuole seminare sarà minore se pianta le begonie a metà del bordo curvo del quadrante.

Notate che l'interpretazione è diversa? Vediamo per concludere la versione di ***BR1***:

Allora, il disegnino che illustra la faccenda dovrebbe essere quello qui sotto; non sappiamo però quale sia l'obiettivo di Doc: as usual le *istruzioni per l'uso* del quesito oscillano fra il criptico ed il quantisticamente indeterminato… Doc vuole minimizzare la spesa per la semina dei rettangoli azzurri? O vuol sapere quale spesa massima deve eventualmente prepararsi ad affrontare?



Comunque sia, cominciamo con qualche premessa; in primis, non sappiamo quanto sia ampio il quadrante. Ritenendo lecito il poterci semplificare la vita, e giacché ci troviamo nella ***SdC***, introduciamo una nuova unità di misura per estensioni lineari, il ***Sadec***. Un ***Sadec***, per definizione, è pari ~~alla quarantamilionesima~~ al raggio del quadrante di cerchio da adornare del giardino di Doc. La neonata unità di misura è implicitamente dedicata ad un noto Marchese che, ai tempi della Rivoluzione Francese, somministrava mensilmente quesiti matematici al suo nutrito stuolo di amichette, selezionate quest'ultime da un *abbondante* catalogo di bottigliette di chinotto…

L'arco PQ è dato come noto, nella definizione del problema; se l'angolo α che lo sottende è espresso in radianti, l'estensione dell'arco è pari esattamente ad α ***Sadec***[13]. Ma α è *noto* solo a Doc; da parte nostra siamo costretti a considerarlo indeterminato… Invece β, angolo di rotazione dello spicchio di cerchio POQ rispetto

[13] ***Sadec***, come Kinvi o Hertz, è difettivo: un ***Sadec***, due ***Sadec***, π/4 ***Sadec***, ecc.

all'asse E-W della SdC, costituisce la vera variabile con cui dobbiamo giocherellare per massimizzare o minimizzare l'area seminabile.

Detto ciò, possiamo cominciare a scrivere quanto segue:

$$1)\ \begin{cases} 0 \le \alpha \le \pi/2 \\ 0 \le \beta \le \pi/2 - \alpha \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} Q_x = \cos\beta \\ Q_y = \sin\beta \\ P_x = \cos(\alpha+\beta) \\ P_y = \sin(\alpha+\beta) \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} P_x \le Q_x \\ P_y \ge Q_y \end{cases}$$

dove, con le 3), si è scelto di piazzare sempre il punto P più a Nord di Q il che, ci si creda o no, non lede la generalità della trattazione.

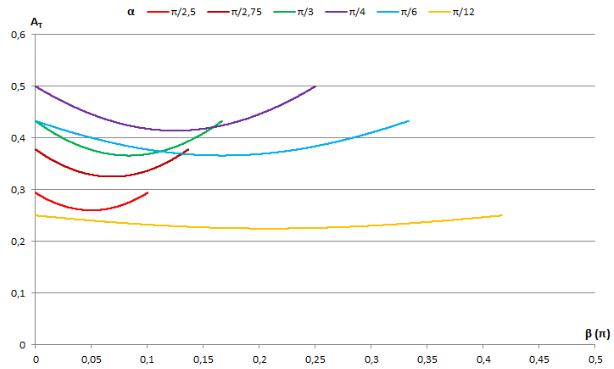
Adesso, andiamo a valutare l'area complessiva A_T da seminare; dette A_P ed A_Q le aree dei due rettangoli azzurri, si ha:

$$4)\ A_T = A_P + A_Q = \cos(\alpha+\beta)[\sin(\alpha+\beta) - \sin\beta] + \sin\beta[\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)]$$

Dopo un po' di passaggi si ricava:

$$5)\ A_T = 2(\sin\beta)^2(\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) + 2\sin\beta\cos\beta\,[(\cos\alpha)^2 - \cos\alpha] + \sin\alpha\cos\alpha$$

Vediamo un po' che aspetto assume A_T al variare di β, con 6 diversi valori di α:



Nel grafico, β è espresso in *pigrechesimi*, A_T ovviamente in ***Sadec*** quadrati. Ogni curva è definita in un limitato intervallo, tanto più ristretto quanto più α è elevato (vedere la seconda delle 1). Ogni curva poi, come ci si poteva aspettare, è simmetrica rispetto al suo punto centrale, cioè:

$$6)\ A_T(\beta) = A_T\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right)$$

La buona notizia per Doc è che, qualsiasi sia α, tutte le curve sembrano avere un minimo nel centro; andiamo a verificare derivando la 5). Dopo qualche passaggio si ottiene:

$$7)\ \frac{d}{d\beta}A_T = \frac{d}{d\beta}[2(\sin\beta)^2(\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) + 2\sin\beta\cos\beta\,[(\cos\alpha)^2 - \cos\alpha] + \sin\alpha\cos\alpha] = 2(1-\cos\alpha)[\sin(2\beta)\sin\alpha - \cos(2\beta)\cos\alpha]$$

Eguagliando a 0, si ricava il valore di β che minimizza A_T:

$$8)\ \beta_M = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan\alpha}\right)$$

Ora, ricordando che:

$$9)\ \tan^{-1}(x) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

si ha:

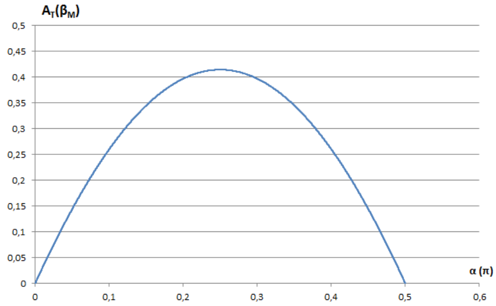
$$10)\ \beta_M = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

che è proprio il centro dell'intervallo di esistenza di ciascuna curva.

Il valore dell'area da seminare in corrispondenza di tale minimo si ottiene inserendo la 10) nella 5); dopo qualche passaggio si ha:

$$11)\ A_T(\beta_M) = \sin\alpha + \cos\alpha - 1$$

Il grafico relativo alla 11) è il seguente:



anche qui α è espresso in *pigrechesimi*, e $A_T(\beta_M)$ in ***Sadec*** quadrati.

Il caso peggiore per Doc si manifesta quando $\alpha_M = \pi/4 \approx 0{,}785+$, come si verifica facilmente annullando la derivata della 11); in corrispondenza di tale valore si ottiene:

$$12)\begin{cases} \beta_M = \frac{\pi}{8} \\ A_T(\beta_M)_{Max} = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}414 + \end{cases}$$

Quindi, per cautelarsi contro ogni evenienza, a Doc dovrebbe bastare il procurarsi sementi per poco meno di mezzo ***Sadec*** quadrato... Questa situazione ($\alpha=\pi/4$; $\beta=\pi/8$) rappresenta il meglio che si possa fare (agendo su β) quando si è in presenza del peggior possibile valore di α; valori diversi di α faranno diminuire l'area seminabile, valori diversi di β la faranno aumentare.

␣ ␣ ␣ ␣ ␣

A questo punto, sembra scorretto tralasciare il suggerimento di Rudy, che desiderava proporre *rettangoli aurei* per le due aree azzurrine... Questo ci costringerà ad abbandonare l'idea che l'estensione in ***Sadec*** dell'arco PQ sia prefissata; Doc dovrà allora incrementare o ridurre il numero di begonie da disporre lungo l'arco, di cui si sentiva *sicuro*...

Imporre che i due rettangoli PCQ_YP_Y e QQ_XP_XC siano aurei comporta che:

$$13)\begin{cases} \frac{P_y - Q_y}{P_x} = \varphi \\ \frac{Q_x - P_x}{Q_y} = \varphi \end{cases}$$

Dove, ovviamente:

$$14)\ \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Utilizzando le relazioni 2), dopo qualche calcolo le 13) diventano:

$$15)\begin{cases} \tan\beta = \frac{2 - 2\cos\alpha}{1+\sqrt{5} - 2\sin\alpha} \\ \tan\beta = \frac{2\sin\alpha - \cos\alpha - \sqrt{5}\cos\alpha}{-\sin\alpha - \sqrt{5}\sin\alpha - 2\cos\alpha + 2} \end{cases}$$

Eguagliando i secondi membri delle 15), ed eseguendo una decina di passaggi algebrici, spunta fuori che:

$$16)\ 2\left(1+\sqrt{5}\right)\sin\alpha + \left(1-\sqrt{5}\right)\cos\alpha = 4$$

Adesso, ricordiamo le *formule parametriche* per seno e coseno:

$$17)\begin{cases} t = \tan\frac{\alpha}{2} \\ \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

Sostituendo le 17) nella 16), questa diviene (dopo ulteriori calcoli):

$$18)\ \left(5-\sqrt{5}\right)t^2 - 2\left(2+2\sqrt{5}\right)t + \left(3+\sqrt{5}\right) = 0$$

La 18) è una semplice equazione di 2° grado in t; risolvendola, si trova che:

$$19)\begin{cases} t_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ t_2 = 2+\sqrt{5} \end{cases}$$

C'è del miracoloso, in questa soluzione; nel corso dei laboriosi calcoli, spuntano fuori dei *radicali doppi* (notoriamente rognosissimi) che però stavolta appartengono *gentilmente* al ristretto sottoinsieme di quelli facilmente addomesticabili con numeri interi *ragionevoli*…

Comunque, ricordando la prima delle 17), si ricava dalle 19):

$$20)\begin{cases} \alpha_1 = 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0{,}84+ \approx 0{,}27\pi \\ \alpha_2 = 2\tan^{-1}\left(2+\sqrt{5}\right) = 2{,}68+ \approx 0{,}85\pi \end{cases}$$

La seconda soluzione (α_2) straborda dal quadrante di Doc (che ammette al massimo angoli fino a $0{,}5\pi$); potremmo dire, per restare in tema, che *esce dal seminato*. Manterremo allora in vita solo la prima, cui attribuiremo il pedice F in onore di Fibonacci:

$$21)\ \alpha_F = 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 0{,}84+ \approx 0{,}27\pi$$

C'è adesso da ricavare l'altro angolo, β_F (altrettanto dotato di pedice *Fibonaccesco* quanto α_F), per completare lo scenario *aureo* prospettato da Rudy. Dalla 21) (o meglio, dalla prima delle 19) e dalle 17), si ricava:

$$22)\begin{cases} \sin\alpha_F = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \\ \cos\alpha_F = \dfrac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Inserendo le 22) nella prima delle 15) si ottiene:

$$23)\ \tan\beta_F = \frac{2-2\cos\alpha_F}{1+\sqrt{5}-2\sin\alpha_F} = \frac{2-2\frac{2}{3}}{1+\sqrt{5}-2\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Quindi:

$$24)\ \beta_F = \tan^{-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0{,}36+ \approx 0{,}12\pi$$

Passiamo ora ad una *verifica dei risultati*; possiamo ricordare la formula generale:

$$25)\ \sin(\tan^{-1}x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Applicando la 25) alla 23), si ha:

$$26)\ \sin\beta_F = \sin\left[\tan^{-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2}} = \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{5}-1}{6}$$

Poi si ha:

$$27)\ \cos\beta_F = \sqrt{1-(\sin\beta_F)^2} = \sqrt{1-\left(\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{5}-1}{6}\right)^2} = \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{5}+1}{6}$$

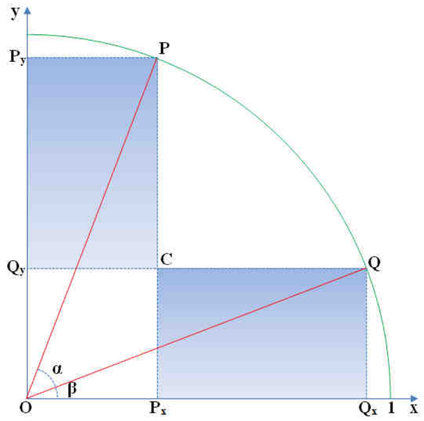
I passaggi intermedi per ottenere questi risultati hanno, ripetutamente, necessitato della risoluzione di *radicali doppi*; ancora, questi si lasciavano trattare *docilmente*…

Adesso, per concludere la *verifica*, se si sostituiscono le 23) e 27) – assieme alle 22) – nelle 13), si vede con qualche ulteriore calcolo che le proposte di Rudy sono soddisfatte, cioè che le 13) sono *convalidate*…

Cosa costerebbe a Doc seminare secondo le indicazioni di Rudy? Ad esempio rispetto alla soluzione *ottima nel caso peggiore* fornita dalla 12)?

Ricorriamo alla 5), che fornisce l'area generica seminabile per qualsiasi α e β, ed inseriamo i valori della soluzione di Rudy, forniti dalle 22), 26) e 27):

$$28)\ A_{TF} = 2(\sin\beta_F)^2(\sin\alpha_F - \sin\alpha_F\cos\alpha_F) + 2\sin\beta_F\cos\beta_F\left[(\cos\alpha_F)^2 - \cos\alpha_F\right] + \sin\alpha_F\cos\alpha_F = 2\left(\sqrt{3}\frac{\sqrt{5}-1}{6}\right)^2\left(\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}\frac{2}{3}\right) + 2\sqrt{3}\frac{\sqrt{5}-1}{6}\sqrt{3}\frac{\sqrt{5}+1}{6}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}\right] + \frac{\sqrt{5}}{3}\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}-1}{3} \approx 0{,}412 +$$



E quindi vediamo che a Doc converrebbe doppiamente ascoltare Rudy… Potrebbe risparmiare lo 0,5% dell'investimento in sementi, e si ritroverebbe un giardino *aureo*, notoriamente più gradevole all'occhio…

Si noti infine che (dalle 22), 26) e 27):

$$29)\ P_x = \cos(\alpha_F + \beta_F) = \cos\alpha_F\cos\beta_F - \sin\alpha_F\sin\beta_F = \sqrt{3}\frac{\sqrt{5}-1}{6} = \sin\beta_F = Q_y$$

Quindi, i due rettangoli *aurei* sono uguali…

Beh, a parte i punti in più per aver raccolto il suggerimento aureo del Capo, direi che anche ***BR1*** ha fatto un'ottima figura… anzi parecchie.

A questo punto mi fermo perché il secondo problema del Capo non l'ha capito nessuno. Gli abbiamo detto di scrivere problemi meno criptici, ma lui continua a dire che se tutti i dati e le richieste di un quesito sono chiari e cristallini, i nostri affezionati lettori perdono la parte più divertente, che è quella di interpretare i suoi discorsi e inventare nuovi problemi.

Godetevi il resto di questo novembre, alla prossima!

5. Quick & Dirty

Premessa per raccontarlo alla svelta. Le "bitangenti" sono le due rette ciascuna delle quali tangente ai due cerchi che non si incrociano. Insomma, chiamiamo "bitangenti" le "bitangenti esterne".

Il "Teorema dei cerchi di Monge" statuisce che dati tre cerchi sul piano, le sei bitangenti si incrociano in tre punti che sono collineari.

La dimostrazione "classica" è noiosissima: si chiede, passando ad un campo più "difficile", di trovare una dimostrazione immediata e divertente (senza disegno).

Il campo "più difficile" è quello delle tre dimensioni, visto che il teorema è in due dimensioni. Escludiamo i casi patologici.

Consideriamo i tre cerchi come tre sezioni di sfere (di cui i cerchi dati sono cerchi massimi, tutti sullo stesso piano). Prese le sfere a coppie, potremo definire tre coni bitangenti alle sfere, le cui sezioni con il piano dato sono le rette bitangenti del problema originale. Ma date le tre sfere, esiste un piano che passa per i tre punti "più alti" di tangenza dei coni alle sfere, visto che per tre punti qualsiasi passa uno ed un solo piano. L'intersezione tra il piano di tangenza e il piano di lavoro originale è una retta: e dato che il piano di tangenza è tangente ai tre coni, i tre vertici dei coni saranno sulla retta. Q.E.D.

Domanda di Rudy (non ho la risposta): esiste un qualchecosa di simile per i punti di incrocio delle bitangenti interne?

6. Pagina 46

Sia O il centro del cerchio e siano H_1 e G_1 ortocentro e centroide di un triangolo, e H_2 e G_2 i rispettivi punti del triangolo complementare.

Per un qualsiasi triangolo, l'ortocentro H, il centroide G e il circocentro O giacciono tutti sulla stessa retta, detta retta di Eulero. Essendo il centro O del cerchio dato il circocentro di entrambi i triangoli, le rette H_1G_1 e H_2G_2 contengono O.

Si verifica facilmente che G divide OH secondo il rapporto 1:2, e quindi G_1G_2 è parallela a H_1H_2.

Se H_1G_2 e H_2G_1 si incrociano in Z, allora questo deve essere il richiesto punto di concorrenza, posto che esista. Estendendo ora OZ sino ad M su H_1H_2, si ottiene (verificando le similitudini tra i vari triangoli e per il teorema di Talete) che M è il punto medio di H_1H_2 e che G lo è per G_1G_2.

Questo rende G il centro di gravità dei sei punti dati, visto che G_1 è il centro di gravità di un triangolo, G_2 il centro di gravità dell'altro triangolo e G il centro di gravità tra G_1 e G_2.

Al variare dei triangoli (e quindi di G_1 e G_2), G non varia, e quindi per qualsiasi scelta di triangoli otteremo sempre la stessa linea OG.

Sempre attraverso i triangoli simili, si vede che anche il rapporto tra ZG e GO vale 1:2, mostrando quindi la sua indipendenza dalla scelta di un particolare triangolo.

Quindi Z è un punto fisso, il che è la tesi.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Mission Impossible

Sapete tutti (ve lo abbiamo detto una ventina di numeri fa in questa rubrica, e voi avete ben presenti nella vostra memoria per tutte le puntate passate, presenti e future) che una delle parole che Rudy odia è "*sfidante*": o si può fare o no, e nel primo caso faremo del nostro meglio, nel secondo è inutile anche solo cominciare; esiste però una *twilight zone* in cui, anche sapendo che una cosa è impossibile, diventa interessante vedere fin dove si può arrivare: questa zona d'ombra tra il fare e il non fare secondo lo scrivente contiene buona parte della matematica, se non tutta.

La filosofia alla base è che, dimostrato il teorema "A è impossibile", la domanda che sorge spontanea è: "Va bene, ma *quanto vicino* posso arrivarci?".

Sappiamo benissimo che non esiste un generatore polinomiale perfetto[14] di numeri primi, ma questo non ha distolto i matematici dal cercare qualcosa che "gli somiglia", funzionante per zone magari limitate e il più semplice possibile: uno dei più bei risultati in questo campo secondo noi lo ha raggiunto il *solito Leo* (Eulero): infatti, la formula:

$$f(x) = x^2 + x + 41$$

per $x = 0, 1, \ldots, 39$ vi fornisce quaranta numeri primi: non tutti (oltre a quelli minori di 41, solo guardando i primi notiamo l'assenza del 51), ma Leo, come al solito, ci prova e se ne esce fuori con un bel risultato.

Oggi (e noi non siamo d'accordo), si tende a considerare che, essendo $f(x–1) = f(–x)$, in realtà la formula fornisce primi per *ottanta* valori, con $x = –40, –39, \ldots, 0, \ldots, 39$: il fatto che ogni valore venga fornito *due volte* non sembra turbare i matematici, ma siamo convinti che Leo sarebbe d'accordo con noi nel non essere d'accordo.

Qualcuno ha provato a fare di meglio[15], ottenendo un maggior numero di primi a scapito della potenza estetica: infatti,

$$f(x - 40) = x^2 - 79\,x + 1601$$

genera primi per $x = 0, \ldots, 79$, e questo sembra essere il record assieme a $x^2 - 2'999\,x + 2'248'541$ per $x = 1'460, \ldots, 1'539$, che esteticamente ci pare un obbrobrio tale da non meritare neanche la dignità di impegnare un'intera riga.

Siccome con quei due non c'è gara, qualcuno ha provato a cercare delle cose più "piccole" ma esteticamente valide. Apprezzabile lo sforzo nel trovare queste due:

$$6\,x^2 + 6\,x + 31 \text{ per } x = 0, \ldots, 28$$

$$2\,x^2 + 29 \text{ per } x = –28, \ldots, 28$$

"Quella di Leo", comunque, ha altre caratteristiche interessanti: ad esempio (e questa dovreste essere in grado di dimostrarla da soli), genera *un unico quadrato* (in due modi, chiaramente), visto che $f(40) = f(–41) = 14^2$: tutti gli altri numeri generati non sono quadrati. Carino, vero?

Il campo è stato esplorato da alcuni coraggiosi: uno dei risultati più intriganti, in merito, è stato raggiunto da ***Lehmer*** nel 1933, con la strabiliante affermazione che

> *Se $x^2 + x + A$, con $A > 41$, genera primi per tutti gli $x = 0, 1, \ldots, A–2$, allora $A >$ 1'250'000'000.*

Se decidete di mettervi a cercare qualche A, prima leggete le prossime righe: nel 1934 si è dimostrato che di questi A al massimo ne esiste un altro (oltre a 41), e l'intera ricerca è crollata nel 1960 (la dimostrazione è "complicatissima" anche secondo i matematici dell'epoca, quindi non ci proviamo neppure) quando si è provato che neanche quel singolo

[14] Con il termine *polinomiale* intendiamo sia che si basi su un polinomio (di grado n) sia che sia calcolabile in tempo polinomiale; con il termine *perfetto* intendiamo che li generi *tutti* e che vada avanti a generarli all'infinito in modo deterministico (*forse* ne esistono un paio quasi-polinomiali, infiniti e probabilistici, ma ce li teniamo per un futuro PM).

[15] Secondo Rudy è stato *["Evidentemente!" RdA]* Gauss, ma non ne è sicuro.

valore esiste. Quindi Leo non solo ha trovato una formula con valori "piccoli", ma ha anche trovato *l'unica*. Un grande.

Qualche notizia "quasi buona" si ha se lasciamo cadere la regola che sia un polinomio: infatti, ***Mills*** ha dimostrato che esiste un k tale che:

$$\left[k^{\left(3^n\right)}\right]$$

genera primi per *qualsiasi* valore di n: la notizia è "quasi buona" nel senso che Mills ha provato l'esistenza di k, ma il suo valore è sconosciuto.

Breidhin ha esteso ulteriormente il concetto, dimostrando che:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

genera un valore primo per infinite coppie (x, y), anche se non sempre, quindi non è *esclusiva*.

Con tutti questi arzigogoli, forse stiamo perdendo di vista l'obiettivo: quello che vorremmo, è un oggetto che *per ogni* coppia (x, y) generi *primi*, *tutti* e *una volta sola ciascuno*.

Un grosso aiuto, in queste ricerche, è il *Teorema di Wilson,* che si chiama in questo modo in quanto è stato ipotizzato da Leibniz, dimostrato da Lagrange e pubblicato da Waring[16]:

> *Il numero p divide* $(p-1)! + 1$ *se e solo se p è primo.*

Le due dimostrazioni (necessità e sufficienza) sono noiosette (anche se la prima è piuttosto veloce) e facilmente reperibili, quindi sorvoliamo, per passare ad un punto piuttosto promettente:

> *Se* $B = x(y + 1) - (y! + 1)$, *allora la funzione:*
>
> $$f(x,y) = \frac{y-1}{2}\left[\left|B^2 - 1\right| - \left(B^2 - 1\right)\right] + 2$$
>
> *genera tutti e soli numeri primi, e ciascuno una volta sola.*

E questo sembra un risultato talmente balordo che è meglio se lo andiamo a dimostrare.

Per x e y naturali, il termine B^2 è non negativo; possiamo quindi distinguere due casi:

Nel caso $B^2 \geq 1$, allora abbiamo $B^2 - 1 \geq 0$, ossia $|B^2 - 1| = B^2 - 1$, quindi $f(x, y) = 2$, che è un primo.

Nel caso $B^2 = 0$, invece, la nostra funzione assume il valore:

$$f(x,y) = \frac{y-1}{2}\left[|-1| - (-1)\right] + 2 = \frac{y-1}{2}\left[1 + 1\right] + 2 = y - 1 + 2 = y + 1$$

Ma essendo in questo caso $B = 0$, possiamo affermare che:

$$x(y + 1) - (y! + 1) = 0 \Rightarrow x(y + 1) = y! + 1$$

Insomma, $y + 1$ divide $y! + 1$, e quindi (per il teorema di Wilson) $y + 1$ è primo, e quindi la funzione genera unicamente numeri primi.

Si vede facilmente che $f(1, 1) = 2$; se p è un primo (dispari), usando:

$$y = p - 1 \text{ e } x = 1/p \left\lfloor (p - 1)! + 1 \right\rfloor$$

(x, per il teorema di Wilson, risulta essere un intero) vediamo che la nostra funzione fornisce il primo p: dalla definizione di x e y, abbiamo:

$$xp = (p - 1)! + 1 \text{ e } p = y + 1.$$

Da questo, si ricava facilmente che $xp = y! + 1$, con $B = 0$ e $f(x, y) = y + 1 = p$. Quindi, f genera tutti i primi.

Siccome f assume unicamente i valori 2 e $y + 1$, un primo dispari p può essere generato solo come $y + 1$; quindi, in ogni coppia (x, y) che permette alla funzione di generare il primo p, deve essere $y = p - 1$.

[16] "...ma cosa ha fatto Wilson?" Secondo gli storici più affermati, ne ha parlato con Waring al pub.

Ma la funzione genererà un primo diverso da 2 solo se $B = 0$, e quindi deve essere anche $x(y + 1) = y! + 1$, e quindi deve essere $x = (y! + 1) / (y + 1)$. Essendo la scelta per y forzata, questo ci porta a (si noti che x è un naturale per il Teorema di Wilson):

$$(x,y)=\left(\frac{(p-1)!+1}{p},p-1\right)$$

e, in questo modo, f assume il valore p. E quindi, anche se "la maggior parte delle volte" produce il valore 2, genera anche gli altri primi. Insoddisfacente come generatore, ma dal punto di vista teorico è una bellezza che fa il paio con quella di Eulero.

Il teorema di Wilson può essere posto in forma di congruenza come:

Se e solo se n è primo, allora $(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$.

E secondo molti, non esiste nessun'altra condizione di primalità espressa in forma di congruenza più semplice di questa, anche se alcune ci vanno vicino: ad esempio, se $\sigma(n)$ rappresenta la somma dei divisori (positivi) di n e $\Phi(n)$ rappresenta la *funzione di Eulero*, che conta il numero dei naturali minori di n primi rispetto ad n, allora si ha:

$$n\,\sigma(n) \equiv 2 \pmod{\Phi(n)}.$$

Attenzione, non abbiamo ancora detto che n sia un primo.

La *sufficienza* (ossia tutti i primi soddisfano questa espressione) si verifica facilmente: considerato che se p è un primo, allora $\sigma(p) = p + 1$ e $\Phi(p) = p - 1$, si ha immediatamente la elazione vista sopra.

Discorso un po' più lungo per la *necessità* (e infatti sorvoleremo); comunque, ***Subarrao*** nel 1974 è riuscito a dimostrare che qualsiasi numero che soddisfa l'equazione data o è primo, o vale 4, 6 o 22. E scusate se è poco!

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms